ren Fehler die Augenmass- und Tastversuche unter, über die mir allein eigene Erfahrungen zu Gebote stehen. Die Bezeichnungen, die ich im Folgenden brauche, werden später überall bei Bezugnahme auf die betreffenden Methoden wieder gebraucht werden.

d) Specielles zur Methode richtiger und falscher Fälle, in Anwendung auf die Gewichtsversuche.

Die (im Jahre 1855 begonnenen) Versuche, auf deren Grundlage die folgenden Ausführungen über die Methode der richtigen und falschen Fälle beruhen, wurden zuerst nur in der einfachen Absicht einer genaueren Prüfung des Weber'schen Gesetzes unternommen, später im Interesse der Ausbildung der Methode selbst fortgeführt und weiter ausgedehnt, nachdem sich gezeigt hatte, dass die Prüfung, die ich im Auge hatte, eine zuvorige Untersuchung der Bedingungen der Genauigkeit der Methode, eine Ausbildung ihrer experimentalen und Rechnungsseite erst foderte, welche zur Zeit noch nicht vorlag. Während mehreren Jahren betrachtete ich es als eine Art täglicher Arbeit, ungefähr 1 Stunde lang Versuche in diesem Interesse anzustellen, und solche consequent in Bezug auf die Ermittelung dieses oder jenes bestimmten Verhältnisses eine grössere Zahl von Tagen hindurch fortzusetzen. Hiedurch ist ein, in dieser Schrift bei Weitem nicht zu erschöpfendes, Material von Versuchen erwachsen, wovon die, in einigen der folgenden Kapitel vorkommenden, grossen Versuchszahlen, und die mehrfache Wiederholung von Versuchsreihen zur Feststellung wichtiger Puncte zu verschiedenen Zeiten und unter abgeänderten Umständen, Zeugniss geben, auch ist dadurch eine grosse Uebung in Handhabung der Methode entstanden.

Insofern es bei unserer Methode darauf ankommt, das Verhältniss der Zahl der richtigen Fälle zur Zahl der falschen Fälle oder zur Totalzahl der Fälle zu bestimmen, werde ich, unter vorzugsweiser Anwendung des letzten Verhältnisses, die Zahl der richtigen Fälle mit r, die der falschen Fälle mit f, die Totalzahl der Fälle mit n bezeichnen, also das Verhältniss, mit dem wir uns hauptsächlich zu beschäftigen haben werden, mit $\frac{r}{n}$, so aber, dass, wenn eine Versuchszahl bezüglich eines Beobachtungswerthes in gleiche Fractionen getheilt wird, und diese besonders in

Rechnung genommen werden, r und n auf die Zahl der richtigen und gesammten Fälle einer jeden Fraction insbesondere geht, indess mit ν die Anzahl der Fractionen bezeichnet wird, wo dann νn die Totalzahl der Fälle für den betreffenden Beobachtungswerth ist. Bezieht sich die ganze Beobachtungsreihe, wie diess in der Regel der Fall ist, auf mehrere unter einander zu vergleichende Beobachtungswerthe, so muss dann natürlich νn noch mit der Zahl derselben multiplicirt werden, um die Totalzahl der Fälle für die ganze Reihe zu erhalten.

Wo das Urtheil zweifelhaft bleibt, ist ein solcher Fall bemerktermassen halb den richtigen, halb den falschen Fällen zuzuzählen. Um aber hieraus hervorgehende halbe Fälle zu vermeiden, rechne ich, weil es bei der Bildung des Bruches $\frac{r}{n}$ nur auf Verhältnisse ankommt, jeden richtigen Urtheilsfall als zwei richtige, jeden falschen als zwei falsche Fälle; und jeden, wo das Urtheil zweifelhaft bleibt, als einen richtigen, einen falschen.

Mit P wird das Hauptgewicht, d. i. das Gewicht eines jeden der vergleichsweise gehobenen Gefässe sammt Belastung ohne D, mit D das Zusatzgewicht (Mehrgewicht) bezeichnet werden, das beim Versuche angewendet wird, mit h ein Werth, welcher der Unterschiedsempfindlichkeit direct proportional, mithin dem Zusatzgewichte D, das ein gleiches $\frac{r}{n}$ zu liefern vermag, umgekehrt proportional ist, oder kurz das Mass der Unterschiedsempfindlichkeit, um das es zu thun ist.

Die Methode lässt sich in doppelter Weise ausführen: nach einem ersten Verfahren so, dass man sich erst nach wiederholtem Hin- und Herwiegen der belasteten Gefässe entscheidet, welches schwerer oder leichter ist; nach einem zweiten so, dass man sich unverbrüchlich nach jeder einzelnen vergleichsweisen Aufhebung beider Gefässe entscheidet, oder bei Zweifel das Urtheil zu den unentschiedenen legt, welche halb den richtigen, halb den falschen beigezählt werden.

Früherhin habe ich immer das erste Verfahren angewandt; aber später alle damit angestellten Versuche verworfen, und mich ausschliesslich an das zweite gehalten, nachdem ich mich von der weit grösseren Vorzüglichkeit desselben überzeugt habe. Nicht nur lässt es sich gleichförmiger herstellen, als das erste, sondern es kann auch eine genaue Elimination und Bestimmung der, von der Zeit- und Raumlage abhängigen Miteinflüsse, welche einen constanten Fehler begründen, nur nach dem zweiten Verfahren, durch angemessene Entgegensetzung dieser Einflüsse gegen einander, erzielt werden, wie sich unten ergeben wird.

Natürlich begeht man nach dem zweiten Verfahren leichter einen Irrthum bezüglich der Richtung des Unterschiedes als erstenfalls, und die Zahl der unentschiedenen und falschen Fälle fällt unter Anwendung eines gleichen D bei gleicher Totalzahl der Fälle grösser aus, als nach dem ersten Verfahren, was aber die Methode nicht ungenauer macht, sofern diese ja auf der Begehung von Irrthümern zu fussen hat, und was durch Anwendung eines grösseren D compensirt werden kann, um nicht zu kleine Verhältnisse $\frac{r}{n}$ zu erhalten, welche eben so wenig als zu grosse vortheilhaft für das Mass sind. Von anderer Seite liefert die zweite Methode in gleicher Zeit viel mehr Fälle als die erste, und es kann dabei jede einzelne Doppelhebung mit der anderen ganz gleich oder vergleichbar hergestellt werden.

Eine Nichtkenntniss der Lage des Mehrgewichtes und mithin Zuziehung eines Gehülfen zur Bestimmung der jedesmaligen Lage desselben, um einen Einfluss der Einbildungskraft auf das Urtheil auszuschliessen, ist bei dem ersten Verfahren wesentlich, bei dem zweiten nach der unten zu beschreibenden Ausführungsweise desselben nicht nur nicht nöthig, sondern auch nicht einmal anwendbar. Diess wird sich nach genauerer Darlegung der ganzen Sachlage der Methode bestimmter motiviren lassen.

Gemäss der Bemerkung S. 88 ist die Hebung der Gefässe immer *successiv* vorzunehmen, und eine *Doppelhebung* des zweiten Verfahrens, welche ein Urtheil begründet, entsteht also durch folgweise einmalige Hebung des einen und des anderen Gefässes, schliesst somit zwei *einfache* Hebungen ein. Insofern aber nach der S. 94 angegebenen Weise jedes Urtheil zu zwei Fällen gerechnet wird, wird die Totalzahl der Fälle durch die Zahl der einfachen Hebungen, nicht der Doppelhebungen bestimmt.

Wenn ich beide Gefässe mit *derselben* Hand hebe, so bezeichne ich es als *einhändiges* Verfahren; wenn ich das eine mit der einen, das andere mit der anderen Hand hebe, als *zweihändiges*. Auch das einhändige ist aber immer von mir mit *beiden* Händen insofern ausgeführt worden, als die Linke und

Rechte in wechselnden Versuchsabtheilungen angewandt wurden. Hiebei hat sich in jeder grösseren Versuchsreihe die Rechte etwas, doch wenig empfindlicher, als die Linke gezeigt; das einhändige Verfahren aber überhaupt nicht unerheblich empfindlicher, als das zweihändige. Die constanten Einflüsse der Zeit- und Raumlage der Gefässe sind nach einhändigem, zweihändigem, linkshändigem, rechtshändigem Verfahren sehr verschieden. Es ist jedoch hier nicht am Orte, in die Specialitäten einzugehen, die mir darüber zu Gebote stehen.

Besondere Rücksichten erfoderte die Einrichtung der Gefässe, welche mit den eingelegten Belastungsgewichten zusammen das Hauptgewicht P geben; und erst, nachdem ich viel Zeit durch Versuche mit unvollkommenen Einrichtungen verloren, bin ich bei der unten kurz zu beschreibenden Einrichtung mit einer drehbaren Griffrolle und fixirten, mit den Gefässen so zu sagen einen zusammenhängenden festen Körper bildenden, Belastungsgewichten stehen geblieben, welche genügt hat.

Vielleicht hat es einiges Interesse, wenn ich als ein Beispiel — und in der That ist es nur ein Beispiel — durch wie viel Kleinigkeiten man bei Versuchen dieser Art in Verlegenheit gesetzt und aufgehalten werden kann, zuvor etwas von jenen unvollkommenen Einrichtungen erwähne.

