

XIII.

Ueber aperiodische Bewegung gedämpfter Magnete.

Zweite Abhandlung.

(Gelesen in der Gesamtsitzung der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin
am 23. Juni 1870.)¹

Hierzu Taf. IV. Fig. 4—8.

§. I. Einleitung.

Bei der kürzlich von mir der Akademie mitgetheilten Theorie der aperiodischen Bewegung gedämpfter Magnete bin ich dem vom physikalischen Standpunkte sich darbietenden Wege gefolgt, das allgemeine vollständige Integral der Differentialgleichung für die Bewegung des Magnetes aufzustellen, und die darin vorkommenden willkürlichen Constanten der jedesmaligen Aufgabe gemäss zu bestimmen. Indem ich die Ablenkung zur Zeit Null, $= 0$ oder $=$ einer positiven oder negativen Grösse ξ , ebenso die Geschwindigkeit zur Zeit Null, $= 0$ oder gleich einer positiven oder negativen Grösse c setzte, habe ich die Bewegungsgleichungen für die verschiedenen Combinationen dieser Fälle nacheinander einzeln hergeleitet.

Unter diesen Combinationen erwies sich besonders lehrreich die, wo der Magnet bei ξ im Augenblicke des Fallenlassens eine Anfangsgeschwindigkeit $-c$, also im Sinne der Richtkraft, erhält. Die Rechnung zeigte, dass auch dann der Nullpunkt nicht überschritten werde, so lange nicht c grösser als $(\epsilon + r) \xi$ sei. Es entstand die Frage nach dem Sinne dieser Bedingung. Da es gleichgültig ist, ob der Magnet bei ξ im Augenblicke des Fallenlassens eine Anfangsgeschwindigkeit c im Sinne der Richtkraft erhält, oder ob er diese Geschwindigkeit als Fallgeschwindigkeit

¹ Monatsberichte der Akademie u. s. w. 1870. S. 537. — Die Bezeichnungen in dieser Abhandlung sind dieselben wie in der ersten. Die Ordnungszahlen der Formeln sind diesmal arabische, zum Unterschiede von den römischen der ersten Abhandlung. — In den Abhandlungen über aperiodische Bewegung sind mit erster, zweiter ... Abhandlung stets nur diese gemeint.

$x' = -c$ aus einer höheren Ablenkung mitbringt; da, unter der Voraussetzung unbegrenzter Gültigkeit der Differentialgleichung, der Magnet mit keiner durch Fallen aus noch so hoher Ablenkung erlangten Geschwindigkeit den Nullpunkt zu überschreiten vermag; endlich da für ein gegebenes x die Fallgeschwindigkeit mit der Fallhöhe wächst: so vermuthete ich, dass $(\varepsilon + r) \xi$ die grösste Fallgeschwindigkeit sei, die der Magnet überhaupt bei ξ erlangen könne, d. h., bei unbegrenzter Gültigkeit der Differentialgleichung, durch Fall aus dem Unendlichen erlangen würde.

Um diese Vermuthung zu prüfen, stellte ich mit Hülfe der bekannten Relation $x = f(t, \xi)$ den Verlauf der Curve $x' = \phi(x, \xi)$ im Allgemeinen fest, und untersuchte, was im Endlichen aus dieser Curve werde, wenn man $\xi = \infty$ setze. Diese Untersuchung lehrte, dass meine Vermuthung genau nur im Grenzfall $\varepsilon = n$ oder $r = 0$ zutrefte; $x' = -\varepsilon x$ ist wirklich im Endlichen die Gleichung der Curve, deren Ordinaten für jedes x die Geschwindigkeit des aus dem Unendlichen fallenden Magnetes angeben. Für $\varepsilon > n$ aber ist diese Gleichung nicht $x' = -(\varepsilon + r)x$, sondern $x' = -(\varepsilon - r)x$; und die Geschwindigkeit bei ξ muss diese höchste durch den Fall aus dem Unendlichen erreichbare Geschwindigkeit um noch mehr als $2r\xi$ übertreffen, damit der Nullpunkt überschritten werde.

Die Differentialgleichung setzt die Proportionalität der Richtkraft mit der Ablenkung, und der verzögernden Kraft der Dämpfung mit der Geschwindigkeit voraus; die Abweichungen der Beobachtung von der Theorie können also nur so lange innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler bleiben, als die Ablenkung eine gewisse Grösse nicht übersteigt. Vollends hat aus Gründen, die keiner Ausführung bedürfen, eine unendlich grosse Ablenkung des Magnetes keinen physikalischen Sinn. Man sieht aber, dass die mathematische Fiction einer solchen Ablenkung und der unbegrenzten Gültigkeit der Differentialgleichung dadurch eine wirkliche Bedeutung erhält, dass man eine dem Magnet innerhalb der Grenzen, wo die Bedingungen der Differentialgleichung noch erfüllt sind, auf andere Art ertheilte Geschwindigkeit als durch Fall aus dem Unendlichen entstanden ansehen kann.

Als ich meinem Freunde, Hrn. KRONECKER, die Ergebnisse meiner Untersuchung mittheilte, machte er mich auf eine Behand- [539] lungsweise des Gegenstandes aufmerksam, auf welche vom physikalischen Standpunkte nicht leicht zu kommen war. Sie schlägt gerade den entgegengesetzten Weg von dem eben angedeuteten ein. Von vorn herein wird die Gültigkeit der Differentialgleichung für ein unendliches x , oder, was das Nämliche ist, für ein unendliches negatives t , vorausgesetzt. Indem man überdies bei gewissen ersten Integralen der Differentialgleichung

stehen bleibt, hat man ohne Weiteres für jede Zeit zwischen $t = -\infty$ und $t = +\infty$ die Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Ablenkung vor Augen. Um aber von dieser ganz allgemeinen und der Wirklichkeit in der That entfremdeten Betrachtung zu den wirklichen Bedingungen zurückzukehren, ist nur nöthig, letztere als gegebene Beziehungen zwischen Ablenkung, Geschwindigkeit und Zeit in den allgemeinen Ausdruck einzuführen.

Wenngleich diese Art der Betrachtung die frühere nicht wohl entbehrlich macht, hat sie doch ihre eigenthümlichen Vortheile, und erst in ihrem Lichte lassen manche durch die frühere Betrachtung aufgedeckte Beziehungen ihren wahren Zusammenhang erkennen. Dies wird am besten erhellen, wenn wir mit ihrer Hülfe einige der Aufgaben behandeln, deren Lösung scheinbar schon auf dem früheren Wege vollständig erreicht war.

§. II. Die fundamentalen Eigenschaften unserer Differentialgleichung.

Indem wir übrigens sämtliche Bezeichnungen der Abhandlung beibehalten, setzen wir kürzshalber

$$\varepsilon + r = a, \quad \varepsilon - r = b.$$

Unsere Differentialgleichung heisst alsdann (vergl. Abhandlung (I), S. 286 und 296)

$$0 = x'' + (a + b)x' + abx \quad (1)$$

Die neue Theorie geht aus von der fundamentalen Bemerkung, dass man durch Differenziren der Ausdrücke

$$e^{at}(bx + x'), \quad e^{bt}(ax + x') \quad (2)$$

das rechte Glied der Differentialgleichung beziehlich mit e^{at} und e^{bt} multiplicirt erhält.

[540] Die Ausdrücke (2) sind also constant; man kann setzen

$$\left. \begin{aligned} bx + x' &= A'e^{-at} \\ ax + x' &= B'e^{-bt} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

wo A' , B' willkürliche Constanten sind, welche zu den Constanten A , B in dem Integral unserer Differentialgleichung, wie es Gleichung (VI) der ersten Abhandlung giebt, in der Beziehung stehen

$$A' = -2rA, \quad B' = 2rB.$$

Es folgt weiter, dass man jederzeit setzen kann

$$\left. \begin{aligned} e^{at}(bx + x') &= e^{aT}(bX + X') \\ e^{bt}(ax + x') &= e^{bT}(aX + X') \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Wird der Verlauf von x , x' als Functionen der Zeit, insofern er von den willkürlichen Constanten abhängt, als bereits bestimmt angenommen, so

bedeuten X, X', T beliebige zusammengehörige Werthe der Functionen x, x' und der Zeit. Wird aber jener Verlauf als noch nicht bestimmt angesehen, so bedeuten X, X', T willkürliche Constanten, durch deren Einsetzung der Verlauf bestimmt wird.

Durch ν malige Differentiation der Gleichungen (3) erhält man, wenn

$$\frac{d^\nu x}{dt^\nu} = x^{(\nu)} \text{ gesetzt wird,}$$

$$\left. \begin{aligned} bx^{(\nu)} + x^{(\nu+1)} &= (-a)^\nu A' e^{-at} \\ ax^{(\nu)} + x^{(\nu+1)} &= (-b)^\nu B' e^{-bt} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

und folglich

$$(-1)^\nu \cdot 2rx^{(\nu)} = -a^\nu A' e^{-at} + b^\nu B' e^{-bt}, \quad (6)$$

$$\frac{ax^{(\nu)} + x^{(\nu+1)}}{bx^{(\nu)} + x^{(\nu+1)}} = \frac{b^\nu B'}{a^\nu A'} \cdot e^{2rt}, \quad (7)$$

oder, wenn man zu den Logarithmen übergehend $\frac{1}{2r} \log \left(\frac{a}{b} \right) = \Delta$ setzt,

$$\frac{1}{2r} \log \left(\frac{A'}{B'} \cdot \frac{ax^{(\nu)} + x^{(\nu+1)}}{bx^{(\nu)} + x^{(\nu+1)}} \right) = t - \nu \Delta. \quad (8)$$

Hieraus sind folgende Schlüsse zu ziehen:

I. Wenn die Grössen x und x' für irgend einen endlichen Werth von t endliche Werthe haben, so sind A' und B' endlich. Ist einer der beiden Ausdrücke

$$ax + x', \quad bx + x' \quad (9)$$

[541] für irgend einen endlichen Werth von t gleich Null, und ist es also auch B' oder A' (3), so bleibt der Ausdruck Null für alle endlichen Werthe von t , und es wird demgemäss die Ablenkung x durch eine der beiden Gleichungen

$$x = -\frac{A'}{2r} e^{-at}, \quad x = \frac{B'}{2r} e^{-bt}$$

dargestellt.

II. Wenn, wie es in der Folge stets geschehen soll, von den erwähnten besonderen Fällen abgesehen wird, so bleiben die Vorzeichen der Ausdrücke

$$ax^{(\nu)} + x^{(\nu+1)}, \quad bx^{(\nu)} + x^{(\nu+1)}, \quad (10)$$

wie die Gleichungen (5) zeigen, für alle Zeit constant. Wählt man nun, was offenbar erlaubt ist, das Vorzeichen von x so, dass $ax + x'$ und also B' positiv ist, so ist $bx + x'$ für den ganzen Verlauf der Zeit und also A' entweder positiv oder negativ. Demnach sind zwei wesentlich verschiedene Hauptfälle zu unterscheiden, von denen derjenige stets als der erste bezeichnet werden soll, in welchem A' positiv ist, also die Ausdrücke (9) einerlei Zeichens sind, und als der zweite der, in welchem A' negativ ist, also jene Ausdrücke verschiedenen Zeichens sind.

