

## XII.

### Ueber aperiodische Bewegung gedämpfter Magnete.

#### Erste Abhandlung.

(Gelesen in der Gesamtsitzung der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin  
am 5. August 1869.)<sup>1</sup>

#### §. I. Einleitung.

In seiner „Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel“<sup>2</sup> stellt GAUSS für die Bewegung eines in dämpfender Umgebung schwingenden Magnetes die Fundamentalgleichung auf

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + n^2(x - p) + 2\varepsilon \frac{dx}{dt}, \quad (\text{I})$$

wo  $x$  den dem Stand des Magnetes zur Zeit  $t$ ,  $p$  den seinem Ruhestand entsprechenden Scalentheil,  $n^2$  die magnetische Richtkraft (für die Einheit der Ablenkung) und  $2\varepsilon$  die verzögernde Kraft der Dämpfung (für die Einheit der Geschwindigkeit), beide mit dem Trägheitsmoment des Magnetes dividirt, bedeuten. Das Integral dieser Gleichung giebt GAUSS unter der Form

$$x = p + Ae^{-\varepsilon t} \sin \{ \sqrt{n^2 - \varepsilon^2} \cdot (t - B) \}, \quad (\text{II})$$

wo  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen ist,  $A$  und  $B$  die beiden durch die Integration eingeführten willkürlichen Constanten vorstellen. Ohne die verzögernde Kraft der Dämpfung ist nach GAUSS das Integral

$$x = p + A \cdot \sin \{ n(t - B) \}. \quad (\text{III})$$

[808] Nachdem GAUSS aus Gleichung (I) die Theorie der Schwingungsbewegung gedämpfter Magnete hergeleitet hat, sagt er: „Bei allem

<sup>1</sup> Monatsberichte der Akademie u. s. w. 1869. S. 807; — Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1872. t. XLIV. p. 312; — t. XLV. p. 84.

<sup>2</sup> Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837. Göttingen 1838. S. 58; — C. F. GAUSS Werke u. s. w. Göttingen 1867. 4<sup>o</sup>. Bd. V. S. 374.

„was bisher entwickelt ist, liegt die Voraussetzung zum Grunde, dass  $\epsilon$  kleiner sei als  $n$ ; im entgegengesetzten Fall nimmt das Integral der „Fundamentalgleichung eine andere Form an. Man erhält nämlich anstatt des Gliedes  $Ae^{-\epsilon t} \sin \{ \sqrt{n^2 - \epsilon^2} \cdot (t - B) \}$ , in dem Fall, „wo  $\epsilon$  grösser ist als  $n$ , zwei Glieder von der Form

$$Ae^{-(\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - n^2})t} + Be^{-(\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - n^2})t} \quad (\text{IV})$$

„und in dem Fall, wo  $\epsilon = n$  ist, von dieser

$$(A + Bt) e^{-\epsilon t}. \quad (\text{V})$$

„In beiden Fällen findet also in der Bewegung gar nichts periodisches mehr Statt, sondern der Stand nähert sich asymptotisch dem

„Ruhestande. Für unsern Dämpfer ist  $\frac{\epsilon}{n} = 0.22152$ , und es müsste

„also ein mehr als  $4\frac{1}{2}$  mal stärker wirkender Dämpfer angewandt werden,

„um solchen Erfolg hervorzubringen. Offenbar aber würde es dazu nicht

„hinreichend sein, die Metallmenge nur in demselben Verhältniss zu ver-

„grössern, in sofern diese Vergrösserung nach aussen angebracht werden

„müsste, und die äussern Schichten des Metallrahmens vergleichungs-

„weise weniger zur Inductionswirkung beitragen als die innern. Allein

„es würde nicht einmal anzurathen sein, eine Dämpfung von einer

„solchen Stärke anzuwenden, dass die Bewegung aufhörte periodisch zu

„sein, theils weil, sobald  $\epsilon$  den Grenzwert  $n$  überschreitet, die An-

„näherung an den Ruhestand wieder langsamer geschieht, theils weil

„man dann den wesentlichen Vortheil verlöre, aus zwei beliebigen, um

„ $T_1$ “ — die Schwingungsdauer des gedämpften Magnetes — „von ein-

„ander entfernten Aufzeichnungen den Ruhestand auf eine bequeme Art

„berechnen zu können.“

So weit GAUSS. Er hat den aperiodischen oder schwingungslosen Zustand gedämpfter Magnete, wie man ihn nennen kann, mit geistigem Auge gesehen, ohne ihn wirklich zu beobachten, und seine Andeutungen darüber sind meines Wissens mehr als dreissig Jahre unbeachtet geblieben, obschon [809] sie, wie sich zeigen wird, den Keim einer interessanten Theorie und, GAUSS' Meinung zuwider, eines praktisch wichtigen Verfahrens enthielten. Ich habe gefunden, dass jener Zustand sich leicht verwirklichen lässt; und noch Jedem, der von der aperiodischen Bewegung meiner Bussolenspiegel Zeuge war, sprang der Vortheil in die Augen, der daraus bei vielen Arten galvanometrischer Versuche erwachsen müsse.

Da die Darstellung, deren sich GAUSS im Obigen bedient, den Punkt, auf den es hier ankommt, nicht mit voller Klarheit hervortreten

lässt, so wird es angemessen sein, die Theorie der aperiodischen Bewegung gedämpfter Magnete zunächst etwas ausführlicher zu entwickeln.

## §. II. Allgemeine Gleichung der Bewegung gedämpfter Magnete, und periodische Bewegung solcher Magnete.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Ruhelage des Magnetes dem Nullpunkt der Theilung entspreche, also  $p = 0$  sei. Indem man sonst die GAUSS'schen Bezeichnungen beibehält, aber zur Abkürzung einen der beiden Werthe von

$$\sqrt{\varepsilon^2 - n^2} = r$$

setzt, erhält man als allgemeines vollständiges Integral der Differentialgleichung (I) die Gleichung

$$x = e^{-\varepsilon t} (Ae^{-rt} + Be^{rt}), \quad (VI)$$

deren rechte Seite mit (IV) identisch ist.

Zur Bestimmung der Constanten  $A$  und  $B$  dienen Annahmen über Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit des Magnetes. Denken wir uns den Magnet durch eine äussere Kraft, z. B. durch einen beständigen elektrischen Strom, in der Ablenkung  $\xi$  gehalten, die aber nicht grösser sei, als dass nicht die Proportionalität zwischen Ablenkung und Richtungskraft noch angenommen werden dürfe, und die Dämpfung merklich den gleichen Werth behalte. Im Augenblick  $t = 0$  werde die Kette geöffnet, und der Magnet gleichsam seiner Ruhelage zu fallen gelassen.

Für  $t = 0$  haben wir dann  $x = \xi$  und  $\frac{dx}{dt} = 0$ . Man findet

[810]

$$A = - \frac{\xi (\varepsilon - r)}{2 r},$$

$$B = + \frac{\xi (\varepsilon + r)}{2 r},$$

und Gleichung (VI) wird

$$x = \frac{\xi}{2r} \cdot e^{-\varepsilon t} \{ (\varepsilon + r) e^{rt} - (\varepsilon - r) e^{-rt} \}. \quad (VII)$$

Die Art der Bewegung des Magnetes, welche durch die Gleichungen (VI) und (VII) dargestellt wird, ist verschieden je nach der Beschaffenheit der Wurzelgrösse  $r$ .

Ist  $\varepsilon < n$ , so ist  $r = i\rho$ , wenn wir  $\sqrt{-1}$  mit  $i$ , und einen der beiden Werthe von  $\sqrt{n^2 - \varepsilon^2}$  mit  $\rho$  bezeichnen. Gleichung (VI) geht dann unmittelbar über in

$$x = e^{-\varepsilon t} \{ (A + B) \cos(\rho t) - i(A - B) \sin(\rho t) \}, \quad (VIII)$$

oder, wenn den Constanten  $A$  und  $B$  ihr Werth ertheilt wird, in

$$x = \xi \cdot e^{-\epsilon t} \left\{ \cos (\rho t) + \frac{\epsilon}{\rho} \sin (\rho t) \right\} \quad (\text{IX})$$

Diese Gleichungen zeigen eine Schwingungsbewegung des Magnetes an, bei der die Amplitude der Schwingungen in einer geometrischen Reihe abnimmt, die bekannte Bewegungsart gedämpfter Magnete. Der Magnet geht durch den Nullpunkt jedesmal dass

$$\text{tg} (\rho t) = - \frac{\rho}{\epsilon},$$

und erreicht seine grösste Elongation jedesmal dass

$$\sin (\rho t) = 0.$$

Bestimmt man eine Winkelgrösse  $\phi$  durch die Gleichung

$$\text{tg} (\rho \phi) = - \frac{\rho}{\epsilon},$$

so wird Gleichung (IX)

$$x = \xi \cdot e^{-\epsilon t} \left[ \frac{n}{\rho} \sin \{ \rho (t - \phi) \} \right]. \quad (\text{X})$$

[811] Der von der eckigen Klammer umfasste Factor in dieser Gleichung entspricht dem periodischen Factor in (IX), verschwindet für  $\text{tg} (\rho t) = - \frac{\rho}{\epsilon}$  und wird = 1 für  $\sin (\rho t) = 0$ .

Abgesehen von der von uns vorgenommenen Constantenbestimmung, ist Gleichung (X) einerlei mit (II), oder von der Form, in welcher GAUSS das Integral der Fundamentalgleichung unter der stillschweigenden Voraussetzung hingestellt hat, dass  $\epsilon < n$  sei; während er der allgemeinen und ursprünglichen Form des Integrals, nämlich der Gleichung (VI), aus der (II) erst durch eine allerdings geläufige Umformung hervorgeht, erst später bei Erwägung der Möglichkeit, dass  $\epsilon > n$  werde, gedenkt. Was GAUSS bewog, die umgeformte Gleichung (II) voranzustellen, ist sichtlich der Umstand, dass in dieser Gestalt die Gleichung sich an die (III) anschliesst, welche die Bewegung des Magnetes ohne Dämpfung darstellt. Setzt man in der Fundamentalgleichung  $\epsilon = 0$ , wodurch der die Dämpfung ausdrückende Term verschwindet, so erhält man als allgemeines vollständiges Integral den von GAUSS gegebenen Ausdruck (III), und unter denselben Annahmen über Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit, die wir für den Fall der Dämpfung gemacht haben, und für  $p = 0$ ,

$$A = - \xi, \quad B = \frac{\pi}{2 n},$$

$$x = \xi \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2} n t \right) = \xi \cdot \cos (n t), \quad (\text{XI})$$

wo  $\pi$  in üblicher Bedeutung genommen ist. Die Vergleichung der Ausdrücke (II) und (III), oder (X) und (XI), lässt den Einfluss der Dämpfung auf die Schwingungsbewegung klar übersehen, der sich theils in dem Auftreten des die Amplituden vermindernenden Factors  $e^{-\epsilon t}$ , theils in dem langsameren Wachsen des Argumentes der periodischen Function ausdrückt, wodurch eine grössere Schwingungsdauer angezeigt wird. Da es GAUSS zunächst auf diesen Vergleich ankam, der Fall  $\epsilon > n$  ihm dagegen nur als theoretisches Curiosum vorschwebte, durfte es ihm gleichgültig sein, dass bei seiner Darstellung [812] der unmittelbare Einblick in den Uebergang der periodischen zur aperiodischen Bewegung, der bei  $\epsilon = n$  stattfindet, verloren ging.

### §. III. Aperiodische Bewegung gedämpfter Magnete.

In dem Falle  $\epsilon > n$ , wo also  $r$  reell ist, gilt Gleichung (VII), wie sie dasteht. Die Bewegung ist nicht mehr periodisch, sondern die Ablenkung als Function der Zeit wird dargestellt durch den Unterschied der Ordinaten zweier Exponentialcurven, die sich der Abscissenaxe asymptotisch nähern. Der Werth  $t = \infty$  ist der einzige mögliche, der  $x = 0$  macht. Fällt also der Magnet von der Ablenkung  $\xi$ , welche beliebig gross gedacht werden kann, ohne Anfangsgeschwindigkeit herab, so wird der Nullpunkt nicht überschritten, sondern erst nach unendlicher Zeit erreicht. Die Curve der Ablenkungen bezogen auf die Zeit hebt bei  $t = 0$  mit der Ordinate  $\xi$  und mit horizontaler Tangente an, und hat zuerst einen gegen die Abscissenaxe concaven Verlauf. Die Curve der Geschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\xi n^2}{2r} \cdot e^{-\epsilon t} (e^{-rt} - e^{rt}) \quad (\text{XII})$$

ist am Ursprunge concav gegen die Abscissenaxe, und erreicht ein negatives Maximum für

$$t = \frac{1}{2r} \log. \text{nat.} \frac{\epsilon + r}{\epsilon - r}, \quad (\text{XIII})$$

welchem  $t$  also ein Wendepunkt der Curve der Ablenkungen entspricht. Nach genau der doppelten Zeit folgt der Wendepunkt der Curve der Geschwindigkeiten, die sich gleichfalls der Abscissenaxe asymptotisch anschliesst. Die Ordinaten beider Curven sind für gleiche Zeiten  $\xi$  proportional.

