Über die Bedeutung des Weberschen Gesetzes.

Beiträge zur Psychologie des Vergleichens und Messens.

Von

A. Meinong.

Erster Abschnitt.

Vom Gröfsengedanken und dessen Anwendungsgebiet.

§ 1. Das Limitieren gegen die Null.

Bei der engen Verbindung, welche zwischen der Sache des Weberschen Gesetzes und der psychischen Messung besteht, bedarf es schwerlich einer Rechtfertigung, wenn eine diesem Gesetze zugewandte Untersuchung mit Erwägungen anhebt, welche die Gröfse im allgemeinen zum Gegenstande haben. Auf eine schulgerechte Gröfsendefinition ist es dabei keineswegs abgesehen; genauere und unvoreingenommene Prüfung des Thatsächlichen führt in der Psychologie so oft auf Unanalysierbares und insofern Undefinierbares, dafs man nicht wohl Anstofs daran nehmen könnte, auch im Gröfsengedanken einen solchen Fall anzutreffen. Natürlich schliefst aber eine Eventualität dieser Art die Möglichkeit einer definitorischen Charakteristik vermittelst indirekter Bestimmungen nicht aus, und das Bedürfnis, sich durch solche Bestimmungen sicher zu stellen, ist hier ohne Zweifel gröfser, als in manchem anderen der Fälle, wo die an sich gewifs höchst achtenswerte Gewohnheit, more mathematico vorzugehen, dazu geführt hat, dem Vorurteil Folge zu geben, als liefse sich durch Definitionen alles und ohne Definitionen nichts theoretisch von der Stelle bringen. Denn thatsächlich hat sich der so populäre Gegensatz von Qualität und Quantität für sich allein nicht als deutlich genug erwiesen, um die Frage fern zu halten, ob es denn auch ein wirklicher

Gegensatz sei; das beweist der gelegentlich gemachte Versuch, die psychischen, zunächst die Empfindungsintensitäten als Qualitäten aufzufassen, die nur durch ihren besonders engen Zusammenhang mit den Reizintensitäten ausgezeichnet wären.[1] Weil aber hier eigentlich schon der Appell an unbefangenes Erfassen der in der Sache zunächst kompetenten Empirie, der psychologischen nämlich, leicht genug zur sofortigen Ablehnung dieses Versuches führt,[2] ist es jedenfalls um vieles bedeutsamer, daſs die Psychologie des Lichtsinnes, und sicherlich nicht erst auf dem Umwege theoretischer Spitzfindigkeiten, bekanntlich auf Probleme hingedrängt hat,[3] deren befriedigende Lösung ein zuverlässiges und praktisch leicht anwendbares Kriterium für das, was Gröſse ist, resp. Gröſse hat, unerläſslich voraussetzt.

Ein solches Kriterium habe ich bereits vor Jahren vorübergehend namhaft gemacht,[4] ohne zu wissen, daſs es bereits ein paar Jahre früher mit aller nur irgend wünschenswerten Klarheit von J. v. Kries geltend gemacht worden ist.[5] Es zeigt sich nämlich, daſs, wo immer man es mit Gröſsen zu thun hat, die in weiter nichts als eben in der „Gröſse“ verschieden sind, dieselben einem eindimensionalen Continuum, unter Umständen, z. B. bei Zahlengröſsen,[6] auch einer diskreten, aber in einer Dimension liegenden Reihe angehören, das, resp. die nach der einen Seite hin durch die Null begrenzt ist, indes nach der anderen Seite, theoretisch wenigstens, eine Begrenzung fehlt. Man kann also kurz sagen: es ist allen Gröſsen charakteristisch, gegen Null zu limitieren,[7] — und das Einzige, was dem

---

[1] Exner in *Hermanns Handb. d. Physiol.*, Bd. II, 2. S. 242 f., wie es scheint, unabhängig davon auch Boas in *Pflügers Arch.* 28. Bd. 1882. S. 596.

[2] Vergl. Stumpf. *Tonpsychol.* Bd. I, S. 350.

[3] Vergl. Hering, *„Zur Lehre vom Lichtsinn.“* 2. Aufl. S. 52 ff. — Auch F. Hillebrand, „Über die spezifische Helligkeit der Farben“, *Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien, Math.-Nat. Kl.* Bd. XCVIII. Abtl. III. S. 78 ff.

[4] „Über Begriff und Eigenschaften der Empfindung.“ *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* Jahrg. 1889. S. 7. Anm.

[5] „Über die Messung intensiver Gröſsen und über das sogenannte psychophysische Gesetz.“ *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* Jahrg. 1882. S. 278.

[6] Vergl. Ehrenfels (gegen Brix) in der *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* Jahrg. 1891. S. 300. Anm. Nach Lipps (*„Grundzüge der Logik.“* Hamburg und Leipzig. 1893. S. 120) wäre „Gröſse im engeren und eigentlichen Sinn . . . nur die stetige Gröſse“.