III. Der Ausdruck $(-1)^{\nu} (ax^{(\nu)} + x^{(\nu+1)})$ nimmt, während t von $-\infty$ bis $+\infty$ geht, alle positiven Werthe von ∞ bis 0 wirklich an; ebenso durchläuft $(-1)^{\nu} (bx^{(\nu)} + x^{(\nu+1)})$ je nach den beiden soeben unterschiedenen Fällen alle Werthe von $+\infty$ bis 0 oder von $-\infty$ bis 0. Der Quotient

$$\frac{ax^{(\nu)} + x^{(\nu+1)}}{bx^{(\nu)} + x^{(\nu+1)}}$$

durchläuft, wie Gleichung (7) zeigt, je nach den beiden Fällen sämtliche positive oder sämtliche negative Werthe von 0 bis ∞ ; aber der Quotient

$$\frac{x^{(\nu+1)}}{x^{(\nu)}},$$

welcher für $t = -\infty$ den Werth $-a$ und für $t = +\infty$ den Werth $-b$ hat, durchläuft im zweiten Hauptfalle sämtliche zwischen $-a$ und $-b$ liegenden Werthe, im ersten Hauptfalle alle übrigen [542] positiven und negativen Werthe. Nur in diesem ersten Hauptfalle werden daher zu gewissen Zeiten x und seine Differentialquotienten gleich Null. Für diese Zeiten und die zugehörigen Werthe der Ablenkung x und ihrer Differentialquotienten führen wir übrigens nachstehende Bezeichnungen ein: der Zeit

- t_0 entspreche $x = 0, x' = x'_0,$
- τ „ $x' = 0, x = \xi,$
- t_1 „ $x'' = 0, x = x_1, x' = x'_1,$
- t_{11} „ $x_{111} = 0, x = x_{111}, x' = x'_{111}$ u. s. w.

IV. Gleichung (6) liefert folgende Bestimmungen für die Ablenkung (x) und deren Differentialquotienten:

wenn $t = -\infty$, so ist $(-1)^{\nu} x^{(\nu)} = \mp \infty$ von der Ordnung e^{-at} ;

wenn $t = +\infty$, so ist $x^{(\nu)} = 0$ von der Ordnung e^{-bt} .

Für $t = -\infty$ ist also $x^{(\nu)}$ unendlich gross von derselben Ordnung wie $bx^{(\nu)} + x^{(\nu+1)}$, aber von höherer Ordnung als $ax^{(\nu)} + x^{(\nu+1)}$. Für $t = +\infty$ ist $x^{(\nu)}$ unendlich klein von derselben Ordnung wie $ax^{(\nu)} + x^{(\nu+1)}$, aber von niederer Ordnung als $bx^{(\nu)} + x^{(\nu+1)}$.

V. Die Zeitpunkte, in denen der Reihe nach die Quotienten

$$\frac{x}{x'}, \frac{x'}{x''}, \frac{x''}{x'''}, \dots$$

einen und denselben bestimmten Werth annehmen, bilden, wie aus Gleichung (8) hervorgeht, eine arithmetische Reihe mit dem beständigen Unterschiede Δ . Dies findet also namentlich für diejenigen Zeitpunkte $t_0, \tau, t_1, t_{11}, \dots$ statt, in denen im ersten Hauptfalle folgeweise $x, x', x'', x''' \dots$ gleich Null werden (s. oben III.), so wie für diejenigen Zeitpunkte,

in denen im zweiten Hauptfalle $\frac{x^{(\nu+1)}}{x^{(\nu)}} = -\varepsilon$ wird. Diese beiden Reihen von Zeitpunkten sind zwar je nach den beiden verschiedenen Fällen ganz verschieden charakterisirt, entsprechen einander aber insofern, als dabei stets

$$\frac{ax^{(\nu)} + x^{(\nu+1)}}{bx^{(\nu)} + x^{(\nu+1)}} = \pm 1$$

wird.

VI. Wenn

$$A' = \pm b\xi e^{a\tau}, \quad B' = a\xi e^{b\tau}$$

gesetzt wird, so nehmen die Gleichungen (3) und (6) die Form an

$$\begin{aligned} [543] \quad ax + x' &= a\xi e^{b(\tau-t)} \\ bx + x' &= \pm b\xi e^{a(\tau-t)} \end{aligned} \quad (11)$$

$$x^{(\nu)} = (-1)^\nu \cdot \frac{ab}{2r} \xi (b^{(\nu-1)} e^{b(\tau-t)} \mp a^{(\nu-1)} e^{a(\tau-t)}), \quad (12)$$

und es bedeutet τ die Zeit, zu welcher

$$\frac{ax' + x''}{bx' + x''} = \pm 1$$

ist, während aus der zur Zeit τ stattfindenden Ablenkung x die positive Grösse ξ durch die Gleichung

$$\xi = \frac{a - b}{a \mp b} x$$

bestimmt ist. Hiernach ist im ersten Hauptfalle τ die Zeit und ξ die Ablenkung, bei der die Umkehr des Magnetes nach Ueberschreiten des Nullpunktes erfolgt, bei der also $x' = 0$ und

$$x'' + n^2x = 0$$

ist, während im zweiten Hauptfalle τ die Zeit und $\frac{a+b}{a-b} \xi = \frac{\varepsilon}{r} \xi$ die

Ablenkung ist, bei der $x' = -\frac{2ab}{a-b} \xi$ und

$$x'' - n^2x = 0$$

wird.

VII. Da nach den Gleichungen (11) für irgend welche bestimmte zusammengehörige Werthe T, X, X' die Relationen

$$aX + X' = a\xi e^{b(\tau-t)}, \quad bX + X' = \pm b\xi e^{a(\tau-t)}$$

statthaben, so erhält man aus gegebenen Werthen T, X, X' die Werthe von τ und ξ in folgender Weise:

$$\tau = T + \frac{1}{2r} \log \left(\frac{abX + aX'}{abX + bX'} \right) \quad (13)$$

$$\xi = \left(X + \frac{1}{a} X' \right)^{\frac{a}{2r}} \cdot \left[\pm \left(X + \frac{1}{b} X' \right) \right]^{-\frac{b}{2r}} \quad (14)$$

VIII. Die Beziehung zwischen Ablenkung und Geschwindigkeit, d. h. zwischen x und x' , ergibt sich unmittelbar aus den Gleichungen (11) in folgender Weise:

$$[544] \quad a \cdot \log \left(\frac{ax + x'}{a\xi} \right) = b \cdot \log \left(\frac{bx + x'}{+b\xi} \right), \quad (15a)$$

wo unter dem Logarithmus-Zeichen nur positive Grössen stehen, oder also

$$\left(\frac{ax + x'}{a\xi} \right)^a = \left(\frac{bx + x'}{+b\xi} \right)^b \quad (15b)$$

§. III. Erster Hauptfall: $ax + x'$ und $bx + x'$ sind einerlei Zeichens.

Aus (12) ergeben sich in diesem Falle die Gleichungen

$$x = \frac{\xi}{2r} (ae^{b(\tau-t)} - be^{a(\tau-t)}), \quad (16)$$

$$x' = \frac{\xi ab}{2r} (e^{a(\tau-t)} - e^{b(\tau-t)}), \quad (17)$$

welche den Gleichungen (VII) und (XII) der ersten Abhandlung entsprechen. Hier werden gemäss der fünften obigen Schlussfolgerung zu den Zeiten

$$t_0 = \tau - \Delta, \quad \tau, \quad t_1 = \tau + \Delta, \quad t_{II} = \tau + 2\Delta, \quad \text{u. s. w.}$$

$$x = 0, \quad x' = 0 \quad x'' = 0, \quad x''' = 0, \quad \text{u. s. w.}$$

und zwar müssen, wenn x oder ein Differentialquotient von x Null werden soll, die Ausdrücke $ax + x'$, $bx + x'$ einerlei Zeichens sein. Dies ist nur möglich, wenn entweder x und x' selber einerlei Zeichens sind, oder wenn, bei verschiedenem Zeichen von x und x' , x' entweder grösser als ax und also auch als bx , oder kleiner als bx und also auch als ax ist.

Für $t = -\infty$ ist gemäss der vierten Folgerung $x = -\infty$, $x' = +\infty$, $\frac{x'}{x} = -a$. Was für endliche Werthe von t geschieht, zeigt Fig. 4 (s. die Taf.). Man erkennt die Curven an den ihnen beigefügten Ordnungszahlen ihrer Gleichungen; Curve (16) ist die der Ablenkungen, Curve (17) die der Geschwindigkeiten. Beide Curven sind anfänglich convex gegen die Abscissenaxe der Zeiten, denn x'' ist negativ und x''' positiv. Dann folgen einander in dem nur von den Constanten der Vorrichtung, nicht von ξ abhängigen Abstände Δ die vier Zeitpunkte t_0, τ, t_1, t_{II} . Bei t_0 [545] schneidet die Curve der Ablenkungen die Axe der Zeiten und wird gegen sie concav, da ihre Ordinate das Zeichen wechselt, x'' das seinige behält. Dies dauert bis zum Zeitpunkte τ . Hier erreicht die Curve der Ablenkungen das Maximum ξ , denn für $t = \tau$

ist $x = \xi$ und $x' = 0$. Die Curve der Geschwindigkeiten schneidet also jetzt gleichfalls die Abscissenaxe der Zeiten und wird gegen sie concav, weil x'' sein Zeichen behält; bei t , erreicht ihre Ordinate das negative Maximum

$$x' = - \xi \cdot a^{-\frac{b}{2r}} \cdot b^{\frac{a}{2r}}, \quad (18)$$

und es findet ein Wendepunkt der Curve der Ablenkungen statt. Endlich für t , hat die Curve der Geschwindigkeiten einen Wendepunkt.

In der Figur sind aus Gründen, die später einleuchten werden (s. unten §. VII), $\xi = 1$, $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ gesetzt. Δ wird dann $= 1.38629$; $x = \frac{3}{4}$, $x'' = \frac{7}{16}$; $x'_0 = 2$, $x' = -\frac{1}{4}$, $x'' = -\frac{3}{16}$.

Für $t = +\infty$ werden gemäss der vierten Folgerung x und $x' = 0$, $x' = -bx$, x läuft auf der positiven, x' auf der negativen Seite der Abscissenaxe asymptotisch aus.

Man kann dergestalt für unsere Betrachtung die ganze Zeit von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ in drei Abschnitte theilen, wie folgendes Schema zeigt (vergl. auch zwischen Fig. 4 und 5).

	I.	II.	III.	
$t = -\infty$	$-\infty$ bis t_0	t_0 bis τ	τ bis $+\infty$	$+\infty$
$x = -\infty$	negativ	positiv	positiv	$+0$
$x' = +\infty$	positiv	positiv	negativ	-0
$\frac{x'}{x} = a$	a bis $+\infty$	$-\infty$ bis 0	0 bis b	b

Welche Werthe zu irgend einer Zeit T die Ablenkung X und die Geschwindigkeit X' haben mögen, vorausgesetzt nur, dass sie dem ersten Hauptfall entsprechen, stets giebt es, wie oben unter VII. ausgeführt ist, einen Zeitpunkt τ , vor oder nach T , in welchem $x' = 0$ ist, und es lässt sich diese Zeit τ und die zugehörige Ablenkung ξ aus den gegebenen Werthen T , X , X' berechnen. τ vorhergegangen ist stets im Zeitabstande Δ die Zeit t_0 , wo $x = 0$ war. Der ganze Vorgang bleibt also, da einzig und allein die Werthe von τ und ξ variiren können, an sich und im Wesentlichen stets derselbe und namentlich bleibt das Verhalten in positiv und [546] negativ unendlicher Zeit unverändert, wie man auch die Bedingungen wählen möge, vorausgesetzt nur, dass die für den ersten Hauptfall bezeichnenden Eigenschaften gewahrt bleiben.

Nimmt man ξ negativ, so ändern die Ausdrücke (9) und in allen drei Zeitabschnitten x und x' ihr Zeichen. Alle Vorgänge bleiben also dieselben, nur dass die beiden Seiten der Abscissenaxe, oder die beiden Hälften der Scale, mit einander vertauscht sind.

§. IV. Physikalische Anwendung der gewonnenen Ergebnisse, und Vergleichung dieser Ergebnisse mit denen der ersten Abhandlung.