Eine bemerkenswerthe Vereinfachung tritt in vielen Beziehungen ein für den Grenzfall, dass  $n = \epsilon$ , oder dass  $r = 0$  wird. Das Integral der Differentialgleichung ist alsdann [vergl. oben S. 285 (V)]

$$x = (A + Bt) e^{-\epsilon t},$$

A findet man =  $\xi$ ,  $B = \varepsilon \xi$ , und man hat

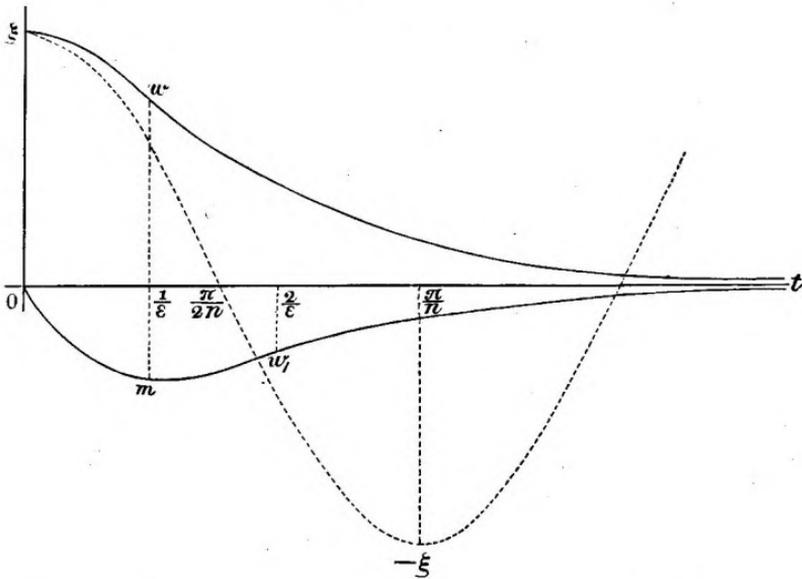
$$x = \xi \cdot e^{-\varepsilon t} (1 + \varepsilon t). \quad (\text{XIV})$$

[813] Diese Gleichung, und die davon abgeleitete

$$\frac{dx}{dt} = \xi \cdot \varepsilon^2 t e^{-\varepsilon t} \quad (\text{XV})$$

lassen sich leichter discutiren als die allgemeineren (VII) und (XII). Einige der sich dabei ergebenden Beziehungen sind in Fig. 22 dargestellt, in welcher  $\xi = 2$ ,  $\varepsilon = n = 1$  gesetzt sind. Die oberhalb der Abscissenaxe verlaufende Curve ( $\xi w t$ ) ist die der Ablenkungen, die unter-

Fig. 22.



halb ( $0 m w t$ ) die der Geschwindigkeiten. Die punktirte Curve ( $\xi, \frac{\pi}{2n}$ ,  $-\xi$ ) ist die Sinuscurve der Ablenkungen ohne Dämpfung, und stellt Gleichung (XI) für  $n = 1$  dar. Der Wendepunkt der Curve der Ablenkungen und das Maximum der Curve der Geschwindigkeiten treten ein zur Zeit

$$t = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (\text{XVI})$$

In der doppelten Entfernung vom Nullpunkt, also zur Zeit

$$t = \frac{2}{\varepsilon} \quad (\text{XVII})$$

tritt auch hier der Wendepunkt der letzteren Curve ein. Die Ordinaten der Curven sind für gleiche Zeiten  $\xi$  proportional.

[814] Wird endlich  $\epsilon$  im Vergleich zu  $n$  so gross, oder, was völliger Astasie des Magnetes entspräche,  $n$  im Vergleich zu  $\epsilon$  so klein, dass  $n$  gegen  $\epsilon$  verschwindet und  $r$  merklich  $= \epsilon$  ist, so nimmt das allgemeine vollständige Integral unserer Fundamentalgleichung abermals eine andere Gestalt an. Setzt man nämlich  $n^2 = 0$ , so wird jenes Integral

$$x = A \cdot e^{-2\epsilon t} + B, \quad (\text{XVIII})$$

wo  $A$  und  $B$  die beiden willkürlichen Integrationsconstanten bedeuten. Unter denselben Annahmen über Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit wie früher, findet man

$$A = 0, B = \xi, x = \xi. \quad (\text{XIX})$$

Der Magnet bleibt also bei  $\xi$  stehen, und die der Abscissenaxe parallele Gerade, welche  $\xi$  zur Ordinate hat, ist die Grenze, der sich die Curven der Ablenkungen bezogen auf die Zeit nähern, wenn  $n$  im Vergleich zu  $\epsilon$  immer kleiner wird. Erhält aber unter diesen Umständen der Magnet im Augenblick  $t = 0$  bei  $\xi$  einen Stoss, der ihm eine Geschwindigkeit  $\pm c$  ertheilt, so wird

$$A = \mp \frac{c}{2\epsilon}, B = \xi \pm \frac{c}{2\epsilon}, x = \xi \pm \frac{c}{2\epsilon} (1 - e^{-2\epsilon t}). \quad (\text{XX})$$

Der Magnet bewegt sich also mit abnehmender Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = \pm c e^{-2\epsilon t}$$

dem Punkte  $\xi \pm \frac{c}{2\epsilon}$  zu, wo er nach unendlicher Zeit stehen bleibt.

Der Vorgang ist der Form nach genau der nämliche wie in dem Falle, wo ein Körper nach erhaltenem Stosse sich in einem Mittel bewegt, das ihm einen seiner Geschwindigkeit proportionalen Widerstand entgegengesetzt; und dies ist die höchste Stufe des ARAGO'schen Phaenomens des Rotationsmagnetismus.

#### §. IV. Uebersicht der Bewegungsformen ungedämpfter und gedämpfter Magnete.

Je nach den Werthen von  $\epsilon$  und  $n$  nimmt also das Integral der Fundamentalgleichung die fünf verschiedenen Formen an, welche folgende Uebersicht nochmals im Zusammenhange zeigt.

$x = \xi$  und  $\frac{dx}{dt} = 0$  für  $t = 0$

[815]

$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0 \\ \varepsilon < n, \\ r \text{ imaginär,} \\ = i\rho \end{array} \right.$	$x = A \cdot \sin \{ n(t - B) \} \dots \dots \dots$ (III)	$= \xi \cdot \cos(nt)$	$\dots \dots \dots$
	$x = e^{-\varepsilon t} \{ (A + B) \cos(\rho t) - i(A - B) \sin(\rho t) \} \dots \dots \dots$ (VIII)	$= \xi \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2} - nt \right) \dots \dots \dots$ (XI)	$= \xi \cdot e^{-\varepsilon t} \left[ \frac{n}{\rho} \sin \{ \rho(t - \phi) \} \dots \dots \dots \right]$ (X)
$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = n, \\ r = 0 \\ \varepsilon > n, \\ r \text{ reell} \end{array} \right.$	$x = e^{-\varepsilon t} (A + Bt) \dots \dots \dots$ (V)	$= \xi \cdot e^{-\varepsilon t} \left\{ \cos(\rho t) + \frac{\varepsilon}{\rho} \sin(\rho t) \right\} \dots \dots \dots$ (IX)	$\dots \dots \dots$
	$x = e^{-\varepsilon t} (Ae^{-rt} + Be^{rt}) \dots \dots \dots$ (VI)	$= \xi \cdot e^{-\varepsilon t} (1 + \varepsilon t) \dots \dots \dots$ (XIV)	$= \frac{\xi}{2r} \cdot e^{-\varepsilon t} \{ (\varepsilon + r) e^{rt} - (\varepsilon - r) e^{-rt} \} \dots \dots \dots$ (VII)
$\left\{ \begin{array}{l} n = 0, \\ r = \varepsilon \end{array} \right.$	$x = A \cdot e^{-2\varepsilon t} + B \dots \dots \dots$ (XVIII)	$= \xi \cdot \dots \dots \dots$	$\dots \dots \dots$



[816] Aus (IX) wird durch  $\varepsilon = 0$  (XI), durch  $\varepsilon = n$  (XIV); aus (VII) durch  $\varepsilon = n$  (XIV), durch  $n = 0$  (XIX). Dieser Uebergang der verschiedenen Formen in einander ist das analytische Abbild des allmählichen Ueberganges, der in Wirklichkeit von den Schwingungen des ungedämpften Magnetes bis zur völligen Astasie des gedämpften Magnetes führt.

Die Schwingungsdauer des gedämpften Magnetes ist nach GAUSS

$$T_1 = \frac{\pi}{\sqrt{n^2 - \varepsilon^2}}. \quad (\text{XXI})$$

Wird also  $\varepsilon =$  oder  $> n$ , d. h. die Bewegung aperiodisch, so spricht sich dies darin aus, dass der Ausdruck für die Schwingungsdauer unendlich gross, beziehlich imaginär wird.

Der Ausdruck für das in natürlichen Logarithmen angegebene logarithmische Decrement der Schwingungen des gedämpften Magnetes ist

$$\lambda = \varepsilon T_1 = \frac{\varepsilon \pi}{\sqrt{n^2 - \varepsilon^2}}.$$

Für  $\varepsilon = n$  ist  $\lambda$  unendlich, schon die zweite Amplitude verschwindet im Vergleich zur ersten. Für  $\varepsilon > n$  ist  $\lambda$  imaginär, und auch so giebt sich die eingetretene Schwingungslosigkeit zu erkennen.

### §. V. Aperiodische Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit.

Wir wollen jetzt einen Fall betrachten, dessen Behandlung wesentlich dazu beitragen wird, unsere Kenntniss der aperiodischen Bewegung gedämpfter Magnete zu vervollständigen. Dies ist der Fall, wo die Anfangsgeschwindigkeit nicht Null ist, sondern einen negativen Werth  $-c$ , also im Sinne der Richtkraft, besitzt. Die Constanten  $A$  und  $B$  werden beziehlich in Gleichung (VI)

$$\frac{c - \xi(\varepsilon - r)}{2r}, \quad \frac{-c + \xi(\varepsilon + r)}{2r},$$

und in Gleichung (V)

$$[817] \quad \xi, \quad -c + \varepsilon \xi;$$

die Gleichungen selber

$$x = \frac{e^{-\varepsilon t}}{2r} \left[ \{c - \xi(\varepsilon - r)\} e^{-rt} - \{c - \xi(\varepsilon + r)\} e^{rt} \right], \quad (\text{XXII})$$

$$x = e^{-\varepsilon t} \{ \xi - t(c - \varepsilon \xi) \}. \quad (\text{XXIII})$$

Die Bewegung ist aperiodisch; übersteigt aber  $c$  in jedem der beiden Fälle (XXII) und (XXIII) einen gewissen Werth, den wir bald näher betrachten wollen, so wird der Nullpunkt überschritten. Noch ehe  $c$  diesen Werth erreicht, werden die Curven der Ablenkungen und der

Geschwindigkeiten von  $t = 0$  ab convex gegen die Abscissenaxe. Im Falle (XXIII) tritt dies z. B. ein bei  $c > \frac{1}{2} \varepsilon \xi$  für erstere, bei  $c > \frac{1}{3} \varepsilon \xi$  für letztere Curve, während, wie wir sehen werden, erst von  $c > \varepsilon \xi$  ab der Nullpunkt überschritten wird. Dies Ueberschreiten geschieht im Falle (XXII) zur Zeit

$$t_0 = \frac{1}{2r} \log \frac{c - \varepsilon \xi (\varepsilon - r)}{c - \varepsilon \xi (\varepsilon + r)},$$

im Falle (XXIII) zur Zeit

$$t_0 = \frac{\varepsilon \xi}{c - \varepsilon \xi}.$$

Jenseit des Nullpunktes kehrt der Magnet in seiner Bewegung um, im Falle (XXII) zur Zeit

$$t_{max} = \frac{1}{2r} \log \frac{(\varepsilon + r) \{c - \varepsilon \xi (\varepsilon - r)\}}{(\varepsilon - r) \{c - \varepsilon \xi (\varepsilon + r)\}},$$

im Falle (XXIII) zur Zeit

$$t_{max} = \frac{c}{\varepsilon (c - \varepsilon \xi)},$$

zu welchen Zeiten  $\frac{dx}{dt}$  durch Null geht. Die Curve der Ablenkungen

ist vom Nullpunkt der Scale ab concav gegen die Abscissenaxe der Zeiten; es erfolgt aber ein positives Maximum der Geschwindigkeit, sowie ein Wendepunkt der Curve der Ablenkungen im Falle (XXII) zur Zeit

[818]

$$t_w = \frac{1}{2r} \log \frac{(\varepsilon + r)^2 \{c - \varepsilon \xi (\varepsilon - r)\}}{(\varepsilon - r)^2 \{c - \varepsilon \xi (\varepsilon + r)\}},$$

im Falle (XXIII) zur Zeit

$$t_w = \frac{2c - \varepsilon \xi}{\varepsilon (c - \varepsilon \xi)}.$$

Darauf nähert sich der Magnet von der anderen Seite her asymptotisch dem Ruhestande. Auch die Curve der Geschwindigkeiten nähert sich schliesslich asymptotisch der Abscissenaxe, nachdem sie im Falle (XXII) zur Zeit

$$t_w = \frac{1}{2r} \log \frac{(\varepsilon + r)^3 \{c - \varepsilon \xi (\varepsilon - r)\}}{(\varepsilon - r)^3 \{c - \varepsilon \xi (\varepsilon + r)\}},$$

im Falle (XXIII) zur Zeit

$$t_w = \frac{3c - 2\varepsilon \xi}{\varepsilon (c - \varepsilon \xi)}$$

einen Wendepunkt gehabt hat.

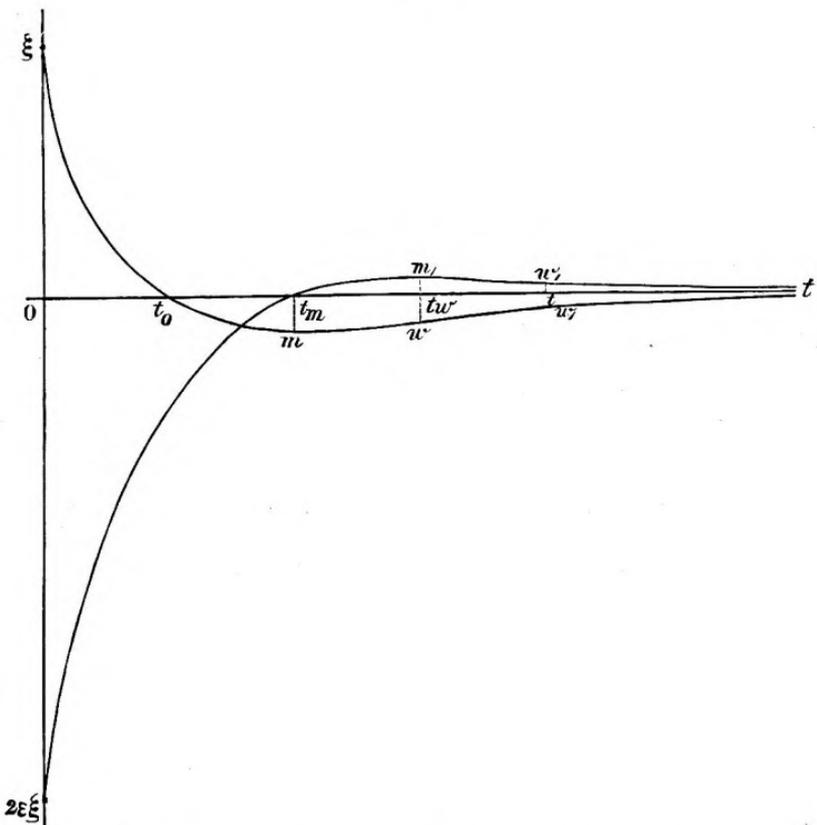
Die Zeiten  $t_0$ ,  $t_{max}$ ,  $t_w$ ,  $t_w$ , bilden also in beiden Fällen Glieder einer arithmetischen Reihe, deren beständiger Unterschied im Falle (XXII)

$$\frac{1}{2r} \log \frac{\varepsilon + r}{\varepsilon - r},$$

im Falle (XXIII)  $\frac{1}{\varepsilon}$  beträgt [vergl. oben S. 288. 289, (XII, XVI, XVII)].

