Zur Analyse der Vorstellungen von Abstand und Richtung.

Von

Dr. ALOIS HÖFLER.

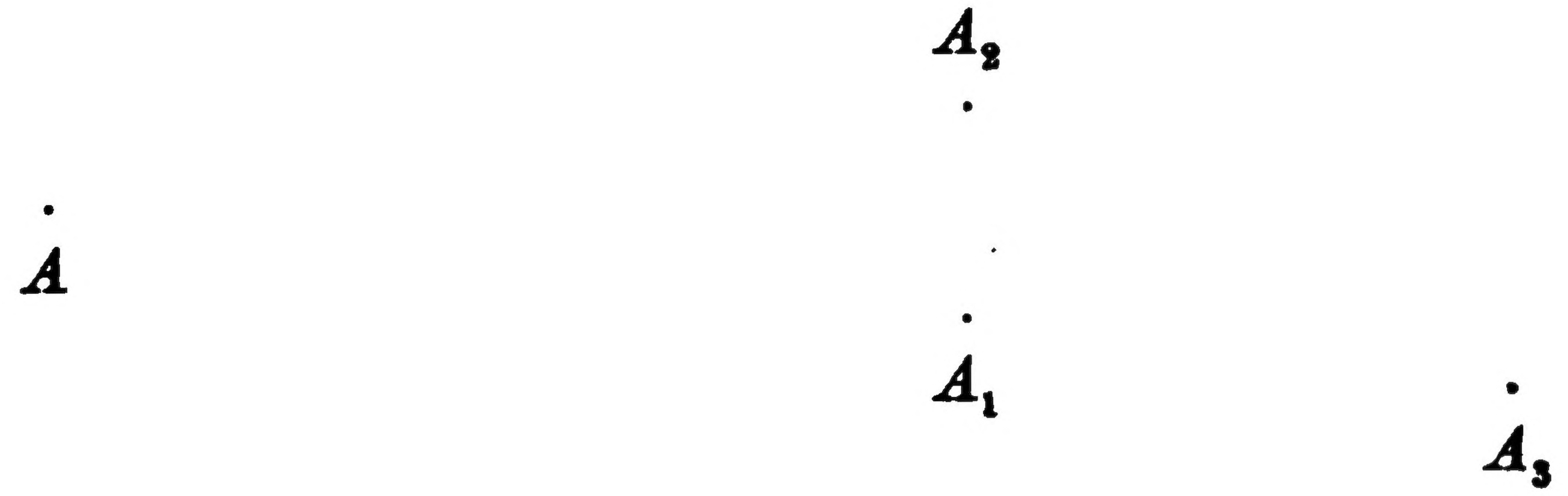
In einem Vortrage über „Unlösbare Probleme", den Professor GEGENBAUER vergangenen Sommer in der Philosophischen Gesellschaft an der Universität zu Wien gehalten hat, begründete der Vortragende durch ein eigenartiges erkenntnistheoretisches Motiv,[1] warum man für die Lösung von Problemen, wie die Quadratur des Zirkels, die Trisectio anguli u. dergl. sich selber solche Bedingungen auferlegt, durch die sie erst zu „unlös-

[1] „Wir lassen uns bei der Aufstellung der erwähnten beschränkenden Bedingungen durch das Prinzip leiten, die Probleme, die in einem Gebiete auftauchen, zu lösen, ohne Mittel zu gebrauchen, die aufserhalb der Grenzen dieses Gebietes liegen (Wahl der einfachsten Mittel, etwa gleich dem MACHschen Prinzip der Ökonomie in der Natur). Dazu kommt in diesem Falle noch, dafs den Alten nur die Geometrie des Lineales und Zirkels als Geometrie galt." — F. KLEIN formuliert in seiner Festschrift *„Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie"* (1895) auf S. 2 die Frage. „Wie drückt sich in der Sprache . . der Algebra und Analysis . . die Verwendung von Lineal und Zirkel zur Konstruktion aus? Die Notwendigkeit dieser Gedankenwendung („Anlehnung an Algebra und Analysis") liegt darin, dafs die Elementargeometrie keine allgemeine Methode, keinen „„Algorithmus"" besitzt, wie die letztgenannten beiden Disziplinen." Es folgt dann auf S. 3 der Hauptsatz: „Ein analytischer Ausdruck ist dann und nur dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn er aus bekannten Gröfsen durch eine endliche Anzahl rationaler Operationen und Quadratwurzeln abzuleiten ist." — Durch solche Zuordnung zu einem abgegrenzten algebraischen Operationskomplex kann offenbar die geometrische „Kaprice" auf Zirkel und Lineal eine sachliche Rechtfertigung erhalten; zu den oben im Text (Punkt 5) gegebenen steht sie in einer Art Koordinationsverhältnis, indem alle Berufung auf Algebra in das geometrische Gebiet ebenso ein „diskurves" Element hineinträgt, wie das der obigen Aufzeigung von „Verschiedenheitsrelations-Komponenten" als solcher.