Wir können die verschiedenen Fälle der Bewegung des Magnetes — von einer Ablenkung oder vom Nullpunkt aus, mit oder ohne Anfangsgeschwindigkeit — aus folgender Fiction herleiten. Vor unendlicher Zeit durchfiel der Magnet Räume unendlicher Ablenkung mit solcher unendlichen Geschwindigkeit, dass diese zur Ablenkung in dem von den Constanten der Vorrichtung abhängigen Verhältniss — a stand. Zur Zeit $t = 0$, wo wir den Vorgang zu betrachten anfangen, ist der Magnet in endliche Ablenkung gelangt und es sind, je nach den Bedingungen der Aufgabe, gewisse Zeitpunkte schon vorüber. Ist der Magnet bereits abgelenkt, so kann der Fall aus dem Unendlichen geschehen sein entweder von der Seite her, auf der er sich befindet, oder von der entgegengesetzten Seite her.

I. Jedesmal, dass der Magnet zur Zeit $t = 0$ ohne Anfangsgeschwindigkeit aus einer endlichen, positiven oder negativen Ablenkung ξ fällt, können wir uns denken, er sei von der entgegengesetzten Seite her aus dem Unendlichen gefallen, habe den Nullpunkt überschritten, und kehre bei ξ in seiner Bewegung um, daher x' hier $= 0$ ist. Der Vorgang beginnt also in der Idee an der Grenze des zweiten und dritten der oben unterschiedenen Zeitabschnitte. Man braucht in der That nur in (16) $\tau = 0$ zu setzen, um Gleichung (VII) der ersten Abhandlung zu erhalten, welche diese Bewegung des Magnetes darstellt; und unsere gegenwärtige Fig. 4 fällt von τ ab nach wachsender Zeit hin im Wesentlichen mit Fig. 22 der ersten Abhandlung zusammen.¹ Selbst der Fall aus dem Unend- [547] lichen ohne Anfangsgeschwindigkeit, mit dem sich §. VI der ersten Abhandlung beschäftigt, lässt sich unter denselben Gesichtspunkt bringen, indem man $\xi = \infty$ setzt. Alle endlichen mit ξ multiplicirten Ordinaten, wie $x_I, x_{II}, x'_0, x'_I, x'_{II}$, werden gleichfalls unendlich; für $t = -\infty$ aber werden x und x' unendliche Grössen höherer Ordnung. Man hat sich also vorzustellen, der Magnet sei aus unendlicher Ferne höherer Ordnung gefallen, habe den Nullpunkt mit unendlicher Geschwindigkeit überschritten und jenseits ausschlagend ein unendliches ξ erreicht, bei welchem er zur neuen Anfangszeit $= 0$ eben umkehre.

II. Jedesmal, dass der Magnet auf dem Nullpunkt einen Stoss erhält, der ihm eine Anfangsgeschwindigkeit $+c$ ertheilt, können wir

¹ In letzterer ist $r = 0$, in der gegenwärtigen Figur $= 1/4$ gemacht (s. vorige Seite).

uns denken, er sei in der Richtung des Stosses aus dem Unendlichen gefallen, und überschreite zur Zeit $t_0 = 0$ den Nullpunkt mit einer, jener Anfangsgeschwindigkeit $+c$ gleichen Fallgeschwindigkeit x' . Der Vorgang beginnt in der Idee an der Grenze des ersten und zweiten Zeitabschnittes. Man erhält Gleichung (XXXI) der ersten Abhandlung, welche diese Bewegung des Magnetes darstellt, indem man in den Gleichungen (4) $T = 0$, $X = 0$ und $X' = c$ setzt.

III. Jedesmal dass der Magnet im Augenblicke, wo er in einer gegebenen Ablenkung sich selbst überlassen wird, einen Stoss im einen oder anderen Sinn erhält, können wir ebenso für die Anfangsgeschwindigkeit Fallgeschwindigkeit, durch Fall aus dem Unendlichen erlangt, substituieren. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden.

1. Die Geschwindigkeit hat den Sinn der Richtkraft und ist grösser als ax . Es ist als sei der Magnet von der Seite her, nach welcher er abgelenkt ist, aus dem Unendlichen gefallen, und überschreite eben die gegebene Ablenkung mit der gegebenen Geschwindigkeit $-c$. Daher von $x'_1 t_1 x_1$ nach wachsender Zeit hin unsere gegenwärtige Fig. 4 im Wesentlichen mit Fig. 23 der ersten Abhandlung zusammenfällt, welche die Bewegung des Magnetes mit einer negativen Anfangsgeschwindigkeit $> (-ax)$ vorstellt; nur dass in beiden Figuren die beiden Seiten der Abscissenaxe, also die beiden Scalenhälften, mit einander vertauscht sind, und ausserdem in der Figur der ersten Abhandlung abermals $r = 0$, in der jetzigen $= \frac{1}{4}$ gesetzt ist. Gleichung (XXII) der ersten Abhandlung entsteht aus den Gleichungen (4), indem man in letzteren $T = 0$, $X' = -c$, $X =$ dem ξ der ersten Abhandlung setzt, welches zum Unterschiede vom [548] jetzigen ξ fortan ξ_A heissen soll.¹ Um X und X' verschiedenen Zeichens, und dabei X' grösser als aX zu finden, müssen wir den Anfang des Vorganges in den ersten Zeitabschnitt verlegen.

2. Die Geschwindigkeit hat den entgegengesetzten Sinn der Richtkraft. Es ist als sei der Magnet auf der entgegengesetzten Seite von der, nach welcher er abgelenkt ist, aus dem Unendlichen gefallen, habe den Nullpunkt überschritten, und überschreite eben die

¹ Dass das jetzige und frühere ξ einander nicht stets, wie in Fall I, entsprechen, rührt daher, dass mit dem jetzigen ξ jedesmal der Ausschlag nach Ueberschreiten des Nullpunktes bezeichnet wird, während in der Abhandlung ξ gerade deshalb keine solche gleichmässige Bedeutung erhielt, weil es stets die der Anfangszeit $t = 0$ entsprechende Ablenkung bezeichnete, wenn nicht diese Null war, wie in dem soeben unter II erwähnten Falle des §. VII der ersten Abhandlung. Daher das ξ der ersten Abhandlung und das jetzige nur bei dem Fallenlassen des Magnetes ohne Anfangsgeschwindigkeit übereinstimmen.

gegebene Ablenkung ξ_A mit der gegebenen Geschwindigkeit $+c$, mit welcher er dem Maximum ξ seines Ausschlages zustrebt; s. bei $\xi'_2 \xi_2 t_2$ in Fig. 4. Analytisch entsteht dieser Fall, indem man in den Gleichungen (4) $T = 0$, $X = \xi_A$, $X' = +c$ setzt. Da nur zwischen $t = t_0$ und $t = \tau$, x und x' einerlei Zeichens sind, fällt der Beginn des Vorganges in den zweiten Zeitabschnitt; und da zu Anfang dieses Abschnittes $x = 0$, x' endlich ist, zu Ende das Umgekehrte stattfindet, ist diesmal der Geschwindigkeit kein Grenzverhältniss zur Ablenkung vorgeschrieben.

3. Die Geschwindigkeit hat den Sinn der Richtkraft und ist kleiner als bx . Diese Combination kommt nur im dritten Zeitabschnitt vor. Es ist abermals als sei der Magnet auf der entgegengesetzten Seite aus dem Unendlichen gefallen, als habe er aber nicht allein den Nullpunkt, sondern auch das Maximum seines Ausschlages bereits überschritten; s. bei $\xi_3 t_3 \xi'_3$ in Fig. 1. Analytisch entsteht dieser Fall, indem man in den Gleichungen (4), wie im Falle III. 1., $T = 0$, $X' = -c$, $X = \xi_A$ setzt; man erhält Gleichung (XXII) der ersten Abhandlung, aber, weil c kleiner ist als bx , mit umgekehrtem Zeichen der rechten Seite, daher auch diesmal unsere Figur zur Gleichung erst nach Vertauschung der beiden Scalenhälften passt.

IV. Die in §. IX der ersten Abhandlung behandelten Fälle, in denen der in Bewegung begriffene Magnet zu gegebener Zeit einen Stoss [549] im einen oder anderen Sinn erhält, lassen sich gleich den vorigen betrachten, indem man die beiden Geschwindigkeiten, die vorhandene und die hinzutretende, als durch Fall aus dem Unendlichen unter geeigneten Bedingungen entstanden ansieht und algebraisch summiert.

Die neue Behandlungsweise bietet, wie man sieht, den Vortheil, dass sie sämmtliche in der ersten Abhandlung einzeln abgeleitete Fälle auf Einen allgemeinen Fall zurückführt. Die Rolle der merkwürdigen arithmetischen Reihe der Zeiten, von der sich in jenen Fällen eine grössere oder geringere Zahl von Gliedern zeigte, ist nun klar. Man versteht auch die Bedeutung der negativen Zeiten, welche dort im Dunkel blieb. Im Fall eines den bei ξ_A sich überlassenen Magnet im Sinne der Richtkraft treffenden Stosses fanden wir für die Zeit des Durchganges durch den Nullpunkt den Ausdruck

$$t_0 = \frac{1}{2r} \log \left(\frac{c - b\xi_A}{c - a\xi_A} \right)$$

(S. oben S. 293). t_0 ist positiv nur für $c > a\xi_A$; im Falle $c < a\xi_A$ ist t_0 reell nur wenn c auch $< b\xi_A$, und dann negativ. Dies heisst, wie wir jetzt sehen, soviel als dass unter der Voraussetzung des Falles aus dem Unendlichen, die Zeit des Durchganges durch den Nullpunkt schon seit jener Zeit vorüber war.

Die beiden Hauptergebnisse, welche im §. VI der ersten Abhandlung hergeleitet worden sind, nämlich sowohl die Bedingung für die zum Ueberschreiten des Nullpunktes nöthige Anfangsgeschwindigkeit, als auch die Grenze der durch Fallen aus beliebig hoher Anfangslage ohne Anfangsgeschwindigkeit zu erreichenden Geschwindigkeit, lassen sich unmittelbar aus dem obigen Schema, S. 331, erkennen. Denn wenn zur Zeit t bei der Ablenkung x der Nullpunkt noch zu überschreiten sein soll, so muss t im ersten Zeitabschnitt liegen, also dem Schema gemäss $-\frac{x'}{x} > a$ sein, und dies ist daher die Bedingung für die zum Ueberschreiten des Nullpunktes nöthige Anfangsgeschwindigkeit. Ferner ist die Geschwindigkeit eines aus beliebig hoher Anfangslage ohne Anfangsgeschwindigkeit fallenden Magnetes, der sich also in der ganzen Zeit des Fallens im dritten Zeitabschnitt befindet, nach dem Schema bei jeder Ablenkung x eine solche, dass $-\frac{x'}{x} < b$ ist; der Grenzwert der Geschwindigkeit x' ist daher $-bx$.

[550] Während der ganzen Bewegung des Magnetes, insofern dabei der Nullpunkt wirklich oder in der Idee überschritten wird, liegt die Geschwindigkeit x' ausserhalb des von den Werthen $-bx$ und $-ax$ eingeschlossenen Intervalls. Es fragt sich nun, was die Folge sei, wenn dem Magnete bei x eine Geschwindigkeit grösser als bx , aber kleiner als ax , zugeschrieben, oder was geschehe, wenn ihm im Augenblicke des Fallenlassens von x eine solche Anfangsgeschwindigkeit im Sinne der Richtkraft wirklich ertheilt werde. Diese Frage ist in der ersten Abhandlung nicht zur Sprache gekommen. Aus den oben voraufgeschickten allgemeinen Sätzen hat man schon erfahren, dass die Discussion unseres zweiten Hauptfalles uns darüber Aufschluss zu geben bestimmt ist.

§. V. Zweiter Hauptfall: $ax + x'$ und $bx + x'$ sind verschiedenen Zeichens.

