

## VII.

### Zur Theorie der astatischen Nadelpaare.

(Vorgetragen in der physikalischen Gesellschaft zu Berlin am 16. November 1860.)<sup>1</sup>

Hierzu Taf. IV. Fig. 1—3.

Als ich vor acht Jahren in London einen Multiplicator für thierisch-elektrische Versuche von Hrn. SAUERWALD's Arbeit aufstellte, stiess ich beim Astatischmachen des Nadelpaares auf eine Schwierigkeit, die mir neu war. Das Merkmal der erreichten grössten Astasie eines gegebenen Nadelpaares besteht bekanntlich darin, dass es sich senkrecht auf den magnetischen Meridian stellt.<sup>2</sup> Es gelang mir nun damals auch bei grösster Vorsicht nicht, das Nadelpaar dahin zu bringen, dass es diese Lage annähernd einnahm. Hatte sich z. B. der bezeichnete Pol der stärkeren Nadel um höchstens etwa  $25^{\circ}$  vom magnetischen Meridian entfernt, und versuchte ich durch weitere Schwächung dieser Nadel die freiwillige Ablenkung zu vergrössern, so misslang dies stets insofern, als sofort das System durch die aequatoriale Stellung hindurchschlug, so dass jetzt der unbezeichnete Pol derselben Nadel nur noch etwa um eben so viel vom Norden abstand. Mit anderen Worten, es schien nun bereits die stärkere Nadel die merklich schwächere geworden zu sein, ein Zustand, bei dem man sich nicht gern beruhigt, da alsdann die Summe der Producte aus den magnetischen Momenten der beiden Nadeln in die ablenkende Stromkraft nicht so gross wie möglich ist. Und doch zeigte dies Nadelpaar, trotz seiner geringen oder seiner zu gro- [2] ssen freiwilligen Ablenkung, sowohl ausserhalb des Multiplicators<sup>3</sup> die erforderliche Schwingungsdauer, als auch innerhalb desselben die grösste nur zu erwartende Empfindlichkeit. Es übertraf in letzterer Beziehung, und un- streitig auch an Schwingungsdauer, sonst ganz ähnliche Nadelpaare, denen ich stets ohne alle Mühe die aequatoriale Stellung ertheilt hatte. Eben

<sup>1</sup> POGGENDORFF's Annalen u. s. w. 1861. Bd. CXII. S. 1.

<sup>2</sup> Untersuchungen u. s. w. Bd. I. S. 169.

<sup>3</sup> Untersuchungen u. s. w., a. a. O. S. 167. 192.

so wenig schien es an Stabilität seines magnetischen Zustandes hinter den besten Systemen, die ich noch gehandhabt hatte, zurückzustehen.

Die letzteren Umstände liessen mich schliessen, dass die Eigenthümlichkeit dieses Nadelpaares, so leicht durch die Aequatorialebene hindurchzuschlagen, nicht wohl daher rühren könne, dass die stärkere Nadel, etwa wegen ungenügender Härtung, allzu empfindlich für den demagnetisirenden Einfluss der Streichnadel sei. So ward ich zu der Vorstellung geführt, dass jene Eigenthümlichkeit in nichts ihren Grund haben könne, als in dem vollkommeneren Parallelismus, den der Künstler in diesem Falle erreicht habe, da dies der einzige Unterschied war, den ich, für die gewöhnliche Wahrnehmung verborgen, zwischen dem neuen Nadelpaar und den älteren noch voraussetzen konnte. Eine genauere Untersuchung hat diese Meinung gerechtfertigt.

Die Gleichgewichtslage eines astatischen Systems wird bekanntlich<sup>1</sup> bestimmt durch die Gleichung

$$M \sin \alpha = M' \sin \alpha'.$$

Hier bedeutet  $M$  das magnetische Moment der stärkeren Nadel,  $\alpha$  den (spitzen) Winkel, den diese Nadel mit dem Meridiane macht,  $M'$  und  $\alpha'$  haben die gleiche Bedeutung für die andere Nadel. Es ist aber  $\alpha' = \alpha + \varphi$ , wo  $\varphi$  den an  $\alpha$  stossenden spitzen Winkel vorstellt, den die magnetischen Axen der beiden Nadeln einschliessen, folglich

$$M \sin \alpha = M' (\sin \alpha \cdot \cos \varphi + \cos \alpha \cdot \sin \varphi).$$

[3] Da  $\varphi$  nur ein sehr kleiner Winkel ist, können wir setzen:

$$\cos \varphi = 1, \sin \varphi = \varphi \sin 1'.$$

Daraus folgt

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M'}{M - M'} \cdot \varphi \sin 1'. \quad (I).$$

