

Kürzeste Linien im Farbensystem.

Von

H. VON HELMHOLTZ.¹

Wir wollen im Folgenden von einer geometrischen Darstellung des Farbensystems ausgehen, welche LAMBERTS Farbensysteme entspricht, indem wir jede besondere Farbe als hergestellt durch die Vereinigung der passend abgemessenen Quanta dreier passend gewählter Grundfarben ansehen, und die Werthe dieser drei Quanta gleich setzen den drei positiven rechtwinkligen Coordinaten x , y , z . Dann ist jede Farbe durch einen Punkt innerhalb der dreikantigen Ecke vertreten, welche zwischen den positiven Coordinataxen eingeschlossen ist. Jede Ebene, welche die drei positiven Coordinataxen schneidet, kann als Farbentafel im Sinne der NEWTONSchen Anordnung der Farben gebraucht werden, indem die Quanta der verschiedenen Farben, wie sie in dieser Ebene vorkommen, als Einheitsquanta für die Abmessung der zu mischenden Farben entsprechender Art genommen werden. Innerhalb der Farbentafel findet man bekanntlich die Mischfarbe am Orte des Schwerpunkts der gemischten Farben, und ihr Quantum ist der Summe der Quanta der gemischten Farben gleich zu setzen.

Wie RIEMANN gezeigt, lassen sich alle Eigenschaften einer besonderen Art des Raumes ableiten, wenn man den Werth der Entfernung zweier benachbarter Punkte durch die zugehörigen Differentiale der Coordinaten geben kann. Die Entfernung zweier Punkte eines festen Körpers aber ist eine Größe, von der man verlangt, dass sie durch die Lage ihrer

¹ Auszug aus einer Abhandlung gleichen Titels in *Sitzsber. der Akademie zu Berlin*. 17. December 1891.

beiden Endpunkte vollkommen gegeben sei und gleich bleibe bei allen möglichen Verschiebungen und Wendungen des festen Körpers, dem die Punkte angehören.

Die Farbenqualitäten sind nun Größen, die dem Gebiet der Empfindungen angehören. Wenn eine der Entfernung analoge Größe bei ihnen vorkommt, so muß dies ebenfalls in der Empfindung gegebenes Verhältniß sein, welches zwischen je zweien besteht und durch die Beschaffenheit der zwei vollständig gegeben ist. In der That läßt sich ein solches entdecken, es ist nämlich die Deutlichkeit der Unterscheidung zwischen zwei nahestehenden Farben.

Einigermaßen bestimmte Angaben lassen sich über den Grad dieser Deutlichkeit freilich nur bei sehr kleinem Unterschiede der Farben machen, aber dies genügt in diesem Falle. Die ursprünglichen Versuche E. H. WEBERS und FECHNERS welche zur Aufstellung des psychophysischen Gesetzes führten, bezogen sich allerdings nicht sowohl auf den Grad der Deutlichkeit, als vielmehr nur auf die Erkennbarkeit oder Nichterkennbarkeit des Unterschiedes. Aber die neueren Fortsetzungen dieser Messungen haben sowohl bei der Construction der Contrastphotometer als auch in den Versuchen von Hrn. EBBINGHAUS über Abstufungen von Licht und Farbeneindrücken gelehrt, daß die Aussage darüber, ob von zwei sehr kleinen wahrnehmbaren Unterschieden der eine oder der andere größer, d. h. deutlicher sei, sogar noch bestimmter gegeben werden kann, als die früher geforderte Entscheidung über Sichtbarkeit oder Nichtsichtbarkeit.

Die Frage über die Deutlichkeit des Unterschiedes kann auch bei jeder beliebigen Art des letzteren gleich gut gestellt werden. Man kann sie ebensogut in Bezug auf die Helligkeit qualitativ gleicher Farben, wie in Bezug auf den Farbenton gleich heller Lichter stellen und beide mit einander vergleichen.