In Fig. 23 zeigt  $\xi t_0 m w t$  die durch (XXIII) dargestellte Curve der Ablenkungen bezogen auf die Zeit, nebst der zugehörigen Curve der Geschwindigkeiten ( $2 \varepsilon \xi, t_m m, w, t$ ), unter sonst denselben Annahmen wie in Fig. 22; die Curve der Ablenkungen ist von ihrem negativen Maximum  $m$  ab dieselbe wie in Fig. 22, nur mit verkleinerten Ordinaten. Die Anfangsgeschwindigkeit  $c$  ist in der Figur =  $2 \varepsilon \xi = 4$  gesetzt. [819]

Fig. 23.



Da die Zeit in ihrem Fortschritt nicht negativ werden kann, haben die Ausdrücke für  $t_0$  eine wirkliche Bedeutung nur wenn in dem auf den Fall (XXII) bezüglichen Ausdruck die Grösse unter dem Logarithmus positiv und  $> 1$ , also

$$c > \xi (\varepsilon + r), \quad (\text{XXIV})$$

wo  $r$ , wie stets von hier ab, einen positiven Werth hat; oder wenn in dem auf den Fall (XXIII) bezüglichen Ausdruck

$$c > \varepsilon \xi \quad (\text{XXV})$$

ist. Noch für  $c = \xi (\varepsilon + r)$  im ersten,  $c = \varepsilon \xi$  im zweiten Falle wird der Nullpunkt erst nach unendlicher Zeit erreicht, und zwar nehmen dabei die Gleichungen (XXII) und (XXIII) beziehlich die einfachen Formen an

$$[820] \quad x = \xi \cdot e^{-(\varepsilon + r)t} \quad (\text{XXVI})$$

$$x = \xi \cdot e^{-\varepsilon t}. \quad (\text{XXVII})$$

Ist  $r = \varepsilon$ , oder gilt Gleichung (XX), so muss  $c = 2 \varepsilon \xi$  sein, damit der Magnet den Nullpunkt erreiche, und  $> 2 \varepsilon \xi$ , damit er ihn überschreite. Ist  $c = 2 \varepsilon \xi + \delta$ , so bleibt er bei  $-\frac{\delta}{2\varepsilon}$  stehen.

### §. VI. Herleitung der Bedingung für die zum Ueberschreiten des Nullpunktes nöthige Anfangsgeschwindigkeit.

Der Sinn der Bedingung für die zum Ueberschreiten des Nullpunktes nöthige Anfangsgeschwindigkeit in den durch die Gleichungen (XXII) und (XXIII) dargestellten Fällen ergibt sich aus folgender Betrachtung. Es ist offenbar gleichgültig, ob dem Magnete zu einer Zeit  $t_0$ , wo er aus einer Ablenkung  $x_0$  fallen gelassen wird, eine Geschwindigkeit  $-c_0$  ertheilt werde, oder ob er zur Zeit  $t_0$  bei  $x_0$  anlangend, dieselbe Geschwindigkeit  $-c_0 = \frac{dx_0}{dt}$  durch Fallen aus einer höheren Ablenkung  $\xi$ , gleichsam als Fallgeschwindigkeit, erlange. Keine Fallgeschwindigkeit  $\frac{dx_0}{dt}$ , die der Magnet bei  $x_0$  durch Fallen von einem beliebig hohen  $\xi$  hätte erlangen können, würde also, wenn sie dem Magnete beim Fallenlassen von  $x_0$  zur Zeit  $t_0$  als Anfangsgeschwindigkeit  $-c_0$  ertheilt würde, ihn über den Nullpunkt führen. Denn obschon in Wirklichkeit die Anwendung unserer Formeln der oben S. 286 erwähnten Beschränkung unterliegt, gelten sie in der Idee für jeden denkbaren Werth von  $\xi$ , und wenn also der Magnet die Geschwindigkeit  $\frac{dx_0}{dt} = -c_0$  durch Fallen von jenem beliebig hohen  $\xi$  erlangt hätte, würde er sich asymptotisch der Ruhelage nähern.

Die Rechnung bestätigt diese Schlüsse. Der Einfachheit halber sei die Bewegung nur eben aperiodisch, d. h.  $\varepsilon = n$ , und demgemäss ihre Gleichung [s. oben S. 289 (XIV)]

$$x = \xi \cdot e^{-\varepsilon t} (1 + \varepsilon t),$$

[821]  $x_0$  eine Ordinate zu  $t_0$ . Indem wir den Coordinatenursprung von

$t = 0$  nach  $t = t_0$  verlegen, verwandeln wir der Form nach den Vorgang in den durch Gleichung (XXIII) dargestellten, und haben also

$$x = e^{-\varepsilon(t-t_0)} \left\{ x_0 - (t-t_0) \left( -\frac{dx_0}{dt} - \varepsilon x_0 \right) \right\} \quad (\text{XXVIII})$$

Es ist aber, nach Gleichung (XIV) und (XV),

$$\begin{aligned} x_0 &= \xi \cdot e^{-\varepsilon t_0} (1 + \varepsilon t_0), \\ \frac{dx_0}{dt} &= -\xi \cdot \varepsilon^2 t_0 e^{-\varepsilon t_0}. \end{aligned}$$

Diese Werthe in (XXVIII) eingesetzt liefern wieder die ursprüngliche Gleichung (XIV), d. h. der Nullpunkt wird nicht überschritten, wenn dem Magnete bei  $x_0$  eine Geschwindigkeit ertheilt wird, wie er sie dort durch Fallen von einem beliebig hohen  $\xi$  hätte erlangen können.  $x$  kann erst Null werden, wie Gleichung (XXVIII) uns abermals vorführt, wenn

$$-\frac{dx_0}{dt} > \varepsilon x_0, \text{ d. h. } c_0 > \varepsilon x_0.$$

Dieselbe Schlussfolge führt unter der Annahme  $\varepsilon > n$  zur Bedingung

$$-\frac{dx_0}{dt} > (\varepsilon + r) x_0, \text{ d. h. } c_0 > (\varepsilon + r) x_0,$$

entsprechend der Ungleichheit (XXIV) auf S. 294. So werden wir darauf hingewiesen, dass  $\varepsilon x$ ,  $(\varepsilon + r)x$  vielleicht allgemein die Grenzgeschwindigkeiten seien, die beziehlich für  $\varepsilon = n$ ,  $\varepsilon > n$  der Magnet bei  $x$  durch Fallen aus einer beliebig hohen Anfangslage erlangen könne. Es handelt sich darum, die Richtigkeit dieser Vermuthung zu prüfen.

Dazu müssen wir von der Betrachtung der Geschwindigkeit als Function der Zeit und Anfangslage  $\frac{dx}{dt} = f(t, \xi)$ , übergehen zur Betrachtung der Geschwindigkeit als Function der Ablenkung und Anfangslage  $\frac{dx}{dt} = \phi(x, \xi)$ . Letztere Function [822] lässt sich nun zwar nicht explicit darlegen; dies verhindert aber nicht, den Verlauf der entsprechenden Curve soweit festzustellen, als für unsere Zwecke nöthig ist. Aus Gründen, die bald einleuchten werden, berücksichtigen wir zunächst nur den Fall  $\varepsilon = n$ , oder die Bewegungsgleichung (XIV).

Der Kürze halber setzen wir

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad x'' = \frac{dx'}{dt}, \quad x''' = \frac{dx''}{dt}.$$

Wir haben dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= + \xi \cdot e^{-\varepsilon t} (1 + \varepsilon t) \\ x' &= - \xi \cdot e^{-\varepsilon t} \varepsilon^2 t \end{aligned}$$

$$x'' = + \xi \cdot e^{-\epsilon t} \epsilon^2 (\epsilon t - 1)$$

$$x''' = - \xi \cdot e^{-\epsilon t} \epsilon^3 (\epsilon t - 2).$$

Nun ist allgemein

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{x''}{x'}, \quad \frac{d^2x'}{dx^2} = \frac{x'x''' - x''^2}{x'^3}.$$

Hieraus ergeben sich, durch Einsetzen obiger Werthe für  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$ , folgende Beziehungen:

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{1 - \epsilon t}{t}, \quad \frac{d^2x'}{dx^2} = \frac{1}{\xi \cdot e^{-\epsilon t} \epsilon^2 t^3}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen lässt sich der Verlauf der gesuchten Curve  $x' = f(x)$  zwischen den Grenzen  $x = 0$ ,  $x = \xi$  deshalb discutiren, weil, während  $t$  von Null bis  $\infty$  stetig wächst,  $x$  stetig von  $\xi$  bis Null abnimmt.

Aus dem Werthe von  $\frac{d^2x'}{dx^2}$  folgt zunächst, dass die Curve zwischen den angegebenen Grenzen keinen Wendepunkt hat, sondern der Abscisse stets ihre Concavität zukehrt. Aus dem Werthe von  $\frac{dx'}{dx}$  folgt ferner, dass die Curve bei  $x = 0$  aus der Abscissenaxe herabsteigt unter einem Winkel, dessen Tangente den absoluten Werth  $\epsilon$  hat. Sie hat dann für  $t = \frac{1}{\epsilon}$  (XVI) oder  $x = \frac{2}{e} \xi$  ein Maximum im absoluten Betrage von  $\frac{\epsilon}{e} \xi$ , und [823] kehrt bei  $\xi$  zur Abscissenaxe zurück mit darauf senkrechter Tangente; denn für  $t = 0$  ist

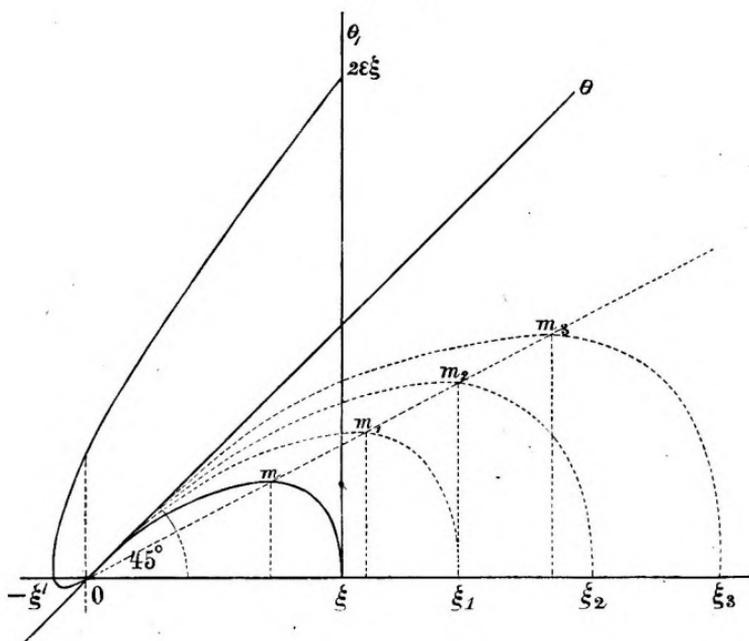
$$\frac{dx'}{dx} = \infty.$$

Unter denselben Annahmen, wie den bei Fig. 22 gemachten, sieht daher unsere Curve etwa aus, wie die ausgezogene Curve  $Om\xi$  in Fig. 24, in welcher die Geschwindigkeiten, obschon analytisch negativ, der Anschaulichkeit halber über der Abscissenaxe aufgetragen, und  $0\theta$ ,  $\xi\theta$ , die Tangenten an den letzten Elementen der Curve bei 0 und  $\xi$  sind. Da wir in der Figur  $\epsilon = 1$  gemacht haben, ist der Winkel  $\theta O\xi = 45^\circ$ .

Dies ist der allgemeine Verlauf der Curve für jeden Werth von  $\xi$ . Es erübrigt sich ein Bild davon zu machen, wie sich die Curve mit  $\xi$  ändert. Sowohl die Ordinaten als die Abscissen der Curve sind für ein gegebenes  $t$  proportional  $\xi$  (s. oben S. 289); die den verschiedenen Werthen des Parameters  $\xi$  entsprechenden Curven sind also einander ähnlich. Da die Curven vom Nullpunkte sämmtlich unter dem Winkel

[824] ausstrahlen, dessen Tangente  $\varepsilon$  ist, während der  $\xi$ -Punkt auf der Abscissenaxe weiter hinaus verlegt wird, so bilden die durch Vergrößerung von  $\xi$  aus  $0m\xi$  entstehenden Curven eine Schaar, wie Fig. 24 in den punktierten Curven  $0m_1\xi_1$ ,  $0m_2\xi_2$ , ... zeigt. Fasst man einen

Fig. 24.



Punkt einer der Curven in's Auge, so rückt in dem Maasse, wie  $\xi$  wächst, der Punkt auf der durch ihn und den Nullpunkt gelegten Geraden

$$x' = - \frac{\varepsilon t}{\varepsilon t + 1} \cdot \varepsilon x \quad (\text{XXIX})$$

weiter fort; denn alsdann wachsen Ordinaten und Abscissen des Punktes proportional  $\xi$ . Z. B. das Maximum unserer Curve  $x' = \phi(x, \xi)$  bewegt sich wegen  $t = \frac{1}{\varepsilon}$  (XVI) auf der Geraden

$$x' = - \frac{1}{2} \varepsilon x$$

(s.  $0m_1m_2m_3$  in der Figur); der dem Wendepunkte der Curve  $x' = f(t, \xi)$  (s. oben S. 296) entsprechende Punkt wegen  $t = \frac{2}{\varepsilon}$  (XVII) auf der Geraden

$$x' = - \frac{2}{3} \varepsilon x$$

u. s. w.; endlich der dem Nullpunkte nächste Punkt wegen  $t = \infty$  auf der Geraden

$$x' = - \varepsilon x$$

(s.  $O\theta$  in der Figur).

Macht man zuletzt  $\xi$  unendlich, und soll Gleichung (XIV) für ein endliches  $x$  erfüllt sein, so muss auch  $t$  unendlich sein. Erst nach unendlicher Zeit trifft der aus dem Unendlichen fallende Magnet im Endlichen ein, wobei seine Geschwindigkeit für endliche Zeit unendlich ist. Im Endlichen aber besteht, wie wir eben sahen, wegen  $t = \infty$  in Gleichung (XXIX), zwischen seiner Geschwindigkeit und Ablenkung in jedem Augenblicke die Relation

$$x' = - \varepsilon x.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Gerade  $O\theta$  in der Figur ist somit die Grenze, der sich im Endlichen [825] unsere Curven nähern, wenn  $\xi$  in's Unendliche wächst; was schon aus ihrer Aehnlichkeit ohne Weiteres erhellt, übrigens sich den Gleichungen (XIV) und (XV) auch unmittelbar entnehmen lässt. Der durch Division beider Gleichungen erhaltene Werth von  $t$  in (XIV) eingesetzt giebt

$$\varepsilon \xi = (x' + \varepsilon x) e^{-\frac{x'}{x' + \varepsilon x}};$$

eine Relation, die für  $\xi = \infty$  nur stattfindet, wenn  $x' = - \varepsilon x$  ist.