Die Tangenten der freiwilligen Ablenkung, als Ordinaten aufgetragen auf den Unterschied  $M - M' = d$  der magnetischen Momente als Abscissenaxe, bilden also eine auf ihre Asymptoten bezogene gleichschenklige Hyperbel, deren Potenz dem spitzen Winkel zwischen den magnetischen Axen proportional ist. Construirt man aber die Gleichung

$$\angle \alpha = f(d)$$

für verschiedene Werthe von  $\varphi$ , so erhält man Curven gleich denen in Fig. 1 Taf. IV, wo die gestrichelte Curve einem kleineren, die ausgezogene einem grösseren Werthe von  $\varphi$  entspricht. Die Curven schliessen

<sup>1</sup> Vergl. MOSER im Repertorium der Physik, Bd. I. Berlin 1837. S. 260. — HUMPHREY LLOYD in: The Transactions of the Royal Irish Academy. Vol. XXII. Dublin 1849. 4<sup>o</sup>. P. I. p. 249.

sich asymptotisch einerseits den positiven Abscissen, andererseits einer der Abscissenaxe parallelen Geraden an, deren Ordinate dem Winkelwerth von  $180^\circ$  entspricht. Sie schneiden die Ordinatenaxe in dem Punkte, der  $90^\circ$  entspricht; hier liegt zugleich ein Wendepunkt der Curven.

Aus dieser Figur erhellt die Nothwendigkeit des beschriebenen Verhaltens.

Man sieht sogleich, dass in dem Bereich der Curven, wo sie sich der Abscissenaxe anschliessen, grosse Unterschiede von  $d$  nur kleinen Aenderungen von  $\alpha$  entsprechen, in der Nähe des Nullpunktes dagegen grosse Aenderungen von  $\alpha$  kleinen Unterschieden von  $d$ . Das System wird sich daher, wie auch die Erfahrung lehrt, wenn man die stärkere Nadel folgeweise um gleiche, oder, wegen der abnehmenden Intensität der verkehrt gebrauchten Streichnadel, sogar um abnehmende Grössen schwächt, anfangs stets nur langsam vom Meridian entfernen, während, wenn sich die Nadeln schon mehr der Gleichheit nähern, selbst einem viel kleineren Sprunge im Unterschiede der Momente ein viel grösserer Sprung in der freiwilligen Ablenkung folgen [4] kann. Hat sich der Unterschied der Nadeln umgekehrt, so kehren dieselben Erscheinungen symmetrisch wieder.

Man sieht ferner, dass, je kleiner  $\varphi$ , für um so kleinere positive wie negative Werthe von  $d$  wird das System am Meridian zu kleben scheinen, und in um so grösseren Sprüngen wird es, wenn  $d$  unter einen gewissen Werth gesunken ist, schliesslich den Aequator überschreiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass es gelingen werde,  $d = 0$  zu machen, ist natürlich von  $\varphi$  unabhängig und für alle Werthe von  $\varphi$  gleich klein. Je kleiner aber  $\varphi$  ist, oder je vollkommener parallel die Nadeln sind, um so grösser wird für den kleinsten, für gewöhnlich herstellbaren positiven Werth von  $d$  die Ergänzung der freiwilligen Ablenkung zu  $90^\circ$ , um so kleiner folglich diese selber, um so grösser hingegen für den kleinsten demnächst herstellbaren negativen Werth von  $d$  die freiwillige Ablenkung, um so kleiner folglich deren Ergänzung zu  $180^\circ$  sein.

Was die Richtkraft des Systemes betrifft, so ist deren Maass bekanntlich die Diagonale des Parallelogramms, von dem man zwei Seiten erhält, wenn man auf die beiden magnetischen Axen von ihrem Kreuzungspunkt aus Stücke im Werthe der zugehörigen magnetischen Momente aufträgt. Es bedarf kaum der Erwähnung, dass der Werth dieser Diagonale von  $\varphi$  und  $d$  so abhängt, dass er für  $d = 0$  durch Wachsen von  $\varphi$  bis  $180^\circ$  jede Grösse bis zu  $2 M_0$  annimmt, und dass folglich ein nahe winkelrecht zum Meridian stehendes System durch grösseres  $\varphi$  an Richtkraft einem solchen überlegen sein kann, welches bei gleichem,

oder gar geringerem  $d$ , wegen kleineren  $\varphi$ 's, sich kaum vom Meridian entfernt.

Ich habe es nicht unterlassen, diese Folgerungen durch den Versuch zu prüfen, und an einem zur Demonstration bestimmten astatischen Systeme, dessen 14<sup>cm</sup> lange Nadeln eine hinlänglich feine Drehung um die sie verbindende Axe gestatten, mich davon überzeugt, dass mit dem spitzen Winkel zwischen den Nadeln, bei beständigem Unterschiede ihrer Momente, die freiwillige Ablenkung wächst [5] und die Schwingungsdauer abnimmt. Genauere Maassbestimmungen würden nicht leicht ausführbar sein wegen der Schwierigkeit, den kleinen Winkel zwischen den magnetischen Axen scharf zu beobachten. Sie würden übrigens keine vollkommene Uebereinstimmung mit der Rechnung ergeben. In der That hat Hr. SAUERWALD seitdem noch eine andere Eigenschaft der astatischen Nadelpaare wahrgenommen, welche jedenfalls zu ihrer Erklärung ein Princip beansprucht, das in der obigen Entwicklung noch fehlt.