Ich habe nun in neuerer Zeit¹ versucht, eine Formel aufzustellen und mit den vorliegenden Beobachtungen zu vergleichen,

¹ H. v. HELMHOLTZ: Versuch einer erweiterten Anwendung des FECHNERSchen Gesetzes im Farbensystem. Diese Zeitschrift. Bd. II., S. 1. 1891, und: Versuch das psychophysische Gesetz auf die Farbenunterschiede trichromatischer Augen anzuwenden, ebenda. Bd. III., S. 1. 1891.

welche, wenn sie sich weiter bestätigt, dieselbe Rolle für das Bereich der Farbenempfindungen spielen würde, wie die Formel für die Länge des Linienelements in der Geometrie. Ich habe darin versucht, den Grad der Deutlichkeit zweier Farben anzugeben, die sich gleichzeitig in den Quanten aller drei Grundfarben von einander unterscheiden, welche in ihre Zusammensetzung eingehen, also gleichzeitig sich in Helligkeit und in der Qualität unterscheiden können, während bisher nur diejenige Seite des Gesetzes durchgearbeitet war, welche sich auf Helligkeitsunterschiede allein, bei unveränderter Qualität, bezieht.

Die auf NEWTONS Mischungsgesetz begründeten bisherigen Definitionen der Farben definiren eigentlich nur diejenigen Mischungen objectiven Lichts, durch welche die besonderen einzelnen Empfindungen erregt werden können, und NEWTONS Gesetz selbst bestimmt nur die Verhältnisse der Aequivalenz verschiedener Mischungen objectiver Lichter in dieser Beziehung.

Auf dem hier einzuschlagenden neuen Wege würden wir dagegen zu einer Ausmessung des Systems der Farbenempfindungen gelangen, die nur auf die Unterschiede der Empfindungen gebaut ist. Dabei zeigt sich allerdings eine Übereinstimmung beider Arten der Ausmessung in den großen Zügen, aber mit Vorbehalt kleinerer Differenzen in Einzelheiten, die auch schon zum Theil von den Beobachtern bemerkt waren.

Wie die Geometrie des Raumes mit dem Begriff der kürzesten Linie zwischen zwei Puncten beginnt, so werden wir durch die neue Grundformel in den Stand gesetzt, diejenigen Reihen von Übergangsfarben zwischen zwei gegebenen Endfarben verschiedener Qualität und Quantität zu finden, für welche die Summe der wahrnehmbaren Unterschiede ein Minimum ist, welche Reihen also den kürzesten Linien im Farbensystem entsprechen würden. Ich werde mir erlauben, für sie den Namen der kürzesten Farbenreihen zu brauchen.

Da eine vollständig genaue Formel für die Sichtbarkeit der reinen Helligkeitsunterschiede, wie sie annähernd FECHNERS Gesetz giebt, noch nicht gefunden ist, will ich mich auf den Gebrauch der von FECHNER selbst noch gegebenen späteren Formel beschränken, wonach die Deutlichkeit des Unterschiedes von dem Bruche $\frac{dJ}{A+J}$ abhängt, wenn J und $(J+dJ)$ die beiden zu vergleichenden objectiven Lichtmengen sind, A eine

von der Qualität des Lichts abhängige Constante. Diese Formel entspricht den Beobachtungen in einem außerordentlich ausgedehnten Theil der Scala der Helligkeiten. Für sehr kleine und sehr große Helligkeiten ist die Deutlichkeit aber etwas kleiner, als nach der Formel zu erwarten wäre.

Die von mir als wahrscheinliche Hypothese aufgestellte Formel für die Deutlichkeit des Unterschieds zweier Farben, von denen die eine aus den Quantis der Urfarben x , y , z zusammengesetzt ist, die andere dagegen aus $(x + dx)$, $(y + dy)$, $(z + dz)$ lautet:

$$dE^2 = \left(\frac{dx}{a+x} \right)^2 + \left(\frac{dy}{b+y} \right)^2 + \left(\frac{dz}{c+z} \right)^2 \dots \dots \dots \left. \right\} 1.$$

Hierbei ist aber zu bemerken, daß die x , y , z den physiologischen Urfarben entsprechen müssen und nicht, wie im Mischungsgesetz, durch lineare Functionen derselben ersetzt werden können. In meiner letzten Arbeit¹ habe ich aus den von Hrn. ARTHUR KÖNIG gemachten Messungen über die kleinsten wahrnehmbaren Unterschiede der Spectralfarben einerseits, und der Zusammensetzung derselben aus drei willkürlich gewählten Grundfarben andererseits die Qualität der physiologischen Urfarben zu bestimmen gesucht. Diese Bestimmungen sind allerdings noch nicht sehr zuverlässig. Es ergibt sich, daß alle Spectralfarben, auch die Endfarben am rothen und violetten Ende, ziemlich starke Quanta von allen drei Urfarben erhalten, daß diese letzteren im Farbenton etwa dem Carminroth, Ultramarinblau und dem Blattgrün entsprechen, aber erheblich gesättigter sein müssen, als diese.

