

Ueber aperiodische Bewegung gedämpfter Magnete.

Vierte Abhandlung.

(Gelesen in der Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 14. December 1874.)¹

§. I. Warum es an gewissen Bussolen misslang, den Magnet in brauchbarer Weise aperiodisch zu machen.

Verschiedene Beobachter klagten mir, dass es ihnen nicht gelungen sei, den aperiodischen Zustand der Bussolmagnete, wie ich ihn schildere, herzustellen. Bei fortgesetzter Annäherung des Stabes sei der Magnet² umgeschlagen, ohne dass Schwingungslosigkeit erreicht wurde, oder wenigstens diese sei erst bei einem Abstand des Stabes eingetreten, der sich kaum von dem unterschied, wo der Magnet umschlug; eine Lage, wobei, wenn überhaupt, doch nicht mit Vortheil zu arbeiten war, während ich die Verschiebung des Stabes von dem Punkt, wo Schwingungslosigkeit eintrat, bis zu dem Punkt, wo der Magnet umschlug, bei meinem leichten Spiegel auf 25^{mm}, bei meinem schweren noch auf 5^{mm} angebe.³

Um den Fehler aufzudecken, der diesem Verhalten zu Grunde lag, muss man auf die ursprüngliche Bedingung der Schwingungslosigkeit zurückgehen.

Bezeichnet man nach GAUSS mit 2ε die verzögernde Kraft der Dämpfung für die Einheit der Geschwindigkeit, mit n^2 die magnetische Richtkraft für die Einheit der Ablenkung, beide dividirt durch das Trägheitsmoment M , so ist die Bedingung der Schwingungslosigkeit, dass

¹ Monatsberichte der Akademie u. s. w. 1874. S. 767.

² Unter Magnet schlechthin verstehe ich kürzlicher hier stets den beweglichen Magnetspiegel, oder Magnetring mit Glasspiegel, unter Stab schlechthin den festen, der Erdkraft entgegenwirkenden HAUY'schen Magnetstab.

³ S. oben S. 311.

$\varepsilon > n$ sei. Entwickelt man die Werthe von ε und n , so kommt diese Bedingung darauf zurück, dass

$$\alpha^2 m'^4 \{ \iota + \eta (H - S) \}^3 > 4m' (H - S) M \quad (1)$$

sei.¹ Hier bedeuten

[768] α eine Constante, welche unter anderen die Inductionskonstante und das Leitvermögen des Dämpfers zu Factoren hat;

m' das Drehungsmoment, welches für die magnetische Intensität Eins auf den Magnet ausgeübt wird durch eine Strömung im Dämpfer, wie sie der Magnet bei seiner Winkelbewegung erzeugt;

ι die permanente,

η die durch die Einheit einer horizontalen Kraft inducirte Intensität des Magnetes;

H die horizontale Componente des Erdmagnetismus;

S die horizontale Componente des Magnetismus des Stabes;

m' das Moment des Magnetes für parallele Kräfte bei der Intensität Eins.

Jene vergeblichen Bemühungen, Schwingungslosigkeit herbeizuführen, fanden an SAUERWALD'schen Bussolen statt. α , m' , m' , M hatten also merklich denselben Werth, wie an meinen Bussolen. H war, in den in Betracht kommenden Grenzen auch dasselbe. η ist überhaupt kleiner, als dass Schwankungen seines Werthes so grossen Einfluss üben könnten, wie er hier stattfand. Der Fehler, den wir suchen, kann also nur an ι , oder S , oder beiden haften.

Für $S = 0$, d. h. ohne Stab, ist an gewöhnlichen Bussolen die linke Seite der Bedingungsgleichung (1) wohl stets die kleinere. Nur mit SIEMENS'schen Glockenmagneten wurde sie bisher grösser gefunden, als die rechte.² Durch Wachsen von S nimmt die rechte Seite, wegen Kleinheit von η , viel schneller ab als die linke, daher beim Annähern eines hinreichend kräftigen Stabes die rechte Seite erst gleich der linken, dann kleiner wird. Sind beide Seiten einander gleich, oder ist $\varepsilon = n$, so tritt Schwingungslosigkeit ein. Wir wollen den Werth S , der $\varepsilon = n$ macht, mit S_1 bezeichnen, den Abstand der Mitte des Stabes von der Mitte des Magnetes, wobei $S = S_1$, mit r_1 . $S > H$ bedingt Umschlagen des Magnetes; der Werth $S = H$ heisse S_2 , der entsprechende Abstand des Stabes r_2 . Wird der Stab noch weiter genähert, so besteht bis zu einem gewissen Werthe von S , der S_3 heissen möge, und bei einem Abstände r_3 stattfindet, Schwingungslosigkeit fort. Sie hört erst auf, wenn die rechte Seite der Bedingungsgleichung ihrem abso- [769]

¹ S. oben S. 306.

² S. oben S. 354.

luten Werthe nach wieder die grössere wird. Dies wird verhältnissmässig früh geschehen, weil jetzt die negativ gewordene inducirte Intensität η ($H - S$) von der permanenten Intensität ι sich abzieht. Der ganze Spielraum schwingungsloser Astasie liegt also eigentlich zwischen den Werthen S_1 , S_3 , oder den Abständen r_1 , r_3 . In der Ausübung hätte es aber keinen Sinn, den Stab dem Magnet über r_2 hinaus zu nähern, und wir können uns mit der Betrachtung dessen begnügen, was bis zu diesem Punkt, oder bis zu $S = S_2 = H$, geschieht. Unter Spielraum schwingungsloser Astasie ist daher im Folgenden nur der zwischen den Werthen S_1 , S_2 oder r_1 , r_2 eingeschlossene Spielraum verstanden.

Der Fehler, den wir zu ergründen streben, bestand nun sichtlich darin, dass der Unterschied $\delta = r_1 - r_2$ zu klein war: denn da beim Annähern des Stabes der Magnet umschlug, lag dieser Fehler keinesfalls darin, dass S nicht gross genug gemacht werden konnte.

Zunächst ist zu bemerken, dass einem gleichen Unterschiede $S_1 - S_2$ ein verschiedener Unterschied $\delta = r_1 - r_2$ entsprechen kann.

Stellen wir uns, der Einfachheit halber, vor, die Dimensionen unserer Magnete verschwänden gegen r_1 , r_2 , so dass die GAUSS'schen Formeln für Fernwirkung von Magneten anwendbar wären. Dann lässt sich S gleichsetzen einer Constanten \mathfrak{M} (dem Momente des Stabes multiplicirt mit einer trigonometrischen Function), dividirt durch r^3 . Wächst \mathfrak{M} , während

$$S_1 = \frac{\mathfrak{M}}{r_1^3}, \quad S_2 = \frac{\mathfrak{M}}{r_2^3}$$

beständig bleiben, so wachsen auch r_1 , r_2 . Mit anderen Worten, ein stärkerer Stab bewirkt Schwingungslosigkeit und Umschlagen des Magnetes aus grösserer Ferne als ein schwächerer.

Wir bezeichnen nun ferner mit r'_1 , r'_2 die Abstände, in denen beziehlich Schwingungslosigkeit und Umschlagen des Magnetes durch einen anderen längs derselben Geraden genäherten stärkeren Stab bewirkt werden, für den die Constante \mathfrak{M}' an Stelle von \mathfrak{M} tritt. Sind S'_1 , S'_2 die zugehörigen S , und ist $\delta' = r'_1 - r'_2$, so hat man

$$[770] \quad S_1 = \frac{\mathfrak{M}}{r_1^3} = S'_1 = \frac{\mathfrak{M}'}{r_1'^3},$$

$$S_2 = \frac{\mathfrak{M}}{r_2^3} = S'_2 = \frac{\mathfrak{M}'}{r_2'^3}$$

und

$$\frac{\delta'}{\delta} = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}}} \quad (2)$$

Für $\mathfrak{M}' > \mathfrak{M}$ ist $\delta' > \delta$; der stärkere Stab gewährt den grösseren Spielraum schwingungsloser Astasie.