[7] Daſs das Wort Limitieren streng genommen hier den Fall der Concreta ausschlieſst, bedeutet natürlich eine im Interesse der Kürze

noch entgegenzuhalten wäre, ist die Frage, ob hier das Wesen der Gröſse nicht durch Hinweis auf Gröſsenveränderung bestimmt, damit also ein circulus in definiendo gesetzt sei. Denn was besagt das „Limitieren“ gegen Null, wenn nicht ein Annähern an dieselbe, und was wäre Näher und Ferner anderes, als kleinere und gröſsere Distanz? Um die Gröſse im allgemeinen zu kennzeichnen, wäre dann nichts als ein spezieller Gröſsenfall in Anspruch genommen, so daſs der Umweg über die Null doch nur zu einem idem per idem zu führen scheint.

Ich bezweifle aber vor allem, daſs dies der praktischen Brauchbarkeit der in Rede stehenden Bestimmung erheblichen Schaden thäte. Denn was Distanz ist, und was im besonderen gröſsere und geringere Distanz, darüber ist doch wohl alle Welt im klaren; sollte man also durch diese Bestimmung unklare und darum verkennbare Gröſsenfälle auf einen unverkennbaren Gröſsenfall gleichsam reduziert haben, so wäre damit allen formalistischen Einwänden zum Trotz denn doch etwas geleistet. Indes möchte es wohl nicht allzu schwer sein, einen Standpunkt einzunehmen, der auch dem formalistischen Einwande nicht ausgesetzt ist, falls es gelingt, den Ausdruck „Limitieren gegen Null“ durch eine Wendung zu ersetzen, die, wenn auch vielleicht nicht deutlicher, so doch von dem Anschein frei ist, speziell mathematische und daher bereits auf den Gröſsengedanken gebaute Voraussetzungen zu implizieren.

Solches ist nämlich vor allem mit vollem Rechte vom Worte „Null“ zu sagen. Null ist, streng genommen, in der That bereits etwas, das derjenige nicht erfassen könnte, dem der

---

wohl statthafte Ungenauigkeit. — Bei nachträglicher Durchsicht von F. A. Müllers Schrift über *„Das Axiom der Psychophysik“* werde ich auf die folgende, vorher von mir unbeachtete Stelle aus *Kants Kritik der reinen Vernunft* (ed. Kirchmann, S. 192) aufmerksam: „Nun nenne ich diejenige Gröſse, die nur als Einheit apprehendiert wird, und in welcher die Vielheit nur durch Annäherung zur Negation = 0 vorgestellt werden kann, die intensive Gröſse.“ Übereinstimmend äuſsert sich neuestens G. E. Müller in seinem ersten, bereits nach Abschluſs der vorliegenden Arbeit erschienenen Artikel „Zur Psychophysik der Gesichtsempfindungen“ *Diese Zeitschr.* Bd. X. S. 2 f.; nur scheint er dabei dem Abstand von der Null (vergl. a. a. O. S. 28 Mitte) eine für den Gröſsengedanken konstitutive Bedeutung beizumessen, welche demselben, wenn ich in den folgenden Abschnitten im Rechte bin, nicht zukommt.

Gröſsengedanke fehlt; Null ist ja Negation der Gröſse. Statt also zu sagen „Gröſse ist oder hat, was gegen die Null zu limitieren fähig ist", setzen wir etwa die Wendung: „Gröſse ist oder hat, was zwischen sich und sein kontradiktorisches Gegenteil Glieder zu interpolieren gestattet." Daran verlangt nur noch der Hinweis auf die Interpolation eine Präzisierung. Am nächsten liegt, dabei an Ähnlichkeit zu denken: ist x die präsumtive Gröſse, so besagt die eben ausgesprochene Bestimmung, x verdiene dann, groſs oder Gröſse zu heiſsen, wenn sich zwischen x und non-x etwas einschieben lieſse, das sowohl dem x als dem non-x ähnlicher, sowohl vom x als vom non-x weniger verschieden wäre, als x und non-x untereinander. Damit wäre nun aber neuerdings auf ein Mehr und Weniger (der Ähnlichkeit, resp. Verschiedenheit), also neuerlich auf Gröſse rekurriert. Man kann dies vermeiden, indem man den Richtungsgedanken zu Hülfe nimmt, der, wie wohl ohne weiteres ersichtlich, in Wahrheit ein viel, ja ein unvergleichlich weiteres Anwendungsgebiet beanspruchen darf, als die Sprache dem nur ausnahmsweise über das Räumliche hinaus gebrauchten Worte Richtung zuerkennt. Läſst sich nämlich ein y denken, das, gleichsam vom x aus gesehen, in die nämliche Richtung fällt wie non-x, dann ist, resp. hat x Gröſse, und non-x ist die Null; und ich kann nun in der That in dieser Charakteristik auch nicht den entferntesten Anschein eines Circulus vitiosus finden.