Liegt x' seiner Grösse nach zwischen ax und bx , und sind x und x' verschiedenen Zeichens, so sind auch die Ausdrücke (9) verschiedenen Zeichens. Da diese Ausdrücke für jede Zeit ihr Zeichen behalten, sie aber für $x = 0$ oder $x' = 0$ einerlei Zeichen, beziehlich das von x' oder x erhalten würden, so können unter der Voraussetzung: x' grösser als bx , und kleiner als ax , zu keiner endlichen Zeit x und $x' = 0$ werden. Erst für $t = +\infty$ tritt dies ein. Dies ist der zweite hier stattfindende Hauptfall, der sich vom ersten also dadurch unterscheidet, dass dabei der Nullpunkt zu keiner Zeit überschritten wird, sondern Ablenkung und

Geschwindigkeit von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ stetig abnehmen. Nimmt man x positiv, so ergeben sich in diesem Falle aus (12), wenn man darin $\xi = \frac{a-b}{a+b} \xi$, $\xi = \frac{r}{\varepsilon} \xi$, setzt, die den Gleichungen (16) und (17) des ersten Falles analogen Bestimmungen

$$x = \frac{\xi}{2\varepsilon} (ae^{b(\tau-t)} + be^{a(\tau-t)}), \quad (16^*)$$

$$x' = -\frac{ab\xi}{2\varepsilon} (e^{a(\tau-t)} + e^{b(\tau-t)}), \quad (17^*)$$

wo τ den Zeitpunkt und ξ , denjenigen Werth der Ablenkung x bedeuten, für welche

$$x'' = abx \text{ und folglich } (a+b)x' + 2abx = 0$$

[551] ist, für welchen also $\frac{x}{x'}$ das arithmetische und $\frac{x}{x''}$ das geometrische Mittel jener bezüglichlichen Grenzwerte erreicht, zwischen denen die Werthe der beiden Quotienten von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ variiren. Die Zeitpunkte, in denen folgwiese die Quotienten

$$\frac{x}{x'}, \frac{x'}{x''}, \frac{x''}{x'''} \dots$$

den bezeichneten Mittelwerth $-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ erreichen, bilden gemäss der fünften Folgerung eine arithmetische Reihe, deren Anfangsglied τ und deren beständiger Unterschied Δ ist.

Die Reduction aller möglichen Vorgänge auf einen einzigen Typus geschah oben in §. II (sechste Folgerung) dadurch, dass man bei jedem Vorgange einen gewissen Zeitpunkt τ festsetzte, in welchem das Verhältniss $\frac{x}{x'}$ einen bestimmten Werth annimmt. Dieser Zeitpunkt τ hat aber, wie man sieht, im zweiten Hauptfalle keine so ausgesprochene Bedeutung wie im ersten, wo er der Umkehr des Magnetes entsprach. Es ist deshalb nicht ohne Interesse im vorliegenden zweiten Hauptfalle von jener Reduction abzusehen und die Betrachtung unmittelbar an die Gleichungen (4) anzuknüpfen.

Es sei X positiv, X' negativ. Kürzshalber setzen wir

$$\begin{aligned} aX + X' &= + \mathfrak{A}, \\ bX + X' &= - \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

Da nach unseren Voraussetzungen X' zwischen bX und aX schwankt, und $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 2rX$ ist, so schwanken dementsprechend \mathfrak{A} und \mathfrak{B} zwischen $2rX$ und 0, indem sie sich stets zu $2rX$ ergänzen.

Nach Analogie der Gleichungen (16) und (17) für den ersten Hauptfall erhalten wir hier aus (4)

$$x = \frac{1}{2r} (\mathfrak{A}e^{b(T-t)} + \mathfrak{B}e^{a(T-t)}) \quad (19)$$

$$x' = -\frac{1}{2r} (\mathfrak{A}be^{b(T-t)} + \mathfrak{B}ae^{a(T-t)}) \quad (20)$$

Während t von $t = -\infty$ zu $t = +\infty$ sich verändert, gehen x [552] und x' , convex gegen die Abscissenaxe der Zeiten, beziehlich von $+\infty$ und $-\infty$ bis 0. Wie im ersten Hauptfalle ist für $t = -\infty$

$$\frac{x'}{x} = -a, \quad (21)$$

für $t = +\infty$

$$x' = -bx. \quad (22)$$

Setzt man in Gleichung (19) $\mathfrak{A} = 0$, so erhält man

$$x = e^{a(T-t)} X \quad (23)$$

Setzt man umgekehrt darin $\mathfrak{B} = 0$, so erhält man

$$x = e^{b(T-t)} X \quad (24)$$

Für $t = T$ aber wird in (19), (23), (24) $x = X$. Gleichung (19) stellt also eine Schaar von Curven vor, welche durch den Werth von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} unterschieden und zwischen den Grenzcurven (23) und (24) eingeschlossen, sich mit ihnen im Gipfel der Ordinate X schneiden.

Setzt man in Gleichung (20) \mathfrak{A} oder $\mathfrak{B} = 0$, so erhält man beziehlich

$$x' = -e^{a(T-t)} aX, \quad (25)$$

$$x' = -e^{b(T-t)} bX. \quad (26)$$

Für $t = T$ werden (20), (25), (26) beziehlich

$$\left. \begin{aligned} x'_T &= -aX, \\ x'_T &= X' = -aX + \mathfrak{A} = -bX - \mathfrak{B}, \\ x'_T &= -bX; \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

setzt man aber $t = T + \Delta$, so werden dieselben Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} x'_{T+\Delta} &= -\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{a}{2r}} aX, \\ x'_{T+\Delta} &= -\frac{1}{2r} \left\{ \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{a}{2r}} a\mathfrak{B} + \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{b}{2r}} b\mathfrak{A} \right\} \\ x'_{T+\Delta} &= -\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{b}{2r}} bX. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Die drei Ausdrücke (28) sind identisch und die Grenzcurven (25), (26), sowie die zwischen ihnen eingeschlossenen Curven (20), schneiden sich also im Gipfel der Ordinate, die im Abstände Δ auf X' folgt.

[553] Während im allgemeinen Falle für $t = -\infty$, $\frac{x'}{x} = -a$ für $t = +\infty$, $x' = -bx$ ist, hat man für $\mathfrak{A} = 0$

$$x' = -ax, \quad (29)$$

für $\mathfrak{B} = 0$

$$x' = -bx \quad (30)$$

für jede Zeit.

Setzt man $\mathfrak{B} = 2rX + \delta$, $\mathfrak{A} = -\delta$, wo δ eine beliebig kleine, aber endliche positive Grösse, so wird alsbald die Axe der Zeiten wieder geschnitten, wenngleich erst zur späten Zeit

$$t_0 = T + \frac{1}{2r} \log \left(\frac{2rX + \delta}{\delta} \right);$$

man hat wieder den ersten Hauptfall, und befindet sich in dessen erstem Zeitabschnitt. Setzt man umgekehrt $\mathfrak{A} = 2rX + \delta$, $\mathfrak{B} = -\delta$, so ist diesmal die Axe der Zeiten geschnitten worden zur längst verflissenen Zeit

$$t_0 = T - \frac{1}{2r} \log \left(\frac{2rX + \delta}{\delta} \right);$$

man befindet sich im dritten Zeitabschnitt des ersten Hauptfalles.

Wir wollen nun, um die Vorgänge in beiden Hauptfällen ihrer Grösse nach vergleichbar zu machen, $T = \tau$ und $X = \xi$ setzen. Dabei ist zu bemerken, dass, da jetzt nicht wie im ersten Hauptfalle, zu τ und ξ ein für allemal eine bestimmte Geschwindigkeit ($x' = 0$, s. oben S. 328) gehört, der Verlauf der Curven zwischen den Grenzcurven ein unbestimmter bleibt, so lange nicht die Geschwindigkeit ξ' gegeben ist. Es entspricht also jedem ξ jetzt vielmehr von Ablenkungs- und Geschwindigkeitscurven eine ganze Schaar, deren Steilheit mit ξ wächst, weil Δ unabhängig von ξ ist.

In Fig. 5 sind die beiden Curven oberhalb der Abscissenaxe die Grenzcurven der Ablenkungscurven, die unterhalb die Grenzcurven der Geschwindigkeitscurven des zweiten Hauptfalles; jede Curve trägt die Ordnungszahl der durch sie vorgestellten Gleichung. Die Annahmen, unter denen die Curven construirt wurden, sind dieselben wie in Fig. 4: $\xi = .1$, $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$. Der Maassstab ist derselbe, und gleiche Zeitpunkte stehen in beiden Figuren senkrecht untereinander. Schreitet man auf der Abscis- [554] senaxe von τ aus in beiden Richtungen um Abstände $= \Delta$ fort, so bilden die zugehörigen Ordinaten jeder der vier Grenzcurven eine Reihe, deren allgemeines Glied für

$$\begin{array}{cccc} (23), & (24), & (25), & (26): \\ 2^{2\nu}, & 2^\nu, & -2^{2\nu}, & -2^\nu \end{array}$$

ist, wo für ν in der Richtung von $-t$ nach $+t$ die Reihe der positiven

und negativen ganzen Zahlen zu setzen ist. Die Curven (23) und (25) liegen völlig symmetrisch zur Abscissenaxe, und so dass bei $\tau, \nu = 0$ ist; die Curven (24) und (26) dagegen sind zwar auch symmetrisch, aber gegeneinander in der Richtung der Abscissen um Δ verschoben, so dass für (24) ν bei τ , für (26) bereits bei $t_0 = 0$ ist.

Denkt man sich die Curven beider Hauptfälle, wie Fig. 4 und 5 sie darstellen, auf dieselbe Abscissenaxe aufgetragen, so schneiden sich die Ablenkungscurven des zweiten Hauptfalles im Gipfel der Maximal-Ordinate ξ der Ablenkungscurve des ersten Hauptfalles. Ebenso schneiden sich die Geschwindigkeitscurven des zweiten Hauptfalles im Gipfel der Maximal-Ordinate der Geschwindigkeitscurve des ersten Hauptfalles: denn die miteinander identischen Gleichungen (28) sind es auch mit (18). Von den Maximis ab nach den positiven Zeiten hin verlaufen die Curven des zweiten Hauptfalles näher der Abscissenaxe als die des ersten.

Denkt man sich den zweiten Hauptfall auf die andere Scalenseite verlegt, so entstehen in der Richtung von τ nach den negativen Zeiten hin Schneidepunkte seiner Curven mit denen des ersten Hauptfalles. Unter den unseren Figuren zu Grunde liegenden Annahmen rücken jedoch für die beiden steileren Grenzcurven des zweiten Hauptfalles diese Schneidepunkte in die negative Unendlichkeit.

Im Fall einer dem bei $+x$ losgelassenen Magnet ertheilten, bx , aber nicht ax übertreffenden Anfangsgeschwindigkeit $-c$ ist es also, als sei der Magnet von der positiven Seite her aus dem Unendlichen gefallen mit einer Geschwindigkeit, grösser zwar als die grösste Geschwindigkeit bx , die der Magnet bei $+x$ durch Fall von einem unendlichen positiven ξ , d. h. aus negativer Unendlichkeit höherer Ordnung, erlangt hätte (s. oben S. 332), aber nicht gross genug, um den Magnet über den Nullpunkt zu treiben, wozu die Geschwindigkeit im Endlichen ax übertreffen muss.

[555] §. VI. Behandlung des Grenzfalles $\varepsilon = n$.

Der Grenzfall $\varepsilon = n$ kann für sich behandelt werden, oder auch indem man in den obigen Formeln $a = b$ setzt.