Unter den vorausgesetzten Bedingungen wird also Schwäche des Stabes einen Einfluss der Art üben, wie wir ihn zur Erklärung des fraglichen Verhaltens brauchen. In Wirklichkeit freilich ist r kleiner, als dass obige Formeln genau zuträfen. Doch ist Grund anzunehmen, dass auch die verwickelte Function der Entfernung, nach welcher die Wirkung des Stabes in grösserer Nähe wächst, noch die Eigenschaft habe, dass $\delta' > \delta$ sei. Andererseits scheint es kaum, als ob dieser Umstand der Grösse nach zur gesuchten Erklärung reiche. Ausdruck (2) lehrt, dass wenigstens bei grösserem Abstand ein 8 mal, 27 mal . . . schwächerer Stab nur einen beziehlich 2 mal, 3 mal kleineren Spielraum schwingungsloser Astasie gewähren würde. Solche Schwäche des Stabes kommt nicht vor, während jener Spielraum an den Vorrichtungen, deren Fehler uns beschäftigt, viel kleiner war, als nur zwei oder dreimal so klein, wie an der meinigen. Es ist nicht wahrscheinlich, dass in grösserer Nähe dies Verhältniss sich um so viel günstiger für unseren Erklärungsversuch gestalte. Doch wird man wohl daran thun, auf möglichst starke Magnetisirung des HAUUY'schen Stabes zu achten, schon deshalb, weil bei der grösseren Entfernung, aus der ein stärkerer Stab noch kräftig genug wirkt, die Proportionalität der Tangenten der Ablenkungen mit den Stromstärken besser gewahrt bleibt.

Ein anderer Grund, weshalb $\delta = r_1 - r_2$ zu klein ausfällt, kann nun aber zweitens darin liegen, dass die Werthe S_1, S_2 zu nahe zusammenfallen. Für $S = S_2 = H$ verschwindet die rechte Seite der Bedingungsgleichung; die linke behält den Werth $\kappa^2 m'^4 \iota^3$, der dem ursprünglichen nur um die kleine Grösse $\eta^3 H^3$ nachsteht. Für $S = S_2 = H$ ist die linke Seite also die grössere, einen wie kleinen endlichen Werth man auch m' und ι zuschreibe. Dies [771] heisst so viel, wie dass bei Gegenwart auch des schwächsten Dämpfers auch der schwächste Magnet durch Annähern des Stabes nicht zum Umschlagen gebracht werden kann, ohne wenigstens in der Theorie durch den schwingungslosen Zustand zu gehen. Gleichheit beider Seiten der Bedingungsgleichung wird aber durch Wachsen von S schon bei um so grösserem $H - S$, d. h. um so kleinerem S_1 erreicht, mit anderen Worten, der Spielraum schwingungsloser Astasie wird um so grösser, je grösser die permanente Intensität des Magnetes ι . Um so mehr ist dies der Fall, als deren dritte Potenz in's Spiel kommt.

Natürlich ist stets ein so kleiner Werth von ι möglich, dass, wie gross auch κ und m' seien, die linke Seite der Gleichung die grössere wird, erst wenn $H - S$ fast verschwindet. Der verschwindenden Intensität ι entspricht aber dann nur ein verschwindender Unterschied

$\delta = r_1 - r_2$, und so wird der schwingungslose Zustand, wenn nicht unfassbar, doch unbrauchbar.

Dies ist, mehr oder weniger genau, die Lage, die sich jenen Beobachtern bot. Der Fehler ihrer Vorrichtung bestand wesentlich darin, dass aus irgend einem Grund der Magnet nicht hinreichende permanente Intensität besass.

Ohne erst den Versuch zu machen, Schwingungslosigkeit herbeizuführen, erkennt man schon an der Art, wie bei Abwesenheit des Stabes der Magnet in einem bekannten Dämpfer schwingt, ob er hinlänglich stark sei. In einer SAUERWALD'schen Bussole sollte das logarithmische Decrement eines Magnetspiegels dünnster Art (von etwa 0.8 mm Dicke) nicht kleiner sein als 0.7 , das eines Magnetringes mit Glasspiegel nicht kleiner als 0.4 , wobei ein Durchmesser des Magnetes vorausgesetzt ist, der ihm nur eben im Dämpfer frei zu schwingen erlaubt. Beim Fallenlassen von 500^{sc} ist dann im ersten Falle die vierte, im zweiten die siebente Schwingung kleiner als 1^{sc} . Ein einziger Ablenkungsversuch genügt also, um über Brauchbarkeit des Magnetes in seinem zeitigen Zustande sich zu unterrichten. Man hüte sich, mit einem schwächeren, also minder stark sich dämpfenden Magnete zu arbeiten. Je näher $= H$ man S machen muss, um Schwingungslosigkeit zu erzielen, um so mehr wächst die Beruhigungszeit¹ des Mag- [772] netes, und um so grösser werden die Schwankungen seiner Gleichgewichtslage bei Variation des Erdmagnetismus (s. unten §. III).

An anders gebauten Instrumenten könnte einerseits zu grosser Abstand des Magnetes vom Dämpfer und sonst mangelhafte Beschaffenheit des letzteren, also zu kleiner Werth von α und m' , andererseits zu grosses Trägheitsmoment M dieselbe Rolle spielen, wie bei passendem Werthe dieser Constanten zu geringe Intensität des Magnetes.

§. II. Fortgesetzte Bemerkungen über die beste Art, den HAUY'schen Stab aufzustellen.

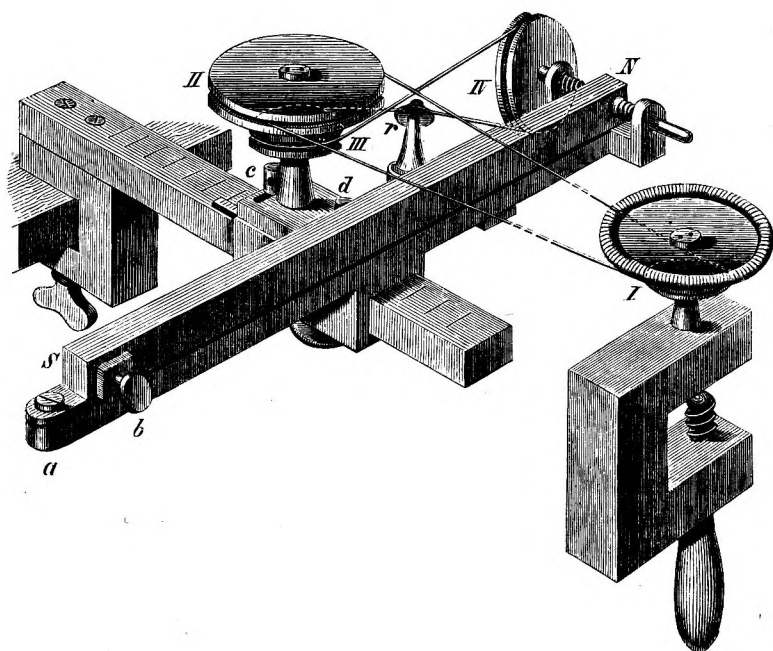
Fig. 28 zeigt die jetzt von mir angenommene Aufstellung des Stabes. Der Stab NS von quadratischem Querschnitt hat 250 mm Länge und 12.5 mm Seite. Sein eines Ende S ist mittels der Schraube b in einer Gabel festgeklemmt, die sich um die Axe aS dreht. Sein anderes Ende N ruht zwischen einer Mikrometerschraube von 0.5 mm Gangweite, deren Kopf durch die Schnurscheibe IV vorgestellt wird, und einem federnden Knopfe, welcher der Schraube entgegenwirkt. Löst man die Klemm-

¹ S. oben S. 308 ff.

schraube *b*, so kann man den Magnet innerhalb gewisser Grenzen in der Gabel hin und her schieben, oder ihn ganz aus seinem Lager entfernen, in welches er natürlich auch umgekehrt passt.