Anfangs wandte ich als Gefässe einfache hohle Holzcylinder an, die ich mit der Hand von oben umfasste. Aber bei schweren Hauptgewichten musste die Hand stark zusammengeknippen werden, damit die Gefässe nicht aus der Hand glitten, indess bei schwachen die Hand von selbst geneigt war, leise zuzugreifen. Auch liess sich die Gleichförmigkeit der Fassung nicht wohl verbürgen. Dann liess ich die Gefässe mit Messingbügeln versehen, die sich um Stifte drehten, welche an den entgegengesetzten Enden eines Diameters des Gefässes angebracht waren, damit die Gefässe sich beim Heben von selbst nach der Schwere orientiren möchten. Aber diese Vorrichtung wurde bald schlottrig. Dann liess ich die Bügel fest annieten; da sie aber, um die Gefässe nicht durch sich selbst zu schwer zu machen, von dünnem Messingblech waren, zogen sie sich, wenn ich zu grösseren Hauptgewichten übergieng und konnten nicht mehr für vergleichbar gelten. Nachdem ich stärkere substituirt hatte, habe ich, nach Verwerfung aller früheren Versuche, mit diesem Apparate fast ein Jahr lang sorgfältige und mühsame Versuche angestellt, und diese zuletzt alle ebenfalls, wenn auch nicht geradezu, verworfen, aber als der Wiederholung und Controle bedürftig erachtet, die seitdem von mir so weit durchgeführt ist, dass alle jene früheren Versuche dadurch als überflüssig oder ihrerseits nur als zu einer beiläufigen Controle der Resultate der neueren dienlich gelten können; auch ist im Folgenden ganz davon abstrahirt. Diess hieng an folgendem Umstande. Die früher von mir angewandten, aus dem Verkehre genommenen und nur durch

Nachwiegen controlirten Belastungsgewichte hatten nach ihrer verschiedenen Schwere auch verschiedene Grösse. Da nun die Gefässe weit genug sein mussten, dass auch die grössten darin Platz hatten, waren die kleinen und selbst grössere nicht vor Verschiebung beim Heben der Gefässe gesichert. Ich setzte voraus, dass der Druck doch immer mit der ganzen Schwere des Gefässes auf dieselben Puncte der die Bügel umfassenden Hand fallen müsse, also kein Nachtheil aus einer etwaigen Verschiebung der Gewichte in den Gefässen hervorgehen könne, unterliess aber bei der Menge sonst zu untersuchender und nach einander untersuchter Nebenumstände, welche von Einfluss bei dem Verfahren sein können, diess zum Gegenstande besonderer Untersuchung zu machen. Diese Vernachlässigung hat sich schwer gerächt. Denn als ich endlich doch der Sicherheit halber die Untersuchung darauf richtete, indem ich absichtlich vergleichungsweise Versuche mit in der Mitte und ganz seitlich im Gefässe fixirten Belastungsgewichten anstellte, zeigte sich, dass vermöge zwar nicht anderer Grösse, aber anderer Vertheilungsweise des Druckes die Erfolge beidesfalls ganz entschieden verschieden ausfallen, das Gefäss nämlich am schwersten erscheint, wenn das Gewicht die Mitte des Gefässes einnimmt, und dass der Unterschied sogar nicht unbeträchtlich ist, wenn man extreme Lagen in dieser Hinsicht vergleicht. Nun konnten allerdings bei meinen Versuchen nur viel geringere, und nach Wahrscheinlichkeit durch die grosse Menge Versuche sich in der Hauptsache compensirende Verrückungen stattgefunden haben, was sich auch theils durch die Uebereinstimmung der einzelnen grösseren Fractionen in den gewonnenen Zahlen, theils dadurch bestätigt hat, dass die späteren Versuche mit der vollkommeneren Einrichtung wesentlich zu ganz denselben Resultaten geführt haben; indess machten mir jene früheren Versuche keine Freude mehr, und die Schärfe und bindende Kraft derselben war, wenn nicht im Ganzen, aber in den Einzelbestimmungen, zu precär geworden, um nicht die Mühe einer Wiederaufnahme derselben mit einem neuen Apparate der Beruhigung bei den bisherigen vorzuziehen.

Alle Versuche, auf die ich mich folgends zu beziehen haben werde, sind nach dem zweiten Verfahren (S. 94) unter sehr gleichförmigen Umständen ausgeführt, welche ich hier als Normalumstände oder Normalverhältnisse beschreibe, Nebenpuncte dabei übergehend, die ich in den »Massmethoden« nachzutragen mir vorbehalte. Von diesen Normalverhältnissen wurde nur insofern abgewichen, als der Erfolg solcher Abänderungen selbst zum Gegenstande der Untersuchung gemacht werden sollte.

Die Gefässe bestanden nach der Einrichtung, bei der ich zuletzt stehen blieb, nur in einer Art Gestellen, aus 4 verticalen, unten durch ein horizontales Kreuz verbundenen, Messingstäben, zwischen welche die, genau einpassenden rechteckigen, nur in der Dickedimension verschiedenen, Gewichte (theils von Blei, theils Zink) eingelegt wurden, so dass sie eine feste Lage darin hatten und sich bei den Hebungen nicht verschieben konnten. Das Gefäss mit dem eingelegten Gewichte und einem darauf aufgelegten Deckel, auf dessen Mitte ein kleines offenes Kästchen aufgelöthet war, bildete zusammen das Hauptgewicht *P*, welches sorgfältig gleich für beide Gefässe gemacht wurde. In das Kästchen des Deckels des einen beider Gefässe ward dann das Zusatzgewicht *D* gelegt, das solchergestalt auch seinen festen Platz, auf der Mitte des Hauptgewichts, behielt. Der Handgriff der Gefässe war eine, um eine horizontale Axe drehbare, hölzerne Rolle von 1 par. Zoll Durchmesser, welche mit der ganzen Hand umfasst wurde.

Jedes Gefäss hatte je nach Anwendung eines leichteren oder schwereren Deckels, mit diesem zusammen, 300 oder 400 Grammen Gewicht, so dass 300 Grammen das kleinste Hauptgewicht *P* war, was angewandt werden konnte, wenn nämlich unter Anwendung des leichten Deckels keine weiteren Belastungsgewichte zugefügt wurden. Als grösstes Hauptgewicht habe ich 3000 Grammen gebraucht; eine schwerere Last hätte der Apparat vielleicht nicht auf die Dauer vertragen. Wo es nicht galt, die Erfolge der Anwendung verschiedener Hauptgewichte zu prüfen, habe ich gewöhnlich 1000 Grammen als Hauptgewicht angewandt.

Als Zusatzgewichte dienten meist die Grössen 0,04 *P* und 0,08 *P*.

Ungeachtet beide Gefässe ganz gleich construirt waren, ward doch, um einen Einfluss einer etwa unbemerkt gebliebenen Verschiedenheit zu compensiren, in jeder Versuchsreihe *D* eben so oft im einen als anderen Gefässe unter sonst gleichen Umständen angebracht.

Die Hebungshöhe wurde durch ein, in einiger Höhe über dem Versuchstische angebrachtes horizontales Bret begränzt, so dass sie 2 Zoll 9 Lin. paris. betrug.

Die Hebungen geschahen mit unbekleidetem Arme, in blossen Hemdärmeln.

Der Modus der Hebungen war der, dass, wenn bei einer ersten Doppelhebung beispielsweise das linke Gefäss zuerst aufgehoben ward, bei der zweiten diess mit dem rechten geschahe, und so fort im Wechsel. 32 solchergestalt im Wechsel hintereinander vollführte Doppelhebungen oder 64 einfache Hebungen, welche eben so viel Fälle begründen, fasse ich als Versuchsabtheilung zusammen, während welcher D immer in demselben Gefässe liegen blieb. In der Mitte jeder Abtheilung, d. i. nach 32 einfachen Hebungen, ward aber jedesmal die Stellung der Gefässe von Links zu Rechts gewechselt. Auf der 4fach verschiedenen Zeit- und Raumlage, welche das Mehrgewicht D hiedurch erhält, beruhen die unten näher zu besprechenden sog. 4 Hauptfälle der Methode, deren jeder demnach mit 16 einfachen Hebungen oder Fällen in jeder Versuchsabtheilung vertreten war. Solcher Abtheilungen von je 64 Fällen wurden unter Abänderung der zu untersuchenden Verhältnisse (P, D u. s. w.) meist 8 bis 12 an jedem Versuchstage hinter einander angestellt und bei den grösseren Versuchsreihen meist 1 Monat durch fortgesetzt.

Die durch einen Zähler regulirte Zeit jeder Hebung eines Gefässes betrug 1 Secunde, die jeder Niedersetzung 1 Secunde, die Zwischenzeit zwischen Niedersetzen des einen und Heben des anderen Gefässes auch 1 Secunde, also die Zeit jeder Doppelhebung, welche einen Vergleich oder 2 Fälle begründet, genau 5 Secunden. Eben so viel Zwischenzeit, d. i. 5 Secunden, liess ich zwischen einer und der je nächsten Doppelhebung, während welcher die Aufzeichnung des Resultates stattfand. Beim einhändigen Verfahren geschahe die Aufzeichnung stets mit der müssigen Hand; beim zweihändigen nach den Versuchstagen wechselnd mit der einen oder anderen Hand.

Man übt sich bald auf einen ganz mechanischen Vollzug dieser Operationen nach dem Zähler ein, und auch die Application der Aufmerksamkeit wird bald ganz mechanisch und gleichförmig, so dass sie sich, wie ich aus meinen Vesuchszahlen selbst beweisen kann, zu Ende der täglichen Versuchsstunde nicht merklich geschwächt zeigt; die, durch das Mehrgewicht D, die constanten Miteinflüsse der Zeit- und Raumlage, und die unregelmässigen Zufälligkeiten gemeinsam bestimmten, in der Richtung unregelmässig wechselnden Urtheile: rechts schwerer, links schwerer, zweideutig, fallen so zu sagen mit objectivem Charakter bei den Doppelhebungen in die Hand, ohne dass man Wahl und Besinnen nöthig hat, was bei dem ersten Verfahren allerdings der Fall ist.