Man denke sich ein Nadelpaar, dessen vollkommen parallele Nadeln vollkommen gleich stark magnetisch seien. In welcher Lage wird solches Nadelpaar, frei aufgehängt, in Ruhe verharren? Abgesehen von der Torsion, von Luftströmungen u. d. m., in jedem Azimuth, lautet die Antwort, die, so viel ich weiss, seit AMPÈRE ganz allgemein auf diese Frage gegeben worden ist. Im Einklang damit wird  $\tan \alpha$ , wenn man in (I)  $M - M'$  und  $\varphi = 0$  setzt, unbestimmt.

Hr. SAUERWALD hat mir gezeigt, dass sich diess nicht so verhält. Von ihm selber gestrichen, befinden sich seine Nadelpaare vielmehr auf dem Aequator in labilem Gleichgewicht, und haben zwei stabile Gleichgewichtslagen in geringer Entfernung vom Meridian, in deren einer die obere, in deren anderer die untere Nadel ihren bezeichneten Pol gen Norden kehrt.

Die Erklärung hiervon ist, wie mir scheint, leicht, und man hätte bei einigem Nachdenken die Erscheinung vorhersehen können. Es ist eine altbekannte, in neuerer Zeit vorzüglich durch Hrn. POGGENDORFF<sup>1</sup> bei seinen Versuchen über die doppelsinnige Ablenkung wieder hervorgehobene, endlich ganz neuerdings von Hrn. BETZ<sup>2</sup> genauer untersuchte Thatsache, dass auch sehr harter und scheinbar bis zur Sättigung magnetisirter Stahl unter dem Einfluss äusserer magnetischer Kräfte vorübergehender Magnetisirung und Demagnetisirung fähig ist. Als sol- [6] che äussere Kraft muss auf die beiden Nadeln des Systems, so-

<sup>1</sup> POGGENDORFF's Annalen u. s. w. 1838. Bd. XLV. S. 363; — 1841. Bd. LIV. S. 191.

<sup>2</sup> Ebendas. 1860. Bd. CXI. S. 107.

bald es nicht die aequatoriale Lage inne hat, die horizontale Componenté des Erdmagnetismus wirken, so zwar, dass von beiden Nadeln stets die gestärkt wird, deren bezeichneter Pol nach Norden sieht, während die andere geschwächt wird. Die Stärkung, beziehlich Schwächung, jeder Nadel wird übrigens um so beträchtlicher sein, je grösser der Cosinus des Winkels ist, den sie mit dem Meridiane macht. Ohne Weiteres sieht man nun schon ein, dass, wenn es sich um ein Paar in aller Strenge paralleler und gleich starker Nadeln handelt, durch die Wirkung der Erde das bewegliche Gleichgewicht aufgehoben, die beiden Aequatorialstellungen zu labilen, und die beiden Meridianstellungen zu stabilen Gleichgewichtslagen werden müssen. Um aber zu beurtheilen, was geschehe, wenn  $M - M'$  und  $\varphi$  nicht verschwinden, ist eine mehr eingehende Betrachtung nöthig.

Jener Umstand wird in die Theorie der astatischen Nadelpaare aufgenommen, indem man in dem allgemeinen Ausdruck für die auf das System wirkenden Kräfte,

$$X [M \sin \alpha - M' \sin (\alpha + \varphi)],$$

wo  $X$  die horizontale Componente der Erdkraft, statt  $M$  und  $M'$  beziehlich setzt

$$M + m \cos \alpha, M' - m' \cos (\alpha + \varphi).$$

Hier drücken  $m, m'$  die Grösse der secundären Momente aus, welche durch die vertheilende Wirkung der Erde, gemäss der Natur des Stahles und anderen Umständen, in jeder der Nadeln für den Fall hervorgerufen werden, dass die zugehörige Nadel im Meridian einsteht. Man erhält,  $X$  bei Seite gelassen,

$$[M + m \cos \alpha] \sin \alpha - [M' - m' \cos (\alpha + \varphi)] \sin (\alpha + \varphi) \quad (\text{II}).$$