Das Lager des Magnetes verschiebt sich mit einer Hülse längs einer kräftigen Messingschiene, die in aequatorialer Richtung wagerecht vom Consol vorspringt, an welchem sie mittels einer Zwinde aus Rothguss mit zwei Schrauben befestigt wird. Aus räumlichen Rücksichten musste in

Fig. 28.



der Zeichnung die Schiene verhältnissmässig zu kurz, das Consol zu dünn und die Zwinde zu klein vorgestellt werden, wie auch von den beiden Schrauben der Zwinde nur eine abgebildet ist. Die obere Fläche der Schiene ist in Centimeter getheilt, und an dem, dem Consol zugewandten Ende der Hülse befindet sich ein in Millimeter getheilter unächter Nonius; die Hülse kann mittels der unterhalb sichtbaren Schraube festgestellt werden. Um Platz für Befestigung der Schiene am Consol zu haben,

wird vom Grundbrett der Bussole das Ende mit den zwei Stellschrauben dem Stabe zugekehrt.

Die übrigen in der Figur sichtbaren Organe dienen, von des [773] Beobachters Platz am Fernrohr aus den Stab im Azimuth zu drehen. Die Zwinge mit Schnurscheibe I ist in des Beobachters Reichweite in irgend einer ihm bequemen Lage am Tischrand, einem Tischbein u. d. m. festgeklemmt. Bei der Entfernung zwischen den Scheiben I und II kommt es auf einen mässigen Höhenunterschied der Scheiben so wenig an, wie auf Kreuzung ihrer Ebenen. Damit nicht gegen den durch das Zimmer gespannten Schnurlauf angerannt werde, behängt man ihn mit Papierbögen. Unterhalb Scheibe II trägt dieselbe Axe eine kleinere Schnurscheibe III, die durch einen Schnurlauf mit Scheibe IV verbunden ist. Der dem Beschauer zugekehrte Schenkel dieses Schnurlaufes liegt in einer gemeinschaftlichen, dem Stabe parallelen Tangente an beiden Scheiben; der Deutlichkeit halber erhielt er in der Zeichnung etwas [774] andere Richtung. Der andere Schenkel läuft über eine Leitrolle r , deren unter 45° gegen den Horizont geneigte Axe in einer senkrechten Ebene liegt, welche mit der Ebene der Scheibe IV einen Winkel von 45° bildet. Dies erlaubt, trotz der Kürze des Schnurlaufes, die Scheiben ohne Schaden zu kreuzen. Löst man Schraube c , so kann man den Träger der Scheiben II, III um eine senkrechte Axe bei d drehen, und so die über III und IV gehende Schnur spannen.

Die Schnurscheiben bestehen aus Kammmasse. An meinem Exemplare verhält sich der Durchmesser von I zu dem von II etwa wie 1 : 2, der von III zu dem von IV etwa wie 6 : 7. Um Scheibe I feiner bewegen zu können, ist sie mit einer grösseren ränderirten Scheibe von 54^{mm} Durchmesser versehen. Wird letztere um ein Stück ihres Umfanges von 1^{mm}, entsprechend einem Winkel von etwas über 2° gedreht, so beträgt die Verschiebung der Mikrometerschraube etwas über 0.00125^{mm} , entsprechend einer Winkelbewegung des Stabes um Axe aS von etwas über 1".

So sicher und zart arbeitet diese Vorrichtung,¹ dass die sonst so empfehlenswerthe Verschiebung der Scale in ihrer eigenen Verlängerung dadurch fast entbehrlich wird. Man könnte allein mittels der Schnurläufe Nullstrich und Faden vor jedem Versuche zur Deckung bringen. Es ist aber doch zweckmässig, die Verschiebbarkeit der Scale beizubehalten, weil sie schneller wirkt, als Verstellung des Stabes, was oft wichtig ist.

Die in Abh. III empfohlene seitliche Aufstellung des Stabes hat sich

¹ Sie wird von der PLATH'schen (SAUERWALD'schen) Werkstatt der WIEDERMANN'schen Bussole auf Verlangen beigegeben.

im Allgemeinen sehr gut bewährt. Doch ist in einigen Fällen ein Uebelstand dabei hervorgetreten, an den ich nicht gedacht hatte. Bei dem Systeme von Lagen nämlich, wo Stab und Magnet in derselben senkrechten Ebene sich befinden,¹ ist gleichgültig, ob beide Enden des Stabes gleich stark magnetisch sind oder nicht. Auch wenn sie es nicht sind, bleibt der Magnet in der Declinationsebene, wenn der Stab selber darin sich befindet; und nur seine Richtkraft, nicht seine Richtung, wird verändert. Anders ist es bei dem Systeme von Lagen, wo zwar die Axen des [775] Stabes und des Magnetes einander parallel sind, und die Mitten beider Axen in derselben aequatorialen Ebene, diese Mitten aber nicht in derselben senkrechten Ebene sich befinden. Sobald der Stab nicht symmetrisch magnetisirt ist, und in aller Strenge ist er es nie, macht sich dies durch Ablenkung des Magnetes aus der Declinationsebene bemerkbar.

Bleibt diese Ablenkung innerhalb gewisser Grenzen, so hat sie nichts zu bedeuten. Ohne Weiteres kann man sie nicht einmal unterscheiden von den Ablenkungen, die daraus entspringen, dass es unmöglich ist, die magnetische Axe des Stabes durch mechanische Mittel genau in die Declinationsebene zu bringen, und dass, wenn dies zufällig gelänge, sie wegen Variation der Declination nur einen Augenblick darin bliebe. Durch passende Drehung des Stabes im Azimuth, nöthigenfalls durch Verschiebung des Stabes in seiner Verlängerung, bringt man Faden und Nullstrich wieder zur Deckung, wie bei Abwesenheit des Stabes.

Es kann aber zwischen den Wirkungen beider Enden des Stabes auch solcher Unterschied vorkommen, dass die zur Verstellung des Stabes im Azimuth und der Länge nach verfügbaren Mittel nicht reichen, die Wirkungen gleichzumachen. Dann bleibt nur übrig, den Stab besser zu magnetisiren. Sollte bei völliger Sättigung dessen eines Ende eine in der Natur des Stahles begründete Ueberlegenheit zeigen, so müsste man dies Ende durch Verkehrtstreichen schwächen.

Der senkrecht unterhalb des Magnetes befindliche Stab, mit dem ich die Versuche in Abh. I und III anstellte, war 200^{mm} lang, und sein Querschnitt ein Rechteck von etwa 20^{mm} Höhe und 10^{mm} Breite. Mit dem jetzigen Stabe, dessen verlängerte Bahn 80^{mm} unter dem Mittelpunkte des Magnetes hindurchgeht, und dem Magnetspiegel I der Abh. I beträgt der Abstand zwischen den Punkten der Bahn des Stabes, welche den Werthen von S_1 , S_2 entsprechen, über 40^{mm}. Mit dem alten Stabe betragen dabei die Entfernungen r_1 , r_2 beziehlich etwa 300 und 275^{mm};²

¹ S. oben S. 364. 365.

² S. oben S. 311.

mit dem jetzigen Stab entspricht S_1 ein Abstand von 360, S_2 ein solcher von 325^{mm}. Ich brauche kaum zu bemerken, dass letztere Zahlen nicht mehr wie Entfernungen r_1, r_2 anzusehen sind, da die Ver- [776] schiebung des Stabes nicht in der Verbindungslinie zwischen seiner Mitte und der des Magnetes geschieht.

§. III. Von den Schwankungen der Gleichgewichtslage des Magnetes in Folge der täglichen Variation des Erdmagnetismus, oder den „Variationsschwankungen“.¹

Die tägliche Variation der Declination beträgt in Berlin gegenwärtig im grössten Monatsmittel 15·8'. Bei 2·5 — 3^m Abstand der Scale vom Spiegel ist 1^{sc} = 41·25 — 34·38'. Die tägliche Variation beläuft sich folglich bei uns auf höchstens etwa 25—30^{sc}. In höheren Breiten beträgt sie etwas mehr, in niedrigeren etwas weniger. Sie hätte also wenig zu sagen, würde sie nicht durch Abstossung seitens des in der ursprünglichen Declinationsebene verharrenden Stabes vergrössert, und das bei hoher Astasie in sehr störendem Maasse.