Wie die Aufzeichnungsweise einzurichten sei, um sich nicht zu verwirren, und die bei den 4 Hauptfällen erhaltenen richtigen

Fälle leicht gesondert zusammenzählen zu können, wird näher in den »Massmethoden« angegeben.

So viel vorläufig von den äusseren Verhältnissen der Versuche. Hienach gehe ich zu den allgemeineren Verhältnissen der Methode über.

Die allgemeine Aufgabe der Methode ist, unter den verschiedenen Umständen, unter denen die Unterschiedsempfindlichkeit für Gewichte vergleichsweise geprüft werden soll, für jeden der zu vergleichenden Umstände durch eine hinreichende Zahl Versuche einen Werth $\frac{r}{n}$, oder, unter Theilung der Versuchszahl in ν Fraction, ν Werthe $\frac{r}{n}$ zu gewinnen, und hieraus das Mass der Unterschiedsempfindlichkeit abzuleiten, womit noch die Nebenaufgabe in Beziehung gesetzt werden kann, die Grösse und Richtung der bei den Versuchen mitwirkenden constanten Nebeneinflüsse zu bestimmen.

Nun scheint sich von vorn herein eine fundamentale Schwierigkeit darzubieten.

Wir wissen, dass unter sonst gleichen Umständen das Verhältniss $\frac{r}{n}$ mit der Empfindlichkeit für den Gewichtsunterschied wächst; aber ein doppelt so grosses $\frac{r}{n}$ entspricht nicht einer doppelt so grossen Unterschiedsempfindlichkeit, wenn wir dem von uns aufgestellten Massbegriffe derselben treu bleiben wollen, sondern ein halb so grosses Zulagegewicht D, was ein gleiches $\frac{r}{n}$ giebt, entspricht der doppelten Empfindlichkeit; und schon aus allgemeinem Gesichtspuncte lässt sich Folgendes bemerken.

Mag auch die Empfindlichkeit sehr klein sein, so wird man doch die Zulage D immer so gross im Verhältnisse zu P nehmen können, dass fast alle oder wirklich alle Fälle richtig werden, und es leuchtet ein, dass auch die stärkste Vermehrung der Empfindlichkeit dann keine Vergrösserung des Verhältnisses $\frac{r}{n}$ mitführen kann; dass also in diesem Verhältnisse, da es bei sehr geänderter Empfindlichkeit nahe oder ganz constant bleiben kann, kein geeigneter allgemeiner Massstab der Empfindlichkeit zu suchen wäre; wogegen man bei der sehr verstärkten Empfindlichkeit nun mit einem viel geringeren Zulagegewichte ausreichen wird, das Verhältniss $\frac{r}{n}$ auf gleiche Approximation zu $\frac{n}{n}$ zu bringen, und hienach die Verstärkung der Empfindlichkeit zu beurtheilen, so dass man schon durch die Natur der Sache auf das von uns aufgestellte Mass gewiesen wird. Aber wie soll es bei unserer Methode Platz finden?

Gesetzt, ich will beispielsweise die Empfindlichkeit der linken und rechten Hand für Gewichtsunterschiede vergleichen, und stelle bei demselben Hauptgewichte P und demselben Zusatzgewichte D einmal Hebungen beider Gefässe mit der Linken (L.), ein anderes Mal mit der Rechten (R.) an, so erhalte ich doch zunächst nur ein verschiedenes $\frac{r}{n}$ für L. und R., was mich auf die grössere oder geringere Empfindlichkeit der einen oder anderen Hand schliessen lässt, aber damit kein vergleichbares Mass dieser Empfindlichkeiten; und es fragt sich, wie komme ich dazu, die verschiedenen Grössen der Zulage D zu finden, welche dasselbe Verhältniss $\frac{r}{n}$ für L. und R. geben würden.

Aehnlich, wenn ich die Empfindlichkeit einer und derselben Hand, oder beider Hände im Durchschnitte, bei verschiedenem P untersuchen will. Dieselbe Zulage D giebt nach Erfahrung bei kleinem P ein grösseres Verhältniss $\frac{r}{n}$ als bei grösserem, aber es handelte sich vielmehr darum, das verschiedene D zu finden, welches dasselbe $\frac{r}{n}$ für die verschiedenen P's giebt, um im reciproken Werthe dieser D das Mass der Unterschiedsempfindlichkeit bei den verschiedenen Werthen von P zu haben.

Die Methode der richtigen und falschen Fälle in der seither bekannten Anwendung war aus diesem Gesichtspuncte in der That nur geeignet, eine Anzeige des Mehr und Weniger, aber nicht ein vergleichbares Mass der Empfindlichkeit zu gewähren. Doch lässt sich die Methode dahin ausbilden, ein solches zu gewähren.

Zunächst bietet sich der Weg des Tatonnements dar. Man kann die Gewichtszulage unter den verglichenen Umständen so lange abändern, bis man dasselbe $\frac{r}{n}$ damit erhält. Aber da nur aus einer grossen Menge Versuche überhaupt ein sicheres Resultat selbst für ein und dasselbe D gezogen werden kann, so ist diess Verfahren, was eine grosse Menge Versuche für jedes der probirten D's fodert, nicht nur unsäglich langwierig, sondern führt auch nach mühsamstem Probiren zu keiner Genauigkeit.

Allerdings kann man zwischen nahe liegenden Werthen interpoliren; und längere Zeit habe ich mir auf diese Weise zu helfen gesucht; doch ist der Uebelstand der Umständlichkeit und Ungenauigkeit dadurch nur sehr unvollständig zu heben. Glücklicherweise aber ist er einfach und vollständig zu heben.

Nach einer principiell genauen und durch Versuche von mir wohl bewährten, zwar auf mathematische Analyse gegründeten, aber leicht ins Praktische zu übersetzenden, Regel lässt sich aus jedem $\frac{r}{n}$, was bei einem gewissen D erhalten worden ist, finden, welches D bei demselben P und übrigens gleich gehaltenen Umständen erfoderlich gewesen sein würde, ein beliebiges anderes $\frac{r}{n}$, zu geben, also auch das, was man als festes unterlegen will, wofern nur das $\frac{r}{n}$, nach dem man schliesst, aus einem hinreichend grossen n gewonnen ist. Ja man kann direct, ohne Rechnung, aus jedem $\frac{r}{n}$, dem ein hinreichend grosses n unterliegt*), nach einer Tabelle das Mass der Unterschiedsempfindlichkeit, um das es zu thun ist, so finden, dass es dem von uns aufgestellten Begriffe dieses Masses entspricht; und es soll sofort gezeigt werden, wie diess zu bewirken ist, nachdem nur zuvor einige Worte über den Weg, der dazu geführt hat, vorausgeschickt sind.

Bei einem Studium der Wahrscheinlichkeitsrechnung, zu dem ich mich immer von Neuem durch das Interesse der Ausbildung unserer Methoden getrieben fand, bót sich mir die Betrachtung dar, 1) dass nach der Sachlage unseres Verfahrens das Mass der Empfindlichkeit für Unterschiede durch den, gewöhnlich mit h bezeichneten, Werth vertreten werden könne, der nach Gauss das Mass der Präcision von Beobachtungen bietet, sofern bei vergleichbar gehaltener Modalität des Verfahrens die Präcision nur noch von der Empfindlichkeit, womit der Unterschied aufgefasst wird, abhängt; 2) dass zwischen dem durch die Versuche gebotenen $\frac{r}{n}$ und dem Producte jenes Masses h in das Zulagegewicht D, bei welchem $\frac{r}{n}$ gefunden ist, d. i. zwischen $\frac{r}{n}$ und hD, eine

---

*) Wenn man durch Fractionirung einer grossen Versuchszahl bis zu kleinem n in den einzelnen Fractionen herabgeht, so verliert man zwar in den einzelnen Fractionen an Genauigkeit, gewinnt aber solche dann wieder durch Zusammenlegung der Resultate der Fractionen. (Vgl. S. 83).

mathematische Beziehung stattfinden müsse, welche eine Ableitung von hD aus $\frac{r}{n}$, und hienach durch Division mit D das Mass der Unterschiedsempfindlichkeit h finden lassen müsse.

Es galt nur noch, diese Beziehung erstlich theoretisch festzustellen, zweitens durch den Versuch zu bewähren, drittens für unsere Massmethode praktisch zu verwerthen. Diese drei Aufgaben glaube ich befriedigend gelöst zu haben, womit die Methode der richtigen und falschen Fälle erst die Bedeutung einer wirklichen Massmethode erlangt haben dürfte.

Was die mathematische Deduction anlangt, so gebe ich sie, da es für die praktische Anwendung der Methode nicht nöthig ist, davon Einsicht zu nehmen, in folgender Einschaltung. Die experimentale Bewährung kommt wesentlich darauf heraus, experimental zu zeigen, dass, wenn man bei constanter Empfindlichkeit einen gewissen Werth $\frac{r}{n}$ bei einem gewissen Werthe D erlangt hat, der nach unserer mathematischen Beziehung berechnete Werth $\frac{r}{n}$ für ein anderes D, was zu jenem in bestimmtem Verhältnisse steht, sich durch Versuche richtig wiederfindet, unter Gestattung natürlich so kleiner Abweichungen, als auf nicht ausgeglichene Zufälligkeiten zu schreiben; — oder, was nur eine andere Form derselben Bewährung ist, dass die, bei gleicher Empfindlichkeit aber verschiedenem D durch den Versuch erhaltenen Verhältnisse $\frac{r}{n}$ nach der, auf unsere mathematische Beziehung gegründeten Tabelle Werthe von hD geben, welche proportional mit D sind.*) Zum Belege hievon aber stehen mir sehr ausgedehnte Beobachtungsreihen zu Gebote, die ich in den »Massmethoden« mittheilen werde. Auch werden wir auf einige derselben im 9. und 12. Kapitel von selbst geführt werden.

