

Die zweiten PURKINJESchen Bilder im schematischen und im wirklichen Auge.

Von

Professor LUDWIG MATTHIESSEN

in Rostock.

Nach dem Vorgange von H. v. HELMHOLTZ und seinen Schülern werden die PURKINJESchen Spiegelbilder bekanntlich benutzt, um die Krümmung der Linsenflächen im lebenden Auge zu messen. Es wird die Brennweite des dioptrisch-katoptrischen Systems mit Hilfe leuchtender Objekte bestimmt und die Krümmung der letzten und spiegelnden Fläche aus der Brennweite und den dioptrischen Elementen des vorangehenden brechenden Systems berechnet. Da das vor der vorderen Linsenfläche gelegene Kammerwasser ein isotropes Medium ist, so hat diese Bestimmungsmethode keine besonderen Schwierigkeiten für diese Linsenfläche. Ebenso einfach ist dieselbe bezüglich der hinteren Linsenfläche, wenn man die Linse als ein homogenes, isotropes Medium voraussetzt mit einem gewissen Totalindex, welcher auf Grund ophthalmometrischer Messungen von H. v. HELMHOLTZ in seinem neueren schematischen Auge gleich 1,4371 angenommen ist. Abweichend davon müssen sich die Verhältnisse bezüglich des zweiten PURKINJESchen Bildes gestalten, wenn man von der natürlichen, geschichteten, anisotropen Linse mit einem von Schicht zu Schicht variablen Brechungsindex ausgeht. Denn hier findet das vorangehende brechende System seinen Abschluß erst in der letzten Schicht, der hinteren und äußersten Kortikalschicht unmittelbar vor der hinteren spiegelnden Fläche; da ihr Brechungsindex bei allen Wirbeltieraugen im Mittel

nur 1,3860¹ beträgt gegen den Totalindex 1,4371 der menschlichen Linse, so ist von vorneherein klar, daß das vorangehende System einen weit größeren Brechwert besitzt, als man bisher bei Benutzung des Totalindex anzunehmen geneigt war. Es dürfte somit für weitere Messungen obiger Art von Interesse sein, zu untersuchen, ob und wie weit dadurch die Kardinalpunkte des dioptrisch-katoptrischen Systems einer Veränderung unterliegen. Es mögen also unter gleichen Voraussetzungen die in Betracht zu ziehenden Größen am menschlichen Auge und zum Vergleiche auch am Pferdeauge für beide Fälle berechnet werden. Wir gehen dabei von bereits bekannten, auf zahlreichen Messungen beruhenden Daten aus,² welche sich auf das für die Ferne accommodierte Auge beziehen.

Das menschliche Auge.

| Geometrische und physikalische Konstanten | | mm |
|---|-------------|--------|
| Krümmungsradius der vorderen Hornhautfläche S_1 | r_1 | 7,829 |
| „ „ „ Linsenfläche S_2 | r_2 | 10,0 |
| „ „ hinteren „ S_3 | r_3 | 6,0 |
| Ort des vorderen Linsenscheitels S_2 | d_1 | 3,6 |
| „ „ Kerncentrums M | $d_1 + b_1$ | 5,2 |
| „ „ hinteren Linsenscheitels S_3 | $d_1 + d_2$ | 7,2 |
| Axe der Krystalllinse | d_2 | 3,6 |
| Brechungsindex des destillierten Wassers bei 15° R. | n_D | 1,3331 |
| „ der flüssigen Augenmedien . . . | N_0 | 1,3350 |
| „ „ äußersten Kortikalschicht . . | N_1 | 1,3830 |
| „ des Kerncentrums (Mittel aus 14 Linsen ³) | N_m | 1,4107 |

A. Das dioptrisch-katoptrische System mit homogener Linse.

a. Das Hornhautsystem. Aus den gemessenen Daten

$$r_1 = 7,829, \quad N_0 = 1,3350 = n_1$$

¹ L. MATTHIESSEN, Die neueren Fortschritte in unserer Kenntnis von dem optischen Bau des Auges der Wirbeltiere; in *Beiträge zur Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane*. Festschrift zur Feier des 70. Geburtstages von H. v. HELMHOLTZ. Leipzig 1891. S. 71.

² L. MATTHIESSEN, Beiträge zur Dioptrik der Krystalllinse. Erste Folge § 9 und § 10 in: *Berlin-Eversbuschs Zeitschr. f. vergleich. Augenheilk.* V. 1887.