In Fig. 29 ist ns der Magnet, NS der astronomische, NS der magnetische Meridian oder die Horizontalprojection der zeitigen Declinationsebene. Der Stab befinde sich in solcher Lage, dass seine Wirkung auf den Magnet gleich der des Erdmagnetismus durch ein der Richtung des Stabes paralleles Kräftepaar vorgestellt wird. $N\Sigma$ bezeichne die Horizontalprojection der Ebene, der dieses Kräftepaar parallel ist, und mit der, wie wir annehmen wollen, ursprünglich auch die Declinationsebene zusammenfiel. H und S stellen beziehlich die horizontalen Kräfte der Erde und des Stabes vor. Winkel φ misst dann die Zunahme der Declination, die beispielsweise stattfand, und Winkel α den Betrag, um welchen der Stab die Gleichgewichtslage des Magnetes weiter nach West von der neuen Declinationsebene drängt. Man hat

$$H \sin \alpha = S \sin (\alpha + \varphi),$$

$$[777] \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{S \sin \varphi}{H - S \cos \varphi}, \quad (3)$$

oder, da φ klein ist,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{S}{H - S} \cdot \varphi \sin 1'.$$

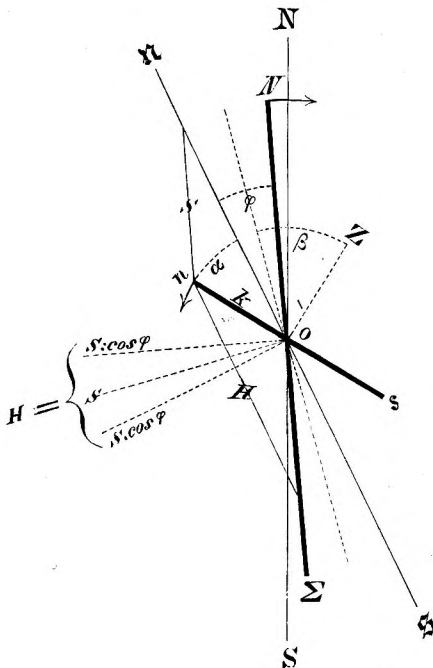
Dieser Ausdruck zeigt erstens, dass die Schwankung der Gleich-

¹ Die hier vorkommenden Angaben über die Variationen des Erdmagnetismus verdanke ich der Gefälligkeit des Hydrographen der Kaiserl. Admiralität, Hrn. Dr. NEUMAYER.

gewichtslage des Magnetes in Folge der Variation der Declination, der Variation nahe proportional erfolgt. Man sollte zum Aufstellen der Bussole und des Fernrohres mit der Scale daher entweder die Tageszeit wählen, wo man am meisten arbeitet, oder die Stunden, wo mittlere Declination herrscht, also die Zeit zwischen 10 und 11 Uhr Vormittags oder zwischen 8 und 9 Uhr Abends.

Uebereinstimmend mit der Erfahrung lehrt zweitens unsere Formel,

Fig. 29.



dass die Schwankung um so grösser ist, je grösser die Astatie. Für $H = S$ ist $\alpha = 90^\circ$ auch für den kleinsten Werth von φ . Daraus erklärt sich das reissend schnelle Wandern des Null- [778] punktes bei hoher Astatie, welches nichts ist als die im Verhältniss von

$$\varphi + \text{arc tg} \left(\frac{S}{H - S} \cdot \varphi \sin 1' \right) : \varphi,$$

wo $S : H - S$ sehr gross ist, sehr vergrösserte Variation selber.

Man sieht endlich drittens, dass auch die Variation der horizontalen

Intensität des Erdmagnetismus, welche ΔH heissen möge, nicht ohne Einfluss auf den Stand des Magnetes bleibt. ΔH beträgt jetzt bei uns höchstens $0.0015 H$. Sobald indess ΔH nicht gegen $H - S$ verschwindet, bedingt positives ΔH Abnahme, negatives Zunahme von α . Die Intensitätsschwankungen werden also erst bei höheren Graden der Astasie Einfluss üben, dann aber eine rasch wachsende Bedeutung erlangen. Die Stunden, wo die Declination durch ihren Mittelwerth geht, folgen sehr nah auf die, wo die Intensität am kleinsten und am grössten ist, und die Mittelwerthe der Intensität gehen denen der Declination um 3—4 Stunden voraus. Man kann daher die Aufstellung der Bussolle nicht zugleich den besten Bedingungen in Bezug auf Declination und in Bezug auf Intensität anpassen.

Das Zeichen von α ist dasselbe wie das von φ , und für ein negatives oder östliches φ stellt sich der Magnet östlich von der Ebene $N\Sigma$. Die Intensitätsschwankungen dagegen wirken stets nur im entgegengesetzten Sinne von den durch Nähern oder Entfernen des Stabes hervorgerufenen Veränderungen von S .

Hr. Prof. V. HENSEN in Kiel hat mir brieflich den sinnreichen Vorschlag gemacht, den HAUUY'schen Stab in einem starken Dämpfer, der ihn zugleich vor Luftströmungen schützte, aufzuhängen, damit er die Declinationschwankungen mitmache. Die Aufhängung müsste so sein, dass trotz der Inclinationschwankungen der Stab horizontal bliebe. Befände sich der Stab über oder unter dem Magnet, so könnte man, um seinen Abstand zu ändern, ihn am Faden oder Draht auf- und abwinden. Der Dämpfer müsste durch andere Mittel entsprechend bewegt werden.

Die durch Variation der Declination bedingten Schwankungen des Magnetes würden so freilich auf das Maass der Variation selber, d. h. auf φ , eingeschränkt. Nennt man die entsprechende Schwankung des Stabes ψ , so würde

$$[779] \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{S}{H - S} (\varphi - \psi) \sin 1'.$$

Für $\psi = \varphi$ ist $\operatorname{tg} \alpha = 0$, und also auch die Intensitätsschwankungen hören auf, Einfluss zu üben. Ausgenommen ist nur der Fall $H = S$; dann wird α für $\psi = \varphi$ unbestimmt, und eine Intensitätsschwankung kann wieder den Magnet bewegen, indem sie die Unbestimmtheit aufhebt.

Leider ist zu bemerken, dass die Torsion eines Fadens oder Drahtes, der stark genug wäre, den Stab zu tragen, da man sie nur für eine bestimmte Declination Null machen könnte, $\varphi - \psi$ doch wohl schon einen Werth ertheilen würde, der bei höherer Astasie die alten Störungen mit sich brächte. Davon abgesehen kann ich für meinen Theil nicht

nöthig finden, so umfängliche Anstalten zur Bekämpfung der Variationschwankungen zu treffen. Ich begnüge mich überhaupt gern mit dem geringsten Maasse schwingungsloser Astasie, da kürzeste Beruhigungszeit (s. oben S. 372) mir wichtiger scheint als grösste Empfindlichkeit. Bei diesem Zustande, wo $\varepsilon = n$, sind die Variationsschwankungen noch recht gut zu ertragen. Bei höherer Astasie, wo ich dieser nicht entbehren konnte, habe ich jene Schwankungen bisher durch Verschiebung der Scale, neuerlich durch Drehung des Stabes im Azimuth von meinem Platz am Fernrohr aus, erfolgreich bekämpft. Zuletzt kommt freilich ein Punkt, wo das Arbeiten mit anderen als kurz dauernden Strömen unmöglich wird.

§. IV. Von der Gleichgewichtslage des Magnetes bei höherer Astasie.

Formel (3) hat noch weiteres Interesse. Setzt man darin $\varphi = 0$, $H = S$, so wird α unbestimmt, der Magnet ist wahrhaft astatisch; er muss in jedem Azimuth stehen bleiben, in welches äussere Kraft ihn führte.