Dieser Ausdruck gestaltet sich bequemer für die Discussion, wenn man bei Betrachtung des Vorganges, statt, wie Hr. MOSER und Hr. LLOYD, von der Lage des Systems, wo die stärkere Nadel im Meridian einsteht, d. h.  $\alpha = 0$  ist, vielmehr ausgeht von der aequatorialen Stellung, wo [7]  $\alpha = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$  ist; und wenn man demgemäss, an Stelle von  $\alpha$ , als Veränderliche, nach deren fortschreitenden Werthen die Discussion geschehen soll, einen Winkel  $\beta = 90^\circ - \left(\alpha + \frac{\varphi}{2}\right)$  einführt, der für die Aequatorialstellung = 0, in entgegengesetzter Richtung wie  $\alpha$  wächst, und als Subtrahend von  $90^\circ$  zu  $\frac{\varphi}{2}$  hinzutritt. Man hat

$$\alpha = 90^\circ - \left(\beta + \frac{\varphi}{2}\right), \alpha + \varphi = 90^\circ - \left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Der Ausdruck (II) wird dadurch zu folgendem:

$$\begin{aligned} (M - M') \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \beta - (M + M') \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \beta \\ + \frac{(m - m')}{2} \sin \varphi \cdot \cos 2 \beta \\ + \frac{(m + m')}{2} \cos \varphi \cdot \sin 2 \beta. \end{aligned}$$

Setzt man der Einfachheit halber  $m = m' = m_0$ , so behält der Ausdruck nur noch die drei Glieder

$$\begin{aligned} (M - M') \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \beta + 2 m_0 \cos \varphi \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta \\ - (M + M') \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \beta, \end{aligned}$$

die wir in der Reihenfolge, wie sie dastehen, mit  $D$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\Phi$  bezeichnen wollen. Hiervon stellt  $D$  die Kraft vor, die von der Ungleichheit der Nadeln,  $\mathfrak{M}$  die, welche von der vertheilenden Wirkung der Erde, endlich  $\Phi$  die, welche von dem mangelhaften Parallelismus der Nadeln herrührt. In der That verschwindet  $D$  mit  $d$ ,  $\mathfrak{M}$  mit  $m_0$ ,  $\Phi$  mit  $\varphi$ . Das positive Vorzeichen eines der drei Glieder bedeutet, unserer Herleitung gemäss, dass die dadurch vorgestellte Kraft in dem Sinne wirkt, wie die stärkere Nadel auf der Seite des Meridians, wo deren bezeichneter Pol dem Norden näher ist, als der unbezeichnete Pol der schwächeren Nadel, oder so, dass  $\beta$  dadurch vergrössert werde, das negative Vorzeichen das Gegentheil. erinnert man sich sodann, dass eine stabile Gleichgewichtslage dadurch bedingt [8] ist, dass bei jeder Ablenkung daraus Kräfte rege werden, die das System darin zurückzuführen streben, während für das labile Gleichgewicht das Umgekehrte geschieht, so hat es schon so keine Schwierigkeit mehr, den Gang der drei Functionen um den Kreisumfang zu verfolgen, und die aus ihrem Conflict entspringenden stabilen und labilen Gleichgewichtslagen für verschiedene relative Werthe von  $d$ ,  $\varphi$  und  $m_0$  anzugeben. •

Erleichtert wird dies indess noch durch die in Fig. 2 Taf. IV angedeutete graphische Darstellung. Die Abscissenaxe stellt den in die vier Quadranten getheilten Kreisumfang, von  $\beta = 0^\circ$  bis zu  $\beta = 360^\circ$ , geradlinig ausgestreckt vor. Die ausgezogene Curve bedeutet den Gang der Function  $\mathfrak{M}$ , die punktirte den der Function  $D$ , die gestrichelte den der Function  $\Phi$ . Pfeile an den Curven geben die Wirkungsrichtung ihrer Ordinaten an. Stabile Gleichgewichtslagen finden statt, so oft die Curve, die man als allein, oder die Resultirende der Curven, die man als zusammen bestehend betrachtet, in der Richtung der positiven Ab-

scissen verfolgt, das positive Zeichen ihrer Ordinaten mit dem negativen vertauscht; labile Gleichgewichtslagen, so oft das Gegentheil geschieht. Stabile Gleichgewichtslagen werden überdies durch Hinzutreten einer positiven Kraft zu denjenigen, aus deren Conflict sie entspringen, im Sinne der positiven Abscissen, durch Hinzutreten einer negativen Kraft im entgegengesetzten Sinne verschoben. Für labile Gleichgewichtslagen gilt das Gegentheil.

Von den sieben denkbaren Fällen des Einzel- und Zusammenvorkommens der drei Functionen sind physikalisch möglich nur die vier, bei denen die Function  $\mathfrak{M}$  theilhaftig ist. Diese sollen jetzt nach einander betrachtet werden. Erste und zweite Aequatorialstellung heissen im Folgenden die Stellungen des Systems für  $\beta = 0$  und  $\beta = 180^\circ$ , erste und zweite Meridianstellung die für  $\beta = 90^\circ$  und  $\beta = 270^\circ$ .