Damit sind wir am Ziele. In jeder für uns in Betracht kommenden Entfernung vom Nullpunkte können wir die Gerade  $O\theta$  für die Curve selber nehmen, in der die Geschwindigkeit des aus verhältnissmässig sehr grosser Ferne fallenden Magnetes abnehmen würde; diese Abnahme geschähe den Ablenkungen proportional. Die Ordinaten der Geraden  $O\theta$  geben folglich für jedes  $x$  die grösste Fallgeschwindigkeit an, welche der Magnet dort erlangen könnte, und mit der er also noch nicht den Nullpunkt überschreiten würde. Setzen wir  $x = \xi$ , so folgt  $-\varepsilon \xi$  als grösste bei  $\xi$  erreichbare Fallgeschwindigkeit. Es muss also im Fall  $\varepsilon = n$  dem Magnete bei  $\xi$ , damit der Nullpunkt überschritten werde, eine Anfangsgeschwindigkeit  $c > \varepsilon \xi$  (XXV) ertheilt werden; und so hat in diesem Fall unsere Vermuthung sich bestätigt.

Setzt man wie in Fig. 23  $c = 2 \varepsilon \xi = 4$ , so zeigt die Curve ( $2 \varepsilon \xi, - \xi', 0$ ) in Fig. 24, wie etwa die Curve der Geschwindigkeiten bezogen auf die Ablenkungen sich gestaltet, wenn der Magnet in Folge einer ihm bei  $\xi$  ertheilten Anfangsgeschwindigkeit den Nullpunkt überschreitet. Das Stück ( $-\xi', 0$ ) der Curve ist natürlich nach demselben Gesetze gebildet wie die Curven  $0m\xi, 0m_1\xi_1, \dots$ , und das verkleinerte Gegenstück dazu.



Die Gleichung

$$x = e^{-\epsilon t} \{ \xi - t (c - \epsilon \xi) \}$$

[(XXIII) S. 292], welche im Falle  $\epsilon = n$  die Bewegung des Magnetes mit der Anfangsgeschwindigkeit  $-c$  vorstellt, geht für  $c = \epsilon \xi$  über in

$$x = \xi \cdot e^{-\epsilon t}$$

[(XXVII) S. 295]. Anstatt als Anfangsgeschwindigkeit, können [826] wir uns  $c = \epsilon \xi$  jetzt aber auch als Fallgeschwindigkeit, durch Fallen aus dem Unendlichen entstanden, denken, indem wir annehmen, dass die Zeit von dem Augenblick an, wo der aus dem Unendlichen fallende Magnet durch die Lage  $\xi$  hindurchging, neu gezählt werde. Der aus dem Unendlichen nach unendlicher Zeit im Endlichen angelangte Magnet würde den Nullpunkt also erst nach abermals unendlicher Zeit erreichen. Uebrigens stösst hier die Umkehrung der Gleichung zwischen  $x$  und  $t$  auf keine Schwierigkeit mehr, daher in diesem Falle die Gleichung  $x' = \phi(x, \xi)$  selber darstellbar wird. Man hat

$$x' = -\xi \cdot \epsilon e^{-\epsilon t},$$

und indem man für  $e^{-\epsilon t}$  seinen Werth aus (XXVII) setzt, erhält man dem Obigen entsprechend

$$x' = -\epsilon x,$$

wie umgekehrt Gleichung (XXVII) aus der Integration des letzteren Ausdrucks hervorgeht, wenn man zur Constantenbestimmung  $x = \xi$  für  $t = 0$  setzt.

Wendet man dieselben Betrachtungen auf den Fall  $\epsilon > n$  an, so findet man

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{(\epsilon - r) e^{rt} - (\epsilon + r) e^{-rt}}{e^{-rt} - e^{rt}},$$

$$\frac{d^2 x'}{dx^2} = -\frac{1}{\xi \cdot n^2 e^{-\epsilon t}} \left\{ \frac{2r}{e^{-rt} - e^{rt}} \right\}^3.$$

Die Curve  $x' = \phi(x, \xi)$  ist also auch in diesem Fall ohne Wendepunkt, concav gegen die Abscissenaxe, mit einem Maximum für den oben (XIII) gefundenen Werth von  $t$ ; die Tangente des Winkels am Nullpunkte beträgt  $\epsilon - r$ ; am  $\xi$ -Punkte ist der Winkel ein rechter. Die Curven für verschiedene  $\xi$  sind einander ähnlich. Für  $\xi = \infty$  muss auch hier  $t = \infty$  sein, wenn  $x$  endlich sein soll; als diesem Fall entsprechende Grenzgestalt der Curvenschaar erhält man aber hier die Gerade

$$x' = -(\epsilon - r)x;$$

$(\epsilon - r)\xi$  ist die bei  $\xi$  erreichbare Grenzgeschwindigkeit. Auch hier folgt dasselbe unmittelbar aus dem durch Eliminiren von  $t$  zwischen (VII) und (XII) erhaltenen Ausdruck

[827]

$$\xi^{2r} = \frac{\left(x + \frac{x'}{\varepsilon + r}\right)^{\varepsilon + r}}{\left(x + \frac{x'}{\varepsilon - r}\right)^{\varepsilon - r}}$$

dessen rechte Seite für  $x' = -(\varepsilon - r)x$  unendlich wird.

Als obere Grenze der Anfangsgeschwindigkeit, welche dem Magnete bei  $\xi$  ertheilt, ihn für  $\varepsilon > n$  noch nicht über den Nullpunkt führt, fanden wir oben S. 294 (XXIV) den Werth  $(\varepsilon + r)\xi$ . In diesem Falle trifft also unsere Vermuthung hinsichtlich der Bedeutung dieser Grenze in etwas anderer Form zu, als in dem Fall  $\varepsilon = n$ . Es muss die dem Magnete bei  $\xi$  ertheilte Anfangsgeschwindigkeit die bei  $\xi$  erreichbare höchste Fallgeschwindigkeit, unstreitig der stärkeren Dämpfung halber, noch um mehr als  $2r\xi$  übertreffen, damit der Nullpunkt überschritten werde.

Eliminirt man mit Hülfe von Gleichung (XXVI)  $t$  in der durch Differenziren derselben Gleichung erhaltenen Gleichung

$$x' = -\xi \cdot (\varepsilon + r) e^{-(\varepsilon + r)t},$$

so ergibt sich

$$x' = -(\varepsilon + r)x$$

als Gleichung der auf die Scale aufgetragenen Anfangsgeschwindigkeiten, welche den Magnet noch nicht über den Nullpunkt führen. Als Gleichung der ebenso aufgetragenen Grenzgeschwindigkeiten beim Fall aus dem Unendlichen fanden wir so eben

$$x' = -(\varepsilon - r)x.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert, wenn man für  $t = 0$  abermals  $x = \xi$  macht, zwischen  $x$  und  $t$  die Relation

$$x = \xi \cdot e^{-(\varepsilon - r)t}.$$

Für  $r = \varepsilon$  hat man  $x' = 2\varepsilon(\xi - x) - c$ . Erhielte der völlig astatistische Magnet bei  $\xi$  die Geschwindigkeit  $-2\varepsilon\xi$ , so nähme diese in der Geraden  $x' = -2\varepsilon x$  ab (s. S. 290 (XX), 295).

### §. VII. Verhalten aperiodisch sich bewogender Magnete bei kurzer Einwirkung eines Stromes.

Setzen wir jetzt den Fall, zur Zeit Null wirke ein constanter Strom von der Stärke  $I$  eine sehr kurze Zeit  $\tau$  auf [828] den in seiner Ruhelage befindlichen Magnet. Der Strom wird dem Magnet eine, diesmal positive Geschwindigkeit

$$c = \frac{\mu I \tau}{M} \quad (\text{XXX})$$

ertheilen, wenn wir mit  $M$  sein Trägheitsmoment, mit  $\mu$  das Drehungsmoment bezeichnen, welches der Strom von der Stärke Eins in dem Multiplicatordraht auf den Magnet in seiner Ruhelage übt. Die Constanten  $A$  und  $B$  in der allgemeinen Gleichung (VI) findet man, wenn man für  $t = \tau$  (sehr nahe)  $= 0$ ,  $x = 0$  und  $\frac{dx}{dt} = c$  setzt, beziehlich (sehr nahe)

$$= -\frac{c}{2r} \text{ und } = +\frac{c}{2r},$$

und man erhält als Gleichung der Bewegung

$$x = \frac{c}{2r} (e^{-(\epsilon - r)t} - e^{-(\epsilon + r)t}). \quad (\text{XXXI})$$

Der Magnet kehrt also um zur Zeit

$$t_{max} = \frac{1}{2r} \log \frac{\epsilon + r}{\epsilon - r},$$

und nähert sich wieder asymptotisch der Ruhelage. Einfacher gestalten sich auch hier die Dinge für den Grenzfall  $\epsilon = n$ . In der allgemeinen Gleichung (V) wird unter den eben gemachten Voraussetzungen  $A = 0$  und  $B = c$ , die Gleichung selber wird

$$x = cte^{-\epsilon t}. \quad (\text{XXXII})$$

Die Curve der Ablenkungen ist am Ursprunge concav gegen die Abscissenaxe, ihre Ordinate erreicht bei

$$t_{max} = \frac{1}{\epsilon} \quad (\text{XXXIII})$$

ein Maximum im Betrage von

$$x_{max} = \frac{c}{\epsilon e}, \quad (\text{XXXIV})$$

dem bei

$$t_w = \frac{2}{\epsilon}$$

[829] ein Wendepunkt folgt. Der Ausdruck für  $t_{max}$  erlaubt durch einen beliebigen dem Magnet ertheilten Stromstoss  $\epsilon = n$  numerisch zu bestimmen. Die Curve der Geschwindigkeiten hebt bei  $t = 0$  mit der Ordinate  $c$  an, und ist convex gegen die Abscissenaxe, bis sie diese bei  $t_{max}$  schneidet. Sie erreicht zur Zeit  $t_w$  ein negatives Maximum und hat einen Wendepunkt bei

$$t_w = \frac{3}{\epsilon}.$$

Die oben S. 293 bemerkte arithmetische Reihe der Zeiten kehrt also hier wieder.<sup>1</sup>

§. VIII. Verhalten aperiodisch sich bewegender Magnete bei Ablenkung durch einen beständigen Strom.

Bewegt sich der Magnet unter dem Einfluss eines ihn auf dem Nullpunkte zur Zeit Null treffenden beständigen Stromes von der Stärke  $I$ , aber von längerer Dauer, einer neuen Gleichgewichtslage unter dem vereinten Einflusse dieses Stromes und der Richtkraft zu, so wird die Differentialgleichung der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dx}{dt} + n^2x = k,$$

wo die Constante  $k$  die innerhalb derselben Grenzen, welche für die Proportionalität der Richtkraft und der Ablenkung gelten, von der letzteren unabhängige ablenkende Kraft, dividirt durch das Trägheitsmoment, vorstellt. Das allgemeine vollständige Integral heisst jetzt

$$x = \frac{k}{n^2} + e^{-\varepsilon t} (Ae^{-rt} + Be^{rt}). \quad (\text{XXXV})$$

[830] Indem man, für  $t = 0$ ,  $x = 0$  und  $\frac{dx}{dt} = 0$  setzt, erhält man

$$A = \frac{k}{n^2} \cdot \frac{\varepsilon - r}{2r}, \quad B = -\frac{k}{n^2} \cdot \frac{\varepsilon + r}{2r}.$$

Bezeichnet man mit  $H$  die horizontale Componente der Erdkraft, mit  $m$  das magnetische Moment des Magnetes für parallele Kräfte, und bemerkt man, dass

$$n^2 = \frac{mH}{M}, \quad (\text{XXXVI})$$

so findet man

$$\frac{k}{n^2} = \frac{\mu I}{mH}.$$

<sup>1</sup> Für den Fall  $\varepsilon < n$  hat Hr. W. WEBER die Formel entwickelt

$$x_{\max} = c \frac{T}{\pi} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}},$$

wo  $T$  die Schwingungsdauer ohne Dämpfung,  $\lambda$  das logarithmische Decrement bedeuten (Elektrodynamische Maassbestimmungen u. s. w. Leipzig 1850. S. 346. Anm.). Diese Formel ist für  $\varepsilon = n$  identisch mit unserer Formel (XXXIV).

Durch Einsetzen der Werthe für  $A$ ,  $B$  und  $\frac{h}{n^2}$  in (XXXV) wird

$$x = \frac{\mu I}{mH} \left[ 1 - \frac{e^{-\epsilon t}}{2r} \{(\epsilon + r) e^{rt} - (\epsilon - r) e^{-rt}\} \right]. \quad (\text{XXXVII})$$

Die Bewegung erfolgt also, wie zu erwarten, nach demselben Gesetze wie beim Fallenlassen des Magnetes, nur dass an die Stelle von  $\xi$  der Nullpunkt, an die des Nullpunktes die beständige Ablenkung  $\frac{\mu I}{mH}$  tritt, welche, ohne überschritten zu werden, schwingungslos und in der Theorie erst nach unendlicher Zeit erreicht wird.

Für  $\epsilon = n$  kommt in Gleichung (XXXVII) statt des von 1 abzuziehenden Termen

$$e^{-\epsilon t} (1 + \epsilon t)$$

zu stehen.

#### §. IX. Sonstige Combinationen von Lage und Geschwindigkeit des Magnetes und von ihn treffenden Kräften.

Trifft ein positiver Stromstoss den Magnet im Augenblicke des Fallenlassens, so gelten die Formeln (XXII) und (XXXIII), nur dass  $c$  sein Zeichen ändert. Der Magnet schlägt weiter aus, kehrt um und nähert sich asymptotisch dem Nullpunkte.

Wird der im Fallen begriffene Magnet bei  $x$ , zur Zeit  $t$ , von einem Stosse getroffen, der ihm eine Geschwindigkeit  $\pm c$  [831] ertheilt, so tritt eine Discontinuität der Bewegung ein. Je nachdem  $\epsilon <$  oder  $= n$ , gelangt man zu den Gleichungen

$$x = \frac{\xi}{2r} \{(\epsilon + r) e^{-(\epsilon - r)(t, + t)} - (\epsilon - r) e^{-(\epsilon + r)(t, + t)}\} \\ \pm \frac{c}{2r} \{e^{-(\epsilon - r)t} - e^{-(\epsilon + r)t}\} \quad (\text{XXXVIII})$$

$$x = \xi \cdot e^{-\epsilon(t, + t)} \{1 + \epsilon(t, + t)\} \pm cte^{-\epsilon t}. \quad (\text{XXXIX})$$

Hier ist  $t$  die vom Augenblicke des Stosses an neu gezählte Zeit. Das rechte Glied von Gleichung (XXXVIII) und (XXXIX) ist die algebraische Summe der rechten Glieder beziehlich von Gleichung (VII) und (XXXI), Gleichung (XIV) und (XXXII), nur dass im ersten Term  $t, + t$  für  $t$  steht: es findet, wie dies nicht anders sein kann, Superposition der Bewegungen statt.