Hienach wird sich der Gegenstand rein praktisch so darstellen lassen, dass Jeder auch ohne Einsicht in die Gründe der zu gebenden Regeln und selbst ohne mathematische Vorkenntnisse sich der Methode messend bedienen kann. Auch wird man diess

---

*) Da die Unterschiedsempfindlichkeit, um die es sich hier handelt, mit P (aber nicht mit D, so lange D klein bleibt) variabel ist, so wird zu Versuchen mit gleichbleibender Empfindlichkeit ein constantes P erfodert.

mit Zutrauen thun können, nachdem sich die theoretische Ableitung derselben der Controle durch eine berühmte mathematische Autorität zu erfreuen gehabt, und die Controle durch die Erfahrung ebenfalls entscheidend gewesen ist.

Mathematische Aufstellung und Deduction der Rechnungsregel der Methode der richtigen und falschen Fälle.

Indess bis jetzt kein aprioristisches Princip vorliegt, wie je nach der Grösse des Hauptgewichtes P sich das Verhältniss $\frac{r}{n}$ bei constantem Zusatzgewichte D ändern muss, vielmehr diess nur als Sache eines durch das Experiment zu constatirenden Gesetzes anzusehen ist, so ist dagegen möglich, nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung *a priori* anzugeben, wie sich das Verhältniss $\frac{r}{n}$ ändern muss (ein grosses n vorausgesetzt), wenn bei gleichbleibendem Hauptgewichte P und überhaupt gleichbleibender Unterschiedsempfindlichkeit h das Zusatzgewicht sich ändert, oder überhaupt der Einfluss sich ändert, welcher das scheinbare Uebergewicht bestimmt, und der hier ein- für allemal durch D vertreten werden mag. Es sind nämlich hiebei dieselben Principien massgebend, nach welchen man auch, gleichbleibende Präcision der Beobachtung vorausgesetzt, die Aenderung der verhältnissmässigen Zahl der Beobachtungsfehler nach den Aenderungen ihrer Grösse bestimmen kann. Die Beziehung zwischen $\frac{r}{n}$ und Dh, um die es sich hier handelt, ist jedoch nicht durch einen endlichen Ausdruck, sondern nur durch einen Integralausdruck darstellbar, der zur praktischen Verwerthung der Beziehung tabellarisch repräsentirt werden muss, wie unten geschehen wird.

Der folgends mit Θ zu bezeichnende Integralausdruck, welcher hiebei ins Spiel kommt, ist derselbe, durch welchen die relative Zahl oder Wahrscheinlichkeit der Fehler in gegebenen Gränzen der Grösse bestimmt wird, nur dass an die Stelle des, gewöhnlich mit Δ bezeichneten, Fehlers das halbe Mehrgewicht $\frac{D}{2}$ tritt, nämlich

$$\Theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

wo π die Ludolf'sche Zahl, e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, $t = h\Delta = \frac{hD}{2}$, h das Präcisionsmass im Gauss'schen Sinne ist. Der Werth von t, welcher einem gegebenen Werthe von Θ zugehört, findet sich an manchen Orten tabellarisch repräsentirt, so im Berlin. astronom. Jahrb. f. 1834 S. 305 ff. bis $t = 2,0$; und in einer besonders erschienenen, jetzt nicht mehr im Buchhandel zu habenden lithographirten Tabelle bis $t = 3,0$; so dass man, wenn Θ nach $\frac{r}{n}$ gegeben ist, hiemit zugleich t oder $\frac{hD}{2}$ gegeben halten kann.

Nun werden alsbald folgende, für unsere Methode fundamentale, Gleichungen bewiesen werden, mittelst deren Θ aus $\frac{r}{n}$ ableitbar ist.

$$\frac{r}{n} = \frac{1+\Theta}{2}; \quad \frac{f}{n} = \frac{1-\Theta}{2}; \quad \frac{r}{f} = \frac{1+\Theta}{1-\Theta}$$

und hienach

$$\frac{2r}{n} - 1 = 1 - \frac{2f}{n} = \Theta.$$

Von diesen Beziehungen reicht es hin, die zwischen $\frac{r}{n}$ und Θ wie folgt in Anwendung und Betracht zu ziehen. Man leitet aus dem beobachteten $\frac{r}{n}$ den Werth Θ nach der Gleichung $\frac{2r}{n} - 1 = \Theta$ ab, sucht in einer Tabelle des Integrals Θ den Werth $t = \frac{hD}{2}$ dazu auf, und dividirt ihn mit $\frac{D}{2}$, um h zu erhalten, oder mit D, wenn man, wie von uns geschehen soll, das h der Methode der richtigen und falschen Fälle blos halb so gross nimmt, als das der Fehlertheorie. Um aber nicht erst aus dem durch die Beobachtung gefundenen $\frac{r}{n}$ jedesmal erst den Werth $\frac{2r}{n} - 1$ besonders bilden zu müssen, habe ich die Tabelle des Integrals Θ, wo die Beziehung zwischen $\Theta = \frac{2r}{n} - 1$ und t gegeben ist, in eine solche umgesetzt, wo sie gleich zwischen $\frac{r}{n}$ und t gegeben ist. Diess giebt die unten folgende Fundamentaltabelle.

Die mathematische Ableitung vorstehender Beziehung zwischen $\frac{r}{n}$ und Θ hat die Prüfung des Herrn Prof. Möbius, dem ich sie vorgelegt, bestanden, wonach man sie mathematischerseits als einwurfsfrei ansehen kann. Er hat aber die Gefälligkeit gehabt, meiner etwas unbehülflichen Ableitung eine kürzere und präcisere, übrigens zu demselben Ziele führende, zu substituiren, die ich demnach vorziehe, statt der meinigen im Folgenden mitzutheilen.

Die Möbius'sche Ableitung legt als Beispiel statt der Abweichung zweier Gewichte von der Gleichheit die Abweichung zweier Theile einer geraden Linie von der Gleichheit unter. Das Princip ist aber eines- und andernfalls dasselbe.

Es sei allgemein

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\Delta} e^{-t^2} dt$$

die Wahrscheinlichkeit, dass der bei einer Messung einer Grösse begangene Fehler innerhalb der Gränzen von $-\Delta$ und $+\Delta$ fällt, in welchem Ausdrucke h wie oben das Mass der Präcision der Messung, π die Ludolf'sche Zahl.

Seien nun beispielsweise:

$$A \qquad C \qquad B$$

drei Puncte in einer geraden Linie; C sehr nahe, aber doch nicht ganz in der Mitte zwischen A und B gelegen. Bei n Beobachtungen nach der Methode der richtigen und falschen Fälle halte ich a mal dafür, dass C dem A näher liegt, als dem B; mithin $CB > CA$; $n - a = b$ mal dafür, dass C dem B näher liegt, als dem A, mithin $CB < CA$. Hienach verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten für $CA < CB$ und für $CB < CA$, wie a und b, und diese zwei Wahrscheinlichkeiten selbst sind $\frac{a}{n}$ und $\frac{b}{n}$.

Sei nun in der Linie

$$A \qquad C\ M \qquad B$$

M der wirkliche Mittelpunct von AB, und C liege von M etwas Weniges nach A zu, so ist a mal mein Urtheil ein richtiges gewesen, und b mal habe ich mich geirrt. Ich habe nämlich b mal den Punct C zwischen M und B liegen geglaubt; habe also bei jeder dieser b Schätzungen den Punct um mehr als die kleine Linie CM irrig, und zwar über M hinaus nach B zu angenommen, habe also jedesmal einen Fehler, $> CM$, nach einerlei Seite hin, begangen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist einerseits $= \frac{b}{n}$, anderseits $= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{h\,.\,CM}^{\infty} e^{-t^2}\, dt$ wo CM als eine positive Grösse zu betrachten ist. Nun ist

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\,.\,CM} \cdots\cdot + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{h\,.\,CM}^{\infty} \cdots\cdot = \frac{1}{2},$$

$$\text{also } \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\,.\,CM} \cdots\cdot + \frac{b}{n} = \frac{1}{2}, \text{ folglich}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\,.\,CM} \cdots\cdot = \frac{1}{2} - \frac{b}{n} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{a}{n} = \frac{a}{n} - \frac{1}{2}.$$

Schliesslich also:

$$\frac{a}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\,.\,CM} \cdots\cdot = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{h\,.\,CM} \cdots\cdot = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-h\,.\,CM}^{\infty} \cdots\cdot$$

$$\frac{b}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\,.\,CM} \cdots\cdot = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{h\,.\,CM}^{\infty} \cdots\cdot = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-h\,.\,CM} \cdots\cdot$$

Diese zwei Formeln für $\frac{a}{n}$ und $\frac{b}{n}$ könnte man auch so erläutern: Bei n-maliger Betrachtung der Linie $ACMB$, von der aber nur die Puncte A und B sichtbar sind, glaubt man in a Fällen, dass M zwischen C und B irgendwo liegt (wie es die Wahrheit ist); in b Fällen (fälschlich), dass M irgendwo zwischen A und C liegt. Auf dieselben zwei Abschnitte CB und AC beziehen sich aber auch die Gränzen der Integration, als welche für $\frac{a}{n} \ldots\ldots -h\,.\,CM$ und ∞, für $\frac{b}{n} \ldots\ldots -\infty$ und $-h\,.\,CM$ sind. Wird nämlich die Richtung $ACMB$ für die positive und M als Anfangspunct genommen, so sind die Abscissen von C und $B = -CM$ und MB, die Abscissen von A und $C = -AM$ und $-CM$; AM und MB sind aber gegen CM als unendlich zu betrachten.