baren" werden; nämlich z. B. den Kreisumfang nicht einfach durch ein umgeschlungenes Meſsband in Verhältnis zum Durchmesser zu setzen; für die Trisectio nicht Hyperbeln als Hülfslinien zuzulassen, sondern nur gerade Linien und Kreise.

Da ich meinerseits schon vor längerer Zeit[1] einen keineswegs erst erkenntnistheorethischen oder allgemein logisch-methodologischen Grund für jenes scheinbar so kapriziöse antike Postulat der Beschränkung auf Gerade und Kreis (Lineal und Zirkel) angedeutet habe, und dieser Grund einfach auf die psychologische Analyse der Begriffe „Abstand" und „Richtung" zurückgeht, so möchte ich bei dieser Veranlassung jene Analyse hiermit bekannt machen.

Für die vier Punkte $A\ A_1\ A_2\ A_3$ mögen die Abstände $A\ A_1$ und $A\ A_2$ einander gleich sein, und die Richtungen $A\ A_1$ und $A\ A_3$ einander gleich sein (d. h. es mögen $A\ A_1\ A_3$ in einer Geraden liegen).



Wenn ich nun, ohne von den hiermit festgestellten und bei der Anfertigung der Figur befolgten Bedingungen schon in abstracto irgend etwas zu wissen, die Figur anblicke, so habe ich die Vorstellung von vier Örtern. Vergleiche ich nun („primär") der Reihe nach die Örter A und A_1, sodann A und A_2, sodann A und A_3, so erkenne ich das Bestehen von drei Verschiedenheitsrelationen, also mit Benutzung der Zeichen,[2] welche ich in meiner *Logik*, § 25, eingeführt habe:

$$A\,\varrho_1\,A_1 \qquad\qquad A\,\varrho_2\,A_2 \qquad\qquad A\,\varrho_3\,A_3.$$

---

[1] In der Anzeige von ZINDLERS „Beiträge zur Theorie der mathematischen Erkenntnis", *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1890. S. 503.

[2] Entsprechend dem Gedanken (oder doch dem Ausdruck), daſs die Relation „zwischen" den Fundamenten (Terminis, Gliedern) bestehe, ist allgemein zu schreiben: $A\varrho B$; z. B. speziell bei Notwendigkeitsrelationen $G\,\alpha\,F$ (a. a. O. § 58). All das ist nichts als eine Ausdehnung des „Zwischen"-Setzens der Zeichen $=$, $>$, $<$ für das Ergebnis der Vergleichung speziell von Gröſsen.

Vergleiche ich nun weiter wieder die drei Relationen $\varrho_1\ \varrho_2\ \varrho_3$ selbst (sekundäre Vergleichung), so erkenne ich, daſs sich jede derselben selbst wieder in zwei Verschiedenheitsrelationen spalten, sozusagen in zwei Komponenten oder „Seiten" zerlegen läſst, was wir durch

$$\varrho_1 = \varrho_1' + \varrho_1'' \qquad \varrho_2 = \varrho_2' + \varrho_2'' \qquad \varrho_3 = \varrho_3' + \varrho_3''$$

bezeichnen wollen. Hierbei ist natürlich + nicht das Zeichen für mathematische Addition, sondern eben nur für psychologisches Zusammengesetztsein; und mit diesem „zusammengesetzt" (wie mit den Wörtern „Komponenten", „Seiten") soll auch wieder nicht gesagt sein, daſs ihnen eine „Thätigkeit des Zusammensetzens"[1] vorausgegangen sei, sondern nur, daſs sich jedes der ϱ analysieren läſst in ein ϱ' und ein ϱ''. — Um eben dieser analysierenden Thätigkeit den Weg zu zeigen, können am besten nochmalige tertiäre Vergleichungen dienen, welche uns sagen, daſs folgende Relationskomponenten einander gleich, bezw. voneinander verschieden sind:

ϱ_1' gleich ϱ_2'	ϱ_1' verschieden von ϱ_3'
(woraus nebenbei folgt:	ϱ_2' verschieden von ϱ_3')
ϱ_1'' verschieden von ϱ_2'	ϱ_1'' gleich ϱ_3''
(woraus nebenbei folgt:	ϱ_2'' verschieden von ϱ_3'').