³ L. MATTHIESSEN, Die neueren Fortschritte etc. l. c. S. 67.

finden wir die Brennweiten

$$f_1 = -23,3700, \quad \varphi_1 = 31,1990.$$

b. Das Linsensystem. Die gemessenen Konstanten sind

$$r_2 = 10,0, \quad r_3 = 6,0, \quad b_1 = 1,6, \quad b_2 = 2,0, \quad d_2 = 3,6.$$

Das Inkrement des Linsenindex ist

$$\zeta = \frac{1,4107 - 1,3830}{1,3830} = 0,0200.$$

Daraus findet man mit Hülfe der dioptrischen Integrale¹ den absoluten Totalindex der Linse

$$N = 1,3830 \left(1 + 2\zeta + \frac{4}{3} \zeta^2 \frac{b_1 + b_2}{r_2 + r_3} \right) = 1,3830 \cdot 1,0401 = 1,4384.$$

H. v. HELMHOLTZ nahm in seinem neueren schematischen Auge den Totalindex gleich 1,4371 an. Um zu diesem etwas kleineren Werte zu gelangen, genügt die Erhöhung des Wertes $N_1 = 1,3830$ auf den allgemeinen Mittelwert 1,3860.

Es ist nun der relative Index der vorderen Linsenfläche

$$n_2 = \frac{1,4384}{1,3350} = 1,0775,$$

und die Brennweiten derselben

$$f_2 = -129,1990, \quad \varphi_2 = 139,1990.$$

c. Das vor der Hinterfläche der Linse liegende brechende System. Bezeichnen wir die Brennweiten dieses brechenden Systems mit f' und φ' , so finden wir

$$f' = \frac{f_1 f_2}{f_2 - \varphi_1 + d_1} = -19,256, \quad \varphi' = \frac{-\varphi_1 \varphi_2}{f_2 - \varphi_1 + d_1} = 27,697,$$

¹ L. MATTHIESSEN, Die neueren Fortschritte etc. I. c. S. 92.

und die Hauptpunktsdistanzen

$$H_{\alpha} S_1 = \alpha_1 = \frac{-f_1 d_1}{f_2 - \varphi_1 + d_1} = -0,5356,$$

$$H_{\beta} S_2 = \alpha_2 = \frac{-\varphi_2 d_1}{f_2 - \varphi_1 + d_1} = 3,1959.$$

Das Interstitium ist demgemäß

$$H_{\alpha} H_{\beta} = \varepsilon = d_1 + \alpha_1 - \alpha_2 = -0,1324.$$

Der zweite Hauptpunkt H_{β} liegt also vor dem ersten H_{α} . Für ein dreiflächiges dioptrisch-katoptrisches System gelten nun Formeln, welche am Schlusse der Abhandlung abgeleitet werden sollen, nämlich

$$H F = f = \frac{^{1/2} r_3 f' \varphi'}{(\varphi' - D_2)(r_3 - \varphi' + D_2)},$$

$$S_1 H = \alpha_1' = - \left(f_1 + f_1 \varphi_1 \frac{\varphi_2 - d_2}{(\varphi_2 - d_2)(f_2 - \varphi_1 + d_1) - f_2 \varphi_2} \right),$$

worin H den Hauptpunkt, F den Hauptbrennpunkt bedeutet. Hierin ist zu setzen r_3 negativ und

$$D_2 = H_{\beta} S_3 = \alpha_2 + d_2 = 6,7959, \quad \varphi' - D_2 = 20,901,$$

$$r_3 - \varphi' + D_2 = -26,901.$$

Daraus ergeben sich die Brennweite und die vordere Hauptpunktsdistanz des dioptrisch-katoptrischen Systems

$$f = -2,8455, \quad \alpha_1' = -6,7976.$$

Die Örter der Kardinalpunkte sind demgemäß

$$S_1 H = 6,7976,$$

$$S_1 F = 3,9521,$$

$$S_1 K = 1,1066.$$

Der Brennpunkt F liegt in der Mitte zwischen dem Hauptpunkt H und dem Knotenpunkte K . Der Brennpunkt liegt 0,3521 mm hinter der vorderen Linsenfläche, der Hauptpunkt 0,4024 mm vor dem Scheitel der hinteren Linsenfläche.

B. Das dioptrisch-katoptrische System mit geschichteter Linse.

a. Das Hornhautsystem. Die Brennweiten sind wie vorhin

$$f_1 = -23,3700, \quad g_1 = 31,1990.$$

b. Das Linsensystem. Wir berechnen zunächst

α . Die Kernlinse oder die Linse bei Immersion in Kortikalsubstanz.