Soweit die Möbius'sche Ableitung.

Um nun das Beispiel der Linien auf das Beispiel der Gewichte zu reduciren, wird man das eine Gewicht P mit AC, das andere $P + D$ mit BC, die Länge $AM = \frac{AC + BC}{2}$ mit $P + \frac{D}{2}$, mithin das Stück CM mit $\frac{D}{2}$ zu vergleichen, also $\frac{D}{2}$ für CM in vorige Formeln zu substituiren haben. Ferner ist $\frac{a}{n}$ gleich unserem $\frac{r}{n}$ und $\frac{b}{n}$ gleich unserem $\frac{f}{n}$, wodurch sich zur directen Anwendung für unsere Methode die Formeln ergeben:

$$\frac{r}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{hD}{2}} e^{-t^2} dt$$

$$\frac{f}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{hD}{2}} e^{-t^2} dt$$

oder wenn wir das Integral

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{hD}{2}} e^{-t^2} dt \quad \text{kurz mit } \Theta \text{ bezeichnen}$$

$$\frac{r}{n} = \frac{1 + \Theta}{2}; \quad \frac{f}{n} = \frac{1 - \Theta}{2}; \quad \Theta = \frac{2r}{n} - 1 = 1 - \frac{2f}{n}.$$

Dass wir, wie oben bemerkt, das Präcisions- oder Empfindlichkeitsmass unserer Methode h gleich dem halben Präcisionsmasse der Fehlertheorie nehmen, hat auf die Anwendungen innerhalb unserer Methode keinen Einfluss, da es hier nur auf Verhältnisse von t oder h ankommt; würde aber in Rücksicht kommen, wenn man etwa die Resultate der Methode der richtigen und falschen Fälle nach absolutem Werthe mit den durch die Methode der mittleren Fehler erhaltenen vergleichen wollte, wozu das Integral Θ die Vermittelung gewährt, so wie auch bei der aprioristischen Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers oder der Unsicherheit von $\frac{r}{n}$ oder t, womit wir uns aber hier nicht beschäftigen.

Wenden wir uns nun zum Praktischen:

Die Regel, um die es sich handelt, kommt einfach darauf zurück, zu dem durch die Versuche gegebenen Bruchwerthe $\frac{r}{n}$ in folgender Tabelle, welche ich die Fundamentaltabelle der Methode der richtigen und falschen Fälle nenne, den zugehörigen Werth $t = hD$ aufzusuchen (unter Zuziehung einer Interpolation, wenn der Werth $\frac{r}{n}$ nicht genau in der Tabelle zu finden) und durch Division dieses Werthes mit D den Werth h zu bestimmen, welcher das verlangte Empfindlichkeitsmass ist, oder auch bei constantem D den so gefundenen Werth $t = hD$ selbst unmittelbar zum Masse zu verwenden, was in vielen Fällen bequem ist.

Diese Regel genügt, wenn ausser dem constanten Gewichtsüberschusse D keine anderen constanten Einflüsse vorhanden sind, welche das Urtheil, wohin das Uebergewicht fällt, bestimmen können, oder falls solche durch die Anordnung der Versuche schon bei Gewinn des Werthes $\frac{r}{n}$ als compensirt angesehen werden könnten. Wo nicht, so gehen in den Werth t die constanten Miteinflüsse mit ein; er hängt dann nicht mehr blos von h und D, wenn unter D immer blos das Zusatzgewicht verstanden wird, sondern auch von diesen Miteinflüssen mit ab; die einfache Division des Werthes t mit D kann dann natürlich h nicht mehr richtig finden lassen, und der Werth t kann, auch bei constantem D, nicht mehr statt h zum vergleichbaren Masse verwandt werden, wenn nicht mit D zugleich die Miteinflüsse constant sind. Doch bietet ein gehörig eingerichtetes Verfahren mit geeigneter Anwendung der Fundamentaltabelle auch hier einen einfachen Weg der Abhülfe dar, wovon unten besonders die Rede sein wird.

Fundamentaltabelle der Methode der richtigen und falschen Fälle.

$\frac{r}{n}$	$t = hD$	diff.	$\frac{r}{n}$	$t = hD$	diff.	$\frac{r}{n}$	$t = hD$	diff.
0,50	0,0000	177	0,71	0,3913	208	0,91	0,9481	455
0,51	0,0177	178	0,72	0,4121	212	0,92	0,9936	500
0,52	0,0355	177	0,73	0,4333	216	0,93	1,0436	558
0,53	0,0532	178	0,74	0,4549	220	0,94	1,0994	637
0,54	0,0710	180	0,75	0,4769	225	0,95	1,1631	748
0,55	0,0890	178	0,76	0,4994	230	0,96	1,2379	918
0,56	0,1068	179	0,77	0,5224	236	0,97	1,3297	1234
0,57	0,1247	181	0,78	0,5460	242	0,98	1,4531	1907
0,58	0,1428	181	0,79	0,5702	249	0,99	1,6438	∞
0,59	0,1609	182	0,80	0,5951	257	1,00	∞	
0,60	0,1791	183	0,81	0,6208	265			
0,61	0,1974	186	0,82	0,6473	274			
0,62	0,2160	187	0,83	0,6747	285			
0,63	0,2347	188	0,84	0,7032	297			
0,64	0,2535	190	0,85	0,7329	310			
0,65	0,2725	192	0,86	0,7639	326			
0,66	0,2917	194	0,87	0,7965	343			
0,67	0,3111	196	0,88	0,8308	365			
0,68	0,3307	199	0,89	0,8673	389			
0,69	0,3506	202	0,90	0,9062	419			
0,70	0,3708	205						

Bemerkungen. 1) Insofern es nur auf Verhältnisse von t oder h ankommt, pflege ich die Ziffern in den Werthen t der Tabelle statt als Decimalbrüche, als ganze Zahlen zu verwenden. So wird es stets bei künftiger Anführung von nach der Tabelle berechneten Werthen geschehen. 2) Es ist nur nöthig, die Tabelle zu Werthen von $\frac{r}{n}$ über 0,5 aufzustellen. Kommen, wie diess häufig unter gegebenen Versuchsumständen bei nicht zu grossem D für diesen oder jenen der unten zu besprechenden Hauptfälle Platz greift, Werthe von $\frac{r}{n}$ unter 0,5 vor, so hat man statt $\frac{r}{n}$ vielmehr $\frac{f}{n} = \frac{n-r}{n}$ in der Spalte $\frac{r}{n}$ der Tabelle aufzusuchen, und den zugehörigen Werth t mit negativem Vorzeichen in die später anzuführenden Gleichungen zur Bestimmung von hD, hp, hq einzuführen. 3) Die Tabelle giebt für $\frac{r}{n} = 1$, d. i. für den Fall, dass alle Fälle richtig ausfallen, einen unendlichen Werth für t. Hiebei ist aber streng genommen eine unendliche Zahl Beobachtungen vorausgesetzt. Im Allgemeinen muss man D klein genug und n gross genug nehmen, dass jener Fall nicht eintritt.

Am bequemsten wird man sich der vorigen Tabelle bedienen, wenn man bei seinen Beobachtungen ein für allemal $n = 100$ nimmt, d. h. jedesmal r für 100 Fälle bestimmt, und grössere Versuchsreihen in Fractionen von 100 theilt, um nachher die einzelnen daraus erhaltenen t-Werthe zu Summen- oder Mittelwerthen zu combiniren, da die fractionsweise Behandlung ohnehin aus anderen Gesichtspuncten nöthig oder nützlich ist. In der That hat man dann in der Spalte $\frac{r}{n}$ blos die Null und das Komma vorn wegzustreichen, um die durch den Versuch erhaltenen Zahlen r unmittelbar darin zu finden; und man erspart sich nicht nur die Division zur Bildung der Werthe $\frac{r}{n}$, sondern bedarf auch keiner Interpolation, da man dann alle Versuchszahlen r unmittelbar genau in der Tabelle findet.

Wofern man ein anderes n als 100 wählt, wird man immer auf Werthe von $\frac{r}{n}$ stossen, die sich nicht genau in der vorigen Tabelle finden. Dann kann man mit Hülfe der Differenzen in der Differenzspalte die zugehörigen t-Werthe leicht durch einfache Interpolation bestimmen, wobei man bis etwa $\frac{r}{n} = 0{,}85$ höchstens um 1 bis 2 Einheiten der letzten Decimale im t-Werthe fehlen kann, was irrelevant ist, da die 4. Decimale bei Beobachtungen dieser Art zuzuziehen ohnehin als ein Luxus angesehen werden kann. Bei höheren Werthen $\frac{r}{n}$ jedoch würde man um so mehr bei dieser Interpolation irren, je höher diese Werthe sind; und ich füge daher zur Ergänzung des letzten Theils der Tabelle noch ein paar Zusatztabellen bei, worin die Werthe $\frac{r}{n}$ enger an einander liegen, und mit deren Zuziehung man für alle Fälle als Unterlage einer weiteren Interpolation ausreichen wird.

Zusatztabelle I.