Versucht man aber, dies zu beobachten, so misslingt es. Nicht bloss in dem Sinn, in welchem ich (S. oben S. 308. — Vergl. S. 290. 311.) sagte, die Beobachtung vermöchte aus Gründen, welche keiner Ausführung bedürften, den Zustand völliger Astasie nicht zu erfassen. Ich dachte mir dabei, dass es unthunlich sei, den Magnet durch alle möglichen Stellungen innerhalb des Kreisumfanges zu führen, und sich zu überzeugen, dass er in allen stehen [780] bleibe; unthunlich zu prüfen, ob er im Dämpfer wirklich gleich einem Körper sich bewege, dem das umgebende Mittel einen seiner Geschwindigkeit proportionalen Widerstand entgegensetzt.

Allein der Zustand völliger Astasie entzieht sich der Beobachtung auch noch, weil es in Wirklichkeit nicht dazu kommt. Man kann vielleicht S so nahe gleich H machen, dass die übrig bleibende Richtkraft Luftwiderstand und Torsion nicht mehr zu überwinden vermag. Was man aber nicht kann, ist, die magnetische Axe des HAUUY'schen Stabes der Declinationsebene durch mechanische Mittel parallel stellen. Wenn man auch den Stand des Magnetes ohne Stab abliest, so schnell wie möglich den Stab hinzubringt, und mittels der Schnurläufe Faden und Nullstrich wieder zur Deckung bringt, so hat sich, abgesehen von Fehlern der Ablesung und Einstellung, in der Zwischenzeit die Declination doch verändert, und φ einen endlichen Werth erlangt. Nur mittels des von Hrn. HENSEN angegebenen Kunstgriffes, und selbst dann nur bei absolut verschwindender Torsion, wäre und bliebe $\varphi = 0$.

In der That, obige Betrachtungen über Gleichgewichtslage eines Magnetes, auf den ein der Declinationsebene nicht paralleler Stab wirkt, passen, wie auch Fig. 29 und Formel (3), völlig auf den Fall, den wir uns jetzt denken wollen, dass Winkel φ nicht mehr bloss durch Variation der Declination, sondern zugleich durch mechanische Unvollkommenheit unserer Vorrichtungen entstand.

Um Ausdruck (3) in vielen Fällen leichter zu discutiren, wie auch aus später einleuchtenden Gründen, empfiehlt sich folgende Umformung. Statt des von der zeitigen Declinationsebene \mathbf{NS} aus gerechneten Winkels α betrachten wir den Winkel β zwischen der φ hälftenden Geraden und der in Fig. 29 gleichsam als Zeiger nach Nordost weisenden Senkrechten OZ auf die Mitte O des Magnetes. Man hat

$$\alpha = 90^\circ - \left(\beta + \frac{\varphi}{2} \right), \quad \alpha + \varphi = 90^\circ - \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H - S}{H + S} \cot \frac{\varphi}{2},$$

oder am bequemsten für die Discussion

$$\operatorname{tg} \beta = \left(\frac{2H}{H + S} - 1 \right) \cot \frac{\varphi}{2}$$

(4)

[781] $H = S$, oder so vollkommene Astasie, wie sie durch absolute Abgleichung der auf den Magnet wirkenden entgegengesetzten Richtkräfte zu erreichen ist, macht β nicht unbestimmt, sondern $= 0$. Der Magnet stellt sich also dann so ein, dass OZ den Winkel φ , seine Axe aber den supplementären Winkel zu φ , $\mathbf{NO\Sigma}$, zwischen den unbezeichneten Polen der Erde und des Stabes hälftet. Setzt man $H \cos \varphi = S$, so wird $\beta = \frac{\varphi}{2}$, der Magnet steht senkrecht auf dem Stabe. Setzt man

$H = S \cos \varphi$, so wird $\beta = -\frac{\varphi}{2}$, der Magnet steht senkrecht auf der zeitigen Declinationsebene, wahrhaft aequatorial. Wächst S weiter, so nähert sich $\operatorname{tg} \beta$ der Grenze $-\cot \frac{\varphi}{2}$, für $S = \infty$ steht der Magnet mit nach Süd gerichtetem bezeichneten Pole dem Stabe parallel.

In der Ausübung wird es sich immer nur um kleine Werthe von φ handeln. Doch gelten unsere Formeln natürlich für jeden Werth von φ , und des theoretischen Zusammenhanges wegen sei Folgendes bemerkt. Für ein endliches φ und für $S = H$ ist $\operatorname{tg} \beta = 0$, es ist also α dann $= 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$, und den Werthen von φ von 0° bis 90° entsprechen Werthe von α von 90° bis 45° . Mit anderen Worten, wird bei $S = H$ der Stab aus seiner nahe axialen in die aequatoriale Lage gedreht, so

weicht der Magnet von seiner nahe aequatorialen Lage bei $\alpha = 90^\circ$ — $\frac{\varphi}{2}$ zurück auf $\alpha = 45^\circ$. $H \cos \varphi = S$, d. h. für $\varphi = 90^\circ$ $S = 0$, macht $\alpha = 0$; $H = S \cos \varphi$, d. h. für $\varphi = 90^\circ$ $S = \infty$, macht $\alpha = 90^\circ$.

Abh. III. S. 365 wurde gesagt, die richtende Wirkung des Stabes bleibe dieselbe, wenn in aequatorialer Ebene die Mitte des Stabes einen Kreis um die des Magnetes beschreibe, gleichviel also ob der Stab senkrecht unter oder über dem Magnet, oder seitlich in gleicher Höhe mit ihm sich befinde. Dies ist strenge richtig aber nur, wenn die Axe des Stabes der des Magnetes parallel oder $\varphi = 0$ ist. Für $\varphi = 90^\circ$ trifft vielmehr der erste Fall zusammen mit dem ersten, der zweite mit dem zweiten der bekannten GAUSS'schen Fälle,¹ d. h. im zweiten Fall ist S doppelt so [782] gross wie im ersten. Werthen von φ zwischen 0° und 90° , wie auch für $\varphi = 90^\circ$ Lagen des Stabes zwischen jenen beiden, werden Werthe vom S zwischen dem Einfachen und Doppelten entsprechen.

An jeder Bussole mit verschiebbarem HAUZY'schen Stab ist es leicht, den geschilderten Hergang im Groben zu beobachten. Nähert man den Stab über die oben S. 369 mit r_1 bezeichnete Entfernung, wo $\varepsilon = n$, dem Magnet immer mehr, so kommt ein Punkt, wo der Magnet anfängt, sichtlich vom Meridian abzuweichen. Dies geschieht entweder so, dass der Nordpol durch Ost, oder so, dass er durch West nach Süd sich dreht; hierauf werden wir noch zurückkommen. Bei fortgesetzter Annäherung, die sich meist nur nach Bruchtheilen eines Millimeters bemisst, stellt sich der Magnet scheinbar aequatorial. Natürlich ist es bei kleinem und überdies unbekanntem, ja wegen der Variation fortwährend sich veränderndem φ unmöglich, die Stellungen $\beta = + \frac{\varphi}{2}$, $= 0$, $= - \frac{\varphi}{2}$ zu unterscheiden. Bei noch mehr genähertem Stabe steht der Magnet mit seinem Nordpol im südöstlichen oder südwestlichen Quadranten, je nach dem Sinn, in welchem er sich dreht; schliesslich fällt bei verkehrten Polen seine Lage scheinbar wieder mit dem Meridian zusammen. Es ist daher im Grunde nicht richtig, vom Umschlagen des Magnetes bei fortgesetzter Annäherung des Stabes zu reden. Er schlägt nur um, wenn man beim Annähern des Stabes die Reihe von Lagen dieses letzteren überspringt, für welche der Magnet eine entsprechende Reihe von

¹ Intensitas vis magneticae etc. In C. F. GAUSS Werken u. s. w. Göttingen 1867. 4. Bd. V. S. 107; — POGGENDORFF's Annalen u. s. w. 1833. Bd. XXVIII. S. 601. 602; — Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1836. Göttingen 1837. S. 73. 74.