Die Elemente sind wieder

$$r_2 = 10,0, \quad r_3 = 6,0, \quad b_1 = 1,6, \quad b_2 = 2,0, \quad \zeta = 0,0200.$$

Mit Anwendung der dioptrischen Integrale findet man bei Zugrundelegung der für die Linsen aller Wirbeltiere gültigen Indicialkurve

$$n = N_1 \left(1 + \zeta \frac{b^2 - y^2}{b^2} \right) \text{ (Parabel)}$$

die Brennweiten

$$-f = g = 94,3406,$$

und die Hauptpunktsdistanzen von den Linsenflächen

$$H_1 S_2 = \alpha_{1,1} = -1,9041, \quad H_2 S_3 = \alpha_{2,1} = 1,6589, \quad \varepsilon = 0,0370.$$

β . Die Kombination der Kernlinse mit dem Kammerwasser. Der relative Index der Kortikalsubstanz ist $n_2 = 1,3830$: $1,3350 = 1,03595$. Die dioptrischen Elemente sind

$$f_1 = -278,164, \quad g_1 = 288,164, \quad -f_2 = g_2 = 94,3406, \\ D = S_2 H_1 = -\alpha_{1,1} = 1,9041.$$

Daraus ergeben sich die Brennweiten und Hauptpunktsdistanzen

$$f = -68,9493, \quad g = 71,4281, \quad \alpha_{1,2} = -1,3916, \quad \alpha_{2,2} = 0,4720.$$

Bezeichnet man die neuen Hauptpunkte mit $H_{1,1}$ $H_{2,1}$, so ist nunmehr

$$H_{1,1} S_2 = \alpha_{1,2} = -1,3916, \quad H_{2,1} S_3 = \alpha_{2,1} + \alpha_{2,2} = 2,1309.$$

c. Das vorangehende brechende System $S_1 S_3$. Die dioptrischen Elemente sind

$$f_1 = -23,3700, \quad \varphi_1 = 31,1990, \quad f_2 = -68,9493, \quad \varphi_2 = 71,4281, \\ D = S_1 H_{1,1} = d_1 + 1,3916 = 4,9916.$$

Bezeichnen wir die Brennweiten des vorangehenden brechenden Systems wieder mit f' und φ' , so findet man

$$f' = -16,9336, \quad \varphi' = 23,4191, \\ H_\alpha S_1 = \alpha_1 = -1,2259, \quad H_\beta H_{2,1} = \alpha_2 = 3,7468, \\ H_\alpha H_\beta = \varepsilon = d_1 + d_2 + \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_{2,1} - \alpha_{2,2} = 0,0964.$$

In dem wirklichen Auge liegt also der zweite Hauptpunkt hinter dem ersten und die Brennweiten des vorangehenden brechenden Systems sind beträchtlich kleiner, als wie zuvor. Für dies dioptrisch-katoptrische System gelten nun die Formeln

$$f = \frac{1/2 r_3 f' \varphi'}{(\varphi' - D_2)(r_3 - \varphi' + D_2)}, \\ \alpha_1' = -\left(f_1 + f_1 \varphi_1 \frac{\varphi_2 - D_1}{(\varphi_2 - D_1)(f_2 - \varphi_1 + D) - f_2 \varphi_2}\right).$$

Hierin ist nach dem Vorhergehenden zu substituieren r_3 negativ und

$$H_\beta S_3 = D_2 = \alpha_2 + \alpha_{2,1} + \alpha_{2,2} = 5,8777, \\ H_{2,1} S_3 = D_1 = \alpha_{2,1} + \alpha_{2,2} = 2,1309, \\ S_1 H_{1,1} = D = d_1 - \alpha_{1,2} = 4,9916, \quad \varphi' - D_2 = 17,5414, \\ r_3 - \varphi' + D_2 = -23,5414.$$

Daraus ergibt sich nun

$$H F = f = -2,8810, \quad H S_1 = \alpha_1' = -6,9000.$$

Die Örter der Kardinalpunkte sind demgemäfs

$$S_1 H = 6,9000,$$

$$S_1 F = 4,0190,$$

$$S_1 K = 1,1380.$$

Vergleichen wir diese Werte mit den in A. für das schematische Auge gefundenen, so ergeben sie das Resultat, daß durch die Annahme einer geschichteten Linse die Kardinalpunkte nur ganz unbedeutend nach hinten verschoben werden und daß die Brennweite ebenfalls unmerklich vergrößert wird. Der Brennpunkt liegt 0,4190 mm hinter der vorderen Linsenfläche und der Hauptpunkt H des Spiegels 0,3000 mm vor der hinteren Linsenfläche.

Ähnliche Verhältnisse gelten für die Örter der Kardinalpunkte des ganzen Auges,¹ nur mit dem Unterschiede, daß hier dieselben ein wenig nach vorne gerückt worden.

Das Pferdeauge.