Wenn man in Gleichung (1) andere Variabeln einführt, und setzt:

$$\left. \begin{aligned} \log(a+x) &= \xi \dots \dots \dots \\ \log(b+y) &= \eta \dots \dots \dots \\ \log(c+z) &= \zeta \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} 1a,$$

so kann man die Gleichung 1) auch schreiben

$$dE^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2.$$

¹ H. v. HELMHOLTZ: Versuch das psychophysische Gesetz auf die Farbenunterschiede trichromatischer Augen anzuwenden. Diese Zeitschrift. Bd. III., S. 10–12.

Construirt man also eine Farbenecke, in der man nicht mehr x, y, z sondern ξ, η, ζ als Coordinaten braucht, so wäre das dE direct proportional dem Linienelement zwischen den beiden durch ξ, η, ζ und $(\xi + d\xi), (\eta + d\eta), (\zeta + d\zeta)$ gegebenen Punkten. In diesem letzteren Coordinatensystem würden sämmtliche kürzeste Farbenreihen durch gerade Linien dargestellt werden müssen, die aber beim Übergang in das ursprüngliche Coordinatensystem der x, y, z im Allgemeinen gekrümmt werden würden.

Wenn wir den einen Endpunct der Farbenreihe mit dem Index 1 bezeichnen, den anderen mit 2, so würde man die Gleichung einer geraden Linie im Coordinatensystem der ξ, η, ζ auf die Form bringen können:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\eta - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} = \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1} \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} 2.$$

Um die Gleichung dieser Linie in den x, y, z ausdrücken zu können, setzen wir zunächst zur kürzeren Bezeichnung:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \log \cdot \left[\frac{a + x_2}{a + x_1} \right] = \xi_2 - \xi_1 \dots \dots \dots \\ \mu &= \log \cdot \left[\frac{b + y_2}{b + y_1} \right] = \eta_2 - \eta_1 \dots \dots \dots \\ \nu &= \log \cdot \left[\frac{c + z_2}{c + z_1} \right] = \zeta_2 - \zeta_1 \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} 2a.$$

Dann werden die Gleichungen (2):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{a + x}{a + x_1} \right)^\lambda = \left(\frac{b + y}{b + y_1} \right)^\mu = \left(\frac{c + z}{c + z_1} \right)^\nu \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} 2b.$$

Wenn von den sechs Grössen, die in den Gleichungen 2a unter dem Logarithmenzeichen vorkommen, nicht je zwei im Nenner, oder je zwei im Zähler gleich Null werden, haben die Grössen λ, μ, ν endliche reelle positive oder negative Werthe, und die Punkte der Linie sind eindeutig bestimmt, da ihre Coordinaten nur positiv reell sein können. Da nun a, b, c (Farbencomponenten des Eigenlichts im Sinne von FECHNERS Auffassung) nur positive Werthe haben können, und x, y, z für reelle Farben ebenfalls, so kommt für reelle Farben die oben

bemerkte Ausnahme niemals vor, und zwischen jedem Paare von Punkten des reellen Farbengebiets giebt es also nur eine kürzeste Farbenlinie.

Da indessen die Punkte, in denen zwei von den Größen $(a + x)$, $(b + y)$ und $(c + z)$ gleich Null werden, eine besondere Rolle bei den Constructionen spielen, mache ich hier darauf aufmerksam, dafs, wenn alle drei Größen gleich Null gesetzt werden, wir den Nullpunct allen Lichtes, Eigenlicht und objectives Licht zusammengenommen erhalten; wir wollen diesen Punct deshalb im Folgenden mit 0 bezeichnen. Wenn nur zwei der genannten Größen gleich Null sind, sind dadurch die Parallelen zu den Coordinataxen gegeben, welche durch den Punct 0 gehen. Wenn von einem Punkte dieser Linien aus kürzeste Farbenreihen nach einem anderen festen Punkte zu construiren sind, so sind diese durch ihre Endpunkte nicht vollständig gegeben, sondern können in unendlicher Anzahl construirt werden.

Ebene Curven. Eben werden Curven, für welche einer der Exponenten λ , μ oder ν gleich Null ist, oder zwei derselben einander gleich.