Stellungen durchläuft, die ihn folgwiese aus seiner ursprünglichen axialen durch die aequatoriale in die entgegengesetzte axiale Lage führen.

Bei den zahlreichen Anwendungen, die man von der HAUY'schen Methode des Astasirens machte,¹ wurde die Abweichung [783] des hoch astatischen Magnetes aus der Declinationsebene gewiss schon früher wahrgenommen. Man vermuthete aber dabei zufällige Ursachen, welche die Oberhand über die sehr verminderte Richtkraft gewönnen, als da sind Torsion, Luftströmungen, versteckte Mittelpunkte magnetischer Wirkung. Niemand hatte meines Wissens bemerkt, dass bei wachsender Astasie der Magnet völlig regelmässig sich dreht, und dass er aus der aequatorialen Lage abgelenkt langsam, doch treu, in sie zurückkehrt.

Auch ich hatte, wie ich bekennen muss, versäumt, mich über das Verhalten, welches der Magnet bei möglichster Gleichheit von H und S in der Wirklichkeit zeigt, genauer zu unterrichten. Hr. HENSEN war es, der mich auf die aequatoriale Stellung des Magnetes bei höchster Astasie aufmerksam machte. Er sah darin einen Widerspruch mit meiner oben S. 308 angeführten Aeußerung in Abh. I, dass der Zustand völliger Astasie unfassbar für die Beobachtung sei. Doch ist kein solcher Widerspruch da, denn ich setzte damals die idealen Bedingungen wahrhafter Astasie voraus, also auch absoluten Parallelismus der magnetischen Axe des Stabes mit der Declinationsebene. Jetzt wurde es mir um so leichter, das von Hrn. HENSEN wahrgenommene Verhalten aus mangelhaftem Parallelismus von Stab und Declinationsebene abzuleiten, als ich gerade mit den Variationsschwankungen des Magnetes beschäftigt war.

Auch Hr. Dr. ARON hierselbst hatte jenes Verhalten beobachtet. Er hatte aber auch dessen Beziehung zur freiwilligen Ablenkung astatischer Nadelpaare schon erkannt. Denn es ist klar, dass die hier auftretende Ablenkung des Magnetes aus dem Meridiane bei höherer Astasie die nämliche Erscheinung ist, wie die einst von mir so genannte freiwillige Ablenkung astatischer Nadelpaare, deren Entdecker NOBILI sie sogleich auf mangelhaften Parallelismus der Nadeln zurückführte.² Setzt man für H das Moment M der stärkeren, für S das Moment M' der schwächeren Nadel, so werden obige Formeln buchstäblich einerlei mit den bekannten Ausdrücken für die Gleichgewichtslage eines astatischen Nadelpaares in der Gestalt, die ich ihnen gab.³ In diesen ist φ der [784] Winkel zwischen den freundlichen Polen der zum astatischen Paare

¹ S. oben S. 157. Anm.

² Untersuchungen u. s. w. Bd. I. S. 169 ff.

³ S. oben S. 143.

verbundenen Nadeln, β der Winkel, den die φ hälftende Gerade mit dem magnetischen Aequator macht.

In der That, die drei Magnete (die Erde und die beiden künstlichen Magnete), deren zwei zu einem festen Systeme verbunden sind, bilden gleichsam eine kinematische Kette.¹ Das Nadelpaar entspricht dem festverbundenen Systeme der Erde und des Stabes. Jenes schwingt über der Erde, und stellt sich, wenn dämpfende Einflüsse zugegen sind, schliesslich zu ihr, wie bei festgehaltenem Magnet, abgesehen von den Trägheitsmomenten, Erde und Stab um den Magnet schwängen, und zu ihm sich stellten. Oder bei festgehaltenem Nadelpaare schwänge unter ihm die Erde und stellte sich schliesslich zu ihm, wie zu Stab und Erde der unter ihrem Einfluss schwingende Magnet.

Um die Einerleiheit der Gleichgewichtsbedingungen astatischer Nadelpaare und astatischer Magnete deutlicher hervortreten zu lassen, wurde oben β so bestimmt, wie es geschah. Sonst lag es näher, was analytisch auf dasselbe hinausläuft, hier mit β den nach dem Aequator zu gelegenen Complementärwinkel zu $\alpha + \frac{\varphi}{2}$ ($n0S$ in Fig. 29) zu bezeichnen.

Auf dem jetzt gewonnenen Standpunkt erscheint es im Grunde falsch, von Astasie des Magnetes zu reden. Wie man durch Schwächung der im gesättigten Zustande stärkeren Nadel das System beider Nadeln in Bezug auf die Erde astasirt, so astasirt man eigentlich das System von Erde und Stab in Bezug auf den Magnet, indem man den Abstand des Stabes vom Magnet ändert. Je nachdem $H >$ oder $< S$, übernimmt im astatischen Systeme von Erde und Stab jene oder dieser die Rolle der Nadel vom grösseren Moment M . Anstatt S durch Aenderung des Abstandes zu ändern, könnte man auch, wie bei astatischen Nadelpaaren, das Moment des Stabes ändern, z. B., wie Hr. HENSEN mir vorschlug, den Stahlstab durch einen Elektromagnet ersetzen, in dessen Windungen man den Strom abstufte. Dagegen nimmt die Intensität des Erdmagnetismus mit Entfernung von der Erdoberfläche zu langsam ab, um anders als in der Idee ein bewegliches astatisches System [785] durch Ortsveränderung abzugleichen, wie dies für das System von Erde und Stab durch Ortsveränderung des Stabes geschieht. Nichts verhindert sonst sich zu denken, dass man an eine lange senkrechte Axe unten, wo die horizontale Intensität = H , eine Nadel vom Moment M' , und darüber eine Nadel von dem um ein $\frac{M'}{n}$ grösseren Moment M in solcher Entfernung von der Erdoberfläche befestigt habe, dass dort die

¹ Vergl. REULEAUX, Theoretische Kinematik. Braunschweig 1875.

Intensität um $\frac{H}{n+1}$ kleiner sei. Das System wäre dann so vollkommen astatisch, wie Winkel φ und die temporären Momente es gestatten.

Bei den astatischen Nadelpaaren kommen nämlich, nach Hrn. SAUERWALD's Beobachtung, die durch die Erde inducirten temporären Momente der Nadeln in Betracht.¹ Hier sind die temporären Momente, die der Magnet in Stab und Erde erzeugt, zu vernachlässigen. Das bei höherer Astasie an sich verschwindende temporäre Moment aber, welches Erde und Stab im Magnet erzeugen, fällt aus dem Ausdruck für seine Gleichgewichtslage ebenso heraus, wie nach GAUSS' Bemerkung² sein permanentes Moment. Dasselbe gilt von dem durch das astatische Nadelpaar in der Erde erzeugten temporären Moment, abgesehen davon, dass dies vollends zu vernachlässigen ist. Ich rede nicht weiter von den temporären Momenten, welche Erde und Stab, und welche die beiden Nadeln in einander hervorrufen.³ Das Wegfallen der temporären Momente vereinfacht sehr die Gleichgewichtsbedingungen des astatischen Magnetes, wie wir zu sagen doch fortfahren wollen, gegenüber denen des astatischen Nadelpaares. Man kommt daher hier ohne die graphische Darstellung der auf den entwickelten Kreisumfang aufgetragenen Kräfte aus, die beim astatischen Nadelpaare so gute Dienste leistet.⁴ Wie bei diesem, wenn die temporären Momente als verschwindend betrachtet werden, entspricht der einen stabilen [786] Gleichgewichtslage des astatischen Magnetes eine um 180° davon entfernte labile Gleichgewichtslage.⁵

Ein zweiter Punkt, in welchem das astatische Nadelpaar und das hier betrachtete System von einander abweichen, ist der, dass dort φ ein für allemal gegeben, hier mit der Declination veränderlich ist. In Folge dessen ist die Gleichgewichtslage des astatischen Nadelpaares auch im Zustand höchster Astasie von den Variationen des Erdmagnetismus minder abhängig als die des astatischen Magnetes. Das astatische Nadelpaar empfindet die Variation der Intensität gar nicht, die der Declination nur deren wirklichem Betrage gemäss. Es sei denn, dass die Gleichgewichtslage des Nadelpaares noch durch andere Kräfte bedingt werde, wie z. B. durch Anziehung der Drahtmassen. Dann kann Vergrößerung

¹ S. oben S. 137 ff.