Dieses Auge ist bereits früher von BERLIN,² KOSCHEL,³ KLINGBERG⁴ und Verfasser⁵ in Bezug auf seine geometrischen und physikalischen Konstanten gemessen worden. Wir gehen aus von folgenden Daten, welche sich ebenfalls auf das für die Ferne accommodierte Auge beziehen.

| Geometrische und physikalische Konstanten | | mm |
|---|-------------|--------|
| Krümmungsradius der vorderen Hornhautfläche S_1 | r_1 | 19,75 |
| „ „ „ Linsenfläche S_2 | r_2 | 21,0 |
| „ „ „ hinteren „ S_3 | r_3 | 13,0 |
| Ort des vorderen Linsenscheitels S_2 | d_1 | 5,5 |
| „ „ Kerncentrums M | $d_1 + b_1$ | 10,0 |
| „ „ hinteren Linsenscheitels S_3 | $d_1 + d_2$ | 18,5 |
| Axe der Linse | d_2 | 13,0 |
| Brechungsindex der flüssigen Augenmedien . . . | N_0 | 1,3350 |
| „ „ äußersten Kortikalschicht . . | N_1 | 1,3830 |
| „ des Kerncentrums M | N_m | 1,4458 |

¹ L. MATTHIESSEN, Beiträge zur Dioptrik der Krystalllinse l. c. § 9 in fine.

² BERLIN, Zeitschr. f. vergleich. Augenheilk. I. S. 17. 1882.

³ KOSCHEL, Ibid. II. S. 76.

⁴ KLINGBERG, Beiträge zur Dioptrik der Augen einiger Haustiere. Progr. Güstrow. I. 1888. II. 1889. III. 1892.

⁵ L. MATTHIESSEN, Pflügers Arch. f. d. ges. Physiol. XIX. S. 545. 1879. — Zeitschr. f. vergleich. Augenheilk. V. 1887.

A. Das dioptrisch-katoptrische System
mit homogener Linse.

a. Das Hornhautsystem. Aus den gemessenen Daten

$$r_1 = 19,75, \quad N_0 = 1,3350 = n_1$$

findet man die Brennweiten

$$f_1 = -59,00, \quad \varphi_1 = 78,75.$$

b. Das Linsensystem. Die gemessenen Konstanten sind

$$r_2 = 21,0, \quad r_3 = 13,0, \quad b_1 = 4,5, \quad b_2 = 8,5, \quad d_2 = 13,0.$$

Das Inkrement des Index der Linse ist

$$\zeta = \frac{1,4458 - 1,3830}{1,3830} = 0,0454.$$

Mit Hülfe der dioptrischen Integrale findet man daraus den absoluten Totalindex der Linse

$$N = 1,3830 \left(1 + 2\zeta + \frac{4}{3}\zeta^2 \frac{b_1 + b_2}{r_2 + r_3} \right) = 1,5100.$$

Die Brennweiten der vorderen Linsenfläche ergeben sich aus dem Krümmungsradius und ihrem relativen Index $n_2 = 1,1300$, nämlich

$$f_2 = -161,538, \quad \varphi_2 = 182,538.$$

c. Das vor der Hinterfläche der Linse gelegene brechende System. Bezeichnen wir seine Brennweiten wie früher mit f' und φ' , so erhalten wir

$$f' = -40,593, \quad \varphi' = 61,225$$

und die Hauptpunktsdistanzen

$$H_\alpha S_1 = \alpha_1 = -1,382, \quad H_\beta S_2 = \alpha_2 = 4,276,$$

$$H_\alpha H_\beta = \varepsilon = -0,158.$$

Der zweite Hauptpunkt liegt also vor dem ersten. Für das dioptrisch-katoptrische System mit homogener Linse sind Brennweite und Hauptpunktsdistanz

$$H F = f = \frac{^{1/2} r_3 f' \varphi'}{(\varphi' - D_2)(r_3 - \varphi' + D_2)},$$

$$S_1 H = \alpha_1' = - \left(f_1 + f_1 \varphi_1 \frac{(\varphi_2 - d_2)}{(\varphi_2 - d_2)(f_2 - \varphi_1 + d_1) - f_2 \varphi_2} \right).$$

Hierin ist zu setzen r_3 negativ und

$$D_2 = H_\beta S_3 = \alpha_2 + d_2 = 17,276, \quad \varphi' - D_2 = 43,949, \\ r_3 - \varphi' + D_2 = -56,949.$$

Daraus ergibt sich die Brennweite und vordere Hauptpunktsdistanz des dioptrisch-katoptrischen Systems

$$f = -6,4545, \quad \alpha_1' = -17,340.$$

Die Örter der Kardinalpunkte sind demgemäß

$$S_1 H = 17,340, \\ S_1 F = 10,885, \\ S_1 K = 4,430.$$

Der Brennpunkt F liegt 5,385 mm hinter der vorderen Linsenfläche, der Hauptpunkt H 1,160 mm vor der hinteren Linsenfläche.