In Fig. 3 Taf. IV finden sich die jenen vier Hauptfällen und ihren Unterfällen entsprechenden Gleichgewichtslagen [9] des Systems in der Art angegeben, dass die labilen Lagen durch gestrichelte, die stabilen durch ausgezogene Radien bezeichnet sind, welche der den Winkel  $\varphi$  hälftenden Geraden entsprechen. Die zwischen sämmtlichen Kreisen durchgezogene Gerade  $WO$  ist der Aequator, den Meridian hat man sich in jedem Kreis senkrecht darauf zu denken, den Norden wie in einer Landkarte nach oben. Bei Fig. 3, III—V. (in den übrigen Fällen kommt darauf nichts an) ist angenommen, dass der bezeichnete Pol der stärkeren Nadel sich in der ersten Meridianstellung westlich befindet. In der ersten Aequatorialstellung ist dieser Pol alsdann nach Osten gekehrt;  $\beta$  wächst oder die Quadranten folgen aufeinander, wie es Fig. 3, I. zeigt, in der umgekehrten Richtung der Zeiger einer Uhr.

I.  $d = 0$  und  $\varphi = 0$ ;  $\mathfrak{M}$  allein ist übrig. Im Einklang mit dem bereits oben der Anschauung Entnommenen zeigt sich, dass in der ersten und zweiten Aequatorialstellung labiles, in der ersten und zweiten Meridianstellung stabiles Gleichgewicht herrscht (Fig. 3, I). Für  $\beta = 45^\circ$ ,  $= 135^\circ$  u. s. f. finden, wegen  $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$  u. s. f. beziehlich positive und negative Maxima der Kraft statt.

II.  $\varphi = 0$ ; zugleich mit  $\mathfrak{M}$  tritt die Curve  $D$  in Kraft. Die erste und zweite Aequatorialstellung sind keine labilen Gleichgewichtslagen mehr, sondern das System unterliegt darin einer Kraft beziehlich  $= \pm (M - M)$ . Die erste Meridianstellung ist unter allen Umständen eine stabile Gleichgewichtslage, indem die im ersten Quadranten durchweg positive Kraft im zweiten Quadranten durchweg negativ wird, wie sie es darin überhaupt stets ist, gleichviel welche Combination der drei Functionen man annehme, und welchen Werth man den Constanten

beilege. Was im dritten und vierten Quadranten und in der zweiten Meridianstellung stattfindet, hängt davon ab, ob

$$2 m_0 \cos \varphi \cdot \sin \beta > (M - M') \cos \frac{\varphi}{2}$$

werden könne oder nicht. Ist letzteres der Fall, so bleibt auch im dritten Quadranten die Kraft durchweg negativ, [10] im vierten wird sie, im Anschluss an den ersten, wieder durchweg positiv, die zweite Meridianstellung ist eine labile Gleichgewichtslage (Fig. 3, II, a). Kann dagegen jene Bedingung erfüllt werden, so ist das Gleichgewicht in der zweiten Meridianstellung stabil, und zu beiden Seiten dieser Stellung findet sich symmetrisch eine labile Gleichgewichtslage (Fig. 3, II, b). Dieser Fall unterscheidet sich also hinsichtlich der Gleichgewichtslagen von dem I. nur insofern, als die beiden labilen Gleichgewichtslagen, deren Ort dort der Aequator war, hier sich der zweiten Meridianstellung um gleiche Bögen genähert haben; die stabilen Lagen sind dieselben auf dem Meridian.

III.  $d = 0$  oder  $M = M' = M_0$ .  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{Q}$  kommen miteinander in Betracht. Es stellen sich sofort zwei Fälle dar.

a. Entweder nämlich ist der Unterschied

$$m_0 \cos \varphi \cdot \cos \beta - M_0 \sin \frac{\varphi}{2}$$

schon für den kleinsten denkbaren Werth von  $\beta$  negativ, d. h.

$$m_0 \cos \varphi < M_0 \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Alsdann ist die erste Aequatorialstellung eine stabile Gleichgewichtslage; die Kraft bleibt in den beiden ersten Quadranten negativ, und wird für  $\beta = 180^\circ$  positiv, so dass daselbst labiles Gleichgewicht herrscht. In den beiden anderen Quadranten kehren die Erscheinungen symmetrisch wieder (Fig. 3, III, a). Die Kraft, welche bei Störung des Systems aus seinem labilen Gleichgewicht in der zweiten Aequatorialstellung um einen kleinen Winkel rege wird, ist um  $2 m_0 \cos \varphi$  grösser als die, welche bei Störung des Systems aus seinem stabilen Gleichgewicht in der ersten Aequatorialstellung um denselben Winkel entsteht.

b. Oder  $m_0 \cos \varphi > M_0 \sin \frac{\varphi}{2}$ ; in diesem Fall ist das Gleichgewicht in der ersten Aequatorialstellung labil. Dies wird um so leichter eintreten, je grösser  $m_0 : M_0$  und je [11] kleiner  $\sin \frac{\varphi}{2} : \cos \varphi$ , oder je kleiner  $\varphi$ . Da aber für  $90^\circ$  das mit  $\cos \beta$  behaftete Glied verschwindet, so muss im ersten Quadranten eine stabile Gleichgewichtslage stattfinden, je kleiner  $\varphi$ , um so näher dem Meridian, mit dem sie für

$\varphi = 0$  zusammenfällt (I. Hauptfall). Die Kraft im zweiten Quadranten ist durchweg negativ, in der zweiten Aequatorialstellung herrscht labiles Gleichgewicht, in den beiden anderen Quadranten kehrt Alles symmetrisch wieder. Man hat also zwei labile Gleichgewichtslagen auf dem Aequator, und zwei stabile im ersten und vierten Quadranten (Taf. I Fig. 3, III, *b*).