$\frac{r}{n}$	$t = hD$	diff.	$\frac{r}{n}$	$t = hD$	diff.	$\frac{r}{n}$	$t = hD$	diff.
0,8300	0,6747	70	0,8825	0,8397	91	0,9300	1,0436	133
0,8325	0,6817	71	0,8850	0,8488	92	0,9325	1,0569	137
0,8350	0,6888	72	0,8875	0,8580	93	0,9350	1,0706	142
0,8375	0,6960	72	0,8900	0,8673	95	0,9375	1,0848	146
0,8400	0,7032	73	0,8925	0,8768	96	0,9400	1,0994	151
0,8425	0,7105	74	0,8950	0,8864	98	0,9425	1,1145	156
0,8450	0,7179	75	0,8975	0,8962	100	0,9450	1,1301	162
0,8475	0,7253	76	0,9000	0,9062	102	0,9475	1,1463	168
0,8500	0,7329	77	0,9025	0,9164	103	0,9500	1,1631	175
0,8525	0,7405	78	0,9050	0,9267	106	0,9525	1,1806	182
0,8550	0,7482	79	0,9075	0,9373	108	0,9550	1,1988	191
0,8575	0,7560	80	0,9100	0,9481	110	0,9575	1,2179	200
0,8600	0,7639	81	0,9125	0,9591	112	0,9600	1,2379	211
0,8625	0,7719	82	0,9150	0,9703	115	0,9625	1,2590	222
0,8650	0,7800	83	0,9175	0,9818	118	0,9650	1,2812	236
0,8675	0,7882	84	0,9200	0,9936	120	0,9675	1,3048	249
0,8700	0,7965	85	0,9225	1,0056	123	0,9700	1,3297	272
0,8725	0,8049	86	0,9250	1,0179	127	0,9725	1,3569	290
0,8750	0,8134	87	0,9275	1,0306	130	0,9750	1,3859	316
0,8775	0,8221	89				0,9775	1,4175	
0,8800	0,8308							

Zusatztabelle II.

$\frac{r}{n}$	$t = hD$	diff.	$\frac{r}{n}$	$t = hD$	diff.	$\frac{r}{n}$	$t = hD$	diff.
0,970	1,3297	107	0,980	1,4522	150	0,990	1,6450	278
0,971	1,3404	109	0,981	1,4672	156	0,991	1,6728	304
0,972	1,3513	112	0,982	1,4828	163	0,992	1,7032	343
0,973	1,3625	115	0,983	1,4991	173	0,993	1,7375	389
0,974	1,3740	119	0,984	1,5164	181	0,994	1,7764	450
0,975	1,3859	123	0,985	1,5345	192	0,995	1,8214	539
0,976	1,3982	128	0,986	1,5537	205	0,996	1,8753	677
0,977	1,4110	132	0,987	1,5742	219	0,997	1,9430	922
0,978	1,4242	138	0,988	1,5961	234	0,998	2,0352	1499
0,979	1,4380	142	0,989	1,6195	260	0,999	2,1851	∞
						1,000	∞	

An sich hat die Zahl $n = 100$ keinen besonderen Vorzug; und ich selbst habe statt $n = 100$ immer $n = 64$ zu Grunde gelegt, alle meine grösseren Versuchsreihen in Fractionen mit $n = 64$ getheilt, die aus den Fractionen besonders berechneten t-Werthe nachher addirt, und diese Summenwerthe oder die daraus gezogenen Mittelwerthe verwandt. Der Grund war der, dass 64, als Potenz der 2, einer grösseren Subdivision mit 2 fähig ist, als 100, und ich mir diese anfangs für beliebige Fractionirung offen halten wollte. Später bin ich dabei stehen geblieben, um alle Versuchsreihen in dieser Hinsicht vergleichbar zu halten, da, wie nachher zu bemerken, die Grösse des n, was man zu Grunde legt, einen gewissen Einfluss auf die Grösse der Masszahlen hat, den man überall vergleichbar halten muss. Die von mir gewöhnlich gebrauchte Fundamentaltabelle ist daher, um die Uebersetzung des Bruches $\frac{r}{n}$ in einen Decimalbruch und Interpolation eben so zu ersparen, als für obige Tabelle angegeben wurde, gleich für r, zugehörig zu $n = 64$, eingerichtet; und ich füge sie hier noch hinzu, falls sich Andere derselben Grundzahl bedienen wollen.

Fundamentaltabelle für $n = 64$.

r	$t = hD$	r	$t = hD$
33	0,0277	49	0,5123
34	0,0555	50	0,5490
35	0,0833	51	0,5873
36	0,1112	52	0,6273
37	0,1394	53	0,6695
38	0,1677	54	0,7142
39	0,1964	55	0,7619
40	0,2253	56	0,8134
41	0,2547	57	0,8696
42	0,2844	58	0,9320
43	0,3147	59	1,0026
44	0,3456	60	1,0848
45	0,3772	61	1,1851
46	0,4095	62	1,3172
47	0,4427	63	1,5231
48	0,4769	64	∞

Um meine grösseren Reihen, die stets Multipla von 64 Fällen enthalten, vergleichungsweise mit der fractionsweisen Behandlung, doch auch im Ganzen oder in grösseren Abtheilungen gleich bequem behandeln zu können, habe ich noch eine grössere Tabelle für $n = 512$, worin 64 8mal enthalten ist, construirt, woraus sich unmittelbar auch Tabellen für $n = 64$, $= 2.64$, $= 4.64$ ziehen lassen. Durch Rückgang auf die, S. 104 angezeigte, Tabelle des Integrals Θ und Zuziehung der S. 105 angegebenen Gleichung zwischen $\frac{r}{n}$ und Θ wird übrigens der Sachverständige (mit Hülfe von Interpolation) leicht Tabellen für beliebige Grundzahlen n entwerfen können. In jedem Falle aber wird man wohl thun, welche Grundzahl n man auch wählen mag, immer dieselbe für alle Versuche beizubehalten, bei grösserer Versuchszahl immer durch Fractionirung auf dieselbe zurückzugehen und seine Tabelle ein- für allemal darauf einzurichten.

Vorstehender Fundamentaltabellen kann man sich nun auch bedienen, um aus dem $\frac{r}{n}$, was man bei einem gegebenen D und P erlangt hat, auf das D zu schliessen, was bei derselben Empfindlichkeit h und mithin demselben P (da h sich mit P, aber nicht mit D ändert) erfoderlich sein würde, irgend ein beliebiges anderes $\frac{r}{n}$ zu geben, indem man nur nöthig hat, zu dem anderen $\frac{r}{n}$ in der Tabelle das zugehörige t zu suchen und folgende Proportion anzusetzen: Wie sich das $t = hD$ beider $\frac{r}{n}$ verhält, so verhält sich das D derselben. Umgekehrt kann man nach der Tabelle zu gegebenen D's die zugehörigen Werthe $\frac{r}{n}$ finden, wenn ein solcher für ein D gegeben ist, so lange h constant bleibt. Jedoch wird man auf diese Anwendungen nicht leicht praktisch durch unsere Methode geführt, indem die obige Bestimmungsweise von h oder auch nach Umständen blos t das bleibt, worauf zuletzt Alles ankommt.

Man darf nicht vergessen, dass der angegebene einfache Gebrauch der Tabelle nur unter der angegebenen Bedingung stattfindet, dass das scheinbare Uebergewicht, abgesehen von den Zufälligkeiten, blos von D abhängt; in Wirklichkeit aber hängt es noch von constanten Einflüssen der Zeit- und Raumlage mit ab; und der nach der Tabelle aus $\frac{r}{n}$ abzuleitende Werth t ist in diesem Falle nicht blos $= hD$, sondern $= h(D + M)$, wo M die algebraische Summe aller constanten Miteinflüsse ist, die noch ausser D das scheinbare Uebergewicht bestimmen. Mit Rücksicht darauf besteht die praktische Aufgabe darin, die Versuche und deren Berechnung so zu combiniren, dass M compensirt wird, und man auf denselben Werth hD zurückkommt, welcher ohne das Dasein der Miteinflüsse nach obigem einfachen Gebrauche der Tabelle erhalten werden würde.

Was nun die Versuchsweise anlangt, so ist unsere normale Ausführungsweise, von der oben die Rede war, gleich für diesen Zweck berechnet. Hier wird nach einem ganz regelmässigen Modus zwischen 4 Hauptfällen entgegengesetzter Zeit- und Raumlage des Mehrgewichtes gewechselt, nämlich 1) wo dasselbe im linksstehenden Gefässe liegt, und wo dieses zuerst aufgehoben wird; 2) wo es im linksstehenden Gefässe liegt, und wo dieses zu zweit aufgehoben wird; 3) und 4) entsprechend mit dem rechten Gefässe; also, um die 4 Hauptfälle übersichtlich aus einander zu halten, wo es liegt:

1) im linksstehenden zuerst aufgehobenen Gefässe,
2) – linksstehenden zuzweit – –
3) – rechtsstehenden zuerst – –
4) – rechtsstehenden zuzweit – –

Kurz bezeichne ich diese 4 Hauptfälle nach voriger Reihenfolge mit

$$\mathrm{I} >,\ \mathrm{II} >,\ \mathrm{I} <,\ \mathrm{II} <.$$

Die dabei erhaltenen, für jeden Hauptfall besonders zusammengezählten, richtigen Zahlen mit

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4$$

und die, ihren Quotienten durch n zugehörigen Werthe t der Fundamentaltabelle (welche nicht mehr einfach $= hD$ zu setzen sind) mit

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4$$

wobei für alle Hauptfälle ein gleiches n vorausgesetzt ist.