Natürlich will all das Bisherige sich keineswegs den Anschein geben, als wolle es einem erst beibringen, was Abstand und Richtung ist, sondern die Analyse zeigt nur auf, wie weit der Psycholog eben diese seine Analyse treiben muſs, um aus längst erworbenen Vorstellungen das Abstands-, bezw. Richtungselement rein herauszupräparieren.

Wir können aber auf diesem Wege vom anschaulichen zum diskursiven Denken noch einen Schritt vorwärts gehen, indem wir beachten, daſs es in dem uns wohl vertrauten Begriffe des Abstandes liegt,[2] daſs z. B. die Distanz von Wien bis Hamburg

[1] Inwiefern der Ausdruck „zusammengesetzt" immer wieder irre führt, habe ich jüngst wieder in der Anzeige der *Psychologie* von Höffding zu konstatieren gehabt. (*Diese Zeitschr.* IX. S. 258.)

[2] Es sei hier der Ausdruck „in dem Begriff liegen" nicht so sehr wegen seiner Beliebtheit als der Kürze wegen gestattet. Wie so häufig ist er auch in obiger Anwendung (trotz Kants analytischer Urteile) durchaus ungenau, denn man kann alles, was zum Begriff der Distanz

gleich ist der Distanz von Hamburg bis Wien, dafs dagegen die Richtung einer Reise von der einen Stadt zur anderen entgegengesetzt ist der der Rückreise. Mit Benutzung des in meiner *Logik* eingeführten Begriffes umkehrbarer, bezw. nicht umkehrbarer Relationen[1] können wir dann geradezu „definieren“:

Abstand ist die umkehrbare Komponente —,

Richtung ist die nicht umkehrbare Komponente der Verschiedenheitsrelation zweier Orte. —

Zu vorstehender Analyse und ihrem Ergebnis sind noch folgende Bemerkungen zu machen:

1. Was oben als tertiäre Vergleichung bezeichnet wurde, ist in seinem Ergebnis nicht etwa wie die primäre (und mit dem unter 2. zu erörternden Vorbehalt auch die sekundäre) Vergleichung für die Begriffe Abstand und Richtung konstitutiv; sie tragen nicht zum logischen[2] Inhalt dieser Begriffe bei, sondern sind nur ein psychologisches, sozusagen didaktisches Hülfsmittel, der abstrahierenden Aufmerksamkeit den Weg zu weisen, wie sie das Auseinanderhalten der zwei Komponenten ϱ' und ϱ'' anstellen soll. Demgemäfs sind auch für diese Begriffe nicht etwa vier Punkte $A\, A_1\, A_2\, A_3$ obligat, sondern nur zwei Örter A und B. Wer sich die Vorstellungen von diesen zwei „absoluten“ Örtern gebildet hat, sie als verschieden erkennt und die Verschiedenheit in ihre zwei Komponenten spaltet, findet

---

gehört, vollständig und ausführlich vorstellen, ohne die Eigenschaft der Umkehrbarkeit mit vorzustellen; sondern nur, wenn die Frage nach Umkehrbarkeit oder Nicht-Umkehrbarkeit der Distanzrelation aufgeworfen wird, kann nur dasjenige Urteil evident sein, welches entscheidet: sie ist umkehrbar.

[1] Z. B. die Relation des Freundes zum Freunde ist („rein“) umkehrbar, die des Herrn zum Diener nicht. In Zeichen $A\varrho B$, $B\varrho A$; dagegen $A\varrho B$, $B\varrho' A$. Bemerkenswert ist, wie die Sprache hier durch gleiche bezw. verschiedene Bezeichnungen der Relationsglieder selbst diesen Unterschied viel konsequenter als manche andere ganz gewifs nicht minder wichtige anzudeuten pflegt.