Ist  $c$  negativ, so kann hier wieder der Nullpunkt überschritten werden; doch muss im Falle (XXXVIII)

$$c - \frac{dx_1}{dt} > (\varepsilon + r)x_1,$$

im Falle (XXXIX)

$$c - \frac{dx_1}{dt} > \varepsilon x_1,$$

sein (vergl. oben §. VI).

Schwankt ein beständiger Strom, der den Magnet abgelenkt hält, so dass seine Stärke von  $I$  sich plötzlich zu  $I_1$  ändert, so erhält man, je nachdem  $\varepsilon >$  oder  $= n$ , die Gleichungen

$$x = \frac{\mu}{mH} \left[ I_1 + (I - I_1) \frac{e^{-\varepsilon t}}{2r} \{(\varepsilon + r) e^{rt} - (\varepsilon - r) e^{-rt}\} \right],$$

$$x = \frac{\mu}{mH} \{I_1 + (I - I_1) e^{-\varepsilon t} (1 + \varepsilon t)\}:$$

der Magnet geht schwingungslos in die neue Lage über.

Ein Hin- und Hergang des aperiodischen Magnetes ist nur möglich, wie man jetzt auch ohne Rechnung sicher schliessen kann, wenn die Gleichgewichtslage selber bei positiver Schwankung der Stromstärke wieder zurück-, bei negativer Schwankung wieder vorspringt, und wenn entweder dieser zweite Sprung die Gleichgewichtslage wieder auf die andere Seite des Magnetes [832] verlegt, oder der zweite Sprung zu einer Zeit geschieht, wo in Folge des ersten Sprunges der Magnet noch eine dem zweiten Sprunge entgegengesetzte Geschwindigkeit hat; im letzteren Falle darf aber, soll die neue Gleichgewichtslage überschritten werden, diese Gleichgewichtslage höchstens in solcher Entfernung  $\xi$ , vor dem ihr entgegenkommenden Magnete stehen bleiben, dass seine Geschwindigkeit, je nachdem  $\varepsilon >$  oder  $= n$ , beziehlich noch  $> (\varepsilon + r) \xi$ , oder  $> \varepsilon \xi$ , ist (vergl. oben §. VI).

§. X. Nähere Bestimmung der experimentellen Bedingungen, unter denen die Bewegung gedämpfter Magnete aperiodisch wird.

Es wird jetzt nützlich sein, in den Ausdruck

$$r = \sqrt{\varepsilon^2 - n^2}$$

statt der von GAUSS aus analytischen Gründen angenommenen und bisher auch von uns benutzten Symbole  $2\varepsilon$  und  $n^2$  die wirklichen Grössen zu setzen, die darin eingehen. Für  $n^2$  haben wir schon oben seinen Werth  $\frac{mH}{M}$  eingeführt (XXXVI), den wir aber noch näher so bestimmen wollen, dass wir für  $m$  schreiben  $(\iota + \eta H) m'$ , wo  $\iota$  die permanente,

$\eta H$  die durch  $H$  inducirte<sup>1</sup> Intensität des Magnetes,  $m'$  sein Moment für parallele Kräfte bei der Intensität Eins bedeuten. Man hat also

$$n^2 = \frac{(\iota + \eta H) m' H}{M}$$

Bezeichnen wir sodann mit  $m'$  das Drehungsmoment, welches für die magnetische Intensität Eins auf den Magnet ausgeübt wird durch eine Strömung im Dämpfer, wie sie der Magnet bei seiner Winkelbewegung erzeugt, und mit  $\varkappa$  eine Constante, welche unter anderen die Inductionsconstante und das Leitvermögen des Dämpfers zu Factoren hat, so ist

$$[833] \quad 2\varepsilon = - \left( - \frac{\varkappa m'^2 (\iota + \eta H)^2}{M} \right).$$

Durch Einsetzen dieser Werthe wird

$$r = \frac{1}{2M} \sqrt{\iota + \eta H} \sqrt{\varkappa^2 m'^4 (\iota + \eta H)^3 - 4 m' H M}.$$

Bei gleicher Dämpfung wird also  $r$  um so eher = 0 oder reell, d. h. die Bewegung des Magnetes um so eher aperiodisch, je kleiner  $M$ , und je kleiner  $H$ . Zwar nimmt, durch Verkleinern von  $H$ , auch der erste Term unter dem Wurzelzeichen ab, doch ist  $\eta$  so klein, dass diese Abnahme neben der des zweiten Termen hier nicht in Betracht kommt.

Da es GAUSS bei seinen Zwecken, wie wir sahen (vergl. oben S. 285), nicht daran lag, den aperiodischen Zustand herbeizuführen, so hat er nicht daran gedacht, statt durch Vergrössern von  $\varkappa m'^2$ , dies durch Verkleinern von  $HM$  zu thun, wozu sich zunächst das einfache Mittel bietet, die Wirkung der Erdkraft auf den Magnet zu schwächen, und so  $H$  zu vermindern. Dazu wird im Princip jede der drei Methoden des Astasirens taugen: die Verbindung zweier Magnete zur Doppelnadel, die Aufstellung der Drehungsaxe des Magnetes in der Richtung der Inclinationsnadel, endlich das HAUY'sche Verfahren, bei dem ein verkehrt genäherter Magnetstab der Erde entgegenwirkt, aus einleuchtenden Gründen jedoch am besten die letztere Methode, deren ich mich zu meinen thierisch-elektrischen Versuchen längst ausschliesslich bediene. Bei dieser wird, wenn  $S$  die horizontale Componente der Kraft des HAUY'schen Stabes bezeichnet,

<sup>1</sup> LAMONT im Repertorium der Physik. Berlin 1846. Bd. VII. S. LIV. — Vergl. meine Untersuchung über den Einfluss, den die temporäre Magnetisirung der einzelnen Nadeln einer astatischen Doppelnadel durch die Erde auf die Gleichgewichtslage des Systemes übt. POGGENDORFF's Annalen u. s. w. 1861. Bd. CXII. S. 1. [S. oben Abh. VII., S. 137.]

$$\varepsilon = \frac{\alpha m'^2 \{ \iota + \eta(H - S) \}^2}{2 M}, \quad (\text{XL})$$

$$r = \frac{1}{2 M} \sqrt{\iota + \eta(H - S)} \sqrt{\alpha^2 m'^4 \{ \iota + \eta(H - S) \}^3 - 4 m'(H - S) M}.$$

An der WIEDEMANN'schen Bussole, welche mit einem starken Dämpfer versehen ist,<sup>1</sup> gelingt es daher ohne jede [834] Schwierigkeit, durch fortgesetzte Annäherung des von mir daran angebrachten HAUÿ'schen Stabes den Magnetspiegel in den aperiodischen Zustand zu versetzen. Um bequem darüber zu experimentiren, leitet man von dem Strom einer beständigen Kette mittels des Compensators<sup>2</sup> einen Zweig durch die Rollen der Bussole und unterbricht den Stromzweig mittels eines Schlüssels im Bussolkreise. Indem man den Magnet stets aus der nämlichen Ablenkung ohne Anfangsgeschwindigkeit fallen lässt, sieht man zuerst in dem Maasse, wie man den HAUÿ'schen Stab nähert, das logarithmische Decrement wachsen. Dann kommt ein Punkt, wo zwar der Magnet noch über den Nullpunkt hinausschwingt, aber keine dritte Elongation mehr unterschieden werden kann. Die zweite Elongation wird endlich auch unmerklich, und nun ist das logarithmische Decrement unendlich geworden, und der aperiodische Zustand da. Dieser Punkt lässt sich natürlich nicht mit vollkommener Schärfe bestimmen, wegen der Schwierigkeit zu unterscheiden, ob eine rückgängige Bewegung des Magnetes um wenige Zehntel eines Scalentheiles, welche mehrere Secunden dauert, wirklich als Rückkehr zur Gleichgewichtslage aufzufassen sei. Uebrigens handelt es sich hier zuletzt um ziemlich kleine Verschiebungen des HAUÿ'schen Stabes. Scheint der aperiodische Zustand eben erreicht und entfernt man den Stab wieder auch nur um 1<sup>mm</sup> bei etwa 300<sup>mm</sup> Abstand seiner Mitte von der des Spiegels, so wird bei grösseren Fallhöhen der Nullpunkt sogleich wieder um 1—2<sup>sec</sup> überschritten. Es wird sich daher fortan empfehlen, den Stab auch in der Richtung nach dem Magnete zu mit einer mikrometrischen Bewegung zu versehen.\*

Lässt man jetzt den Magnet aus sehr hohen Ablenkungen, weit über die Grenzen der Theilung hinaus, fallen, so wird [835] der Nullpunkt noch mehr oder weniger überschritten. Man bringt es aber, durch

<sup>1</sup> In den von Hrn. SAUERWALD vortrefflich gebauten Exemplaren besteht der Dämpfer aus einem kupfernen Cylinder von 60<sup>mm</sup> Durchmesser und 30<sup>mm</sup> Länge. Dieser Cylinder ist seiner Axe nach von einer concentrischen, cylindrischen Höhlung von solcher Weite durchbohrt, dass der 20<sup>mm</sup> im Durchmesser haltende Magnet-Spiegel oder -Ring darin eben frei spielt. Vergl. WIEDEMANN, Die Lehre vom Galvanismus u. s. w. Bd. II. 1. Aufl. 1863. S. 198; — 2. Aufl. 1873. Abth. I. S. 227.

<sup>2</sup> S. oben Abh. VIII., S. 176 ff.; — Abh. X.



ferneres Annähern des Stabes, leicht dahin, dass auch der von  $90^\circ$  fallende Spiegel sich schwingungslos auf den Nullpunkt einstellt. Jenes Ueberschreiten erklärt sich vermuthlich so, dass bei weit über die Scale hinausgehenden Ablenkungen zwar die Richtkraft langsamer wächst als die Bögen, noch schneller aber die Dämpfung durch die cylindrische Kupferhülse abnimmt, daher der Magnet bei dem  $\xi$ , wo unsere Gesetze merklich zu gelten anfangen, mit einer Geschwindigkeit anlangt, die ihn befähigt, den Nullpunkt zu überschreiten, so lange nicht  $r$  einen gewissen Werth übertrifft (vergl. oben §. VI). Bei einer sphärischen Hülse würde aller Wahrscheinlichkeit nach kein solches Ueberschreiten stattfinden.

Nähert man den Stab dem Magnet immer mehr, so schlägt der Magnet um. Vorher kommt natürlich der Punkt, wo er völlig astatich,  $n = 0$  und  $r = \varepsilon$  ist, wo er also durch den oben S. 290 theoretisch abgeleiteten Zustand hindurchgeht, in welchem er sich gleich einem Körper bewegt, dem das umgebende Mittel einen seiner Geschwindigkeit proportionalen Widerstand entgegensetzt. Aus Gründen, die keiner Ausführung bedürfen, vermag die Beobachtung diesen Zustand nicht zu erfassen. Darüber hinaus gehorcht die Bewegung wieder dem durch Gleichung (VII) ausgesprochenen Gesetze, um schliesslich durch den Grenzfall (XIV) hindurch von Neuem periodisch zu werden.

Wir werden im Folgenden den Begriff der Beruhigungszeit des Magnetes brauchen. Es ist die Zeit, welche verfliesst vom Augenblicke, wo der abgelenkte Magnet fallen gelassen wird, bis zu dem, wo seine Ablenkung unmerklich, d. h. kleiner als eine bestimmte kleine Grösse, etwa ein Zehntel Scalenthail, wird. Die Umstände zu kennen, welche diese Zeit verkleinern, ist von praktischer Wichtigkeit. Zu wahrhaft scharfer Messung eignet sich übrigens die Beruhigungszeit nicht; namentlich bei hoher Astasie ist schwer zu sagen, wann die Bewegung ein Ende hat. Da bei gleichem  $t$  die Ablenkung des schwingungslos zum Nullpunkte zurückkehrenden Magnetes  $\xi$  proportional ist (s. oben S. 288. 289), so wächst auch die Beruhigungszeit mit  $\xi$ . Der unten näher zu beschreibende Magnet Spiegel I z. B. brauchte bei  $298.5 \text{ mm}$  Abstand des HAUÿ'schen Stabes, wo seine Bewegung zuerst aperiodisch schien, von  $\xi = 25^\circ$  fallend  $4.2$ , von  $\xi = 500^\circ$  fallend  $5.2$  Secunden zur Beruhigung. Deutlicher wird der Unterschied bei höherer Astasie, wie sie durch Annähern des Stabes erreicht wird, und wobei, wie wir bald näher sehen werden, die Beruhigungszeit auch absolut grösser ist. Bei  $282.5 \text{ mm}$ ;  $277.5 \text{ mm}$  Abstand des Stabes betrug die Beruhigungszeit des von  $\xi = 25^\circ$  fallenden Spiegels beziehlich  $10.0$ ;  $20.0$ , die des von  $\xi = 500^\circ$  fallenden  $17.6$ ;  $29.6$  Secunden.

Wir kehren zu den Bedingungen zurück, unter welchen die Bewegung gedämpfter Magnete aperiodisch wird. Eine zweite Art, unter übrigens gleichen Umständen  $r = 0$  oder reell zu machen, wäre nämlich die Verkleinerung des Trägheitsmomentes  $M$ . Es liegt in der Natur der Dinge, dass man, ohne besondere Einrichtungen, diese nicht stetig und nicht am sonst fertigen Apparate vornehmen kann. Aber je kleiner  $M$ , je dünner z. B. bei sonst gleicher Gestalt ein Magnetspiegel ist, bei um so kleinerem  $S$ , d. h. bei um so geringerer Astasie wird seine Bewegung aperiodisch. Dies ist einer der Gründe, aus denen weder GAUSS, noch sonst Einem der vielen Beobachter, die an gedämpften Magneten mit Spiegelablesung thätig waren, der aperiodische Zustand aufgestossen ist, da an den nach Göttinger Vorschrift eingerichteten Magnetometern Stäbe von sehr grossem Trägheitsmomente angewendet wurden, und man überhaupt Magnete von kleiner Masse wenig gebraucht hat, weil man die schnellere Abnahme ihrer Intensität fürchtete. Der Gebrauch leichterer Magnete empfiehlt sich aber für gewöhnlich hier deshalb, weil, ganz als ob der Magnet noch schwänge, durch Verkleinerung des Trägheitsmomentes die Beruhigungszeit des aperiodisch sich bewegenden Magnetes verkürzt wird. Setzt man in Gleichung (XIV)  $\varepsilon = \frac{\alpha}{M}$ , wo  $\alpha$

eine Constante, und differenzirt man nach  $M$ , so erhält man für  $\frac{dx}{dM}$  einen positiven Werth:  $x$  ist für gleiche Zeiten um so kleiner, je kleiner  $M$ .