Man hat zunächst anstatt der beiden Gleichungen (4) hier nur die eine Gleichung

$$(\varepsilon x + x') e^{\varepsilon t} = \text{const} = (\varepsilon X + X') e^{\varepsilon T}. \quad (31)$$

Diese Gleichung integrirt giebt

$$x e^{\varepsilon t} = t (\varepsilon X + X') e^{\varepsilon T} + C,$$

wo C eine willkürliche Constante ist, die dadurch bestimmt wird, dass für $t = T, x = X$ sein solle. So erhält man

$$x = e^{\varepsilon(T-t)} \{X - (T-t)(\varepsilon X + X')\} \quad (32)$$

und durch Division mit (31) in (32)

$$\frac{x}{\varepsilon x + x'} - t = \frac{X}{\varepsilon X + X'} - T = \text{const.}$$

Gleichung (12) ergibt für $a = b$:

$$x^{(\nu)} = (-\varepsilon)^\nu \cdot e^{\varepsilon(\tau-t)} (1 - \nu + \varepsilon t - \varepsilon \tau) \xi,$$

und daher für $\nu = 0$ und $\nu = 1$

$$x = \xi e^{\varepsilon(\tau-t)} \{1 - \varepsilon(\tau - t)\}, \quad (33)$$

$$x' = \xi \varepsilon^2 e^{\varepsilon(\tau-t)} (\tau - t) \quad (34)$$

Diese Gleichungen entsprechen den Gleichungen (XIV) und (XV) der ersten Abhandlung. Da für $a = b$ der beständige Zeitunterschied

$\Delta = \frac{1}{\varepsilon}$ wird, so ist für

$$t_0 = \tau - \frac{1}{\varepsilon}, \quad \tau, \quad t_1 = \tau + \frac{1}{\varepsilon}, \quad t_{11} = \tau + \frac{2}{\varepsilon}, \quad \text{u. s. w.}$$

$$x = 0, \quad x' = 0, \quad x'' = 0, \quad x''' = 0, \quad \text{u. s. w.}$$

Wird ξ positiv genommen, so sind für $t = -\infty$: $x = -\infty$, $x' = +\infty$, und zwar, der geringeren Dämpfung halber, beide von höherer Ordnung, als für ein endliches r ; $\frac{x'}{x}$ ist $= -\varepsilon$. Im Endlichen

sind die Curven (33), (34) zunächst convex gegen die Abscissenaxe der Zeiten. Es folgen einander in dem wiederum nur von den Constanten der Vorrichtung, nicht von ξ abhängigen [556] Abstände $\frac{1}{\varepsilon}$ die vier Zeitpunkte t_0, τ, t_1, t_{11} . Für $t = +\infty$ schliessen sich beide Curven asymptotisch der Axe der Zeiten an, und x' ist $= -\varepsilon x$.

Die in der ersten Abhandlung aufgestellten Gleichungen für die verschiedenen Fälle mit und ohne Anfangsgeschwindigkeit findet man ähnlich wie dies im §. IV für ein endliches r gezeigt wurde, indem man in (32) für T, X, X' die Werthe $t_0, 0, x'_0; \tau, \xi, 0$ u. s. w. einführt und $t_0, \tau, t_1, t_{11} = 0$ setzt.

Soll zur Zeit t der Nullpunkt noch zu überschreiten, d. h. soll

$$t_0 - t = - \frac{x}{\varepsilon x + x'}$$

positiv sein, so müssen x und x' verschiedenen Zeichens, und der absolute Werth von x' muss grösser als der von εx sein. Diese Bedingung ist nur für die Zeit t erfüllt, welche dem Zeitpunkt t_0 vorangegangen ist, da im folgenden Zeitabschnitt Δ , bis zu τ hin, x und x' einerlei Zeichens sind, von τ ab aber, wo x und x' wieder verschiedenen Zeichens sind, der absolute Werth von x' kleiner als der von εx ist, und diesen erst für $t = +\infty$ erreicht. Das also ist der wahre Sinn der in der ersten

Abhandlung gefundenen Bedingung $x' > (-\varepsilon x)$ für das Ueberschreiten des Nullpunktes im Falle $r = 0$ (vergl. oben S. 325).

Der zweite Hauptfall findet hier nicht mehr statt, sondern der Nullpunkt wird überschritten, sobald die Geschwindigkeit die Fallgeschwindigkeit aus der negativen Unendlichkeit höherer Ordnung übertrifft, d. h. x' grösser ist als ax .

§. VII. Die Curven der Geschwindigkeiten bezogen auf die Ablenkungen im allgemeinen Fall $\varepsilon > n$.

Das Ganze dieser Beziehungen wird klarer, wenn wir von x und x' als Functionen der Zeit übergehen zur Betrachtung von x' als Function von x , $x' = \phi(x)$ (vergl. erste Abh. S. 296 und oben S. 325).

In Fig. 6 stellt die Gerade $[-x, 0, +x]$ die beiderseits vom Nullpunkt in's Unendliche sich erstreckende Scale vor, auf welche als Abscissenaxe die Geschwindigkeiten x' als Ordinaten aufgetragen sind. Die beiden Geraden AA' , BB' stellen die beiden Gleichungen (29) und (30):

$$x' = -ax, \quad x' = -bx$$

[557] vor. Die Curve $t_0 \tau t, t, 0$ ist alsdann für ein positives ξ die Curve des ersten Hauptfalles, welche auf der negativen Seite aus dem Unendlichen kommend im Punkte $x = +\xi$ zur Zeit τ die Scale schneidet, und bei 0 von der positiven Seite her physikalisch endet. Die Punkte $t_0, \tau, t, t,$ bezeichnen die oft erwähnten, eine arithmetische Reihe bildenden Zeitabschnitte Δ . Kommt der Magnet von der anderen Seite, so hat die Curve die Lage $t'_0 \tau' 0$. Die Curven des zweiten Hauptfalles liegen wie $0\zeta, 0\zeta'$ nothwendig zwischen den Geraden AA', BB' , die selber den Grenzcurven (25), (26) entsprechen; aus dem Unendlichen kommend enden auch die Curven $0\zeta, 0\zeta'$ und die Geraden $0A, 0A', 0B, 0B'$ physikalisch am Nullpunkt, und die im rechten unteren Quadranten verlaufenden, $0A', 0\zeta', 0B'$, entsprechen ihrer Lage nach den in unserer Fig. 5 dargestellten Curven.

Wo immer man von einem Punkt irgend einer der Curven parallel der x' -Axe eine Gerade nach einer der Geraden AA', BB' ziehe, wie z. B. $x'a, x'b$ in der Figur, findet man für die Länge der Geraden $x'a, x'b$ beziehlich den Ausdruck $ax + x', bx + x'$, wo ax, bx und x' , je nach der Lage des Curvenpunktes, positiv oder negativ sind. Wir gelangen so zur Einsicht in die Bedeutung der für uns so wichtigen Ausdrücke (9). Sie messen in der Richtung der x' -Axe die Entfernung des Curvenpunktes von den Geraden AA', BB' ; und sie sind positiv jedesmal dass der Punkt (in unserer Figur) nach oben und rechts von der

Geraden liegt, negativ im anderen Falle; daher sie für die zwischen den Geraden AA' , BB' liegenden Curvenpunkte, wie der zweite Hauptfall es mit sich bringt, verschiedenen Zeichens sind.

Eliminirt man die Zeit zwischen den Gleichungen (16) und (17) des ersten Hauptfalles (vergl. die achte Folgerung), so erhält man die mit dem Ausdruck auf S. 301 der ersten Abhandlung identische Gleichung

$$\left(\frac{ax + x'}{a\xi}\right)^a = \left(\frac{bx + x'}{b\xi}\right)^b, \quad (35)$$

welche also die Gleichung der Curve $t_0 \tau t, t, 0$ ist. Eliminirt man ebenso die Zeit zwischen den Gleichungen (19) und (20) des zweiten Hauptfalles, so erhält man

$$\left(\frac{ax + x'}{\mathfrak{A}}\right)^a = \left(\frac{bx + x'}{\mathfrak{B}}\right)^b \quad (36)$$

[558] als Gleichung aller der Curven $0\xi'$, die für irgend ein \mathfrak{A} und \mathfrak{B} zwischen den Grenzcuren $0A'$, $0B'$ liegen.

Setzt man in (36)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A} &= aX + X' = a\xi, \\ -\mathfrak{B} &= bX + X' = -b\xi, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

so unterscheiden sich (35) und (36) nur noch durch das negative Zeichen von $b\xi$ in (36), dem aber auch, nach den Voraussetzungen des zweiten Hauptfalles, ein negativer Werth des Zählers $bx + x'$ entspricht. Durch dieselbe Substitution werden die Gleichungen (19) und (20):

$$x = \frac{\xi}{2r} (ae^{b(T-t)} + be^{a(T-t)}), \quad (38)$$

$$x' = -\frac{\xi ab}{2r} (e^{b(T-t)} + e^{a(T-t)}); \quad (39)$$

sie unterscheiden sich also von den entsprechenden Gleichungen des ersten Hauptfalles (9) und (10)

$$x = \frac{\xi}{2r} (ae^{b(\tau-t)} - be^{a(\tau-t)}),$$

$$x' = \frac{\xi ab}{2r} (e^{a(\tau-t)} - e^{b(\tau-t)}),$$

nur noch dadurch, dass in den Gleichungen (38), (39) T für τ steht und beide Termen in der Klammer positiv sind; sie werden identisch mit den Gleichungen (16*) und (17*) auf S. 336, wenn man $T = \tau$ und wie dort $\xi = \frac{r}{\varepsilon} \xi$, setzt.

Unter der zu einem bestimmten X und T gehörigen Schaar von Ablenkungscuren (19) des zweiten Hauptfalles und der entsprechenden Schaar von Geschwindigkeitscuren (20) giebt es also stets ein Paar zusammengehöriger Curven, deren Gleichungen durch Eliminiren der Zeit

einen Ausdruck liefern identisch mit dem, welchen gleichfalls durch Eliminiren der Zeit die Gleichungen der zu einem bestimmten ξ und τ gehörigen Ablenkungcurve und Geschwin- [559] digkeitscurve des ersten Hauptfalles liefern. Es ist jenes Paar das, für welches zur Zeit $t = T$ in (19) und (20)

$$\left. \begin{aligned} x &= X = \xi \frac{a + b}{a - b}, \\ x' &= X' = - \xi \frac{2ab}{a - b} \end{aligned} \right\} \quad (40)^1$$

sind [(37), (38), (39)]. Wir wollen dies X und X' , zum Unterschiede von dem allgemeinen, \mathfrak{X} , \mathfrak{X}' , und die zugehörige Zeit \mathfrak{T} nennen. \mathfrak{X} ist $> \xi$; soll Curve (38) durch den Gipfel der Ordinate ξ gehen, so muss $\mathfrak{T} > \tau$ sein. Weitere Bemerkungen über das gegenseitige Entsprechen der bezüglichen Curven des ersten und zweiten Hauptfalles finden sich oben in der fünften und sechsten Folgerung. Das dortige ξ , ist hier \mathfrak{X} genannt.

Von dem so bestimmten Curvenpaare werden sich die x' des zweiten Hauptfalles, bezogen auf dessen x , mit den x' des ersten Hauptfalles, bezogen auf die gleichen x , für das nämliche ξ in Eine Construction zusammenfassen lassen. Zu dieser schreiten wir nun, indem wir von den übrigen Curven des zweiten Hauptfalles, welche zu der des ersten Hauptfalles nicht in der eben entwickelten, merkwürdigen Beziehung stehen, vorläufig absehen.

Um Gleichung (35) auf eine für die Discussion bequemere Form zu bringen, machen wir die Geraden AA' , BB' zu Axen eines schiefen Coordinatensystemes; die Gerade BB' sei die Abscissenaxe, die Gerade AA' die Ordinatenaxe; die neuen Abscissen eines Punktes x , x' der Curve (z. B. des Punktes \mathfrak{r}' in der Figur) mögen \mathfrak{P} , die neuen Ordinaten η heissen. Man hat

¹ Wegen der Schwierigkeit, Gleichung (16*) umzukehren, und die Zeit als explicite Function von x darzustellen, lässt sich von der Zeit T nur noch aussagen, dass sie zwischen

$$\tau - \frac{1}{a} \log \left(\frac{a + b}{a - b} \right) \text{ und } \tau - \frac{1}{b} \log \left(\frac{a + b}{a - b} \right)$$

liege. Dies sind die Werthe für T , die den Gleichungen (23) und (24) der Grenzcurven, zwischen denen die Ablenkungscurven des zweiten Hauptfalles verlaufen, für $x = \xi$ und $\mathfrak{X} = \xi \frac{a + b}{a - b}$ (40) genügen; die Zeiten also, zu welchen die Ordinaten dieser Curven den Werth $\xi \frac{a + b}{a - b}$ annehmen.