[2] Hier diejenige Auffassung des Abstraktionsprozesses vorausgesetzt, wonach das Abstrahieren zwar durch eine Mehrheit ähnlicher Substrate psychologisch erleichtert wird, immerhin aber auch schon angesichts nur eines Substrates immer noch psychologisch ausführbar bleibt. Die Bemerkung richtet sich einerseits gegen die Gemeinbildertheorie, andererseits gegen die Umfangslogik.

in der einen von ihnen Das in begrifflicher Bestimmtheit wieder, was er längst vor solcher Analyse im aufsergeometrischen wie im geometrischen Sprachgebrauch als „Abstand" der zwei Örter bezeichnen und verwenden gelernt hatte; und ebenso in der anderen Das, was man die „Richtung" nennt, nach welcher hin von A aus das B (und umgekehrt von B aus das A) liegt. Es läſst sich nur eben, wenn auf jenes didaktische Hülfsmittel der tertiären Vergleichung verzichtet wird, der abstrahierenden Aufmerksamkeit der Weg durch nichts mehr weisen; womit nicht gesagt ist, daſs sie ihn nicht selber findet. Und: Wenn sie ihn gefunden hat, kann man ohne das didaktische Hülfsmittel nicht weiter „sagen", was Abstand, was Richtung ist; aber natürlich hat man es auch bei Zuhülfenahme der tertiären Vergleichungen im Grunde nicht „gesagt". — Das „diskursive" Charakterisieren der beiden Komponenten gegeneinander kann hier so wenig wie irgendwo das anschauliche Erfaſsthaben ersetzen.

2. Ist nicht ebenso, wie das tertiäre, auch schon das sekundäre Vergleichen für das Zustandekommen der abstrakten Vorstellungselemente Abstand und Richtung logisch entbehrlich? Als sekundäre Vergleichung war oben bezeichnet worden das Vergleichen je zweier der Relationen $\varrho_1\ \varrho_2\ \varrho_3$. Der Erfolg dieses Vergleichens sollte sein das „Sich-spalten" jeder dieser drei Relationen in das betreffende ϱ' und ϱ''. Insoweit dieses Sich-spalten in uns sich vollzieht, dank dem Vergleichen von ϱ_1 und ϱ_2, von ϱ_1 und ϱ_3, von ϱ_2 und ϱ_3, gilt in der That das unter 1 über die tertiären Vergleichungen Gesagte. Es ist nicht logisch wesentlich, ja kaum psychologisch unentbehrlich. Aber das „Sich-spalten" selbst — was ist es? — Erinnern wir uns an die von Meinong, Stumpf u. A. wiederholt betonte Thatsache, daſs nicht alle Ähnlichkeit reinlich in ein Element voller Gleichheit und ein anderes voller Ungleichheit aufzulösen ist, wie man so lange geglaubt hatte. Wenn ich nun aber einen der Fälle, wo sich solche Sonderung in der That vollziehen läſst, z. B. daſs die rote Kugel dem roten Würfel der Farbe nach gleich, der Gestalt nach ungleich ist, mir vergegenwärtige — zeigt sich da nicht, daſs ich neben, ja „in" denjenigen Vergleichen, die hier zum Auseinanderhalten einer partiellen Gleichheit und einer partiellen Verschiedenheit führen, eben noch einmal schon, z. B. an der Kugel, das Farbenelement

mit dem Gestaltelement verglichen haben mufs, um sie einander so unähnlich zu finden, dafs sie eben ganz schroff auseinandertreten, als species „heterogener“ genera erkannt werden? — Aber selbst zugegeben, dafs man zu solchem Auseinandertreten, sei es immer, sei es manchmal, einen eigenen Vergleichungsakt entbehrlich finde: wird man gerade in unserem Falle, wo innerhalb der einen Ortsverschiedenheit ϱ die beiden Verschiedenheitskomponenten ϱ' und ϱ'' gegeneinander abzusondern sind — wird man hier es vermeiden können, wenigstens nach vollzogener Analyse noch einen vergleichenden Blick auf das eine Element „Abstand“ einerseits, auf das andere Element „Richtung“ andererseits zu werfen, um es im Bewufstsein festzuhalten, dafs und inwiefern sie verschieden sind? Schliefslich sind, was wir „Komponenten“ oder „Seiten“ nannten, doch auch wieder species desselben genus „Ortsverschiedenheit“, und wer wird species gegeneinander abgrenzen ohne jenen vergleichenden Blick? — Also die im „Spalten“ je eines ϱ in sein ϱ' und ϱ'' gelegene Vergleichung ist es, die, genau genommen, unter obigem Ausdruck „sekundäre“ Vergleichung verstanden werden mufs.