IV. Weder  $d$  noch  $\varphi = 0$ . Alle drei Curven gelten. Weder die Aequatorial-, noch die Meridianstellungen sind ferner Gleichgewichtslagen der einen oder anderen Art, sondern in der ersten Aequatorial- und der zweiten Meridianstellung erreichen  $D$  und  $\Phi$  beziehlich ihr positives, in der zweiten Aequatorial- und der ersten Meridianstellung ihr negatives Maximum. Für  $\beta = 0$  findet demgemäss eine positive Kraft  $(M - M')$   $\cos \frac{\varphi}{2}$ , für  $\beta = 90^\circ$  eine negative Kraft  $(M + M')$   $\sin \frac{\varphi}{2}$  statt. Dazwischen muss die Gleichung  $D + \mathfrak{M} - \Phi = 0$  einmal erfüllt sein, man hat also eine stabile Gleichgewichtslage im ersten Quadranten, und zwar wegen des hinzugekommenen positiven Gliedes  $D$ , wenn sonst Alles unverändert blieb, näher dem Meridian als in dem Falle III, *b*. Im zweiten Quadranten herrscht durchweg negative Kraft; unter Umständen kann hier ein Maximum vorkommen. Im dritten Quadranten findet labiles Gleichgewicht statt, an einem Punkte, welcher um weniger als  $180^\circ$  von der stabilen Gleichgewichtslage im ersten Quadranten absteht (Fig. 3, IV, *a*). Im vierten Quadranten kann die Kraft durchweg positiv sein, und zwar kann sie ein Maximum oder ein Minimum besitzen. Es kann aber auch das Minimum soweit gehen, dass die Curve die Abscissenaxe zweimal schneidet, wo denn zwischen den Schneidepunkten die Kraft negativ, der erste Schneidepunkt eine [12] stabile, der zweite eine labile Gleichgewichtslage wird (Fig. 3, IV, *b*). Alle Symmetrie hat also jetzt aufgehört: nur für

$$(M - M') \cos \frac{\varphi}{2} = (M + M') \sin \frac{\varphi}{2}$$

sind die stabilen und labilen Gleichgewichtslagen wieder symmetrisch angeordnet in Bezug auf den Durchmesser, der den  $135^\circ$ -Punkt mit dem  $315^\circ$ -Punkt verbindet. Die Bedingung für das Auftreten der beiden Gleichgewichtslagen im vierten Quadranten heisst alsdann

$$2 m_0 \cos \varphi \cdot \cos 45^\circ > (M - M') \cos \frac{\varphi}{2} + (M + M') \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Lässt man  $d$  oder  $\varphi$  oder beide in der Vorstellung kleiner werden, so nähert sich der Zustand dem entsprechenden unter denen, die wir schon unter den einzelnen Nummern betrachtet haben. Wichtiger ist die Erwägung, was sich ereigne, wenn  $m_0$  im Vergleich zu  $M - M'$

und  $\sin \frac{\varphi}{2}$  sehr klein wird, da, wenn auch  $m_0$ , wie bemerkt, physikalisch nicht = 0 werden kann, dieser Fall doch, wegen des unvollkommenen Parallelismus der Nadeln und ihres im Vergleich zu  $m_0$  allzu beträchtlichen Unterschiedes, in Wirklichkeit gerade der am häufigsten vorkommende ist, ja bis zu Hrn. SAUERWALD der allein beobachtete war. Wie man leicht erkennt, bestehen alsdann die beiden Gleichgewichtslagen im vierten Quadranten nicht, und die beiden anderen entfernen sich, unter sonst gleichen Umständen, je kleiner  $m_0$ , um so mehr, die stabile von der ersten Meridian-, die labile von der zweiten Aequatorialstellung, um sich dem nämlichen Durchmesser zu nähern, mit dem sie für  $m_0 = 0$  zusammenfallen (Fig. 3, V). Die Lage dieses Durchmessers, zu dessen beiden Seiten die Kräfte symmetrisch vertheilt sind, wird bestimmt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M - M'}{M + M'} \cot \frac{\varphi}{2},$$

welche mit der von Hrn. LLOYD gegebenen (I) gleichbedeutend ist, und mit Hülfe einer ähnlichen Construction [13] die nämlichen Schlüsse zulässt, wobei aber die Grösse von  $\varphi$  unbeschränkt bleibt.