[560]

$$\begin{aligned} ax + x' &= \vartheta \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha} \\ bx + x' &= \eta \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}, \end{aligned}$$

wo α und β die zu a und b als Tangenten gehörigen Winkel bedeuten, und durch Einsetzen dieser Werthe in (35)

$$\left(\frac{2r}{\xi a \sqrt{1 + b^2}} \cdot \vartheta \right)^a = \left(\frac{2r}{\xi b \sqrt{1 + a^2}} \cdot \eta \right)^b, \quad (41)^1$$

oder, wenn wir kürze halber

$$\left(\frac{2r}{\xi} \right)^{2r} \frac{(b \sqrt{1 + a^2})^a}{(a \sqrt{1 + b^2})^b} = C$$

setzen,

$$\eta^b = C \cdot \vartheta^a \quad (42)$$

Wir haben es also mit einer auf schiefe Coordinaten bezogenen Parabel vom $\frac{a}{b}$ -ten Grade zu thun. Sind a und b ganze Zahlen, [561] so bestimmen deren Geradheit oder Ungeradheit und das Zeichen von C , in welchem der vier Coordinatenwinkel Parabelzweige liegen und wie sich diese im Nullpunkte verhalten, ob sie in einander übergehen, eine Spitze bilden, u. s. w. C würde beiläufig in diesem Falle, wegen des geraden Exponenten $2r$, auch für ein negatives ξ positiv sein. Physikalisch hat indess, wie schon bemerkt, ein Zusammenhang der Curven im Nullpunkte

¹ Nennt man x, x', η, ϑ die geraden und schiefen Coordinaten eines beliebigen, X, X', H, Θ die eines gegebenen Punktes einer der vier Curven, so kann man stets setzen

$$\frac{ax + x'}{aX + X'} = \frac{\vartheta}{\Theta} \quad \frac{bx + x'}{bX + X'} = \frac{\eta}{H},$$

also, da nach (4)

$$\begin{aligned} \left(\frac{ax + x'}{aX + X'} \right)^a &= \left(\frac{bx + x'}{bX + X'} \right)^b, \\ \left(\frac{\vartheta}{\Theta} \right)^a &= \left(\frac{\eta}{H} \right)^b \end{aligned} \quad (41a)$$

Macht man $X = +\xi, X' = 0$, so werden H und Θ die schiefen Coordinaten H_ξ, Θ_ξ des ξ -Punktes, in welchem die Curve des ersten Hauptfalles die x -Axe schneidet (s. bei τ in der Figur). Es ist

$$\left. \begin{aligned} H_\xi &= b\xi \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{b\xi \sqrt{1 + a^2}}{2r} \\ \Theta_\xi &= a\xi \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{a\xi \sqrt{1 + b^2}}{2r} \end{aligned} \right\} \quad (41b)$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in (41a) erhält man gleichfalls (41).

keinen denkbaren Sinn; auch werden a und b nur ausnahmsweise nicht irrationale Zahlen sein. Ohne die am Nullpunkte möglichen Singularitäten weiter zu ergründen, schreiben wir Gleichung (42) daher besser folgendermaassen:

$$b \log \eta = a \log \vartheta + \log C \quad (43)$$

ϑ ist von gleichem Zeichen mit ξ , und für jeden der beiden Werthe von ϑ kann η wiederum positiv oder negativ sein; die Logarithmen sind von den absoluten Werthen der Grössen zu nehmen. So stellt Gleichung (43) für jede der vier möglichen Zeichencombinationen je einen Curvenzweig vor, der sich vom Nullpunkt in's Unendliche erstreckt.

Beispielsweise betrachten wir nun näher das Paar dieser Zweige, welches den beiden Werthen von η für ein positives ξ und ϑ entspricht. Der bequemeren Discussion halber kehren wir dabei zu der Gestalt der Gleichung zurück, wie sie (42) zeigt. Der erste Differentialquotient ist

$$\frac{d\eta}{d\vartheta} = \frac{a}{b} \cdot C^{\frac{1}{b}} \cdot \vartheta^{\frac{2r}{b}},$$

der zweite

$$\frac{d^2 \eta}{d\vartheta^2} = \frac{2ra}{b^2} \cdot C^{\frac{1}{b}} \cdot \vartheta^{\frac{a}{b} - 2}.$$

Welchen endlichen Werth man auch a und b beilege, für $\vartheta = 0$ sind η und auch $\frac{d\eta}{d\vartheta} = 0$; die Curven berühren also im Nullpunkte die Gerade BB' , entsprechend unserem früheren Ergebniss: für $t = +\infty$, $x' = -bx$ in beiden Hauptfällen [(18), (22)]. Beide Zweige steigen convex gegen die Abscissenaxe vom Nullpunkt in's Unendliche beziehlich auf- und abwärts, wobei der den positiven η entsprechende Zweig den Nullpunkt überschreitet, der [562] den negativen η entsprechende auf der positiven Scalenseite bleibt. Die Construction lehrt, dass in der Nähe des Nullpunktes die Krümmung der Curve oberhalb der Geraden BB' eine stärkere ist als unterhalb. Für $\vartheta = +\infty$ werden $\pm \eta$ und $\pm \frac{d\eta}{d\vartheta} = \pm \infty$; beide Zweige entfernen sich also immer weiter von der Geraden AA' , nehmen aber dabei immer mehr deren Richtung an, entsprechend unserem früheren Ergebniss: für $t = -\infty$, $\frac{x'}{x} = -a$ in beiden Hauptfällen.

Die Gleichung einer Tangente an irgend einem Punkte η , ϑ , der Curve, auf dieselben schiefen Coordinaten bezogen, lautet

$$H - \eta = \frac{a}{b} \cdot \frac{\eta}{\vartheta} (\Theta - \vartheta),$$

wo H , Θ die Coordinaten der Punkte der Tangente bedeuten. Setzt

man für η , ϑ , die Coordinaten $H\xi$, $\Theta\xi$ des ξ -Punktes [(41b), S. 344 Anm.], so wird die Gleichung

$$H \cos \alpha = \Theta \cos \beta - \xi.$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden, welche parallel der x' -Axe durch den ξ -Punkt bei τ geht: die Curve des ersten Hauptfalles schneidet folglich die x -Axe senkrecht (vergl. erste Abhandl. S. 300).

Es ist gleichgültig, ob man in (41) η und ϑ mit einer Constanten k , oder ob man ξ mit $\frac{1}{k}$ multiplicirt: Veränderung von ξ erzeugt also eine Schaar ähnlicher Curven.

Bei gleichem ϑ ist η um so kleiner, je grösser ξ ; $\xi = \infty$ macht $\eta = 0$ für jedes endliche ϑ . Bei wachsendem positivem ξ schmiegen sich mithin die Curve des ersten und die des zweiten Hauptfalles, jene von oben, diese von unten, vom Nullpunkt her der Geraden BB' auf der positiven Seite an; für $\xi = \infty$ verschmelzen sie im Endlichen mit dieser Geraden. Hinsichtlich der Curve des ersten Hauptfalles entspricht dies Ergebniss unserem früheren Ergebniss: für $\xi = +\infty$, $x' = -bx$ für jedes endliche t (s. oben S. 325; erste Abhandl. S. 300); nur denken wir uns jetzt das unendliche ξ entstanden durch Ueberschreiten des Nullpunktes mit unendlicher Geschwindigkeit nach Fall aus unendlicher Ferne höherer Ordnung (vergl. oben S. 332).

[563] $\xi = 0$ macht $C = \infty$, also $\vartheta = 0$ für jedes endliche η ; die Curve des ersten Hauptfalles fällt zusammen mit den Geraden AA' auf der negativen und die Curve des zweiten Hauptfalles mit derselben Geraden auf der positiven Scalenseite, und so geht hier beziehlich der erste Hauptfall in den zweiten, oder der zweite in den ersten über. Dies ist das analytische Abbild dessen was man beobachtet, wenn man für $\varepsilon > n$ dem Magnet im Augenblicke, wo man ihn aus einer stets gleichen Ablenkung fallen lässt, beziehlich einen immer schwächeren oder immer stärkeren Inductionsstoss ertheilt, so dass zuletzt der Nullpunkt nicht mehr überschritten wird, oder eben anfängt überschritten zu werden.

Macht man $\frac{a}{b} = 2$, so wird die Curve eine gemeine Parabel,

$$\eta = C^{\frac{1}{b}} \cdot \vartheta^2,$$

welche die ϑ -Axe im Nullpunkte berührt, deren Axe der η -Axe parallel, und deren Parameter

$$2p = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{C^{\frac{1}{b}}}$$

ist. Die Curve des zweiten Hauptfalles auf der negativen Seite ist die

Fortsetzung der Curve des ersten Hauptfalles auf der positiven Seite und umgekehrt; man hat zwei Parabeln, die einander im Nullpunkte berühren.

Da die Tangente am Scheitel der Parabel senkrecht steht auf der Parabelaxe, welche mit der Tangente am negativen Maximum der auf die x -Axe bezogenen Parabel den Winkel α , mit der Tangente am ξ -Punkt den Winkel $90^\circ - \alpha$ bildet, so fällt der Scheitel weder mit dem einen, noch mit dem anderen dieser beiden Punkte zusammen, sondern liegt zwischen ihnen, um so näher dem Maximum, je grösser, um so näher dem ξ -Punkte, je kleiner α .

Macht man nun noch $\alpha = 45^\circ$, also $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, so folgt aus den Eigenschaften der Parabel, dass der Scheitel in der Mitte zwischen den beiden Punkten liegt. Die den ξ -Punkt und das Maximum verbindende Gerade geht durch den Brennpunkt F , ihre Länge τt , ist der Parameter

[564]
$$2p = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0,35355.$$

Das Maximum x' , ist $= -\frac{1}{4}$; die Axe der Parabel schneidet die x -Axe bei $x_0 = \frac{3}{4}$; x'_0 ist $= 2$ u. s. w. Diese Verhältnisse liegen Fig. 6, und wie schon bemerkt, auch Fig. 4 und 5 zu Grunde (vgl. oben S. 331. 338).

Die übrigen Curven des zweiten Hauptfalles sind jetzt noch genauer zu betrachten. Für eine und dieselbe Vorrichtung, d. h. ein und dasselbe a und b entspricht im zweiten Hauptfalle jedem X eine Schaar von Curven der Ablenkungen und eine Schaar von Curven der Geschwindigkeiten bezogen auf die Zeit. Die einzelnen Curven dieser beiden Schaaeren unterscheiden sich durch den Werth von X' , welcher zwischen bX und aX schwankt. Da unendlich viele X denkbar sind, giebt es dergestalt unendlichmal unendlich viele Ablenkungs- und Geschwindigkeitscurven des zweiten Hauptfalles bezogen auf die Zeit. Wird aber die Geschwindigkeit auf die Ablenkung bezogen, so hat man nur noch Eine Curvenschaar des zweiten Hauptfalles, welche, mit den sie einschliessenden Grenzcurven, für alle Werthe von X dieselbe bleibt. Denn da die Bewegung des Magnetes durch bestimmte Geschwindigkeit bei bestimmter Ablenkung eindeutig bestimmt ist, kann durch einen zwischen den Geraden AA' , BB' gelegenen Punkt, als Gipfel einer Geschwindigkeitsordinate, auch nur Eine Curve gehen. Je grösser \mathfrak{A} und je kleiner folglich \mathfrak{B} (s. oben S. 336), um so näher der Geraden BB' , je grösser \mathfrak{B} und je kleiner \mathfrak{A} , um so näher der Geraden AA' verläuft die Curve; für $\mathfrak{A} = 2rX$, $\mathfrak{B} = 0$ fällt sie mit BB' , für $\mathfrak{B} = 2rX$, $\mathfrak{A} = 0$ mit AA' zusammen. Die zu einem bestimmten X gehörigen Ordinaten

— bX , — X' , — aX aber sind jedesmal die nämlichen, die in Fig. 5 bei gleichem Maassstabe zu demselben X und zur Zeit T gehören würden (27).