Der Weg der vollständigen Compensation von M beruht dann, wie leicht zu zeigen, darin, dass man die so erhaltenen t's der 4 Hauptfälle addirt und mit 4 dividirt, indem man hat

$$hD = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4}$$

wonach Division mit D wie früher den reinen Werth von h giebt, statt dessen man wiederum hD oder $4\,hD$ selbst zum Masse verwenden kann, wenn D immer constant gehalten wird.

Dieser Weg der vollständigen Compensation der Miteinflüsse M gründet sich auf folgende Puncte. Nach S. 90 findet ein von der Zeitfolge der Hebung und ein von der Raumlage der Gefässe abhängiger Miteinfluss auf die Bestimmung des scheinbaren Uebergewichtes statt. Den von der Zeitfolge der Hebung abhängigen Einfluss werde ich p, den von der Raumlage abhängigen q nennen. Bei entgegengesetzter Zeit- und Raumlage haben p und q ein entgegengesetztes Vorzeichen. Welches Vorzeichen wir für eine gegebene Lage verwenden wollen, ist willkührlich, nur dass wir bei der entgegengesetzten das entgegengesetzte verwenden. Setzen wir also bei dem ersten Hauptfalle p und q mit positivem Vorzeichen an, so nimmt M beim ersten Hauptfalle den Werth $+ p + q$, beim zweiten $- p + q$, beim dritten $+ p - q$, beim vierten $- p - q$ an, und erhalten wir also bei den 4 Hauptfällen folgende Werthe für $t = h\ (D + M)$

$$t_1 = h\ (D + p + q)$$
$$t_2 = h\ (D - p + q)$$
$$t_3 = h\ (D + p - q)$$
$$t_4 = h\ (D - p - q)$$

Die Addition dieser 4 Werthe und Division mit 4 giebt hD; auch reicht die Addition der ersten und vierten, so wie zweiten und dritten Gleichung, mit nachfolgender Division durch 2, für sich allein hin, hD finden zu lassen.

Dieselben Gleichungen sind geeignet, durch additive und subtractive Combination die Werthe von hp und hq und in Folge dessen von p und q zu geben. Man erhält nämlich so zunächst:

$$hp = \frac{t_1 - t_2 + t_3 - t_4}{4}$$

$$hq = \frac{t_1 + t_2 - t_3 - t_4}{4}$$

Dividirt man die so erhaltenen Werthe von hp, hq mit dem vorhin erhaltenen Werthe $hD = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4}$, so erhält man das Verhältniss von p, q zu D, und durch Multiplication dieses Verhältnisses mit D den Werth von p, q in Grammen, wenn D selbst in Grammen ausgedrückt ist. Auch können hp, hq eben so wie hD jedes in doppelter Weise schon durch die t's zweier Hauptfälle bestimmt werden, und in der Uebereinstimmung der so erhaltenen Werthe eine Controle gesucht werden.

Je nach der Richtung der Einflüsse p, q können dieselben eben so wohl mit negativem als positivem Vorzeichen bei dieser Bestimmungsweise hervorgehen, so dass man mit der Grösse die Richtung derselben zugleich durch diesen Weg bestimmt findet; wobei das Vorzeichen mit Rücksicht auf die Weise zu verstehen ist, wie p und q in die Grundgleichungen eingeführt sind.

Die definitive Lösung der ganzen Aufgabe mit ihren Nebenaufgaben führt also zur Bestimmung von h, p, q durch folgende Gleichungen:

$$h = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4D}$$

$$p = \frac{t_1 - t_2 + t_3 - t_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} D$$

$$q = \frac{t_1 + t_2 - t_3 - t_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} D$$

Doch wird man häufig für die anzustellenden Massvergleiche bei den Werthen hD, hp, hq oder $4hD$, $4hp$, $4hq$, oder, im Falle einer Zusammenlegung der Resultate aus mehreren, nur immer gleich viel, Fractionen bei irgend welchen grösseren Multiplis jener Werthe stehen bleiben können, wie der Sachverständige leicht übersieht.

Auf diese Weise, wodurch man zugleich eine vollständige Elimination und genaue Bestimmung der Einflüsse p, q erlangt, sind alle meine später (im 9. und 12. Kapitel) folgenden Massbestimmungen über die Unterschiedsempfindlichkeit im Felde der Gewichtsversuche gewonnen, und es können die dort anzuführenden Resultate in mehrfacher Beziehung zur Erläuterung und zum Belege dessen dienen, was hier über den Gegenstand im Allgemeinen gesagt ist. Vollständigeres und Zusammenhängenderes in dieser Hinsicht werden die »Massmethoden« bieten.

Wenn ich künftig darauf Bezug zu nehmen habe, werde ich, in Uebereinstimmung mit der S. 114 getroffenen Wahl der Vorzeichen, den von der Zeitfolge der Hebung abhängigen Einfluss p als positiv fassen, wenn vermöge desselben das erstaufgehobene, als negativ, wenn das zweitaufgehobene Gefäss unabhängig von D als das schwerere erscheint, den von der Raumlage abhängigen Einfluss q als positiv, wenn vermöge desselben das linksstehende, als negativ, wenn das rechtsstehende Gefäss als das schwerere erscheint. Sage ich also z. B., der Einfluss p wog $+ 10$ Grammen, so heisst diess, abgesehen vom Mehrgewichte erschien das erstaufgehobene Gefäss um 10 Grammen schwerer als das zweitaufgehobene. Das 12. Kapitel wird Gelegenheit geben, solche Bestimmungen anzuführen.

Auch bei gleichbleibenden Verhältnissen der Zeit- und Raumlage der Gefässe können sich p und q doch durch innere Gründe ändern, da jene objectiven Verhältnisse nur nach ihrer subjectiven Auffassungsweise in Betracht kommen, die aus unbekannten Gründen sehr veränderlich ist.

So veränderlich aber die Einflüsse p und q nach äusseren und inneren Verhältnissen sind, so hat sich doch aus der Gesammtheit meiner, unter vielfachen Abänderungen angestellten, Versuche übereinstimmend herausgestellt, dass der Einfluss p durch vermehrte Schwere der Hauptgewichte oder vorgängige Ermüdung der Arme bei einhändigem wie zweihändigem Verfahren die Tendenz hat, sich in negativem Sinne zu ändern, d. h. geringere positive, oder grössere negative Werthe anzunehmen, oder aus positiven in negative Werthe umzuschlagen, ferner, dass p und q bei einhändigem Verfahren und unter sonst gleichen Umständen grössere positive oder kleinere negative Werthe bei der Rechten als Linken haben; endlich, dass die Grösse und Richtung dieser Einflüsse nicht wesentlich von der Grösse von D abhängt. Auf weitere Details ist hier nicht einzugehen.

Man könnte die Compensation der Miteinflüsse p, q auch dadurch bewirken wollen, dass man das r der 4 Hauptfälle vor der Berechnung der t's zusammennähme, und aus dem so erhaltenen gemeinsamen $\frac{r}{n}$ nach der Fundamentaltabelle ein gemeinsames t ableitete, welches man $= hD$ setzte. Dieses Verfahren kann unter Umständen Dienste leisten, wird aber von mir als das der unvollständigen Compensation bezeichnet, indem sich wie folgt zeigen lässt, dass man nicht wirklich hiedurch genau auf den Werth hD und mithin h zurückkommt, der ohne das Dasein der Miteinflüsse erhalten worden wäre.

Sei beispielsweise der Einfluss p zu Gunsten des zweitaufgehobenen Gefässes, und nehmen wir übertreibend an, er sei ausserordentlich gross, sei unendlich gross, so versteht es sich von selbst, dass die Zufügung eines endlichen D zum einen beider Gefässe ganz einflusslos werden würde, das Urtheil zu bestimmen, und stets und jedesmal das zweitaufgehobene Gefäss als das schwerere erscheinen würde; dass daher, wenn das Gefäss mit D eben so oft zuerst als zu zweit aufgehoben wird, wie bei unseren Versuchen geschieht, und wenn die Fälle dieser beiden Zeitlagen zusammengenommen werden, wie man versucht sein könnte, als zulänglich zur Elimination von p zu halten, die Zahl der richtigen Fälle und falschen Fälle eben so gleich ausfallen wird, als wenn die Empfindlichkeit für den Gewichtsunterschied null wäre, wo man auch eine gleiche Anzahl richtiger und falscher Fälle erhält. Die Empfindlichkeit für D erscheint so zu sagen durch den Miteinfluss übertäubt. Wogegen, wenn der Einfluss der Zeitfolge der Hebung gar nicht vorhanden wäre, D sein Uebergewicht gleich sehr bei beiden Zeitlagen geltend machen, und ein seiner Grösse und der vorhandenen Empfindlichkeit angemessenes Uebergewicht der richtigen Fälle für das Gefäss, worin es liegt, begründen würde. Also kann das Zusammennehmen der richtigen Fälle bei entgegengesetzten Zeitlagen nicht äquivalent gesetzt werden dem Falle, dass kein Einfluss der Zeitlage überhaupt vorhanden gewesen. Denn begreiflich nähert man sich jenem vorausgesetzten Extreme um so mehr, je stärker der Miteinfluss wird. Und was in dieser Hinsicht von p gilt, gilt eben so von q und vom gleichzeitigen Dasein beider. Hiegegen wird man durch unser Verfahren der vollständigen Compensation, wo die Zahlen r für die verschiedenen Hauptfälle getrennt zur Ableitung von t benutzt werden, wirklich auf dasselbe Resultat bezüglich hD zurückgeführt, als wenn kein Miteinfluss p und q vorhanden wäre; indem sich derselbe dadurch eliminirt.