B. Das dioptrisch-katoptrische System mit geschichteter Linse.

a. Das Hornhautsystem. Die Brennweiten sind wie vorhin

$$f_1 = -59,00, \quad \varphi_1 = 78,75.$$

b. Das Linsensystem. Wir berechnen zunächst

α . Die Kernlinse oder die Linse bei Immersion in Kortikalsubstanz. Die Elemente sind wiederum

$$r_2 = 21,0, \quad r_3 = 13,0, \quad b_1 = 4,5, \quad b_2 = 8,5, \quad \zeta = 0,0454.$$

Mit Anwendung der dioptrischen Integrale findet man die Brennweiten

$$-f = \varphi = 90,472$$

und die Hauptpunktsdistanzen von den Linsenflächen

$$H_1 S_2 = \alpha_{1,1} = -6,136, \quad H_2 S_3 = \alpha_{2,1} = 6,626, \quad \varepsilon = 0,238.$$

β . Die Kombination der Kernlinse mit dem Kammerwassser. Der relative Index der Kortikalsubstanz ist $n_2 = 1,03595$ und die dioptrischen Elemente dieser Kombination

$$f_1 = -584,06, \quad \varphi_1 = 605,06, \quad -f_2 = \varphi_2 = 90,472, \\ D = S_2 H_1 = -\alpha_{1,1} = 6,136.$$

Daraus ergeben sich die Brennweiten und Hauptpunktsdistanzen

$$f = -76,649, \quad \varphi = 79,404, \quad \alpha_{1,2} = -5,198, \quad \alpha_{2,2} = 0,805.$$

Bezeichnet man die neuen Hauptpunkte mit $H_{1,1}$ $H_{2,1}$, so ist nunmehr

$$H_{1,1} S_2 = \alpha_{1,2} = -5,198, \quad H_{2,1} S_3 = \alpha_{2,1} + \alpha_{2,2} = 7,431.$$

c. Das vorangehende brechende System $S_1 S_3$. Die dioptrischen Elemente desselben sind

$$f_1 = -59,00, \quad \varphi_2 = 78,75, \quad f_2 = -76,649, \quad \varphi_2 = 79,404, \\ D = S_1 H_{1,1} = d_1 + 5,198 = 10,698.$$

Bezeichnen wir die Brennweiten wieder mit f' und φ' , so findet man

$$f' = -31,252, \quad \varphi' = 43,214, \\ H_\alpha S_1 = \alpha_1 = -4,362, \quad H_\beta H_{2,1} = \alpha_2 = 5,870, \\ H_\alpha H_\beta = \varepsilon = d_1 + d_2 + \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_{2,1} - \alpha_{2,2} = 0,836.$$

In dem wirklichen Auge liegt also auch hier der zweite Hauptpunkt hinter dem ersten. Für das dioptrisch-katoptrische System ist wie früher

$$f = \frac{^{1/2} r_3 f' \varphi'}{(\varphi' - D_2)(r_3 - \varphi' + D_2)}$$

$$\alpha_1' = - \left(f_1 + f_1 \varphi_1 \frac{\varphi_2 - D_1}{(\varphi_2 - D_1)(f_2 - \varphi_1 + D) - f_2 \varphi_2} \right).$$

Hierin ist nach dem Vorhergehenden zu setzen r_3 negativ und

$$D_2 = H_\beta S_3 = \alpha_2 + \alpha_{2,1} + \alpha_{2,2} = 13,302,$$

$$D_1 = H_{2,1} S_3 = \alpha_{2,1} + \alpha_{2,2} = 7,431,$$

$$D = S_1 H_{1,1} = d_1 - \alpha_{1,2} = 10,698,$$

$$\varphi' - D_2 = 29,912, \quad r_3 - \varphi' + D_2 = -42,912.$$

Daraus ergibt sich

$$HF = f = -6,839, \quad H_1 S_1 = \alpha_1' = -18,261.$$

Die Örter der Kardinalpunkte sind demgemäß

$$S_1 H = 18,261,$$

$$S_1 F = 11,422,$$

$$S_1 K = 4,583.$$

Vergleichen wir diese Werte mit den in A. gefundenen, so ergeben sie das Resultat, daß durch die Annahme der natürlichen, geschichteten Linse die Kardinalpunkte des dioptrisch-katoptrischen Systems ebenso wie bei dem menschlichen Auge ein wenig nach hinten gerückt werden, und daß die Brennweite vergrößert wird. Der Brennpunkt F liegt 5,922 mm hinter der Vorderfläche und der Hauptpunkt H 0,239 mm vor der Hinterfläche der Linse. Ähnliche Verschiebungen gelten auch für die Kardinalpunkte des ganzen Auges; diese werden aber wie bei dem menschlichen Auge sämtlich ein wenig gegen die Hornhaut gerückt.¹

¹ Beiträge zur Dioptrik der Krystalllinse I. c. § 13 und § 15 in fine.