Für $t = \tau$ z. B. schwankt in Fig. 5 die Ordinate sämtlicher Geschwindigkeitscurven zwischen $x' = -\frac{\xi}{2}$ und $x' = -\xi$, während sämtliche Ablenkungscurven sich im Gipfel der Ordinate $+\xi$ schneiden (vergl. oben S. 339). Demgemäss sind in Fig. 6 die Ordinaten $-\alpha\xi$ und $-\beta\xi$ der Geraden AA' , BB' , beziehlich $= 1$ und $= \frac{1}{2}$. Dagegen schneiden sich in Fig. 5 sämtliche Geschwindigkeitscurven bei t , im Gipfel der Ordinate $-\frac{\xi}{4}$, während [565] die Ordinate der Ablenkungscurven zwischen $x = +\frac{\xi}{4}$ und $x = +\frac{\xi}{2}$ schwankt (vergl. oben S. 339). In Fig. 6 stellt sich dies so dar, dass die der x -Axe parallele Gerade $x' = \frac{1}{4}$ die Gerade AA' bei $x = +\frac{\xi}{4}$, die BB' bei $x = +\frac{\xi}{2}$ schneidet. In Fig. 5 würde mit wachsendem ξ die Steilheit der Curven wachsen (s. oben S. 338); in Fig. 6 bleiben die Curven für jedes ξ die nämlichen, und nur die bezeichneten Schneidepunkte rücken mit wachsendem ξ weiter vom Nullpunkte fort.

Man vergegenwärtige sich nun die Schaar der durch ξ unterschiedenen Curven des ersten Hauptfalles. Mit einer jeden von diesen wird eine der durch \mathfrak{A} und \mathfrak{B} unterschiedenen Curven des zweiten Hauptfalles in der obigen Art gemeinsam construierbar sein; und eine einfache Construction dient, die so zusammengehörigen Curven beider Hauptfälle zu bestimmen. Diese Construction ist in Fig. 7 in kleinerem Maassstabe besonders vorgeführt, da sie für ein so grosses ξ , wie es aus anderen Gründen in Fig. 6 nöthig war, zu weite Ausdehnung dieser Figur bedingt hätte, wie denn aus demselben Grunde in Fig. 5 die Darstellung der zu \mathfrak{X} gehörigen Curven unterblieben ist.

Aus (36) folgt, dass, wenn \mathfrak{A} , \mathfrak{B}' das \mathfrak{A} und \mathfrak{B} bedeuten, für welches $X = \mathfrak{X}$, $X' = \mathfrak{X}'$, man stets haben müsse

$$\mathfrak{A} : \mathfrak{B}' :: a : b.$$

Man ziehe irgendwo eine der x' -Axe parallele Gerade $\mathfrak{X}A'$, und theile die Strecke $-(a - b)\mathfrak{X} = B'A'$ im Verhältniss von $a : b$ so ein, dass das a entsprechende grössere Stück an A' stosse. Man hat dann

$$B'C' : A'C' :: B\mathfrak{X} : A'\mathfrak{X};$$

die Punkte \mathfrak{X} , B' , C' , A' liegen harmonisch, und die Geraden $0\mathfrak{X}$, $0B'$, $0C'$, $0A'$ sind harmonische Strahlen. Zieht man von C' nach τ dem

Strahle $0A'$ parallel eine Gerade, so wird diese durch den zugeordneten Strahl $0B'$ in ihre beiden Hälften $+\eta$ und $-\eta$ getheilt. Da $0B'$ die ϑ -Axe ist, so sind C' und τ Curvenpunkte, und der Strahl $0C'$, der zur Gleichung hat (40)

$$x' = - \frac{2ab}{a+b} \cdot x,$$

[566] ist der Ort aller Curvenpunkte des zweiten Hauptfalles, deren η bei gleichem ϑ dem η des ξ -Punktes irgend einer Curve des ersten Hauptfalles gleich und entgegengesetzt ist. $a\mathfrak{X} + \mathfrak{X}' = \mathfrak{U}$ ist sichtlich $= a\xi$; $b\mathfrak{X} + \mathfrak{X}' = -\mathfrak{B}' = -b\xi$. In Fig. 7 sind abermals $\xi = 1$, $a = 1$, $b = 1/2$ gemacht; demgemäss ist $\mathfrak{X} = 3$, $\mathfrak{X}' = 2$; die Gleichung des Strahles $0C'$ ist

$$x' = - \frac{2}{3} x.$$

Da für alle Curven des zweiten Hauptfalles, ausgenommen für die Grenzcurve $0A'$, am Nullpunkte $x' = -bx$ [(22), (29)], und für alle, ausgenommen für die Grenzcurve $0B'$, im Unendlichen $\frac{x'}{x} = -a$ [(21), (23)], so schneiden sämtliche Curven den Strahl $0C'$. Schreibt man Gleichung (36)

$$\frac{(ax + x')^a}{(bx + x')^b} = \frac{(\mathfrak{U})^a}{(-\mathfrak{B}')^b} = \frac{a^a}{(-b)^b} \cdot \xi^{2r},$$

so zeigt sich abermals, dass für $\xi = 0$, $x' = -ax$, und für $\xi = \infty$, $x' = -bx$ wird (vgl. oben S. 346); der Annahme $\xi = 0$ genügen aber ferner \mathfrak{X} und $\mathfrak{X}' = 0$, und der Annahme $\xi = \infty$ genügen \mathfrak{X} und $\mathfrak{X}' = \infty$; für $\xi = 0$ also rückt der Schneidepunkt C' auf der Geraden $0C'$ an den Nullpunkt, für $\xi = \infty$ in die Unendlichkeit.

§. VIII. Die Curve der Geschwindigkeiten bezogen auf die Ablenkungen im Grenzfall $\varepsilon = n$.

Denkt man sich den Winkel $\alpha - \beta$ immer kleiner bis zum Verschwinden, so hört im Augenblicke, wo die Geraden AA' , BB' zusammenfallen, der zweite Hauptfall zu bestehen auf, und von den vier Curvenzweigen der Fig. 6 bleiben nur die beiden übrig, welche den ersten Hauptfall vorstellten. Auch die Transformation, bei der jene Geraden als Axen eines schiefen Coordinatensystemes benutzt werden, wird unmöglich. Man kann aber mit ausreichendem Erfolge diese Transformation durch mehrere andere, z. B. durch die in Fig. 8 sichtbare, ersetzen. Hier ist $0t, t, \tau t_0$ wieder die Curve $x' = \phi(x)$ für ein positives, $0\tau' t'_0$ die für ein negatives ξ .

[567] Die gegenwärtige Construction entsteht aus der vorigen, wenn man sich unter der ϑ -Axe jetzt die Gerade denkt, welche mit der x -Axe den zu ε als Tangente gehörigen Winkel ω einschliesst, während man in Gedanken die η -Axe so weit von der ϑ -Axe fort dreht, dass sie mit der x' -Axe zusammenfällt. Die Richtungen, in denen die η und ϑ wachsen, bleiben dieselben.

Ganz wie für ein endliches r die Ausdrücke (9) den Abstand der Curvenpunkte von den Geraden AA' , BB' in der Richtung der x' -Axe maassen, misst nun $\varepsilon x + x'$ deren in derselben Richtung, also auch in der Richtung der η -Axe, genommenen Abstand, z. B. des Curvenpunktes ζ von der Geraden $x' = -\varepsilon x$. Man hat also

$$\eta = \varepsilon x + x',$$

positiv auf der oberen, negativ auf der unteren Seite der ϑ -Axe. Man hat ferner

$$\varepsilon x = \vartheta \sin \omega.$$

Eliminirt man die Zeit zwischen den Gleichungen (33) und (34), so erhält man die mit dem Ausdruck auf S. 299 der ersten Abhandlung identische Gleichung

$$\varepsilon x + x' = \varepsilon \xi e^{1 - \frac{\varepsilon x}{\varepsilon x + x'}}, \quad (44)$$

die hier die Stelle von (35) vertritt. Indem man in (44) für $\varepsilon x + x'$, εx die obigen Werthe setzt, kommt

$$\eta = \varepsilon \xi e^{1 - \frac{\vartheta}{\eta} \sin \omega} \quad (45)$$

oder

$$\vartheta = \frac{\eta}{\sin \omega} \log \left(\frac{\varepsilon \xi}{\eta} \right), \quad (46)$$

woraus sich das Nöthige ergibt. Macht man ξ negativ, so werden η und ϑ negativ; die Gleichung stellt also beliebig den einen und den anderen der beiden Curvenzweige vor, welche physikalisch nur getrennt Bedeutung haben. Wir verfolgen von diesen Zweigen den oberhalb der ϑ -Axe gelegenen. Bei der Discussion ist es diesmal bequemer, die η -Axe als Abscissen-, die ϑ -Axe als Ordinatenaxe anzusehen.

[568] Es ist

$$\frac{d\vartheta}{d\eta} = \frac{1}{\sin \omega} \log \left(\frac{\varepsilon \xi}{\eta} \right),$$

$$\frac{d^2\vartheta}{d\eta^2} = - \frac{1}{\eta \sin \omega}.$$

Am Nullpunkte fällt die Curve zusammen mit der ϑ -Axe, entsprechend dem obigen Resultat: für $t = +\infty$, $x' = -\varepsilon x$. Die Curve steigt dann, concav gegen die η -Axe, bis zu einem Maximum am ξ -Punkte bei

τ abwärts, wo $\eta = \varepsilon \xi$; da hier $\frac{d\vartheta}{d\eta} = 0$ ist, schneidet die Curve die x -Axe senkrecht (vergl. erste Abhandlung S. 297). Von hier ab steigt sie ohne Wendepunkt in's Unendliche an. Bei $\eta = e \varepsilon \xi$ schneidet sie die η -Axe; fortan ist ihre Ordinate negativ, und sie selber convex gegen die Abscissenaxe; zuletzt für $\eta = \infty$ nimmt sie wieder die Richtung der ϑ -Axe an, entsprechend dem obigen Ergebniss: für $t = -\infty$, $\frac{x'}{x} = -\varepsilon$.

Es ist gleichgültig, ob man in (45) oder (46) η und ϑ mit einer Constanten k , oder ob man ξ mit $\frac{1}{k}$ multiplicirt: Veränderung von ξ erzeugt also eine Schaar ähnlicher Curven.

Für $\xi = 0$ schmiegt sich die Curve dem negativen, für $\xi = \infty$ dem positiven Schenkel der ϑ -Axe an, und im letzteren Fall ist es als sei der Magnet aus unendlicher Ferne höherer Ordnung gefallen und habe den Nullpunkt mit unendlicher Geschwindigkeit überschritten.

Macht man ξ negativ, so verlegt man dadurch den Vorgang auf die andere Scalenseite, auf der Alles Gesagte symmetrisch wiederkehrt.

In der Figur ist $\omega = 45^\circ$, $\xi = 1$; das Maximum der Curve $x' = \phi(x)$ wird dadurch $= -\frac{1}{e}$, und liegt bei $x = \frac{2}{e}$; die Ordinate des Wendepunktes wird $-\frac{2}{e^2}$, und liegt bei $x = \frac{3}{e^2}$; endlich die Ordinate x'_0 ist $= e$. Die Fig. 24 der ersten Abhandlung entspricht einem Theile dieser Figur, nur dass dort ξ , statt $= 1$, $= 2$ gemacht war.

Zusatz von Hrn. KRONECKER zur vorigen Abhandlung.