Im ersteren Falle erhalten die drei Größen, welche in $2c$ einander gleich gesetzt sind, alle den Werth 1, was, wenn $\lambda=0$ folgern läfst,

$$\begin{aligned} b + y &= b + y_1 \\ c + z &= c + z_1 \end{aligned}$$

d. h. die betreffenden kürzesten Farbenreihen liegen auf geraden Linien der x -Axe parallel.

Die Annahme $\mu=0$ giebt eben solche Gerade der y -Axe parallel, und $\nu=0$ der z -Axe parallel. Dieselben können übrigens durch jeden Punct der Farbenpyramide gezogen werden.

Im zweiten Falle, wo zwei Exponenten einander gleich, erhalten wir entweder

$$\frac{a + x_1}{a + x_2} = \frac{b + y_1}{b + y_2}$$

oder

$$\frac{b + y_1}{b + y_2} = \frac{c + z_1}{c + z_2}$$

oder

$$\frac{c + z_1}{c + z_2} = \frac{a + x_1}{a + x_2}$$

} 2 d.

Bezeichnen wir wieder den Punct, dessen Coordinaten $(-a)$, $(-b)$, $(-c)$ sind, d. h. in welchen alle Lichtempfindung fehlt, auch die des Eigenlichts, mit dem Index 0, den Punct $x=y=z=0$, wo nur die Empfindung des Eigenlichts da ist, mit ε , so sagt die erste unserer Gleichungen aus, dafs die Punkte 0, 1, 2, projectirt auf die xy -Ebene in gerader Linie liegen. Die Curve liegt also in einer Ebene, die der z -Axe parallel ist, und durch den Punct 0, sowie die beiden Endpunkte der Curve geht.

Die zweite der Gleichungen 2d würde sich auf solche Ebenen beziehen, die der x -Axe parallel durch den Punct 0 gehen, die dritte auf Ebenen, die der y -Axe parallel durch denselben Punct gehen.

Je zwei dieser Ebenen schneiden sich in geraden Linien, die dann nothwendig, hinreichend verlängert, durch den Punct 0 gehen und kürzesten Farbenreihen entsprechen.

Dagegen werden die Linien, welche gleicher Qualität des objectiven Lichts entsprechen, verlängert durch den Punct ε gehen, wo $x=y=z=0$. Nur eine von diesen, die gleichzeitig durch ε und 0 geht, wird einer kürzesten Farbenreihe entsprechen.

Nun liegt es im Wesen einer kürzesten Farbenreihe, dafs unter solchen Farben, die von der einen Endfarbe gleich grossen Unterschied zeigen, die in der kürzesten Farbenreihe liegenden auch der anderen Endfarbe ähnlicher als alle anderen benachbarten Farben erscheinen werden.

Fällt die Reihe der Farben gleicher Mischung mit der kürzesten Reihe zusammen, so werden ihre Glieder auch beim Uebergang von schwacher zu hoher Lichtstärke keine Abweichung des Farbentons zeigen. Wohl aber wird dies der Fall sein, wenn die erstere Reihe keine kürzeste ist. Denn dann würde es Farben geben von anderer Mischung, durch welche man einen kürzeren Uebergang von den dunkelsten zu den hellsten Tönen gleicher objectiver Qualität bahnen könnte.

Nun kommen in der That solche Unterschiede vor. Ich habe schon in meinen älteren Arbeiten¹ über Spectralfarben

¹ S. mein *Handbuch d. Physiol. Optik*, 2. Aufl., S. 284. S. auch H. HELMHOLTZ, „Über die Theorie der zusammengesetzten Farben“ in *Poggd. Ann.* Bd. LXXXVII., S. 45. 1852 und „Über die Zusammensetzung von Spectralfarben“ ebenda Bd. XCIV. S. 11 und 13.

erwähnt, dass sie bei steigender Helligkeit alle dem Weiß, beziehlich Gelbweiß ähnlicher werden. Am schnellsten geht bei steigender Lichtstärke Grün in Gelb, Violett in Weißblau über. Höhere Helligkeiten sind nöthig, um spectrales Roth in Gelb, und Blau in Weiß überzuführen. Es giebt nur eine Farbe, nämlich Gelbweiß, welche bei allen Intensitäten merklich unverändert bleibt. Wir würden daraus zu schließsen haben, daß Gelbweiß dem Farbenton der geraden Linie entspricht, die durch die Punkte 0 und ϵ unseres Coordinatensystems geht. Wir wollen diese für unser heut vorliegendes Thema als die Principallinie des Farbensystems bezeichnen. Im Sinne von FECHNERS Hypothese wäre sie die Farbe des Eigenlichts der Netzhaut.