Versucht man nunmehr das Ermittelte auf Hrn. SAUERWALD'S Beobachtung anzuwenden, so lässt sich so viel sagen, als dass jedenfalls an seinen Nadelpaaren  $\varphi$  noch nicht ganz = 0 gewesen sei, weil nämlich die beiden stabilen Gleichgewichtslagen nicht in den Meridian fielen. Ob  $d = 0$  war oder noch einen endlichen Werth besass, würde davon abhängen, ob die stabilen Gleichgewichtslagen in gleichem oder in ungleichem Abstand vom Meridian, und dem entsprechend die labilen genau oder nicht genau auf dem Aequator stattfanden (vergl. Fig. 3, III, *b* und IV, *b*), worüber es an Bestimmungen gebricht. Unter allen Umständen setzt das Bemerkbarwerden der vertheilenden Wirkung der Erde voraus, dass  $d$  und  $\varphi$  beide äusserst klein seien, und Hrn. SAUERWALD'S Wahrnehmung liefert einen neuen Beweis dafür, dass es ihm gelungen sei, wenn nicht die magnetische Gleichheit, doch den Parallelismus seiner Nadelpaare weiter zu treiben, als irgendwer vor ihm.

Diese Wahrnehmung lehrt uns, ohne Messung der Schwingungsdauer, die bei sehr astatischen Nadelpaaren nur unsichere Ergebnisse liefert, beurtheilen, nicht allein, ob ein gegebenes Nadelpaar den höchsten Grad der Astasie erreicht habe, dessen es vermöge des Parallelismus seiner Axen fähig ist, sondern auch, ob dieser Grad so hoch sei, wie man ihn wirklich herzustellen vermag.

Eine messende Untersuchung so hoch astatischer Nadelpaare zur Prüfung obiger Theorie würde unter anderen fast unbesiegbaren Schwierig-

keiten noch ganz besonders auf die stossen, dass es an einem Mittel fehlt, eine labile Gleichgewichtslage scharf zu bestimmen. Eine solche Untersuchung würde sich übrigens um so weniger der Mühe verlohnen, als man auch jetzt noch nicht auf einen vollkommenen Einklang der Erfahrung mit der Theorie rechnen dürfte. Noch immer ist diese nur als eine erste Annäherung zu betrachten, wobei mindestens zwei Umstände [14] vernachlässigt sind, welche scheinen bei hinreichend genauer Beobachtung zu Abweichungen Anlass geben zu müssen.

Erstens haben wir  $m = m' = m_0 = \text{const.}$  gesetzt. Dies hätte wenig zu sagen, insofern dadurch nur die Natur des Stahls u. d. m. als in beiden Nadeln innerhalb gewisser Grenzen identisch aufgefasst wäre. Allein die Einführung solcher constanten Coëfficienten überhaupt, um die Stärke der durch die Erde erzeugten secundären Momente für ein gegebenes Azimuth zu bemessen, ist nicht in aller Strenge zulässig. Sie setzt voraus, was in Wirklichkeit nicht zutrifft, dass eine noch so stark magnetisirte Nadel durch eine äussere magnetische Kraft einen stets dieser Kraft proportionalen positiven oder negativen Zuwachs erhalte. Bei Berücksichtigung dieses Umstandes verwickelt sich die Sache ausserordentlich, da an Stelle von  $m, m'$  neue und unbekannte Functionen der Ablenkung der Nadeln aus dem Meridiane treten.

Für's zweite ist zu bedenken, dass auch die beiden Nadeln auf einander eine vertheilende Wirkung ausüben, durch welche sie sich gegenseitig in astatischer Anordnung verstärken, in umgekehrter schwächen.<sup>1</sup> Dies würde nicht bloss zur Folge haben, dass Messungen von  $M, M'$  an den einzelnen Nadeln, von  $M - M'$  am astatischen, oder von  $M + M'$  am verkehrt zusammengefügteten Nadelpaar nicht mit einander stimmen könnten, sondern es würde auch die Stärke der Wirkung, welche die eine Nadel auf die andere ausübt, soviel es sich ohne Rechnung übersehen lässt, abermals eine verwickelte Function des Azimuths sein. In der That würde für  $\varphi = 0$  und  $d = 0$  in den beiden Aequatorialstellungen die eine Nadel die andere eben so sehr verstärken, wie diese jene; hingegen in einer der Meridianstellungen würde die durch die Erde verstärkte Nadel die dadurch geschwächte unstreitig mehr stärken, als diese jene, so dass der Unterschied der Nadeln in dieser Stellung kleiner als in jener ausfiele.

<sup>1</sup> Vergl. POGGENDORFF in seinen Annalen. 1838. Bd. XLV. S. 375 ff.