[569] Lässt man den Magnet aus einer positiven Ablenkung χ ohne Dämpfung fallen, bis er eine Ablenkung: $\chi \cdot \cos v$ erreicht, und erst an dieser Stelle die Dämpfung eintreten, was sich durch Schliessen eines Gewindes bewerkstelligen liesse, so kann man für die weitere Bewegung des Magnetes die Grössen χ und v als Constanten einführen. Hiernach erhält man, wenn der Nullpunkt der Zeit an den Eintritt der Dämpfung und

$$\gamma b = \gamma a \cdot \operatorname{tg} u \quad (0 < u < \frac{1}{4} \pi)$$

gesetzt wird, Ablenkung und Geschwindigkeit durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$(ax + x') e^{bt} = n\chi \cdot \frac{\cos(u + v)}{\sin u}, \quad (bx + x'') e^{at} = n\chi \cdot \frac{\sin(u - v)}{\cos u}$$

oder:

$$\frac{x}{\xi} \cos 2u = \cos u \cdot \cos (u + v) \cdot e^{-bt} - \sin u \cdot \sin (u - v) e^{-at}$$

$$- \frac{x'}{n\xi} \cos 2u = \sin u \cdot \cos (u + v) \cdot e^{-bt} - \cos u \cdot \sin (u - v) e^{-at}.$$

Für $t = 0$ wird:

$$x = \xi \cos v, \quad x' = -n\xi \sin v$$

$$\frac{ax + x'}{bx + x'} = \frac{\cos u \cos (u + v)}{\sin u \sin (u - v)}, \quad \frac{ax' + x''}{bx' + x''} = \frac{\sin u \cos (u + v)}{\cos u \sin (u - v)}$$

Der Ausdruck $\frac{\cos (u + v)}{\sin (u - v)}$ durchläuft, wenn v von 0 bis u geht, alle

Werthe von $\cot u$ bis $+\infty$, hierauf (während v von u bis π wächst) stetig zunehmend alle Werthe von $-\infty$ bis $\cot u$. Liegt v zwischen

0 und u oder zwischen $\frac{\pi}{2} - u$ und π , so findet der erste Hauptfall

statt, der zweite aber, sobald v zwischen u und $\frac{\pi}{2} - u$ liegt.

So lange $v \leq \frac{\pi}{2} - u$ ist, d. h. so lange die Dämpfung bei einer

Ablenkung eintritt, welche nicht kleiner als $\xi \cdot \sin u$ oder $\xi \sqrt{\frac{b}{a+b}}$

ist, überschreitet der Magnet nicht seine Ruhelage $x = 0$, sondern nähert sich derselben asymptotisch von der positiven Seite [570] her. Wenn aber v

zwischen $\frac{\pi}{2} - u$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt und demgemäss die Ablenkung bei Ein-

tritt der Dämpfung positiv und kleiner als $\xi \cdot \sin u$ ist, so überschreitet der Magnet die Ruhelage, kehrt bei der negativen Ablenkung:

$$(A) \quad -\xi \cdot \left(\frac{-\cos (u + v)}{\cos u} \right)^{\frac{a}{2r}} \left(\frac{\sin u}{\sin (v - u)} \right)^{\frac{b}{2r}}$$

um und nähert sich alsdann von der negativen Seite her wiederum der

Ruhelage. Wenn endlich v zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegt, die Dämpfung also

erst bei einer negativen Ablenkung beginnt, so bewegt sich der Magnet im Sinne wachsender negativer Ablenkungen weiter bis zu dem durch den

Ausdruck (A) gegebenen Maximum, kehrt alsdann um und erreicht schliesslich von der negativen Seite her seine Ruhelage. Der Werth $x = 0$ wird

also für positive endliche Werthe von t nur erreicht, wenn $\frac{\pi}{2} - u < v$

$< \frac{\pi}{2}$ ist, der Werth $x' = 0$, wenn $\frac{\pi}{2} - u < v < \pi$ ist.

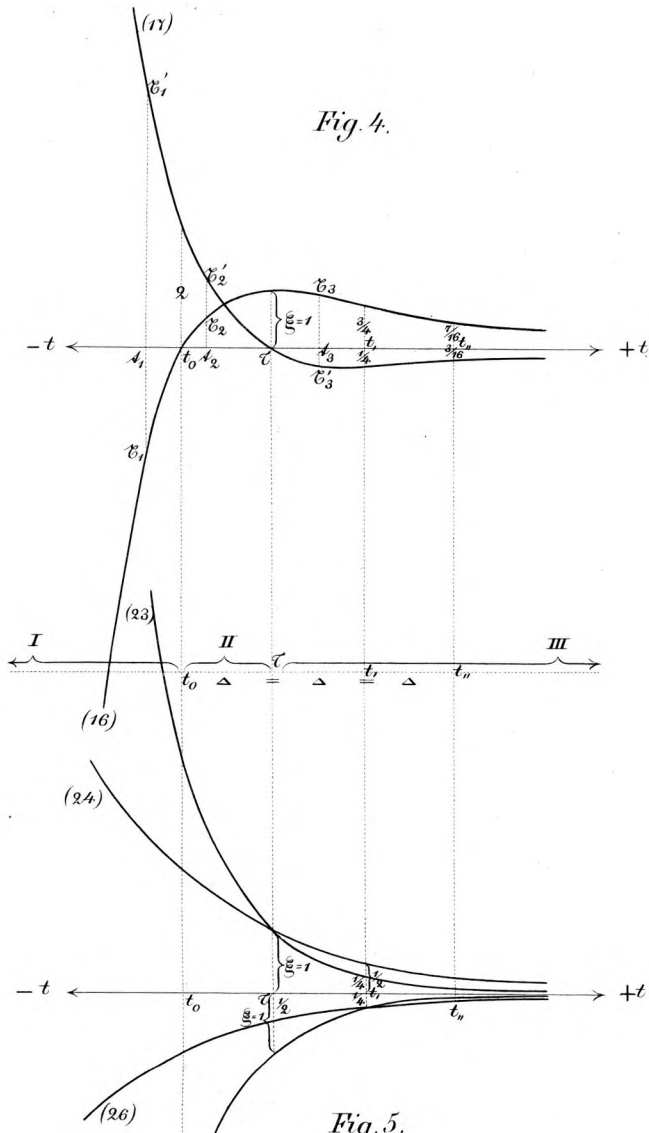


Fig. 4.

Fig. 5.

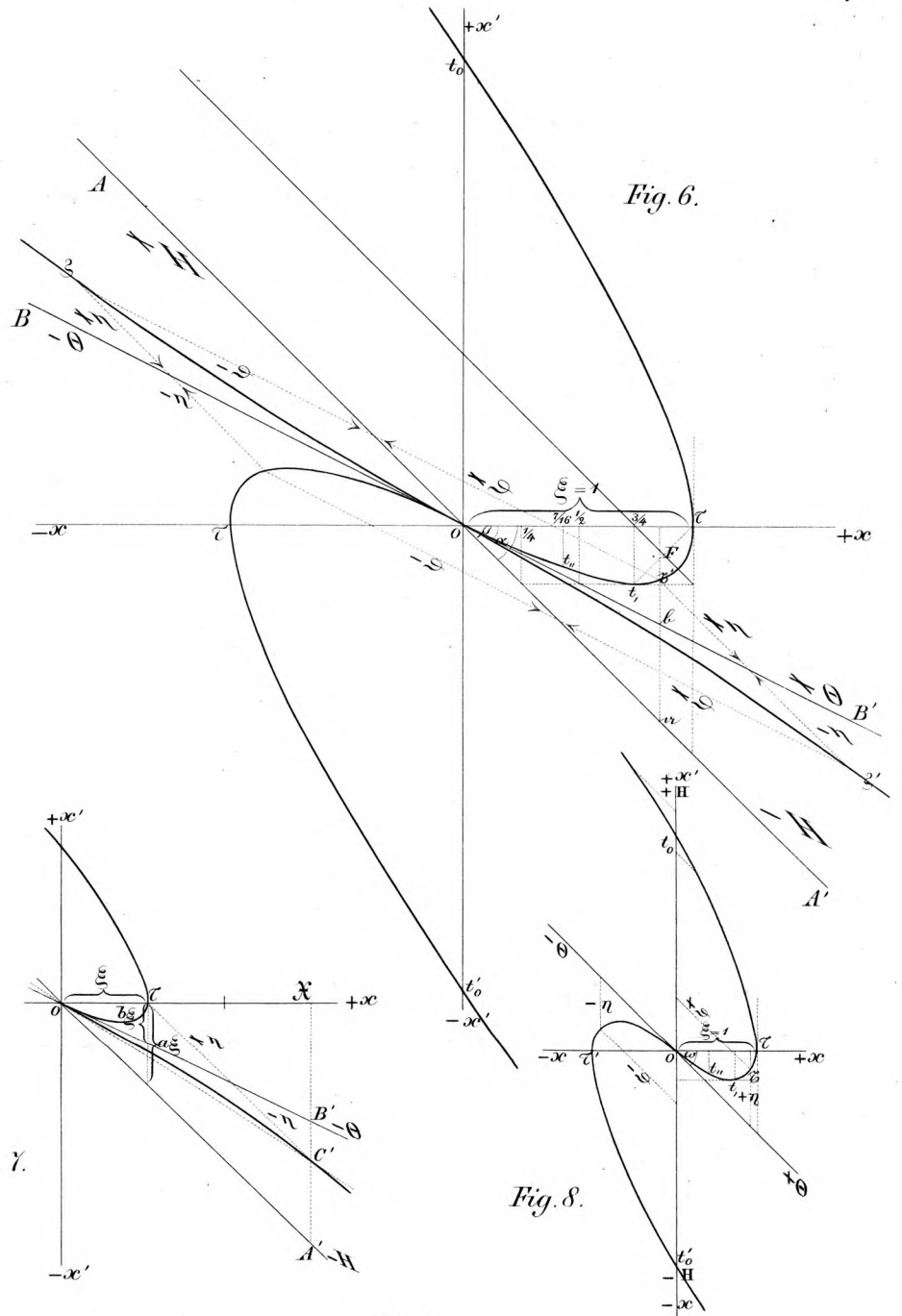


Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

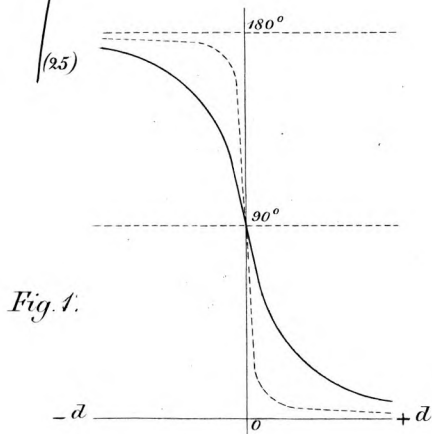


Fig. 1.

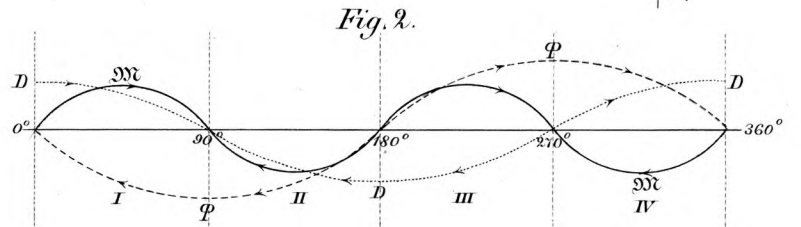


Fig. 2.

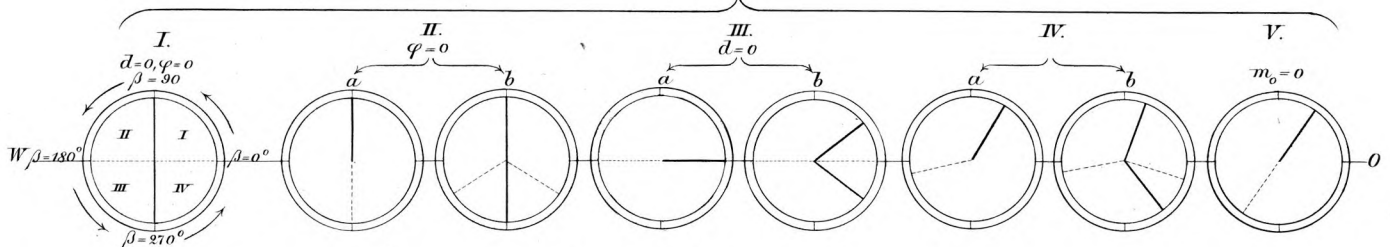


Fig. 3.