Nehmen wir dagegen eine andere Farbe z. B. Grün, welches bei Steigerung der Intensität und unveränderter Mischung, gelb wird. Offenbar müßten wir ein gesättigteres Grün höherer Helligkeit herzustellen versuchen, um unsere Farbenreihe mit dem dem unteren Ende ähnlichsten Farbentone abzuschließen, d. h. wir müßten zu einer anderen Farbmischung übergehen, um in einer Reihe möglichst wenig unterschiedener Farbentöne zu bleiben.

Gekrümmte Projectionslinien. Wenn wir von den drei in Gleichung (2c) einander gleichgesetzten Größen zwei, die nicht gleiche Exponenten haben, einander gleichsetzen, so sind die Curven verschieden, je nachdem die beiden Exponenten gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben.

A. Curven durch den Punct 0.

Im ersteren Falle, wenn z. B. die beiden Exponenten λ und μ gleiches Zeichen haben, würde $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ positiv sein, und die Curve

$$\frac{a+x}{a+x_1} = \left(\frac{b+y}{b+y_1}\right)^{\frac{\mu}{\lambda}}$$

würde durch den Punct 0 gehen, da dort $a+x=b+y=0$ ist. Ist dabei $\frac{\mu}{\lambda} > 1$, so würde $(a+x)$ schneller steigen, als $(b+y)$ die Curve ihre convexe Seite der Linie $b+y=0$ zukehren.

Umgekehrt ist $\frac{\mu}{\lambda} < 1$, so würde die Curve ihre convexe Seite der Linie $a + x = 0$ zukehren.

Die Grenze dieses Büschels von Curven sind die, wo $\frac{\mu}{\lambda} = 0$ oder $= \infty$. Es sind dies die schon oben erwähnten geraden Linien, gezogen durch den Punkt 1, parallel den Axen der x und der y .

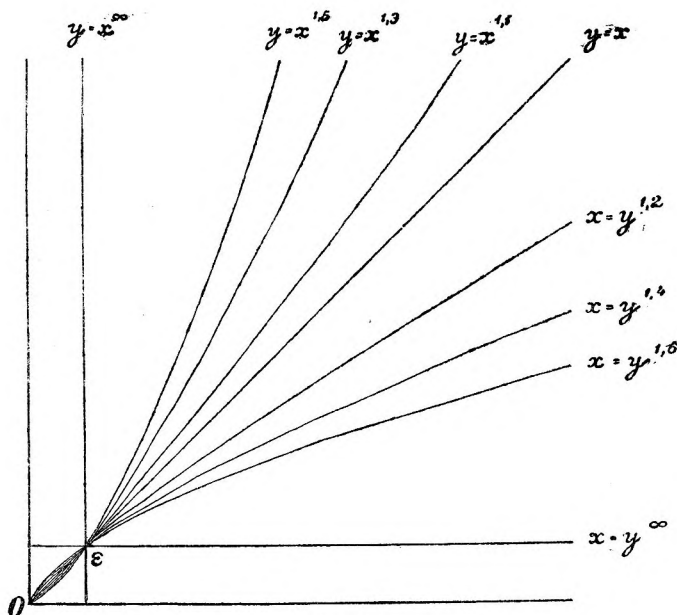


Fig. 1.

Die Fig. 1 stellt ein Bündel solcher Curven dar, welche alle durch denselben Punkt ϵ gehen und verschiedene Exponenten haben, deren Werthe (1 bis 1,6) am Rande angegeben sind.