[837] Die Erfahrung bestätigt diesen Schluss. Ich habe den aperiodischen Zustand bisher an drei Magneten beobachtet. Zwei davon sind kreisrunde Stahlspiegel von 20<sup>mm</sup> Durchmesser, deren einer, der schon erwähnte Spiegel I, nur etwa 0·8<sup>mm</sup>, der andere, III, etwa 4<sup>mm</sup> dick ist; I wiegt 2·414<sup>gr</sup>, III 10·994<sup>gr</sup>. Der dritte Magnet, II, ist ein kreisrunder Stahlring von gleichfalls 20<sup>mm</sup> äusserem Durchmesser, der gleichsam aus einem quadratischen Prisma von 2<sup>mm</sup> Seite gebogen ist. Ein Schildpattstäbchen verbindet ihn mit einem dünnen Glasspiegel, dessen dünne Messingfassung sich um die Senkrechte drehen lässt. Das ganze System wiegt 2·517<sup>gr</sup>; sein Trägheitsmoment hält nothwendig die Mitte zwischen dem von I und III. Zwar gehört der Ringmagnet zu einer anderen Bussole als die beiden Magnetspiegel, da aber die Dämpfer beider Bussolen wesentlich gleich sind, lassen die Beobachtungen in beiden sich wohl vergleichen. In der folgenden Tabelle ist  $l = \lambda m$  das logarithmische Decrement in BRIGGS'schen Logarithmen, deren Modul  $m$ ;  $\mathfrak{T}_0$  und  $\mathfrak{T}_m$  sind in Secunden die Beruhigungszeiten der Magnete beziehlich ohne HAVY'schen Stab und mit Stab;  $A'$  ist in Millimetern die Entfernung

des Stabes, bei der die Bewegung aperiodisch wurde: bei dieser Bestimmung wurde in beiden Bussolen derselbe Stab angewendet.

Magnet	$\xi = 450^{\text{sc.}}$					
	Ohne Stab		Mit Stab, $\varepsilon = n$		$A'$	$\mathfrak{L}_o - \mathfrak{L}_m$
	$l$	$\mathfrak{L}_o$	$l$	$\mathfrak{L}_m$		
I	0.72	6.8	$\infty$	5.2	298.5	1.6
II	0.45	11.2	$\infty$	8.8	280.5	2.4
III	0.38	22.1	$\infty$	17.5	277.0	4.6

Das logarithmische Decrement des Magnetes I ist das grösste, welches meines Wissens bisher beobachtet wurde. Wie man sieht, wächst auch an der Grenze der periodischen und der aperiodischen Bewegung die Beruhigungszeit der Magnete schnell mit ihrem Trägheitsmoment, und in einem umgekehrten Verhältniss zu diesem steht die Entfernung, bis zu welcher der HAUÿ'sche Stab genähert werden muss, um die Schwingungslosigkeit herbeizuführen. [838]

§. XI. Die Beruhigungszeit des gedämpften Magnetes in ihrer Abhängigkeit von dessen verschiedenen, im Vorigen betrachteten Zuständen.

Ueber den Einfluss der Dämpfung auf die Beruhigungszeit des Magnetes lernten wir schon eine Andeutung von GAUSS kennen. Er sagt (s. oben S. 285), dass „die Annäherung an den Ruhestand wieder „langsamer geschieht, sobald  $\varepsilon$  den Grenzwert  $n$  überschreitet.“ Setzt man in Gleichung (IX) oder (X)  $t = NT_1$ , wo  $N$  die Zahl der Schwingungen,  $T_1$  die Schwingungsdauer des gedämpften Magnetes bedeuten, so ist

$$x_{\text{max}} = \xi \cdot e^{-\varepsilon NT_1}$$

der Ausdruck für die mit wachsendem  $N$  abnehmenden Amplituden des von  $\xi$  fallenden Magnetes.  $T_1$  ist =  $\frac{\pi}{\sqrt{n^2 - \varepsilon^2}}$  [(XXI), S. 292), und

wächst mit  $\varepsilon$ . Denkt man sich zwei solche Werthe von  $N$  und von  $\varepsilon$ , dass  $NT_1 = N'T'_1$ , so wird die kleinere Amplitude zum grösseren  $\varepsilon$  und kleineren  $N$  gehören: die Beruhigungszeit des noch schwingenden Magnetes nimmt mit wachsendem  $\varepsilon$  ab. Differenzirt man ferner

Gleichung (VII) nach  $\varepsilon$ , so findet man  $\frac{dx}{d\varepsilon}$  positiv für jeden Werth von  $t > 0$ : die Beruhigungszeit des schwingungslosen Magnetes nimmt also mit wachsendem  $\varepsilon$  zu; und somit ist die GAUSS'sche Bemerkung erwiesen.

Diese Bemerkung passt jedoch nicht auf unseren Fall. Denn während GAUSS nur an ein Wachsen von  $\varepsilon$  durch Vergrößerung der dämpfenden Metallmenge dachte, verkleinern wir  $n$ , zugleich aber in geringerem Maasse  $\varepsilon$ , ohne das Verhältniss zu kennen, in welchem letzteres geschieht. Betrachten wir zunächst den aperiodischen Zustand, und berücksichtigen wir allein die durch Verkleinern von  $n$  bewirkte Vergrößerung von  $r$ , indem wir Gleichung (VII) nach  $r$  differenziren, so ergibt sich  $\frac{dx}{dr}$  für jeden Werth von  $t > 0$  als positiv. Von dem Grenzfalle  $r = 0$  an also bis zu  $r = \varepsilon$  wächst  $x$  für ein gegebenes  $t$ , oder es findet die Annäherung an die Ruhelage um so langsamer statt, je kleiner  $n$ , bis endlich der völlig astatistische [839] Magnet überall stehen bleibt (vergl. oben S. 290). Berücksichtigen wir nun auch die Verkleinerung von  $\varepsilon$ , so wird zwar durch diese der Einfluss des Wachsens von  $r$  insofern etwas vermindert, als  $r$  selber dadurch langsamer wächst. Setzen wir aber  $r$  constant, und differenziren (VII) nach  $\varepsilon$ , so ergibt sich  $\frac{dx}{d\varepsilon}$  diesmal als negativ für jeden Werth von  $t > 0$ . Die mit der Verkleinerung von  $n$  verbundene Verkleinerung von  $\varepsilon$ , soweit es nicht unter dem Wurzelzeichen steht, wirkt also mit jener in gleichem Sinne, d. h. vergrößernd auf  $x$ , und demgemäss lehrt die Erfahrung, dass mit abnehmender Entfernung  $A$  des HAUY'schen Stabes die Beruhigungszeit schnell zunimmt. So war z. B. bei Magnet I für  $\xi = 450^{\text{se}}$  und

für $A = A' = 298.5$	$\mathfrak{T}_m = 5.2$
für $A = 293.5$	„ „ 8.0
„ „ „ 288.5	„ „ 12.0
„ „ „ 283.5	„ „ 16.4
„ „ „ 278.5	„ „ 24.4
„ „ „ 273.5	„ „ 40.0;

bei weiterer Annäherung wurde der Magnet unstet und schlug um. Bei Magnet III war

für $A = A' = 277.0$	$\mathfrak{T}_m = 17.5$
für $A = 272.0$	„ „ 40.0.

Darüber hinaus war keine Messung mehr ausführbar. Diese Zahlen zeigen auf's Neue, wie der leichte Spiegel schon bei geringer Astasie aperiodisch wird, während beide Spiegel bei ungefähr derselben Nähe des Stabes aufhören brauchbar zu sein; woraus sich für den leichten Spiegel ein ungleich grösserer benutzbarer Spielraum aperiodischer Astasie ergibt als für den schweren.

Ist die Bewegung noch periodisch, so kann man dieselbe Betrachtung

anstellen, wie oben. Die abnehmenden Amplituden haben wieder zum Ausdruck

$$x = \xi \cdot e^{-\epsilon N T_1} = \xi \cdot e^{-\frac{\epsilon N \pi}{\sqrt{n^2 - \epsilon^2}}},$$

allein der Exponent verändert sich jetzt so, dass  $n$  kleiner wird, während auch  $\epsilon$ , nur in viel geringerem Maasse, abnimmt. Denkt man sich wieder zwei solche Werthe von  $N$ , und von  $n$  [840] und  $\epsilon$ , dass  $N T_1 = N' T'_1$ , so wird diesmal die kleinere Amplitude dem grösseren  $N$  entsprechen. Annäherung des Stabes müsste zur Folge haben, dass der Magnet langsamer schwänge, und dass zugleich seine Amplituden etwas langsamer abnehmen: seine Beruhigungszeit müsste durch den Einfluss des Stabes etwas grösser werden.

So sicher dieser Schluss erscheint, so straft ihn doch die Erfahrung Lügen. Die Spalte  $\mathfrak{X}_o - \mathfrak{X}_m$  der Tabelle auf S. 310 zeigt, dass vielmehr die Beruhigungszeit des eben schwingungslos gewordenen Magnetes um keinen geringen Bruchtheil kleiner ausfällt als die des nicht astasirten. Den Grund dieser Abweichung suche ich in dem Widerstand der Luft. Da dieser mit der Geschwindigkeit wächst, so muss die dadurch bewirkte Verzögerung im Falle von Schwingungen grösser sein als bei schwingungsloser Rückkehr zum Nullpunkte, gleiche Beruhigungszeit in der Luftleere und gleiche Fallhöhe vorausgesetzt. Man könnte einwenden, dass dann der Unterschied  $\mathfrak{X}_o - \mathfrak{X}_m$  bei dem schweren Spiegel verhältnissmässig kleiner sein müsste als bei dem leichten, wovon eher das Gegentheil zutrifft. Allein der Hauptsitz des Luftwiderstandes ist unstreitig der ringförmige Spalt zwischen Spiegelrand und Dämpfer, und dieser Spalt ist bei dem schweren, dicken Spiegel, wenn auch nicht überall gleich eng, fünfmal so lang als bei dem leichten, dünnen Spiegel. Trotz der gleichen Grösse und Gestalt der Flächen beider Spiegel erfährt also der dickere einen grösseren Widerstand, und der Unterschied der Widerstände ist vermuthlich so gross, dass er den Unterschied der Massen überwiegt. Versuche zur Prüfung dieser Hypothese habe ich noch nicht angestellt. Wie dem auch sei, für den Gebrauch ergiebt sich, dass der Zustand der eben eingetretenen Schwingungslosigkeit des Magnetes zugleich den Vortheil der kleinsten Beruhigungszeit gewährt, welche die angewandten Vorrichtungen gestatten.

§. XII. Bestätigung der für den Fall einer Anfangsgeschwindigkeit theoretisch gefundenen Bewegungsgesetze aperiodischer Magnete.

Lässt man auf den aperiodisch sich bewegenden Magnet einen beständigen Strom von längerer Dauer wirken, der ihn [841] innerhalb

der Grenzen der Theilung, d. h. bei 2300<sup>mm</sup> Abstand der Scale vom Spiegel um etwa 7° ablenkt, so sieht man ihn in derselben Art, wie er beim Fallen sich auf den Nullpunkt begiebt, sich der neuen Gleichgewichtslage zu bewegen und schwingungslos dort einstellen. Doch ist zu bemerken, dass wenn  $\varepsilon$  nur eben =  $n$  und die Ablenkung sehr gross ist, der Magnet sie um 2—3<sup>se</sup> überschreitet, obschon er von ihr herabfallend den Nullpunkt ohne Schwingung erreicht. Auch dies rührt wohl, wie das Ueberschreiten des Nullpunktes bei übergrossen Fallhöhen (s. oben S. 308) von der Verminderung der Dämpfung mit steigender Ablenkung her.<sup>1</sup>

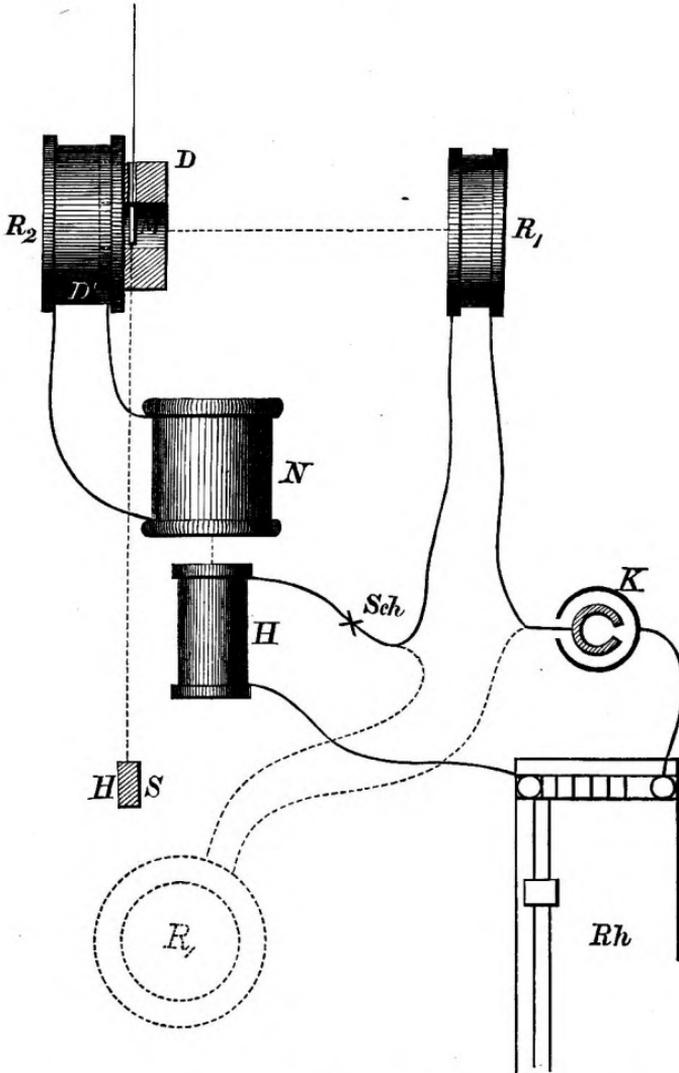
Um die Anfangsgeschwindigkeit  $c$  sowohl wie die Ablenkung  $\xi$  gehörig abzustufen zu können, traf ich die in Fig. 25 sichtbare Anordnung. Hier ist  $M$  der Magnetspiegel an seinem Faden und in seiner im Durchschnitt gezeichneten dämpfenden Kupferhülse  $DD'$ ,  $HS$  der Durchschnitt des HAUU'schen Stabes,  $K$  die GROVE'sche Kette,  $Sch$  ein Schlüssel,  $Rh$  ein Rheochord,  $H$  die Haupt-,  $N$  die Nebenrolle eines Schlitteninductoriums grösserer Art,  $R_1$  eine der Thermorollen, endlich  $R_2$  eine der gewöhnlichen feinen Hydrorollen der Busssole. Die Theile der Anordnung, die eine merkliche Fernwirkung auf einander übten, sind durch punktirte gerade Linien verbunden. Die von Mitte zu Mitte gemessene Entfernung zwischen  $H$  und  $N$  nennen wir  $B$ . Bei geschlossenem Schlüssel  $Sch$  hält die Rolle  $R_1$  den Magnet abgelenkt; durch Oeffnen des Schlüssels lässt [842] man den Magnet fallen, und ertheilt ihm zugleich eine Anfangsgeschwindigkeit im Sinne der Richtkraft durch den in  $N$  inducirten Nebenstrom, dem dazu die passende Richtung zu geben ist. Die Ablenkung sowohl wie der Stromstoss lässt sich auf doppelte Art regeln, jene durch das Rheochord und durch Verschieben der Rolle  $R_1$ , diese durch Verschieben der [843] Rollen  $N$  und  $R_2$ ; abgesehen von dem Einlegen von Drähten in  $H$ , welches aus gleich zu erwähnenden Gründen zu vermeiden ist. So gelingt es leicht, eine hinlängliche An-