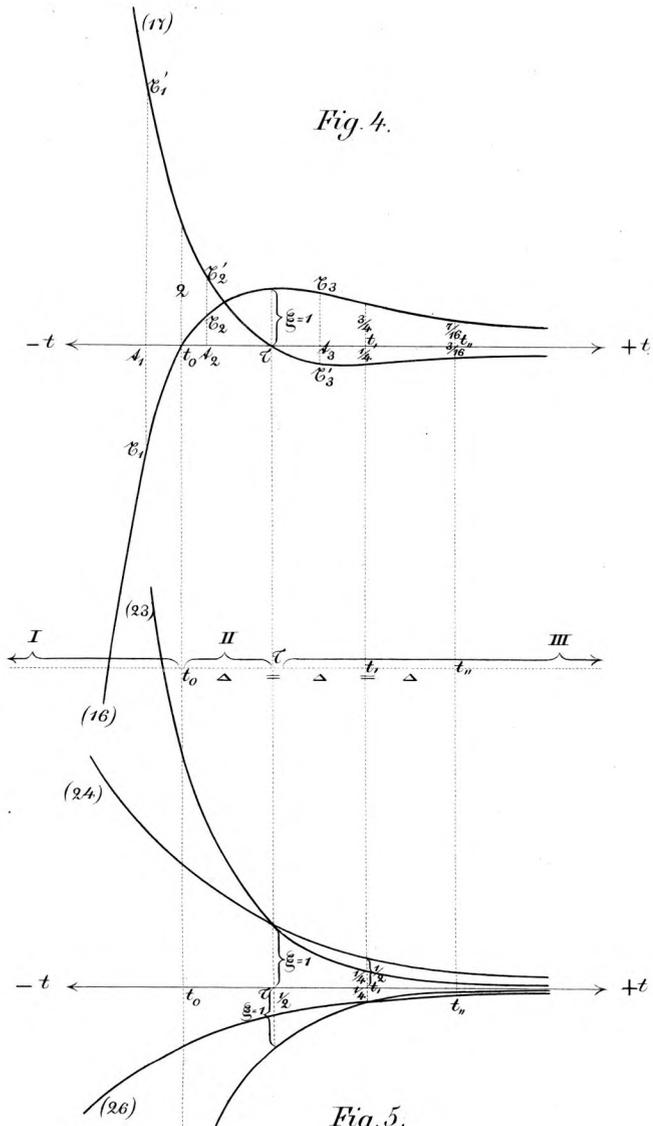


Fig. 4.

Fig. 6.

Fig. 5.

Fig. 7.

Fig. 8.

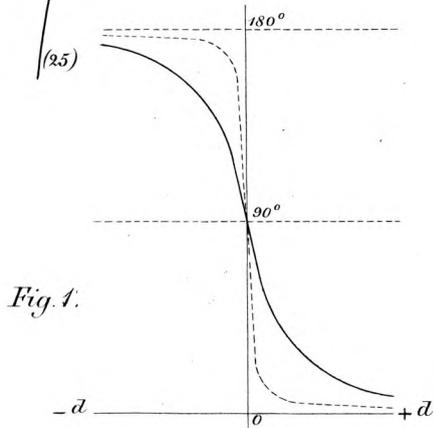


Fig. 1.

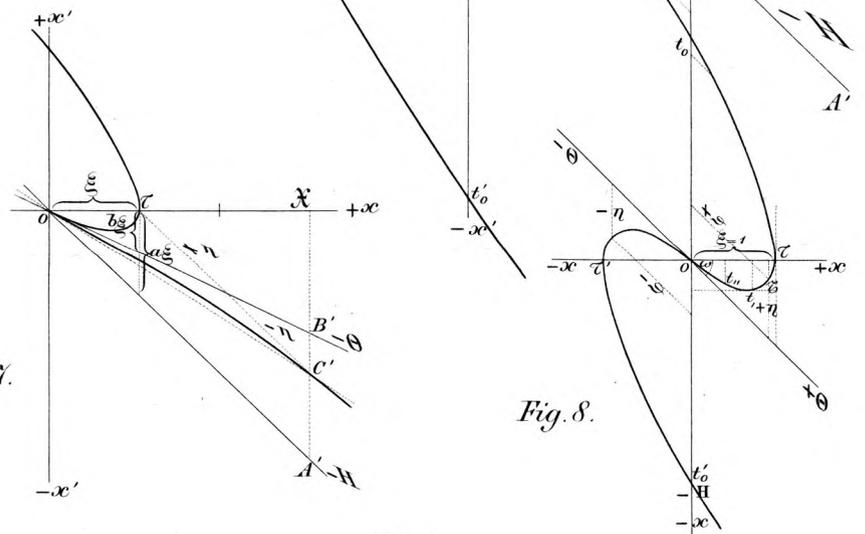


Fig. 2.

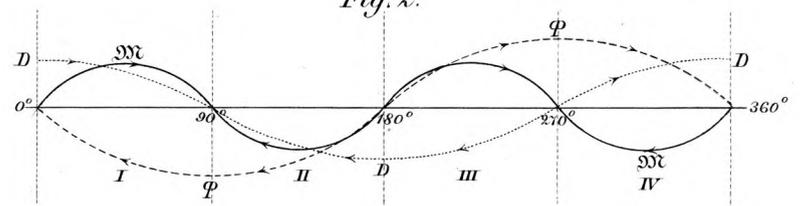


Fig. 3.