B. Projections-Curven mit zwei Asymptoten.

Wenn die beiden Exponenten der Gleichung entgegengesetztes Zeichen haben, so können wir setzen

$$\frac{\mu}{\lambda} = -e.$$

Dann ist ρ eine positive Gröfse und es wird

$$\frac{a+x}{a+x_1} = \left(\frac{b+y}{b+y_1} \right)^{-\rho}.$$

Also wird für $a+x=0$ das $b+y=\infty$, und für $a+x=\infty$ das $b+y=0$, d. h. die durch den Punct 0 den Coordinataxien parallel gezogenen Linien sind Asymptoten für die Curve, welche hyperbelähnlich mit zwei Enden in das Unendliche läuft. Aber diese in ∞ laufenden Enden der Curven liegen aufserhalb des Farbenfeldes, selbst aufserhalb des physiologisch möglichen, da dieses durch zwei gerade Linien begrenzt ist, die parallel den x und den y durch den Punct ε gelegt sind. Das spectrale Farbenfeld ist noch enger durch einen spitzen Winkel begrenzt, dessen Scheitel ebenfalls im Puncte ε liegt, so dafs von diesen hyperbelähnlichen Curven nur sehr kurze, fast gerade Stücke für kleine Lichtintensitäten, längere und gekrümmtere nur für grofse Intensitäten in Betracht kommen.

Wenn die oben mit ρ bezeichnete Constante den Werth $\rho=1$ hat, so ist die Curve eine gleichseitige Hyperbel im strengen Sinne.

Da entweder zwei oder gar keines der Verhältnisse zwischen den Exponenten negativ ist, so können entweder zwei oder keine der Projectionscurven die hyperbelähnliche Form mit zwei Asymptoten haben. Eine von ihnen oder alle drei haben die parabelähnliche Form und gehen durch den Punct 0.

Farbenunterschiede bei gleicher Qualität und verschiedener Helligkeit. Die kürzesten Farbenreihen, welche durch den Punct ε gehen, der dem Mangel alles objectiven Lichts entspricht, geben drei parabelähnliche Projectionen, welche auch durch den Punct 0 gehen, wie Fig. 1 zeigt.

In der Mitte des Bündels liegt die als Principallinie bezeichnete Gerade, welche durch 0 und ε geht und die einzige Linie bildet, welche gleichzeitig einer kürzesten Farbenreihe und gleichbleibender objectiver Qualität der Farbe (gleichem Mischungsverhältnisse) entspricht.

In den drei Ebenen, welche durch diese Linie und die Coordinataxien gehen, liegen ebene Curven, welche der Principallinie ihre convexen Seiten zukehren.

Um Farben dieser Ebenen objectiv herzustellen, würde man entweder einzelne Urfarben mit der Principalfarbe zu mischen

haben, oder solche Farben, die, mit der entsprechenden Urfarbe gemischt, die Principallinie geben. Ich will die letzteren principale Gegenfarben nennen. Sind Carminroth, Ultramarinblau und Blattgrün im Farbenton den Urfarben entsprechend, und Gelbweiß die Principalfarbe, so wären etwa Spangrün, Gelb und Purpur die principalen Gegenfarben. Von sämmtlichen Mischungen aller sechs Farben mit dem principalen Gelbweiß würde zu erwarten sein, daß die kürzesten Farbenreihen zwischen ihnen alle innerhalb derjenigen Farbentöne bleiben, welche Mischungen der entsprechenden Urfarbe und Gegenfarbe hervorbringen können, und nur das Verhältniß würde geändert erscheinen, indem die lichtschwachen Farben dieser Art gesättigter erscheinen würden, als die gleich zusammengesetzten lichtstarken, da die lichtstarken, die in derselben Farbencurve liegen, in der That sich dem Umfange der Farbenpyramide nähern, wo die gesättigteren Farben liegen.

So werden also lichtschwaches Ultramarin und Gelb einem lichtstarken weißlicheren Blau und Gelb entsprechen müssen. Die Zumischung von Weiß zum Blau wird relativ stärker sein, als die zum Gelb, weil der gelbe Bestandtheil der Principalfarbe etwas Blau wegnimmt und dafür noch etwas Weiß bildet, dem Gelb aber sich einfach hinzufügt.

Dagegen werden schwaches Urroth bis Purpur einerseits und Blattgrün bis Spangrün andererseits ihre entsprechenden lichtstarken Farben in etwas weißlicheren und gelblicheren Mischungen finden.

Dieses Gelblichwerden der rothen und grünen Farbentöne bei hoher Lichtstärke, das Weißwerden des Blau sind schon oben erwähnt.