---

<sup>1</sup> Da das Ueberschreiten der Ablenkung nicht mehr stattfindet, wenn  $\varepsilon$  merklich  $> n$ , so wird es wenigstens sehr unwahrscheinlich, dass die Erscheinung auf einer Unbeständigkeit der angewandten GROVE'schen Kette beruht, woran man nach den Erfahrungen der Hrn. EDLUND und RIJKE (POGGENDORFF's Annalen u. s. w. 1849. Bd. LXXVII. S. 182; — 1857. Bd. CII. S. 508) über die grössere Stärke der Schliessungs- im Vergleich zur Oeffnungs-Induction auch bei den sogenannten beständigen Ketten deshalb hätte denken können, weil meine Hilfsmittel gestatten, durch die Ablenkung der Magnetnadel den Zustand der Kette nach der Schliessung früher zu beobachten, als dies wohl je möglich war. Für diese Deutung liesse sich freilich noch immer sagen, dass bei  $\varepsilon > n$  die Zeit innerhalb der die Beobachtung geschieht, vergrössert wird (s. oben S. 311, und unten Abh. XIV. §. II.).

fangsgeschwindigkeit zu erzeugen, damit auch bei  $\epsilon > n$  der Nullpunkt überschritten werde; von der jenseitigen Ablenkung kehrt der Magnet schwingungslos zum Nullpunkte zurück. Ausserdem bietet die dargestellte Anordnung auch Gelegenheit, unsere Formeln etwas schärfer auf die Probe zu stellen.

Fig. 25.



Dazu bringt man zuerst die Rolle  $R_1$  in solche Lage, dass der Magnet keine merkliche Wirkung mehr von ihr erfährt, wie dies in der Figur durch die punktirte Leitung und Rolle  $Sch R_1 K$  angedeutet ist. Die Rolle  $H$  hat gleichfalls, diese aber dauernd, solche Lage, dass sie nicht merklich auf den Magnet wirkt. Zweitens entfernt man  $N$  von  $H$

so weit, dass beim Schliessen und Oeffnen bei *Sch* der Spiegel unbewegt bleibt. Jetzt bringt man  $R_1$  wieder in solche Lage, und ertheilt dem Strom durch das Rheochord solche Stärke, dass der Spiegel bis an die Grenzen der Scale abgelenkt wird. Indem man ihn aus stets gleicher Höhe durch Oeffnen bei *Sch* öfter fallen lässt, sucht man die Entfernung des HAUU'Schen Stabes  $A'$  auf, bei der die Bewegung des Magnetes eben aperiodisch, oder  $\varepsilon = n$  ist. Diese Entfernung muss nach Herstellung der beschriebenen Anordnung von Neuem bestimmt werden, auch wenn  $\varepsilon$  schon früher  $= n$  gemacht worden war, weil zur Dämpfung durch die Kupferhülse jetzt noch die durch die Rolle  $R_2$  tritt, daher fortan die Rolle  $R_2$  nicht mehr von der Stelle gerückt werden darf. Auch die Rolle  $R_1$  erhält von hier ab, sofern sie nicht in die unwirksame Lage gebracht wird, eine unveränderliche Stellung, und die Veränderung der Ablenkung  $\xi$  wird allein mittels des Rheochords bewirkt. Dämpfung sowohl als secundäre Induction im Hauptkreise sind zwar dadurch ausgeschlossen, dass man, der Natur der Dinge nach, mit dem Oeffnungsschlage arbeitet; jene Maassnahme hat aber ihren Grund darin, dass die Ablenkung  $\xi$  die Stromstärke in dem Kreise  $KR_1SchHRhK$  messen soll.

Sind diese Vorbereitungen getroffen, so kann man zu folgenden zwei Versuchen schreiten.

[844] Versuch I.

Bei irgend einer, durch das Rheochord willkürlich bestimmten Ablenkung  $\xi$  nähert man die Nebenrolle zuerst der Hauptrolle soweit, dass beim Oeffnen der Kette der Magnet den Nullpunkt nur eben um die kleinste bemerkbare Grösse überschreitet; diese Entfernung der Nebenrolle von der Hauptrolle heisse  $B'$ . Alsdann gilt sehr genau (s. oben S. 295 ff.) die Gleichung

$$c = \varepsilon \xi.$$

Es ist aber in unserem Falle  $c$  sichtlich proportional  $\xi$ ; denn die Elektrizitätsmenge, die sich in einem voltaelektrischen Nebenstrome abgleicht, ist der Stärke des Hauptstromes proportional,<sup>1</sup> und für eben

<sup>1</sup> Es dürfen sich deshalb keine Drähte in der Hauptrolle befinden. Versuche, die ich in dieser Art mit einem kleineren Schlitteninductorium angestellt hatte, mussten verworfen werden, indem sich dabei von dem erwarteten, und wie man sehen wird, richtigen Gesetz Abweichungen ergaben, welche sich aus der Annahme erklären liessen, dass die in den Inductionsströmen sich abgleichenden Elektrizitätsmengen schneller wuchsen als die Stärken der inducirenden Ströme. Vergl. WIEDEMANN, Die Lehre vom Galvanismus u. s. w. 1. Aufl. 1863. Bd. II. S. 297; — 2. Aufl. 1873. Bd. II. Abth. I. S. 338. 350.



dieser Stärke merklich proportional dürfen wir die Ablenkungen des Magnetes nehmen. Man hat also auch  $c = a\xi$ , wo  $a$  eine Constante, folglich  $a = \frac{c}{\xi}$  unabhängig von  $\xi$ , und demgemäss kann man, wenn einmal  $B'$  für ein beliebiges  $\xi$  gefunden ist,  $\xi$  durch das Rheochord fortan beliebig verändern: gleichviel von wo der Magnet falle, stets überschreitet er den Nullpunkt nur eben um die kleinste bemerkbare Grösse.

Es versteht sich beiläufig von selber, und Rechnung wie Beobachtung ergeben, dass dabei die Beruhigungszeit kleiner wird als ohne Anfangsgeschwindigkeit.

### Versuch II.

Nachdem dieser Zustand erreicht ist, bringt man, bei einem beliebigen  $\xi$ ,  $R_1$  in die unwirksame, in der Figur punktirte Lage, und wiederholt den Versuch. Jetzt trifft der Inductionsstoss, der vorher den Magnet bei  $\xi$  traf, den Magnet auf dem Nullpunkt; es erfolgt ein Ausschlag im umgekehrten Sinne von der Ablenkung  $\xi$ ; die Grösse dieses Ausschlages heisse  $x$ . Man hat

[845]

$$x = x_{max} = \frac{c}{\xi e}$$

[(XXXIV), S. 302]. Abermals ist  $c$  proportional  $\xi$ , also  $\xi = \text{const} \times x$ , gleichviel wie  $\xi$  gewählt wird.

Die folgenden Tabellen zeigen das Ergebniss der Versuche, die ich zur Prüfung dieses Schlusses anstellte. Die Zahlen  $\xi_c$  in der ersten Spalte jeder Tabelle sind erhalten, indem ich mittels des Rheochords die Ablenkung von  $25^{\text{sc}}$  bis  $500^{\text{sc}}$  stets um  $25^{\text{sc}}$  steigerte; sie sind das Mittel aus zwei Ablesungen vor und nach zehn Ablesungen von  $x_b$ ; die abgelesenen Tangenten der doppelten Ablenkung sind in die doppelten Tangenten der einfachen Ablenkung verwandelt. Die Zahlen  $x_{mc}$  sind das ebenso corrigirte Mittel aus jenen zehn  $x_b$ ; die Spalte  $x_m - x_b$  zeigt die grösste, positive oder negative Abweichung des beobachteten nicht corrigirten  $x_b$  vom mittleren nicht corrigirten  $x_m$ , welche in einem solchen Satze vorkam. Man sieht, dass diese Abweichung sich höchstens auf  $0.85^{\text{sc}}$  beläuft. Die Constante ist nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet; die Zahlen  $x_r$  sind durch Division von  $\xi_c$  mit der Constanten erhalten. Obschon  $x$  bis zu  $183^{\text{sc}}$  hinaufgeht, belaufen sich die Abweichungen  $x_r - x_{mc}$  nie auf mehr als den Bruchtheil eines Scalentheiles, mit einer einzigen Ausnahme (Versuch 15 in Tab. 1), wo ein grösserer Fehler durch irgend einen Zufall begangen wurde, wie er bei einer Versuchsreihe, die sich über viele Stunden erstreckt, wohl vorkommen kann. Erwägt man die Fehler der gedruckten Theilung, die

Tabelle II.  $A' = 297.5 \text{ mm}$ ,  $B' = 52 \text{ mm}$

	$\xi_{\Sigma c}$	$X_{mc}$	$X_m - X_b$	$X_r$	$X_r - X_{mc}$
1	25.00	9.00	0.00	8.90	- 0.10
2	50.50	17.92	+ 0.12	17.98	+ 0.06
3	75.20	27.00	0.00	26.77	- 0.23
4	99.65	35.42	+ 0.38	35.47	+ 0.06
5	124.91	44.66	+ 0.16	44.46	- 0.19
6	149.67	53.80	- 0.38	53.28	- 0.02
7	174.45	62.75	+ 0.46	62.10	- 0.65
8	199.47	71.67	+ 0.60	71.01	- 0.66
9	224.99	80.38	- 0.53	80.09	- 0.28
10	249.11	89.05	+ 0.28	88.68	- 0.37
11	274.39	98.01	$\pm$ 0.26	97.68	- 0.33
12	299.48	106.85	+ 0.71	106.61	- 0.24
13	324.70	116.09	$\pm$ 0.85	115.59	- 0.50
14	349.28	125.01	$\pm$ 0.26	124.34	- 0.67
15	372.79	132.87	- 0.22	132.71	- 0.16
16	398.64	141.69	+ 0.52	141.91	+ 0.22
17	422.22	149.63	+ 0.38	150.30	+ 0.67
18	447.48	159.22	+ 0.50	159.29	+ 0.08
19	469.57	166.56	+ 0.78	167.15	+ 0.59
20	493.07	174.77	$\pm$ 0.20	175.52	+ 0.76

Const = 2.809127 [846]

Tabelle I.  $A' = 296.5 \text{ mm}$ ,  $B' = 47 \text{ mm}$

	$\xi_{\Sigma c}$	$X_{mc}$	$X_m - X_b$	$X_r$	$X_r - X_{mc}$
1	25.00	9.30	0.00	9.27	- 0.03
2	49.99	18.67	- 0.60	18.53	- 0.14
3	75.10	27.94	- 0.14	27.84	- 0.10
4	99.95	37.30	+ 0.30	37.04	- 0.25
5	125.10	46.80	$\pm$ 0.20	46.36	- 0.43
6	150.19	56.23	+ 0.45	55.67	- 0.57
7	175.25	65.24	$\pm$ 0.25	64.95	- 0.29
8	199.60	74.70	+ 0.22	73.98	- 0.72
9	225.46	83.73	+ 0.35	83.56	- 0.17
10	249.26	92.89	0.00	92.38	- 0.51
11	275.52	102.06	- 0.19	101.74	- 0.32
12	300.20	111.64	- 0.85	111.26	- 0.38
13	324.63	120.96	- 0.56	120.32	- 0.64
14	349.77	129.20	$\pm$ 0.50	129.63	+ 0.44
15	370.46	135.99	- 0.23	137.30	+ 1.31
16	397.02	146.82	+ 0.17	147.15	+ 0.33
17	421.86	156.42	+ 0.47	156.35	- 0.06
18	447.28	165.88	- 0.55	165.78	- 0.11
19	470.91	174.05	$\pm$ 0.70	174.53	+ 0.48
20	494.47	183.21	$\pm$ 0.50	183.27	+ 0.06

Const = 2.698120

Unbeständigkeit der Kette und die Erwärmung der Drähte, die Schwankungen der Ruhelage des Magnetes und der Länge des ihn tragenden Fadens, die mangelhafte Einstellung des Fernrohrs bei grösseren Ablenkungen und die Schwierigkeit des Ablesens grösserer Ausschläge, den Widerstand der Luft, endlich die unsichere Aufstellung meiner Apparate in dafür ganz ungeeigneten Räumen, so darf die erlangte Uebereinstimmung gewiss für höchst befriedigend gelten. Die Regelmässigkeit in der Vertheilung der Zeichen der Fehler, wonach die grösseren  $x_{mc}$  im Allgemeinen zu klein sind, rührt wohl davon her, dass die Ablenkungen nicht unserer Voraussetzung entsprechend den Stromstärken genau proportional sind, [847] sondern ein etwas abweichendes, und zwar für die beiden Rollen  $R_1$  und  $R_2$ , wegen ihrer verschiedenen Entfernung vom Spiegel, verschiedenes Gesetz befolgen. Nicht einmal die Richtkraft verändert sich genau proportional dem Sinus der Ablenkung, weil der HAUÿ'sche Stab, wenn auch um beinahe 300<sup>mm</sup> entfernt, den Magnet doch nicht mit strengen parallelen Kräften angreift.