Die Berechnung der Kardinalpunkte eines dioptrisch-katoptrischen Systems.

H. v. HELMHOLTZ hat zuerst eine Ableitung des Ausdrucks für die Brennweite gegeben.¹ Man leitet die beiden Formeln am einfachsten ab auf Grund der folgenden drei Theoreme.

1. Theorem. Das System hat nur einen Hauptpunkt H , welcher das Bild von der spiegelnden Fläche ist:

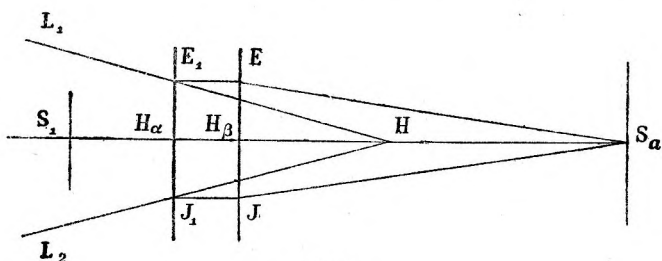


Fig. 1.

Es seien H_α H_β (Fig. 1) die Hauptpunkte des vorangehenden brechenden Systems, S_1 die erste, S_a die spiegelnde Fläche. Konstruiert man zwei symmetrisch zur Axe gelegene Strahlen von S_a nach E und J , so treten sie auch symmetrisch nach vorne aus in E_1 L_1 und J_1 L_2 , als wenn sie aus demselben Punkte H kämen. H ist also das Bild von S_a . Umgekehrt tritt der gegen H gerichtete Strahl L_1 H nach der Reflexion in S_a so aus dem Systeme nach vorne in J_1 L_2 wieder aus, als wenn er von H käme. Dies ist aber charakteristisch für die Hauptpunkte.

2. Theorem. Das System hat nur einen Knotenpunkt K , welcher das Bild des Centrums C der spiegelnden Fläche ist.

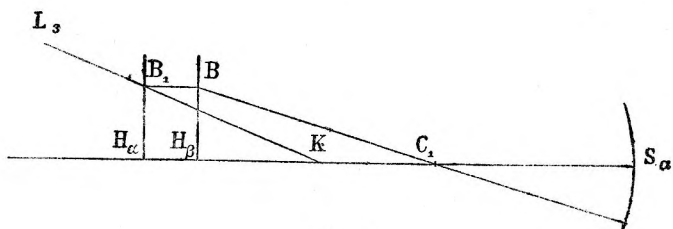


Fig. 2.

¹ AUBERT, Physiologische Optik; in: *Handbuch der ges. Augenheilk.* VON GRAEFE UND SAEMISCH. Bd. II. S. 433.

Konstruiert man einen Centralstrahl $C B$ (Fig. 2), so tritt er in $B_1 L_3$ nach vorne aus, als wenn er aus K käme; K ist also das Bild von C . Es hat aber K die bekannte Eigenschaft der Knotenpunkte, welche Punkte parallelen oder gleichen Durchganges sind, denn ein gegen K gerichteter Strahl $L_3 K$ geht von B nach C , wird darauf von der Fläche S_a wieder nach C reflektiert und tritt wieder auf demselben Wege aus dem Systeme nach vorne aus.

3. Theorem. Das System hat nur einen Brennpunkt, welcher zwischen H und K in der Mitte liegt.

Für jedes System ist nämlich $\varphi = -nf$. Sind a Flächen vorhanden, von denen die letzte spiegelt, so repräsentiert das dioptrisch-katoptrische System ein solches von $2a-1$ Flächen, worin

$$n = n_1 n_2 \dots n_a n_{a+1} \dots n_{2a-1}.$$

Dabei ist für die spiegelnde Fläche $n_a = -1$ und ferner

$$n_{a+1} = \frac{1}{n_{a-1}}, n_{a+2} = \frac{1}{n_{a-2}}, \dots n_{2a-1} = \frac{1}{n_1}.$$

Folglich ist $\varphi = f$, d. h. die Brennweiten sind nach Größe und Lage gegen den Hauptpunkt dieselben. Da nun immer die Hauptpunkte und die Knotenpunkte symmetrisch zu den Brennpunkten liegen, so liegt hier der Brennpunkt in der Mitte von beiden, also ganz so wie bei einem sphärischen Spiegel vom Radius ϱ_a , so daß man hat $f = \frac{1}{2} \varrho_a$. Demnach ist $\varrho_a = HK$ das Bild von $S_a C = r_a$, welches sich auf folgende Art leicht berechnen läßt.