Verschwinden der Zwischenstufen bei geringer Helligkeit. Die Spectralfarben sind im Allgemeinen einer Urfarbe oder Mischungen aus je zwei solchen sehr nahe in ihrem Farbentone. Wenn man die letzteren auf die Ebene der beiden Urfarben projecirt denkt, so werden kürzeste Farbenreihen, die in bestimmter Richtung vom Punkte ϵ , dem Punkte der objectiven Dunkelheit, auslaufen, wie in Fig. 1, alle convex gegen die Projection der Principallinie sein und also im ferneren Verlaufe sich derjenigen Urfarbe nähern, von der sie durch diese Projection nicht getrennt sind. Es werden also lichtschwache Farben, die der Mischung zweier Urfarben

entsprechen, der auf gleicher Seite der Gegenfarbe liegenden Urfarbe sich nähern, wenn man nach den ähnlichsten gesättigteren lichtstärkeren Farben sucht.

Dies führt uns auf eine von W. v. BEZOLD¹ und E. BRÜCKE² beschriebene Erscheinung. Beide haben nämlich gefunden, daß aus einem gut gereinigten Spectrum von mäfsiger Länge, in dem man aber die stärkeren FRAUNHOFERSchen Linien noch gut sehen kann, bei allmählicher Abschwächung die gelben und die cyanblauen Farbentöne ganz verschwinden, und daß zwischen ihnen schliesslich nur drei Farben, Roth, Grün und Violettblau, stehen bleiben. Die genannten Autoren haben damals auch schon den Schlufs gezogen, daß die genannten drei Farben die physiologischen Grundfarben sein müssen, indem sie diejenigen Empfindungselemente einer gemischten Empfindung, die die Reizschwelle nicht überschreiten, als unwirksam auch in der gemischten Empfindung betrachten. Es ist dies eine Betrachtungsweise, die der hier eingeschlagenen wesentlich verwandt ist.

Mischungen mit Weifs. Aehnliche Abweichungen, wie die bisher besprochenen zwischen dem Farbentone einer lichtschwachen und lichtstarken Farbe von gleicher objectiver Qualität, kommen auch zwischen denen einer isolirten gesättigten Farbe und deren Mischung mit sehr vielem Weifs vor.³

Wenn Weifs und eine Mischung dieses Weifs mit einer kleinen Menge einer Spectralfarbe als gegeben nach ihrem Orte in der Farbenpyramide angesehen werden, so läßt sich die kürzeste Farbenreihe, die durch die beiden Punkte führt, construiren. Diese wird gegen einen Theil der Oberfläche der Farbenpyramide hin gerichtet sein, an der die gesättigten Farben derselben Reihe liegen, als deren stark mit Weifs verdünnte Modification die gegebene Mischung erscheint.

Dabei ist zu bemerken, daß, wenn man zu dem Weifs reine Urfarben mischen könnte, die Verbindungslinie beider eine der entsprechenden Coordinataxe parallele Gerade werden würde, welche selbst eine kürzeste Farbenreihe ist und ihre Richtung

¹ W. v. BEZOLD, Über das Gesetz der Farbenmischung und die physiologischen Grundfarben. *Pogg. Ann.* Bd. 150. S. 237—239. 1873.

² E. BRÜCKE, Über einige Empfindungen im Gebiete des Sehnerven. *Wiener Sitzungsber.* Abth. III., Bd. LXXVII. 1878. Febr. 28.

³ Auch schon von W. von BEZOLD erwähnt. *Pogg. Ann.* Bd. 150. S. 243. 1873.

nicht ändert. Die kürzeste Farbenreihe würde also mit der Mischungsreihe zusammenfallen und keinerlei Aenderung des Farbtones zu bemerken sein.

Da aber die Spectralfarben immer als zusammengesetzte Farben anzusehen sind, in denen nur eine oder zwei der Urfarben merkliches Übergewicht haben, so werden dadurch Krümmungen der kürzesten Farbenreihen möglich.

Um die Form der betreffenden Farbenreihe vollständig übersehen zu können, wird man sich im Allgemeinen je zwei Projectionen auf Grenzflächen der Farbenpyramide entwerfen müssen.

Das Curvenbündel der Fig. 1 würde auch bei etwas abgeänderten Verhältnissen seinen Charakter behalten. Deuten wir es jetzt so, daß wir den Punct ϵ als die Projection des Weiße auf eine der Coordinatebenen betrachten; ϵx sei die Coordinatrichtung für die eine Grundfarbe, die zum Weiße hinzugethan werden kann, ϵy für die andere. Beide Linien entsprechen kürzesten Farbenreihen. Dann wird noch die mit $y = x$ bezeichneten Grade sehr nahehin wenigstens eine kürzeste Farbenlinie sein. Die Gleichung der letzteren, die in diese Richtung fällt, würde allerdings, streng genommen, nicht $x = y$, sondern $a + x = b + y$ sein. Wenn aber die Coordinaten des Weiße so groß sind, daß die des Eigenlichts a, b dagegen verschwinden, wird der Unterschied unerheblich.