3. Wenn hiernach die primäre (und sekundäre) Vergleichung für das Zustandekommen der Vorstellungen von Abstand und Richtung und ihr Auseinanderhalten als allein wesentlich übrig bleibt, so wird nun natürlich eingewendet werden, dafs, was wir die primäre Vergleichung nannten, eigentlich doch selbst schon eine sekundäre sei. Denn die Örter A, A_1, A_2, A_3 oder A und B wurden ja im vorstehenden stillschweigend immer als „absolute“ Örter behandelt (und einmal sogar geradezu als solche bezeichnet). Es sei aber doch eine ausgemachte Thatsache, dafs, wenn schon nicht, wie nach der allgemeinsten Relativitätslehre „Alles relativ“ sei, dies doch zum mindesten von Örtern kaum jemand in Zweifel ziehe. Auch irgend ein absoluter Ort sei uns ja nur vorstellbar durch Beziehung auf unseren eigenen Leib. — Es soll natürlich hier nicht versucht werden, zu einem so uralten Theorem auf Grund von Allgemeinheiten Stellung zu nehmen. Aber auch den Relativisten darf der Gedanke einmal zur Erwägung empfohlen werden, ob wir nicht vielmehr gerade umgekehrt den Ort unseres Leibes, speziell des so schwer dingfest zu machenden „Raumzentrums“[1]

[1] Hering (Hermann, *Handwörterbuch* III, 1. S. 392 Anm.) hebt an der entscheidenden Stelle, wo er mit dem fundamentalen „Gesetz der

(— wo soll es liegen: an der Nasenwurzel, wie weit hinter ihr?) durch Beziehung auf äufsere Örter vorstellen, welche letztere ihrerseits ohne Beziehung auf den Leib vorgestellt werden können (d. h. so, dafs dies nicht eine logisch widersprechende Forderung einschliefst) und wenigstens manchmal auch wirklich so vorgestellt werden. — Wie es sich aber auch mit der logischen Möglichkeit und der psychologischen Thatsächlichkeit absoluter Ortsvorstellungen verhalte: in den doppelt relativen Inhalt der Vorstellungen von Abstand und Richtung geht doch jene Relativität nicht ein; wir können sie, wenn auch sie schon an den Vorstellungen der Relationsglieder *A* und *B* beteiligt ist, mit einer etwas sonderbaren, aber manchmal sich zweckmäfsig[1] erweisenden Bezeichnung höchstens als die „nullte" Vergleichung bezeichnen, so dafs es im übrigen bei den Terminis primäre und sekundäre Vergleichung verbleiben kann.

Nebenbei bemerkt, führt die Zählung der einem scheinbar so einfachen Begriff, wie dem des Winkels, zu Grunde liegenden Vergleichungsrelationen natürlich um so mehr zu unerwartet grofsen Zahlen, wenn wir beachten, dafs „Winkel = Richtungsunterschied zweier Geraden" (— die beliebte Definition Winkel = Winkelblatt scheint mir unhaltbar) und dafs Gerade = Linie konstanter Richtung. Um so mehr bei den Begriffen von Krümmung als gesetzmäfsigem Richtungswechsel u. dergl. m. Vom hierher Gehörigen für dieses Mal nur das Folgende:

4. Es ist zuzugestehen, dafs es nicht ebenso ungezwungen klingt, schon angesichts zweier Punkte *A* und *B* von „Richtung", wie von „Abstand" zu sprechen. Es mag manchem

identischen Sehrichtungen" den Begriff des „imaginären Einauges" (Cyklopenauges) einführt, selbst hervor, „dafs die Lage des hinzugedachten [„hinzu" — doch wohl zu den Örtern des äufseren Raumes, des Sehraumes] Ausgangspunktes der Sehrichtungslinien eine variable ist und dafs man sich denselben sogar manchmal hinter dem Kopfe zu denken hat" [— zu „denken", also nicht, wie man es von einem unentbehrlichen Relationsgrund erwarten sollte, mit dem äufseren Orte zugleich anschaulich vorzustellen — d. i. zu „sehen" nach Herings Gegenüberstellung von „Sehen" und „Denken", vgl. z. B. a. a. O. S. 344].