Sind bezüglich der Hauptpunkte $H_a H_\beta$ des vorangehenden brechenden Systems x_0 und x_1 die Abscissen zweier konjugierter Punkte H und S_a , t_0 und t_1 die Abscissen zweier anderer konjugierten Punkte K und C bezüglich H und S_a , so ist bekanntlich

$$(f' - x_0)(\varphi' - x_1) = f' \varphi',$$

$$\frac{f'_1 - x_0}{t_0} + \frac{\varphi'_1 - x_1}{t_1} = 1.$$

Daraus folgt

$$\frac{t_0}{t_1} = \frac{f' - x_0}{t_1 - \varphi' + x_1} = \frac{f' \varphi'}{(\varphi' - x_1)(t_1 - \varphi' + x_1)}.$$

Nun ist $t_1 = r_a$, $t_0 = \varrho_a$, $x_1 = D_2$, also

$$(1) \quad \frac{1}{2} \varrho_a = f = \frac{\frac{1}{2} r_a f' \varphi'}{(\varphi' - D_2)(r_a - \varphi' + D_2)}.$$

Es ist noch die vordere Hauptpunktsdistanz $HS_1 = \alpha_1'$ oder der Ort des Bildes von S_a zu suchen. Sind also wieder x_0 und x_1 die Abscissen beider Punkte bezüglich H_a und H_β und die Hauptpunktsdistanz des brechenden Systems, also $H_a S_1 = \alpha_1$, so ist

$$\frac{f'}{x_0} + \frac{\varphi'}{x_1} = 1$$

und weiter

$$\alpha_1' = \alpha_1 - x_0, \quad x_1 = D_2,$$

folglich

$$\alpha_1' = \alpha_1 + \frac{f' D_2}{\varphi' - D_2}.$$

Ist das System ein dreiflächiges $S_1 S_3$, wie im schematischen Auge, so ist

$$\alpha_1 = \frac{-f_1 d_1}{f_2 - \varphi_1 + d_1}, \quad D_2 = \alpha_2 + d_2 = \frac{-\varphi_2 d_1}{f_2 - \varphi_1 + d_1} + d_2,$$

$$f' = \frac{f_1 f_2}{f_2 - \varphi_1 + d_1}, \quad \varphi' = \frac{-\varphi_1 \varphi_2}{f_2 - \varphi_1 + d_1}.$$

Für diesen Fall erhält man also

$$(2) \quad \alpha_1' = - \left(f_1 + f_1 \varphi_1 \frac{\varphi_2 - d_2}{(\varphi_2 - d_2)(f_2 - \varphi_1 + d_1) - f_2 \varphi_2} \right).$$

Folgt auf die erste Fläche ein zusammengesetztes System mit den Hauptpunktsdistanzen D und D_1 von der ersten und der letzten spiegelnden Fläche, so wird sein

$$(3) \quad \alpha_1' = - \left(f_1 + f_1 \varphi_1 \frac{\varphi_2 - D_1}{(\varphi_2 - D_1)(f_2 - \varphi_1 + D) - f_2 \varphi_2} \right) \\ = f_1 \frac{(\varphi_2 - D_1) D - f_2 D_1}{(\varphi_2 - D_1)(\varphi_1 - D) + f_2 D_1}.$$

Für konsekutive Systeme höherer Ordnung mit lauter sphärischen Flächen bedient man sich zur Berechnung am einfachsten der Kettenbruch-Determinanten, und zwar entweder nach der Methode von BROCKMANN¹ oder mittelst Berechnung des vorangehenden brechenden Systems.

Ist $a - 1$ die Anzahl der sphärischen Flächen des vorangehenden Systems und die Determinante der sekundären Fokalinterstitien

$$R_{a-2} = \begin{vmatrix} J_1 & g_2 & \cdot & \cdot \\ -f_2 & J_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & g_{a-2} \\ \cdot & \cdot & -f_{a-2} & J_{a-2} \end{vmatrix}$$

so ist $J_m = f_{m+1} - g_m + d_m$ und

$$f' = \frac{f_1 f_2 \cdots f_{a-1}}{R_{a-2}}, \quad g' = \frac{g_1 g_2 \cdots g_{a-1} (-1)^{a-2}}{R_{a-2}}.$$