Wie leicht zu erachten, muss eben so, wie der Einfluss von D gegen p oder q verschwinden kann, auch das Umgekehrte stattfinden können. Wenn D sehr gross ist, so kann weder der Einfluss der successiven Aufhebung noch der Einfluss der Handstellung mehr spürbar werden, sondern das Urtheil richtet sich blos nach der Lage von D, und, sofern D gleich oft entgegengesetzte Zeit- und Raumlagen annimmt, wie es bei unserer Versuchsweise der Fall, muss die Zahl der Erst- und Zweitfälle, der rechten und linken Fälle gleich gross werden, oder sich doch mit zunehmendem D dieser Gleichheit immer mehr nähern.

Obwohl sich diess Alles leicht theoretisch ergiebt, gestehe ich doch, erst durch die Erfahrungen selbst darauf geführt worden zu sein, da bei schweren Hauptgewichten der Einfluss p manchmal so gross wurde, dass jene Art Uebertäubung des Einflusses von D schon ohne Rechnung bei den Versuchen spürbar wurde und nach der Berechnung die gesetzlichen Abhängigkeitsverhältnisse der Unterschiedsempfindlichkeit erheblich alterirt erschienen, indem ich früher immer die richtigen Fälle der verschiedenen Zeit- und Raumlage v o r der Berechnung der t-Werthe zusammennahm.

Wie leicht zu erachten, kann das Verfahren mit wiederholtem Hin- und Herwiegen der Gefässe (S. 94), welches keine Sonderung der 4 Hauptfälle gestattet, überhaupt nur diesen Erfolg der unvollständigen Compensation gewähren.

Uebrigens wird man vom Verfahren der vollständigen Compensation dann absehen können, wenn es nicht auf ein eigentliches M a s s der Unterschiedsempfindlichkeit, sondern nur auf Beurtheilung von Mehr, Weniger und Gleich ankommt, und wenn man keine oder keine starken Abänderungen der Einflüsse p, q im Laufe der Untersuchung vorauszusetzen hat. Dann wird man allerdings nicht nur die Zahlen aller 4 Hauptfälle zusammennehmen, sondern auch es unnöthig halten können, von den richtigen Zahlen zu den t-Werthen erst überzugehen, indem eine gleiche, grössere oder kleinere Zahl r bei gegebenem n unter Anwendung eines gegebenen D, dann eine gleiche, grössere oder kleinere Unterschiedsempfindlichkeit beweist. Doch darf man nicht vergessen, dass diess an die Bedingung der Constanz der Einflüsse p, q geknüpft bleibt. Es hat aber nach Vorigem eine beträchtlichere Grösse regelmässig in entgegengesetztem Sinne wechselnder constanter Einflüsse denselben Erfolg als nach S. 77 die beträchtlichere Grösse unregelmässig wechselnder Zufälligkeiten, d. i. die richtigen Zahlen r zu verkleinern, so dass bei gleicher oder selbst grösserer Unterschiedsempfindlichkeit die zusammengefassten richtigen Zahlen r der 4 Hauptfälle geringer ausfallen können, wenn die constanten Miteinflüsse grösser sind, somit sich falsche Verhältnisse auf diese Weise herausstellen können, welche nur auf dem Wege der vollständigen Compensation verschwinden. Insofern man nun bei der grossen Variabilität jener Einflüsse aus inneren Gründen (vgl. S. 115) selbst bei sorgfältig vergleichbar gehaltenen äusseren Verhältnissen nie vollkommen dafür einstehen kann, dass sie in die zu vergleichenden Werthe wirklich vergleichbar eingehen, wird der freilich umständlichere Weg der vollständigen Compensation, hiemit die Sonderung der 4 Hauptfälle und Rückgang auf die t-Werthe, immer eine grössere Sicherheit gewähren, und der Vergleich der blossen Zahlen r nur zu mehr oberflächlichen und vorläufigen Bestimmungen dienen können.

Die methodische Einhaltung der gleichen Beobachtungszahl und des regelmässigen Wechsels der 4 Hauptfälle, ohne welche die genaue Elimination und Bestimmung der constanten Einflüsse p, q nicht zu erreichen ist, setzt eine regelmässige Abänderung der Lage des Mehrgewichtes und also stete Kenntniss dieser Lage voraus. Diese Kenntniss würde bei dem S. 94 angegebenen ersten Verfahren, wo jede Entscheidung, die einen Beitrag zur Zahl r giebt, als eine Art definitive erst nach wiederholtem Hin- und Herwiegen der Gefässe gefällt wird, nothwendig einen bestimmenden Einfluss auf das Urtheil gewinnen, den sie bei dem zweiten, wo der Ausfall jeder einzelnen Doppelhebung einen Beitrag zu r liefert, verliert, da man weiss, dass dieser Ausfall in nicht berechenbarer Weise von Zufälligkeiten und von der Raum- und Zeitlage der Gefässe mit bestimmt wird, die Einbildungskraft also in der Kenntniss der Lage des D keinen Anhalt findet, einen bestimmten Erfolg der einzelnen Doppelhebungen danach vorweg zu nehmen, sondern sich nur an die Aussage der Empfindungen wie an etwas Objectives halten kann. Der Anblick meiner Beobachtungstabellen bestätigt diess. Der Ausfall der einzelnen Urtheile zeigt sich darin ganz unregelmässig und durch den Werth und die Verhältnisse von p, q im Ganzen eben so sehr und oft noch mehr als durch die Lage von D bestimmt, ja die Zahl der falschen Fälle, entgegen dem, was die bekannte Lage des D fodern würde, in vielen Versuchsreihen bei manchen Hauptfällen überwiegend über die der richtigen.

Hienach wird auch bei dem zweiten Verfahren die Zuziehung des, bei dem ersten Verfahren unentbehrlichen, die Lage des Mehrgewichtes ohne unser Wissen abändernden, Gehülfen entbehrlich, und ist sogar hier nicht zulässig, da vielmehr eine stete eigene Controle über die Lage des Mehrgewichtes und eine ganz ungestörte gleichförmige Spannung der Aufmerksamkeit während des Laufes der fortgesetzten Hebungen bei diesem Verfahren ganz wesentlich ist.

Nachdem ich einige Monate durch Versuche nach dem ersten Verfahren, unter sorgfältiger Einhaltung der Nichtkenntniss der Lage des Mehrgewichtes, angestellt habe, ehe ich zum zweiten, mit Kenntniss der Lage desselben übergieng, bin ich wohl im Stande, die Verhältnisse beider Verfahrungsarten vergleichungsweise zu beurtheilen, und würde nicht bei dem zweiten stehen geblieben sein, wenn ich mich nicht hinreichend überzeugt hätte, dass die dabei nothwendige Kenntniss von der Lage des Mehrgewichtes auch gefahrlos sei.

Sollte man diese Erklärungen nicht genügend finden, den Verdacht einer Mitwirkung der Einbildungskraft bei meinen, nach diesem Verfahren angestellten, Versuchen auszuschliessen, so muss ich auch hierüber auf die »Massmethoden« verweisen, wo theils die eingehendere Darstellung der Sachlage dieser Versuchsweise, theils die Weise selbst, wie sich ihre Ergebnisse stellen, demselben noch wirksamer begegnen dürfte. Jedenfalls aber würde ich

Einwände aus diesem Gesichtspuncte nur auf Grund sorgfältiger eigener Prüfung des Verfahrens gestatten.

Bei der Berechnung pflege ich die Versuchsreihen nicht blos nach den 4 Hauptfällen, sondern bemerktermassen auch in Fractionen nach der Zeit und anderen Umständen in der Art abzutheilen, dass jedem einzelnen t-Werthe eine Fraction von 64 einfachen Hebungen oder Fällen untergelegt wird, und die aus den Fractionen gewonnenen t-Werthe zu Summen- oder Mittelwerthen zu combiniren, statt die Ableitung des t jedes Hauptfalles aus dem Total-n, was die Reihe dafür giebt, vorzunehmen, aus Gründen, die schon mehrfach im Allgemeinen angedeutet sind und in den »Massmethoden« näher besprochen werden.

Allerdings wird die Berechnung auf diese Weise, namentlich bei grösseren Versuchsreihen, ziemlich umständlich; doch werden Variationen der constanten Einflüsse dadurch weniger schädlich.

Dabei ist zu berücksichtigen, dass der Werth hD bei Ableitung aus Fractionen im Durchschnitte etwas grösser als aus der Totalität erhalten wird, um so mehr, je kleiner die Fractionen genommen werden, wovon die Gründe sich theoretisch angeben lassen, was ich aber für jetzt übergehe. Demnach muss man zur Vergleichhaltung der Werthe die Ableitung immer aus Fractionen mit demselben n vornehmen, und das n angeben, auf welches fractionirt worden ist. Diess n ist also bei den von mir künftig anzuführenden Resultaten, wo nichts Anderes ausdrücklich angegeben ist, stets 64 gewesen, bezüglich auf einfache Hebungen.

Es giebt noch praktisch nützliche Bemerkungen über die Grösse des bei den Versuchen anzuwendenden D, das man zweckmässig weder zu klein noch zu gross nehmen darf, über die Sicherheitsbestimmungen der Resultate und manche Nebenpuncte zu machen, deren Erörterung ich auf die Massmethoden verspare.

e) Specielles zur Methode der mittleren Fehler, in Anwendung auf die Augenmass- und Tastversuche.

Die experimentale Seite betreffend, bemerke ich, dass man sich bei Augenmassversuchen besser paralleler Fäden oder Spitzen oder distanter Puncte als Zirkelweiten unter Anwendung von Schenkelzirkeln, zur Herstellung der Distanzen bedient, auf welche die Schätzung anzuwenden ist, um nicht die Schätzung der Win-