[1] So ist es bequem, in der Entwickelung von $(a+b)^n$ das an der Spitze stehende Glied als das nullte, das darauffolgende im Hinblick auf den Koeffizienten $\binom{n}{1}$ als das erste, das folgende mit $\binom{n}{2}$ als das zweite u. s. f. zu bezeichnen. — Desgleichen den ersten Partialton als nullten Oberton u. dergl. m.

scheinen, als gehöre zu einer vollständigen Vorstellung von Richtung die Vorstellung von der Geraden. Der Einwurf würde aber doch einigermaſsen erinnern an das Bedenken, ob nicht auch „Abstand“ schon eine komplete Gerade, nämlich eine „Strecke“ bedeute. Letzteren Einwurf glaube ich schon bei früherer Gelegenheit[1] entkräftet zu haben. Aber auch betreffs der Richtung steht doch so viel auſser Zweifel, daſs, wenn es überhaupt einen Sinn hat, zu sagen, A_1 liege in Bezug auf A in derselben Richtung wie A_3 in Bezug auf A, dies die Bestimmung: A, A_1, A_3 liegen in einer Geraden, logisch ersetzt; wobei aber letzteres, das Reden von Geraden, insofern Überflüssiges in die Betrachtung hereinbringt, als an der Lage von A, A_1, A_3 nichts geändert wäre, wenn wir beliebig lange Stücke des Punktcontinuums, welches die Gerade darstellt, uns weggelassen denken. Wogegen umgekehrt, wenn der Begriff einer nur zwei Punkte benötigenden Richtung zugegeben wird, sich die Gerade in der That definieren[2] läſst als das Continuum, innerhalb dessen je zwei beliebige Punkte immer „dieselbe“ Richtung haben; was wieder genauer so auszudrücken ist, daſs je zwei Punkte in Bezug aufeinander die gleiche[3] Richtung haben, wie je zwei andere Punkte. (Von dem Nichtumkehrbarsein der Richtungsrelation ist in letzterer Formulierung abgesehen; will man es berücksichtigen und zum Ausdruck bringen, so fällt dieser noch etwas schwerfälliger aus, als es in einer so weit gehenden Analyse notgedrungen immer sein wird.)

---

[1] In der oben (Anm. 2) zitierten Anzeige. S. 497.

[2] Mit der von mir vertretenen (vergl. *Vierteljahresschr. f. wiss. Philos.* 1885. S. 360, von Kerry, ib. S. 491, angegriffenen) Definition: „Die Gerade ist die nicht-Krumme“ verträgt sich obige, indem die Anschauung von Krumm bei der Übersetzung aus Diskursive auf die Verschiedenheit der Richtungs-Relationen zwischen je zwei Paaren von Punkten (oder wenigstens drei Punkten) führt. Dabei setzt natürlich wieder diese Bevorzugung der Verschiedenheit vor der Gleichheit voraus, daſs man „Gleich als Nicht-verschieden“, nicht etwa Verschiedenheit als Nichtgleichheit definiere; lauter Dinge, die eine zusammenhängende Begründung so gewiſs verdienen, als sie hier zu weit führen würde.

[3] Die Unterscheidung von gleich und identisch vorausgesetzt, welche durch die Unzukömmlichkeit des Satzes: „Alle Soldaten „desselben“ Regimentes haben *„dieselbe“* Uniform“ illustriert wird (vergl. meine *Logik.* § 25 im Anschluſs an Meinongs *Relationstheorie*).

5. Alles Vorstehende zugegeben, hellt sich nun die eingangs berührte Sonderbarkeit des Postulates, man dürfe bei „rein“ geometrischen Konstruktionen nur Zirkel und Lineal benutzen, in folgender Weise auf — ja man fängt überhaupt erst zu begreifen an, was es für einen Reiz hat, ins endlose die Bestimmungsstücke für Dreieckskonstruktionen u. dergl. — und zwar nicht etwa nur in Schülerübungen — zu variieren. Habe ich nämlich die Lage eines Punktes durch den Schnittpunkt zweier Kreise bestimmt, so heifst das, ich habe gezeigt, wie man einen Ort rein durch Benutzung von **Abstands-Relationen** „indirekt“ vorstellen kann; und das gleiche beim Schnittpunkt zweier Geraden rein durch **Richtungs-Relationen**. Auch die noch kapriziösere Forderung der Konstruktionen von MASCHERONI und STEINER, nur den Zirkel zu benutzen (und desgleichen die von BRIANCHON nur das Lineal) erklärt sich hiermit von selbst.[1] — Natürlich soll nicht gesagt sein, dafs dieses rein logische Motiv das alleinige sei; die Psychologie des Sportes hätte — wie bei so vielen „Aufgaben“ mathematischer und nicht-mathematischer Art — vielleicht thatsächlich häufig noch wirksamere zu nennen. Auch sieht es sich sonderbar genug an, dafs der einer Konstruktionsaufgabe nachsinnende ernste Denker nicht wissen sollte, „was“ er hierbei eigentlich wolle — Vorstellungsinhalte auf Grund wohl definierter Relationen zuwege bringen, wie es der Psycholog und Logiker in seiner Sprache nennt. Aber gerade, wenn derart zu stande gebrachte Vorstellungsinhalte so viel Markantes haben, dafs sie auch dem erkenntnistheoretisch nicht Geschulten, sondern sogleich praktisch Erkennenden als erstrebenswerte Ziele seiner Erkenntnisarbeit insoweit deutlich sich darstellen, dafs sie, ohne von ihm analysiert zu sein, als Ziele festgehalten werden können, ist dies für den Psychologen selbst wieder eine Bestätigung, dafs derlei Vorstellungsinhalten eine ganz auffällige Rolle im Denken zukommen mufs. In der That braucht der an psychologische Reflexion Gewöhnte nur einmal