² SCHUHMACHER's astronomisches Jahrbuch, 1836. S. 25; — Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1836. Göttingen 1837. S. 75; — C. F. GAUSS Werke u. s. w. Göttingen 1867. 4. Bd. V. S. 330.

³ S. oben S. 144.

⁴ S. Taf. IV. Fig. 2.

⁵ S. oben S. 143; — Taf. IV. Fig. 3. V.

der durch Variation der Declination bedingten Schwankung stattfinden, wie auch Variation der Intensität wieder Einfluss gewinnt.

Im Uebrigen kehren die Besonderheiten, welche die freiwilligen Ablenkungen astatischer Nadelpaare bieten, bei den astatischen Magnetten wieder. Wie dort ist es auch hier, und aus denselben Gründen, um so leichter, den Magnet sich scheinbar aequatorial stellen zu sehen, je grösser φ innerhalb gewisser Grenzen ist. Je kleiner $\frac{\varphi}{2}$, um so grössere

Veränderungen von $\operatorname{tg} \beta$ entsprechen gleichen Fortschritten der Astasie, so dass der geringsten weiteren Annäherung des Stabes, wie sie ohne besondere Hilfsmittel möglich ist, schon ein Sprung des Magnetes über den Aequator folgt.¹ Wird aber φ absichtlich über Gebühr gross, = 90° , gemacht, so erreicht, wie wir oben S. 380. 381 sahen, der Magnet für $H = S$ nur noch die 45° -Stellung, und nur ein unendliches S kann ihn bis zum Aequator drängen. Die Schwierigkeit, welche es jetzt hat, den Magnet aequatorial zu stellen, liegt jedoch in etwas Anderem, als die bei verschwindendem φ .

Ein astatisches Nadelpaar dreht sich bei wachsender Astasie so, dass der stets vorhandene kleine Winkel α zwischen Meridian und stärkerer Nadel wächst. Dem entsprechend dreht sich bei wachsender Astasie der Magnet so, dass er sich weiter von der [787] Declinationsebene entfernt. In Fig. 29 dreht sich daher beim Nähern des Stabes der Nordpol des Magnetes im Sinne des Pfeiles durch West nach Süd. Die Drehung ändert ihren Sinn, und der Nordpol geht bei Nähern des Stabes durch Ost nach Süd, wenn das Nordende des Stabes westlich von der Declinationsebene liegt. Durch den Sinn, in welchem der Magnet sich dreht, wird man belehrt, auf welcher Seite der Declinationsebene die Wirkungsebene des Stabes liegt, was sonst schwer zu ermitteln wäre. So erfährt man erst durch den Sinn, in welchem ein astatisches Nadelpaar sich dreht, auf welcher Seite der stärkeren Nadel Winkel φ liegt.

Befindet sich der Stab in solcher Nähe des Magnetes, dass dieser schon merklich aus dem Meridian abweicht, und dreht man den Stab im Azimuth, ohne seinen Abstand zu ändern, so dreht sich der Magnet umgekehrt wie der Stab, wie die Pfeile in Fig. 29 zeigen, während er bei Drehung der Declinationsebene gleichsinnig mit dieser sich dreht (s. oben S. 378). Beim Drehen des Stabes durch die Declinationsebene kommt freilich ein Punkt, wo $\varphi = 0$ ist und der Magnet für $H > S$ im Meridian bleiben, für $H = S$ überall im Gleichgewicht sein sollte. Allein es braucht kaum wiederholt zu werden, dass menschliche Werk-

¹ S. oben S. 136.

zeuge und Geduld nicht vermögen, diesen Punkt zu treffen und festzuhalten.

Alles dies lässt sich an jeder SAUERWALD'schen Bussole mit verschiebbarem Stabe beobachten, an welcher, wie es früher der Fall war, der Stab senkrecht unter dem Magnete sich befindet. Bei der neuen in Fig. 29 abgebildeten Aufstellung des Stabes dagegen dreht sich beim Drehen des Stabes im Azimuth der Magnet im entgegengesetzten Sinne von dem durch die Theorie verlangten, d. h. im gleichen Sinne, wie der Stab. Der Grund dieser Abweichung ist folgender. Obige Schlüsse setzen solche Entfernung des Stabes voraus, dass dessen Wirkung durch ein dem Stabe paralleles Kräftepaar ersetzt werden könne. Soll dies auch bei grösserer Nähe des Stabes gelten, so muss dessen Drehung so stattfinden, dass die Entfernung seiner Pole von den Polen des Magnetes, und die Richtung der Wirkung ersterer auf letztere für den einen Pol dieselbe bleibe, wie für den anderen. Damit dies zutreffe, muss der verlängerte Aufhängefaden des Magnetes durch die Mitte der Axen des Magnetes und des Stabes gehen, und des letzteren Drehung um die Verlängerung des Fadens geschehen. Schon bei der älteren [788] Art, den Stab aufzustellen, ist diese Bedingung insofern unvollständig erfüllt, als der Stab nicht um die Mitte seiner Axe, sondern um einen seinem einen Pole nahen Punkt der Axe sich dreht. Doch wird hier der Fehler nicht gross genug, um das gesetzmässige Verhalten zu verdecken. Bei seitlicher Stellung des Stabes aber verändert man bei dessen Drehung um Axe aS (Fig. 28) die Entfernung des einen Poles (N) vom Magnete, während der andere (S) nahe unverrückt bleibt. Gesähä die Drehung um die Mitte des Stabes, so würde sich der eine Pol sogar vom Magnet entfernen, während der andere ihm sich näherte. Die abstossende Wirkung des beispielsweise genäherten Poles des Stabes auf den ihm näheren Pol des Magnetes überwiegt aber die des stehenbleibenden, vollends des noch weiter fort bewegten Poles, daher der Magnet in demselben Sinne wie der Stab sich dreht.

Die Drehung in diesem Falle ist somit anderen Ursprunges, als die oben aus den Formeln abgeleitete, welche unter richtigen Bedingungen richtig erfolgt. Da beide Drehungen einander entgegengesetzt sind, so muss es eine mittlere Stellung des bis zur Entfernung r_2 genäherten Stabes geben, wo bei einer gewissen Drehung des Stabes im Azimuth keine Ablenkung stattfindet. Liesse man die Mitte des sich selber parallelen Stabes in aequatorialer Ebene einen Viertelkreis um die Mitte des Magnetes beschreiben, so müsste man diese mittlere Stellung irgendwo treffen zwischen der Stellung des Stabes senkrecht unter dem Magnete, wo der Nordpol des Magnetes, bei Drehung des Nordendes des

Stabes beispielsweise nach Ost, sich westlich stellt, und der Stellung zur Seite des Magnetes, wo bei derselben Drehung des Stabes der Nordpol des Magnetes sich östlich stellt. Doch habe ich noch nicht versucht, jene mittlere Stellung des Stabes in Wirklichkeit zu beobachten, wozu besondere Vorkehrungen erforderlich wären.

Bei den astatischen Nadelpaaren der Multiplicatoren ist es längst Regel, sie durch Abgleichung ihrer Momente so senkrecht wie möglich auf den Meridian zu stellen, und ihnen mit den Windungen in diese Lage zu folgen.¹ So ist man sicher, die höchste Astasie zu haben, die das System in Anbetracht des unvollkommenen [789] Parallelismus der Nadeln zulässt. Offenbar erreichte man auch an unserer jetzigen Einrichtung die höchste Astasie, welche der jedesmalige Winkel φ zulässt, wenn man bei aequatorialer Stellung des Magnetes arbeitete.