Nun sieht man, daß alle Curven, welche zwischen ϵx und $y = x$ liegen, concav gegen x , die anderen concav gegen y sind. Verfolgt man sie von ϵ aus, so nähern sie sich im Fortlauf der nähern Grundfarbe und weisen auf gesättigtere Abstufungen von dieser hin. Wenn wir also die Art der eingemischten Farbe nach den ähnlichsten, vom Weiße weniger überdeckten Farbentönen beurtheilen, werden wir die Einmischung für ähnlicher der reinen Urfarbe x halten.

Spectrales Roth kann nach meinen neueren Bestimmungen als Urroth mit überwiegend grünlicher Einmischung betrachtet werden. In der Mischung mit Weiße würde das Grünliche mehr zurücktreten, die Farbe dem Urroth näher, also mehr rosenroth erscheinen, was in der That der Fall ist, und schon früher von Hrn. E. HERING angeführt wurde.

Violett, was aus gleichen Quantis Urroth und Urblau zusammengesetzt wäre, würde in der Projection auf die Blauroth-

Ebene mit der Projection des Weiſs fast dieselbe Richtung haben und seine kürzeste Farbenreihe fast geradlinig sein. Dagegen käme bei spectrumalem Violett in Betracht, daß es noch eine Einmischung von Grün hat, die in der Grünroth-Ebene, wie in der Grünblau-Ebene gegen das überwiegende Roth, bezüglich Blau, mit steigender Entfernung vom Weiſs schwinden würde. Dadurch würde die Farbe dem Complement des Grün, dem Rosenroth, ähnlicher gemacht.

Geht man zu bläulichen violetten Spectralfarben über, so würde neben dem stärkeren Blau der rothe Bestandtheil des Violett zu schwinden anfangen, was anfangs noch durch das stärkere Schwinden des Grüns compensirt würde. Ich fand, daß zwischen $\lambda = 450 \mu\mu$ bis $\lambda = 430 \mu\mu$ der Zusatz des spectrumalen Blau dem Weiſs eine ziemlich deutlich rosenrothe Färbung gab; erst bei $\lambda = 470 \mu\mu$ schwand dieser röthliche Ton.

Eine andere Reihe von scheinbaren Veränderungen der Farbe zeigt sich bei den kleinsten Lichtstärken, wo das letzte noch sichtbare Licht keine Farbenunterschiede mehr zeigt, sondern grau erscheint. Es erklärt sich das nach der aufgestellten Theorie dadurch, daß zur Unterscheidung der Helligkeit nur die ganze vorhandene Lichtmenge von absoluter Dunkelheit unterschieden werden muß. Zur Unterscheidung einer kleinen Menge Weiſs von einem farbigen Licht müssen dagegen Verhältnisse von Lichtmengen zweier Grundfarben von einander unterschieden werden. So ist also z. B. nach meinen letzten Berechnungen in dem Quantum = 1 enthalten, nach Einheiten gleichen Farbenwerthes gemessen:

	von spectrumalem Roth	von Weiſs
Roth	0.6093	0.3333
Grün	0.1998	0.3333
Blau	0.1913	0.3333

Die Unterscheidung der beiden Farben setzt voraus, daß die Verhältnisse der horizontal neben einander stehenden Zahlen vom Verhältniß 1 : 1 unterschieden werden können. Nach der Tabelle der Hrn. KÖNIG und BRODHUN¹ würde dies eine dort mit

¹ A. KÖNIG und E. BRODHUN: *Sitzungsber. d. Berl. Akad.* vom 27. Juni 1889, S. 643.

0.02 bezeichnete Lichtstärke verlangen, während bei der Helligkeit 0.00072, die fast 30 mal kleiner ist, noch Licht von der Dunkelheit unterschieden wird.

Es fügt sich also das ganze Gebiet dieser scheinbar unregelmäßigen Erscheinungen leicht unter die erweiterte Formulierung des FECHNERSchen Gesetzes.