---

[1] Dafs MASCHERONI wie BRIANCHON ausdrücklich praktische Zwecke vor Augen hatten (vgl. KLEIN, a. a. O. [S. 223 Anm. 1], S. 26), thut der theoretischen Bedeuttamkeit ihrer Methoden natürlich ebenfalls keinen Eintrag.

auf die Thatsache des „indirekten Vorstellens"[1] aufmerksam gemacht zu sein, um es gar nicht anders zu erwarten, als dafs ihm derlei Vorstellungsgebilde allenthalben begegnen werden. Hat man sich vollends einmal darüber Rechenschaft gegeben, wie sehr Arithmetik und Geometrie von ihren elementarsten Grundlagen an es mit Relationsurteilen über Vorstellungsinhalte zu thun haben, die ihrerseits selbst wesentlich nur durch Relationen definiert sind,[2] so wird es nicht wunder nehmen, wenn ein so beträchtlicher Teil mathematischen Denkens, wie es das sogenannte Konstruieren ist (und noch allgemeiner alle „synthetische", speziell auch die „neuere" Geometrie gegenüber der „analytischen") sich für die psychologische und logische Analyse geradezu als eine Theorie des indirekten Vorstellens mittelst möglichst weit analysierter Relationselemente herausstellt.

6. Nachdem bisher so viel vom Auseinanderhalten der Relationskomponenten „Abstand" und „Richtung" die Rede war, sei kurz hingewiesen auf die eigenartige Methode der „Vektoren", in welchem Begriff jene zwei Elemente sozusagen kunstgerecht wieder vereinigt, nämlich nach ausdrücklichem Auseinanderhalten diesmal wirklich zu einem neuen Begriffsgebilde „zusammengesetzt" sind — eine Synthese nach der Analyse. Dafs rein mathematische Theorien, wie die der räumlichen Darstellung komplexer Zahlen, an jenen psychologischen Analysen und Synthesen nicht minder interessiert sind als die

---

[1] Zuerst theoretisch analysiert und auf Grund dessen mit obigem Terminus versehen von Meinong, *Relationstheorie* (1881), S. 87 [657]. — Es scheint mir nicht überflüssig, die Erinnerung an die Provenienz dieses Terminus (der, wie sich gezeigt hat, einem sehr verbreiteten Bedürfnis entgegenkam) wachzuerhalten. — Jüngst schreibt nämlich Dr. Emil Koch *Das Bewufstsein der Transcendenz oder der Wirklichkeit,* Ein psychologischer Versuch, 1895. — S. 88]: „Wir kommen zu den .. indirekten Vorstellungen' die auch K. Twardowski bespricht.. (im Anschlusse an Kerry)." Hiernach erscheint Terminus und Definition Kerry zugeschrieben. Wollte der Leser Kochs die „tertiäre Vergleichung" der Citate vornehmen, so fände er freilich, dafs Kerry für die fragliche Begriffsbestimmung richtig Meinong als Urheber genannt hatte.

[2] Meinong, *Relationstheorie.* S. 89 [659]: „Man sieht auf den ersten Blick, wie die ganze Mathematik, da es hier um möglichste Allgemeinheit, daher Unabhängigkeit von speziellen Gröfsen zu thun ist, geradezu in erster Linie sich mit Fällen dieser Art zu beschäftigen hat." — Beispiele: $a = b$, $a = c$; $b = c$ u. dergl.

physikalischen Vorstellungen, z. B. von Geschwindigkeiten, die ihrerseits nicht nur „Gröſse", sondern auch „Richtung" haben, darf die Psychologie nicht so sehr behaupten als — hoffen; denn schlieſslich ist's auch hier eine Thatsachenfrage, aber hoffentlich auch nur eine Frage der Zeit, daſs Mathematiker und Physiker inne werden, wie sie, wenn sie nur wirklich soweit als möglich analysieren wollen, sich von ihrem direkten Forschungsgebiete, den physischen Phänomenen (— die „Zahlen" freilich hier nicht inbegriffen) sich eben an die Analysen ihrer eigenen Vorstellungsgebilde gewiesen sehen; was dann seine besondere Technik — die psychologische, nicht die mathematische und physikalische als solche — voraussetzt.