Wir fanden früher

$$f = \frac{{}^{1/2} r_a f' g'}{(g' - D_{a-1})(r_a - g' + D_{a-1})}.$$

Nun ist

$${}^{1/2} r_a - g' + D = f_a - g' + D_{a-1} = \frac{R_{a-1}}{R_{a-2}}$$

und

$$R_{a-1} = J_{a-1} R_{a-2} + f_{a-1} g_{a-1} R_{a-3}.$$

Man kann demnach die Brennweite auch darstellen in der Gleichung

$$(4) \quad f = \frac{{}^{1/2} r_a f_1 g_1 \cdot f_2 g_2 \cdots}{[(J_{a-1} - {}^{1/2} r_a) R_{a-2} + f_{a-1} g_{a-1} R_{a-3}]} \times \frac{f_{a-1} g_{a-1} (-1)^{a-1}}{[(J_{a-1} + {}^{1/2} r_a) R_{a-2} + f_{a-1} g_{a-1} R_{a-3}]}.$$

Die vordere Hauptpunktsdistanz des vorangehenden brechenden Systems ist

¹ BROCKMANN, Inaug.-Diss. Rostock 1887. Man vergl. auch *Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Phys.* XXXII. (1887).

$$\alpha_1 = f' - \left(f_1 + \frac{f_1 \varphi_1}{R_{a-2}} \cdot \frac{\partial R_{a-2}}{\partial J_1} \right)$$

und die vordere Hauptpunktsdistanz des dioptrisch-katoptrischen Systems

$$\alpha_1' = \alpha_1 + \frac{f' D_{a-1}}{\varphi' - D_{a-1}} = \frac{f' \varphi'}{\varphi' - D_{a-1}} - \left(f_1 + \frac{f_1 \varphi_1}{R_{a-2}} \cdot \frac{\partial R_{a-2}}{\partial J_1} \right).$$

Gemäß einer Eigenschaft der Kettenbrüche ist nun

$$f' \varphi' = \frac{f_1 \varphi_1 f_{a-1} \varphi_{a-1}}{R_{a-2}^2} \left\{ R_{a-2} \frac{\partial R_{a-3}}{\partial J_1} - \frac{\partial R_{a-2}}{\partial J_1} R_{a-3} \right\},$$

mithin wird

$$(5) \quad \alpha_1' = - \left\{ f_1 + f_1 \varphi_1 \frac{(J_{a-1} - \frac{1}{2} r_a) \frac{\partial R_{a-2}}{\partial J_1} + f_{a-1} \varphi_{a-1} \frac{\partial R_{a-3}}{\partial J_1}}{(J_{a-1} - \frac{1}{2} r_a) R_{a-2} + f_{a-1} \varphi_{a-1} R_{a-3}} \right\}$$

oder in Determinantenform

$$\alpha_1' = -f_1 - f_1 \varphi_1 \left| \begin{array}{cccc} J_2 & \varphi_3 & \cdot & \cdot \\ -f_3 & J_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{a-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & (J_{a-1} - \frac{1}{2} r_a) \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cccc} J_1 & \varphi_2 & \cdot & \cdot \\ -f_2 & J_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{a-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & (J_{a-1} - \frac{1}{2} r_a) \end{array} \right|$$

Ist $a = 2$ (erste PURKINJESche Bilder), so erhält man aus (4) und (5)

$$f = \frac{-\frac{1}{2} r_2 f_1 \varphi_1}{(J_1 - \frac{1}{2} r_2)(J_1 + \frac{1}{2} r_2)}$$

$$\alpha_1' = - \left\{ f_1 + \frac{f_1 \varphi_1}{J_1 - \frac{1}{2} r_2} \right\} = \frac{f_1 d_1}{\varphi_1 - d_1}.$$

Ist $a = 3$ (zweite PURKINJESche Bilder), so ergibt sich aus (4) und (5)

$$f = \frac{\frac{1}{2} r_3 f_1 \varphi_1 f_2 \varphi_2}{\{(J_2 - \frac{1}{2} r_3) J_1 + f_2 \varphi_2\} \{(J_2 + \frac{1}{2} r_3) J_1 + f_2 \varphi_2\}},$$

$$\alpha_1' = - \left\{ f_1 + f_1 \varphi_1 \frac{J_2 - \frac{1}{2} r_3}{(J_2 - \frac{1}{2} r_3) J_1 + f_2 \varphi_2} \right\}.$$

Die Gleichungen (4) und (5) enthalten die allgemeinste Lösung für die Berechnung der Kardinalpunkte eines beliebigen dioptrisch-katoptrischen Systems unter den bekannten GAUSS'schen Beschränkungen. Kommen in diesen Systemen anisotrope Systeme gleicher Art vor, wie z. B. die Linse im Auge, so bedarf es, wie oben gezeigt worden ist, der Einführung der dioptrischen Integrale.