Wir wollen jetzt noch der Constanten selber in unserer durch den Versuch bewiesenen Gleichung  $\xi = \text{const} \times x$  unsere Aufmerksamkeit zuwenden. Aus  $c = \varepsilon \xi$  und  $x = \frac{c}{\varepsilon e}$  folgt  $\text{const} = e$ , und man hat also die merkwürdige Beziehung

$$\frac{sr}{x} = e.$$

Würde  $\xi = e^2$  gemacht, so müsste sich  $x = e$  ergeben; man würde unmittelbar die Basis der natürlichen Logarithmen ablesen. Dies bestätigt sich in der That.

In unserer Versuchsreihe I ist die Constante = 2·69812,

in Reihe II ist sie = 2·80913;

Mittel = 2·75362.

Es ist  $e = 2·71828$ ;

der Fehler des Mittels ist also nur = 0·03534.

$\varepsilon^2$  ist 7·3890; wählt man als Einheit das Centimeter = 10<sup>sc</sup>, und macht man  $\xi = 7·39$ , so muss  $x = 2·72$  sein.<sup>1</sup> Ich stellte eine Anzahl solcher Prüfungen an, indem ich jedesmal von Neuem  $A'$  und das zugehörige  $B'$  bestimmte. Die Ergebnisse dieser Versuche, nach ab-

<sup>1</sup> Da man die Tangente der doppelten Ablenkung abliest, ist eigentlich  $\xi = 7·39095$  zu machen, und sollte  $x = 2·71838$  sein, doch fällt der Unterschied, wie nicht bemerkt zu werden braucht, weit innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler.

nehmenden Entfernungen des HAUÿ'schen Stabes geordnet, zeigt folgende Tabelle in den Versuchen 1—4; Versuch 5 und 6, wo der Stab absichtlich zu nah war, wurden hinzugefügt, um das in der Reihe sich kundgebende Gesetz noch deutlicher hervortreten zu lassen.

[884]	Nr.	<i>A'</i>	<i>B'</i>	<i>x</i>	const
	1	298·5	63	2·26	3·270
	2	297·5	53	2·63	2·810
	3	297·0	48	2·72	2·717
	4	296·5	46	2·74	2·700
		<i>A</i>			
	5	295·0	28	3·12	2·369
	6	293·5	4	3·53	2·094

Bei den Versuchen 2 und 4 hatte ich fast genau die Bedingungen der in Tabelle II und I enthaltenen Versuchsreihen wieder getroffen. Man sieht, dass ich von dem äussersten Werthe von *A*, wo mir schien, als sei die Bewegung aperiodisch, den Stab nur um anderthalb Millimeter mehr, d. h. um  $\frac{1}{199}$  seines Abstandes, zu nähern hatte, um das theoretisch vorhergesehene Ergebniss zu erhalten. Erwägt man, dass bei diesen Versuchen die oben S. 307 besprochene Schwierigkeit zu sagen, ob der Nullpunkt noch überschritten werde oder nicht, zweimal auftritt, zuerst bei der Bestimmung von *A'*, dann bei der von *B'*, so wird man die erlangte Uebereinstimmung gewiss als genügend anerkennen.

Die Tabelle zeigt, dass je kleiner *A*, oder je näher der Stab dem Magnete, um so grösser fällt *x*, und um so kleiner *B'* und die Constante aus. Der Sinn hiervon ist, dass je weniger Richtkraft dem Magnete gelassen ist, um so grösser kann die ihm ertheilte Anfangsgeschwindigkeit sein, ohne dass er den Nullpunkt überschreitet.

Dieser Zusammenhang spricht sich deutlicher aus, wenn man, anstatt *A* und *B* zugleich, nur die eine oder die andere Entfernung ändert. Lässt man *A* = *A'* beständig, und verkleinert *B*, so wird bald der Nullpunkt merklich überschritten, *x* wächst, die Constante nimmt ab. Verwickelter ist der Vorgang, wenn man *B* = *B'* beständig lässt, und *A* ändert. Wegen  $x = \frac{c}{\epsilon e}$  (XXXIV) ist zwar *x* von *A* nur insofern abhängig, als mit *A* Intensität des Magnetes, folglich auch Dämpfung und, obschon der Inductionsstoss derselbe bleibt, Anfangsgeschwindigkeit sich ein wenig ändern; allein dies ist nicht zu vernachlässigen. Für  $I\tau$  in dem oben S. 301 (XXX) gegebenen Ausdruck

[849]

$$c = \frac{\mu I\tau}{M}$$

wollen wir  $P$  setzen, welches den Integralwerth des Inductionsstromes nach Stärke und Zeit vorstellen soll. Den Werth von  $\mu$  entwickeln wir, wie wir dies oben S. 305. 306 mit  $m$  und  $m$  gethan haben, zu  $\mu' \{ \iota + \eta (H - S) \}$ . Dann ist  $c = \mu' \{ \iota + \eta (H - S) \} \cdot \frac{P}{M}$ . Es ist (XL)

$$\varepsilon = \frac{\kappa m'^2 \{ \iota + \eta (H - S) \}^2}{2 M},$$

und folglich

$$x = \frac{c}{e \varepsilon} = \frac{2 \mu' \cdot P}{e \kappa m'^2 \{ \iota + \eta (H - S) \}}.$$

Wenn man also, bei beständigem  $B = B'$ ,  $A$  von  $A'$  aus vergrößert, wird  $x$  wegen des abzunehmenden  $S$  etwas kleiner, und der Nullpunkt überschritten. Umgekehrt der Nullpunkt wird nur eben erreicht, und  $x$  wächst um ein Geringes, wenn  $A$  von  $A'$  aus verkleinert wird. Dies trifft im Versuch ein; als ich bei  $B' = 48^{\text{mm}}$   $A$  von  $A' = 297^{\text{mm}}$  folgwiese auf 292; 287; 277<sup>mm</sup> verkleinerte, stieg  $x$  von dem ihm willkürlich ertheilten Werthe 40·3<sup>sc</sup> beziehlich auf nur 41·2; 42·7; 46·5<sup>sc</sup>.

Uebrigens ist zu bemerken, dass das  $c$  in unserem Versuch II (s. oben S. 316) dem  $c$  in Versuch I nicht genau gleich ist. Denn in Versuch I, wo man  $c = \varepsilon \xi$  macht, wird der Inductionsstoss erzeugt nicht allein durch die Induction von  $H$  auf  $N$ , sondern auch durch die Induction von  $R_1$  auf  $R_2$  und auf den Dämpfer, welche in  $R_2$  und dem Dämpfer die verkehrte Richtung hat von dem durch die Induction von  $H$  auf  $N$  in  $R_2$  erzeugten Strome. Man kann also setzen  $c = \varepsilon \xi = \{ p - (q + s) \} \xi$ , wo  $p, q, s$  die Geschwindigkeiten sind, welche, für die Einheit der die Stärke des inducirenden Stromes messenden Ablenkung  $\xi$ , die beziehlich von  $H$  auf  $N$ , von  $R_1$  auf  $R_2$ , und von  $R_1$  auf den Dämpfer ausgeübten Inductionen dem Magnet ertheilen. In Versuch II dagegen erhält der Magnet die Geschwindigkeit  $c' = p \xi$ , und man hat somit statt

$$[850] \quad \frac{\xi}{x} = e, \text{ vielmehr } \frac{\xi}{x} = e \left( 1 - \frac{q + s}{p} \right),$$

d. h. die Constante muss kleiner als  $e$  ausfallen.

Indessen geht aus den Umständen des Versuches hervor, dass der Bruch  $\frac{q + s}{p}$  nur sehr klein sein konnte. Die Rolle  $H$  hat mehrere hundert, die Rolle  $N$  9845 Windungen, während  $R_1$  nur 53 und  $R_2$  nur 6000 Windungen besitzt.  $B'$  war bei dem Versuch 3 der letzten Tabelle,

wo sich  $\text{const} = e$  ergab,  $= 48^{\text{mm}}$ , während von Mitte zu Mitte gemessen der horizontale Abstand zwischen  $R_1$  und  $R_2$  400, zwischen  $R_1$  und dem Dämpfer  $380^{\text{mm}}$  betrug. Die Axen von  $R_1$  und die von  $R_2$  und dem Dämpfer lagen aber nicht einmal, wie in der Figur, in einer Geraden, sondern waren einander parallel um etwa  $110^{\text{mm}}$  verschoben. Das Potential der Rollen  $R_1$  und  $R_2$ , und das der Rolle  $R_1$  und des Dämpfers aufeinander, mussten also gegen das Potential der Rollen  $H$  und  $N$  aufeinander nahe verschwinden.

Für die Induction von  $R_1$  auf  $R_2$  ist dies leicht zu zeigen. Dazu wird in den Kreis von  $N$  und  $R_2$  eine dritte Rolle  $R_3$  von gleicher Beschaffenheit mit  $R_2$  (die andere Hydrorolle der Bussole) aufgenommen, und gegenüber der Rolle  $R_1$  in deren unwirksamer Lage so aufgestellt, wie  $R_2$  gegenüber derselben Rolle in deren wirksamer Lage aufgestellt ist. Indem man für ein bestimmtes  $B$  und  $\xi$  die Induction von  $H$  auf  $N$  mit und ohne Rolle  $R_3$ , dann die Induction von  $R_1$  auf  $R_3$  beobachtet, hat man alle Daten, um  $q$  als  $\zeta p$ , wo  $\zeta$  eine Constante, auszudrücken. Es fand sich aber, dass auch bei der grössten inducirenden Stromstärke, welche die Anordnung zulies, d. h. bei völlig gestöpseltem Rheochord,  $q$  neben  $p$  unwahrnehmbar blieb. Was  $s$  betrifft, so lässt sich dies nicht experimentell bestimmen, doch kann man sicher schliessen, dass, obschon grösser als  $q$ ,  $s$  in Bezug auf  $p$  mit  $q$  von gleicher Ordnung sei. Der Bruch  $\frac{q + s}{p}$  musste also, wie auch aus der Uebereinstimmung unserer Ergebnisse mit der Theorie folgt, nahe  $= 0$  sein.

[851] §. XIII. Vorzüge der Beobachtung an aperiodischen Magneten.

Man erreicht mittels des hier beschriebenen Verfahrens vollständiger, bequemer und ohne alle Nachtheile dasselbe, was frühere Experimentatoren, MOHR,<sup>1</sup> SCHILLING VON CANSTADT und LENZ,<sup>2</sup> DRAPER,<sup>3</sup> sich vorsetzten, als sie an die nach unten verlängerte Axe des Magnetes Flügel von Platin oder Stanniol hefteten, welche in Oel oder Wasser einen die Schwingungen hemmenden Widerstand erfuhren. Keiner, der einmal am aperiodischen Magnete beobachtet hat, wird ohne besondere Gründe zum schwingenden Magnete zurückkehren, und die klare und

<sup>1</sup> POGGENDORFF's Annalen u. s. w. 1836. Bd. XXXIX. S. 131.

<sup>2</sup> Ebendas. 1843. Bd. LIX. S. 207; — 1849. Bd. LXXVI. S. 499. 500.

<sup>3</sup> Philosophical Magazine etc. 1839. 3rd Ser. vol. XV. p. 266.

ruhige Spiegelung der Vorgänge im Multiplicatorkreise, welche jener gewährt, für das verwirrende Schauspiel des bei jeder Veränderung der Stromstärke hin- und her schiessenden Scalenbildes wieder aufgeben, aus dem sich der Sachverhalt stets erst nach lästiger Ungewissheit entwickelt. Indem man mit der Verminderung der Richtkraft möglichst genau da stehen bleibt, wo  $n = \varepsilon$ , oder die Bewegung des Magnetes eben aperiodisch geworden ist, genießt man, wie schon bemerkt, zugleich den Vortheil der schnellsten Beruhigung des Magnetes, welche die angewandten Vorrichtungen gestatten. Von ganz besonderem Nutzen ist der aperiodische Zustand bei dem Compensiren des Stromes zum Zwecke der Messung der elektromotorischen Kraft nach der POGGENDORFF'schen, von mir abgeänderten Methode, oder des Widerstandes mittels der WHEATSTONE'schen Brücke. Der schwingende Magnet geräth in Schwankungen, sobald man die Gleichgewichtslage schneller, als der Magnet zu folgen vermag, vor ihm her dem Nullpunkte zu bewegt; der schwingungslose Magnet kann höchstens unter den oben S. 305 bezeichneten Umständen einen Hin- und Hergang machen, so dass man ohne jedes Tasten, mit stetiger Bewegung, den Nullpunkt auf den Faden einstellen kann. Gute [852] Dienste wird auch diese Methode leisten bei Demonstrationsversuchen vor einer grösseren Versammlung, unter Anwendung des von mir beschriebenen Verfahrens, die Ablenkungen durch einen vom Spiegel zurückgeworfenen Lichtstrahl sichtbar zu machen.<sup>1</sup> Dies Verfahren wurde bekanntlich von Sir WILLIAM THOMSON angewandt, um die schwachen Signale des ersten atlantischen Kabels bequem zu beobachten, und noch heute werden die atlantischen Kabel mit sogenannten THOMSON'schen Galvanometern bedient, an denen die Ablesung auf jene, zuerst von mir in England gezeigte Art geschieht. Hier, wie überhaupt wo in der Telegraphie Galvanometer in Gebrauch sind, wird die Beseitigung der Schwingungen sich als höchst vortheilhaft erweisen.

Nützlich können endlich in ihrer überraschenden Einfachheit die Formeln (XXXIII) und (XXXIV) werden. Letztere kann an sich dienen, den Integralwerth kurz dauernder Ströme relativ zu bestimmen. Aber auch zur Messung kleiner Zeiträume nach der von Hrn. HELMHOLTZ verbesserten POUILLER'schen Methode<sup>2</sup> bieten jene Formeln bequeme

<sup>1</sup> POGGENDORFF's Annalen u. s. w. 1855. Bd. XCV. S. 607; — Philosophical Magazine etc. 1856. 4th Ser. vol. XI. p. 109. — [S. oben S. 131, Abh. VI.]

<sup>2</sup> JOH. MÜLLER's Archiv für Anatomie u. s. w. 1850. S. 299; — WIEDERMANN, Die Lehre vom Galvanismus u. s. w. Braunschweig 1873. Bd. II. 1. Abth. S. 287. §. 249.

Gelegenheit, wenigstens wenn man sich eines Magnetes von solchem Trägheitsmomente bedient, dass er eine scharfe Messung von

$$t = t_{max} = \frac{1}{\varepsilon}$$

zulässt. Ist  $F$  die Ablenkung durch den zeitmessenden Strom in beständiger Grösse,  $x$  der Ausschlag durch denselben Strom während der kleinen Zeit  $\tau$ , so findet man für diese leicht den Ausdruck

$$\tau = \frac{e t}{F} \cdot x.$$

---