7. Daſs, wo im Bisherigen ausschlieſslich von Örtern die Rede war, anstatt der Raumdaten vielfach Intensitäten, Qualitäten und sonst etwa aufzuzeigende Vorstellungselemente (nicht nur innerhalb physischer, sondern wohl auch gar psychischer Inhalte) in Betracht zu ziehen wären, bedarf für den an die räumliche Symbolisierung gewöhnten Psychologen keiner weiteren Begründung; betitelte sich doch z. B. eine der letzten Arbeiten Helmholtz' in *dieser Zeitschr.*, III. Bd., „Kürzeste Linien im Farbensystem", wobei nicht nur Abstands-, sondern ebenso Richtungsrelationen zwischen Farbeninhalten als solchen das Thema bildeten. Aber freilich ist damit, daſs die Aufgabe auſser Zweifel steht, noch lange nicht ihre Lösung gegeben und mag fernerhin noch manches ebenso schwierige

[1] Vergl. z. B. die erstaunlich einfache und dabei weitreichende Anwendung in Maxwells *Matter and motion*, deutsch von Fleischl, *Substanz und Bewegung*. Inwiefern der Begriff des „Sectors" trotz der Fruchtbarkeit an Erfolgen uns nicht der logischen Verpflichtung überhebt, uns bewuſst zu bleiben, daſs das Hineintragen des Richtungsmerkmales in die Geschwindigkeitsvorstellung doch nur eine künstliche ist, habe ich angedeutet in dem Aufsatz „Zur vergleichenden Analyse der Ableitung für Begriff und Gröſse der zentripetalen Beschleunigung", *Zeitschr. f. d. physik u. chem. Unterr.* II. Jahrg. 1889. S. 281. Das Eingeständnis solcher Künstlichkeit kann für die Psychologie wichtig werden, wenn sie an eine endgültige Analyse, z. B. des Geschwindigkeitsbegriffes, geht, welchem nun einmal — trotz aller Definitionsfreiheit — die Elemente Weglängen und Zeitlängen nebst der zwischen ihnen sich herausbildenden „Gestaltsqualität" (vergl. die genannte Zeitschrift. VIII. Jahrg. 1895. inniger angehören, als das Richtungselement. Die Ausführung dieser Andeutungen hoffe ich in nicht zu langer Zeit anderwärts geben zu können.

als lehrreiche Problem einschliefsen, das aber ohne Zurückgehen auf letzte Relationsdaten wohl kaum eine endgültige Lösung überhaupt erwarten darf.

Nachtrag. Zur Zeit der Drucklegung dieser Mitteilung (30. Oktober 1895) hielt Professor SIGMUND EXNER in der Philosophischen Gesellschaft an der Universität Wien einen Vortrag „Über Richtungsempfindungen." — Dieser Terminus könnte einen Widerspruch zu enthalten scheinen gegen die ganze obige psychologische Analyse, welche in den Vorstellungen von Abstand und Richtung sogleich Relationen, nämlich gehäufte Vergleichungsrelationen, aufwies. So gewifs aber die Gleichheit oder die Verschiedenheit (z. B. zweier Tonhöhen) als solche nicht selbst „empfunden" (gehört) werden, sondern angesichts zweier (Ton-)Empfindungen (oder aber zweier Erinnerungsvorstellungen von den Tonhöhen) erst durch den besonderen Vorgang des „Vergleichens" zu unserem Bewufstsein gebracht werden kann, so gewifs sind die von mir aufgezeigten Relationselemente des Richtungsbegriffes keine Empfindungselemente. — Der Titel des Vortrages besagte aber auch nicht — wie sich aus dem Inhalte des Vortrages ergeben hat —, dafs die Richtungen empfunden werden, sondern er wies auf diejenigen Empfindungsgattungen und -arten hin (z. B. Muskelempfindungen), an welche sich — wie ich in meiner Terminologie sagen mufs — die Richtungsrelationen mit Vorliebe geknüpft erweisen — genauer: welche in uns Richtungsvorstellungen und Richtungsurteile auslösen.