Die Gleichgewichtsgleichung des Magnetes ist erfüllt, wenn er in der Diagonale des Parallelogrammes einsteht, dessen Seiten man erhält, indem man auf den Projectionen der Wirkungsebenen von Erde und Stab, vom Schneidepunkt dieser Projectionen aus, H und S proportionale Stücke abmisst (s. Fig. 29). Wird der Magnet aus dieser Lage um einen Winkel $\pm \varrho$ abgelenkt, so zieht ihn darin zurück eine Kraft $\pm k \cdot \sin \varrho$, wo k der Länge jener Diagonale proportional ist. Man hat

$$k = \frac{H \sin \varphi}{\cos \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right)}. \quad (5)$$

Sind die Pole des Stabes denen des Magnetes gleich gerichtet, und durchläuft S die Werthe von 0 bis ∞ , so durchläuft β die Werthe von $\beta = + \left(90^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$ durch 0 bis $\beta = - \left(90^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$. Die entsprechenden Werthe von k gehen von $k = H$ bis $k = \infty$, da bei endlichem H nur ein unendliches S den Magnet dem Stabe parallel stellen kann. Dazwischen hat k , wie man sogleich sieht, bei $\beta = + \frac{\varphi}{2}$ ein Minimum. Der Magnet ist also am beweglichsten, wenn senkrecht zum Stabe. k ist hier $= H \sin \varphi$, mithin die Astasie um so vollkommener, je kleiner φ . Für $\beta = 0$; $\beta = - \frac{\varphi}{2}$ wird beziehlich $k = H \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2}$; $k = H \cdot \operatorname{tg} \varphi$ u. s. w.

Für $\beta = + \frac{\varphi}{2}$ folgt aus (4) $S = H \cos \varphi$. Dieser Werth von S , und nicht, wie man meinen sollte, $S = H$, giebt grösste Empfind-

¹ Untersuchungen u. s. w. Bd. I. S. 169. — Vergl. oben S. 146. 147.

lichkeit. Die Verschiebung der kürzesten Diagonale nach Nord beruht darauf, dass der Magnet zum Einstehen in den Meridian, weil dann keine Seitenkraft vorhanden ist ($S = 0$), durch eine endliche Kraft (H) gebracht wird, während zum Einstehen in die Ebene des Stabes, weil dann die Seitenkraft H vorhanden ist, ein unendliches S gehört.

[790] Alles dies gilt auch für astatische Nadelpaare, wenn man das Moment M der stärkeren Nadel, welches an Stelle von H in (5) tritt, beständig nimmt. Ein astatisches Paar ist am beweglichsten, wenn die schwächere Nadel im Aequator steht.

In der Ausübung sind diese Unterschiede bedeutungslos, da man bei astatischen Nadelpaaren wegen Kleinheit von φ , bei astatischen Magneten auch noch wegen dessen Veränderlichkeit und Unbestimmbarkeit, kein Mittel hat, β gerade = $+\frac{\varphi}{2}$ zu machen.

Auch ohnedies wird aequatoriale Stellung des Magnetes ungleich grössere Empfindlichkeit gewähren, als axiale. Erfahrung muss zeigen, ob diese Empfindlichkeit nicht zu theuer erkaufte wäre durch verlängerte Beruhigungszeit und vergrösserte Variationsschwankungen, denen völlig vorzubeugen, wie zu fürchten ist (s. oben S. 378), sogar der HENSEN'sche Kunstgriff nicht vermag.

Um bei aequatorialer Stellung des Magnetes zu arbeiten, muss selbstverständlich die Bussole so aufgestellt werden, dass die Axe ihrer Rollen axial steht.

Zusatz.

[Hr. Prof. VICTOR VON LANG in Wien hatte die Güte, mich darauf aufmerksam zu machen, dass die Besorgniss wegen zu grosser Variationschwankungen des aequatorial gestellten Magnetes grundlos sei. Differenzirt man α nach φ , so erhält man (Gleichung (3))

$$d\alpha = \frac{\cos(\alpha + \varphi) \sin \alpha}{\sin \varphi} \cdot d\varphi.$$

Für $\alpha = 90^\circ$ wird $d\alpha = -d\varphi$, $d(\alpha + \varphi) = 0$. So wenig also würde der streng aequatorial, d. h. senkrecht auf die zeitige Declinationsebene gestellte Magnet durch zu grosse Variationsschwankungen unbrauchbar, dass er diesen Schwankungen vielmehr ganz entzogen ist.

Die Bemerkung hätte mir nicht entgehen sollen, da man sie Formel (3) schon ohne Entwicklung von $\frac{d\alpha}{d\varphi}$ entnehmen kann. $H = S \cos \varphi$ macht $\alpha = 90^\circ$, welchen endlichen Werth auch φ habe; α bleibt also unverändert $= 90^\circ$, ob auch φ schwanke.

Bei weiterer Discussion von $\frac{d\alpha}{d\varphi} = f(\alpha)$ nach α findet man (mit Wiederholung des schon für $\alpha = 90^\circ$ Gesagten):

bei $\alpha = 90^\circ$,	oder $S \cos \varphi = H$:	$d\alpha = -d\varphi$, $d(\alpha + \varphi) = 0$
$\alpha = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$, „	$S = H$:	$d\alpha = -\frac{d\varphi}{2}$, $d(\alpha + \varphi) = \frac{d\varphi}{2}$
$\alpha = 90^\circ - \varphi$, „	$S = H \cos \varphi$:	$d\alpha = 0$, $d(\alpha + \varphi) = d\varphi$
$\alpha = 0$, „	$S = 0$:	$d\alpha = 0$, $d(\alpha + \varphi) = d\varphi$.

Also schon in der durch φ gemessenen sehr kleinen Entfernung des Magnetes aus der aequatorialen Stellung — gerade in der Lage, welche grösste Empfindlichkeit bietet (s. oben S. 387) — macht der Magnet die Schwankungen der Declinationsebene wieder vollständig mit, jedoch ohne dass sie durch Anwesenheit des Stabes vergrössert erscheinen.

Zwischen $\alpha = 0^\circ$ und $= 90^\circ - \varphi$ findet ein Maximum der Function $f(\alpha)$ statt für $\cot 2\alpha = \operatorname{tg} \varphi$ oder für $\alpha = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$. Man hat

$$f(\alpha)_{max} = \frac{1 - \sin \varphi}{2 \sin \varphi},$$

was $d(\alpha + \varphi)$ zu

$$\frac{\sin \varphi + 1}{2 \sin \varphi} \cdot d\varphi$$

macht. Damit α den Werth von $45^\circ - \frac{\varphi}{2}$ annehme, der in Bezug auf Variationsschwankungen somit als ungünstigster erscheint, muss

$$\frac{H - S}{H + S} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

sein, da nach Gleichung (4) dann $\beta = 45^\circ$, $\operatorname{tg} \beta = 1$ ist.

Ueber $\alpha = 90^\circ$ hinaus wird $d(\alpha + \varphi)$ negativ, Stab und Erde haben gleichsam die Rollen vertauscht, indem von $\alpha = 90^\circ - \varphi$ ab die Erde den Magnet vom Stabe fort dem Aequator zu drängt. Bei $\alpha = 135^\circ - \frac{\varphi}{2}$ findet ein negatives Maximum statt u. s. w.

Hr. VON LANG machte mich auch auf eine Anwendung der durch den Stab erzeugten Ablenkung aufmerksam, an die ich nicht gedacht hatte, nämlich um dem Magnet, behufs bequemerer Ablesung, eine beliebige, gewünschte Lage im Azimuth zu geben. Hr. VON LANG selber hat, was mir entgangen war, sich dieses Kunstgriffes längst in seinem 'Spiegelgalvanometer zur objectiven Darstellung' bedient. (Vergl. EXNER in CARL'S Repertorium für Experimental-Physik u. s. w. München. 1869. Bd. V. S. 8.)]