Ob jenes Limitieren, wie wir nun wieder kurz sagen können, die Gröſse bereits kurzweg ausmacht oder sie nur verrät, ist durch das Dargelegte noch keineswegs entschieden. Ohne Zweifel ist auch die Richtung im engsten, räumlichen Sinne nicht ein Letztes; vielmehr weist die Thatsache, daſs mehrere Punkte in der nämlichen Richtung oder in verschiedenen Richtungen liegen, auf die Ortsbestimmungen hin, welche diese Punkte, zunächst jedenfalls subjektiv, charakterisieren. Ebenso weist der Umstand, daſs in der Richtung, die von der Existenz des x zu seiner Nichtexistenz führt, noch ein y und dann natürlich auch ein z und noch vieles, ja unzählig vieles andere liegt, auf eine Eigenheit am x, natürlich auch am y und z hin; aber es ist zum mindesten sehr die Frage, ob sich diese Eigentümlichkeit anders als mit Zuhülfenahme eben des Limitierens charakterisieren läſst. Ist dem so, dann liegt es wenigstens sehr nahe (und wir werden uns im zweiten Abschnitte auf diese Betrachtungsweise noch einmal hingeführt finden[1]), anzunehmen, dafs eben dieses Limitieren die Gröfse im eigentlichen Sinne **ist**, indes dasjenige, was diese Eigenschaft an sich trägt, als dasjenige zu bezeichnen wäre, was die Gröfse **hat**. Auf alle Fälle ist die strenge Durchführung des terminologischen Auseinanderhaltens von „ist" und „hat" schon deshalb sprachgebräuchlich undurchführbar, weil man sich daran gewöhnt hat, etwas, das „grofs" ist, also Gröfse hat, auch ohne weiteres eine Gröfse zu nennen.

Weniger geeignet, falls vom obigen überhaupt anders als nur dem Ausdrucke nach verschieden, schiene mir der gelegentlich[2] gemachte Versuch, Gröfse, zunächst „Intensität", als Steigerungsfähigkeit zu charakterisieren. Ohne Zweifel ist alle Gröfse steigerungsfähig, aber doch wohl nur darum, weil Steigern eben nichts anderes bedeutet als eine Entfernung von der Null. Die Stellung, die Stumpf der Steigerung als einer Relation sui generis neben der Verschiedenheit, resp. Ähnlichkeit angewiesen hat,[3] erachte ich für unhaltbar; es ist, soviel ich sehe, nur ein komplexerer Gedanke, welcher aufser der eben berührten Determination von Gröfsenverschiedenheit etwa auch den Vorgang der betreffenden Veränderung, den Übergang, aufserdem vielleicht auch noch eine auf diesen Übergang gerichtete Thätigkeit, das „Steigern" in sich fafst. Ist dem so, dann hat, wer Gröfse durch Steigerungsfähigkeit charakterisiert, also auch noch das Fähigkeitsmoment einbezieht, doch wohl nur das Einfachere durch das Kompliziertere ersetzt.

§ 2. Anschauliche und unanschauliche Gröfsen.

Es wäre kaum von Wert, die Mannigfaltigkeit dessen, was Gröfse hat oder ist, durch einen Aufzählungsversuch zusammenfassen zu wollen. Dagegen dürfte ein Hinweis auf die Grundklassen, in welche diese Mannigfaltigkeit sich ordnen läfst, dazu dienen, der Eigenart des Gröfsengedankens und seiner wichtigsten Ausgestaltungen näher zu treten und zugleich einige für den Fortgang der gegenwärtigen Untersuchungen wesentliche Gesichtspunkte zu gewinnen.

---

[1] Vergl. unten § 7.

[2] Von Ehrenfels in der *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* Jahrg. 1890. S. 266.

[3] *Tonpsychologie.* I. S. 96 ff.

Einen willkommenen Ausgangspunkt hierfür bietet die von A. Höfler[1] vorgenommene Gegenüberstellung der „phänomenalen und nicht-phänomenalen (kategorialen) Quanta“, derjenigen Gröſsen nämlich, die sich in Wahrnehmungs- oder anschaulicher Einbildungsvorstellung erfassen lassen, im Gegensatze zu denjenigen Gröſsen, wo dies nicht der Fall ist. Nur möchte die Benennung kaum dem recht entsprechen, was hier augenscheinlich gemeint ist. Ich denke nicht in erster Linie daran, daſs der von manchen so gern gebrauchte Ausdruck „Phänomen“ dadurch leicht undeutlich werden kann, daſs das „Phänomenon“ nicht nur dem „Noumenon“, sondern das „Phänomenale“ auch wohl dem „Dispositionellen“ gegenübergestellt wird. Näher liegt ein anderes Bedenken: gehört eine Verschiedenheit, ja auch nur eine Anzahl, streng genommen, wirklich ins Gebiet des „Phänomenalen“? Es geht doch nicht wohl an, etwas „Phänomen“ zu nennen, was nicht „erscheinen“ kann; und auf den Namen der „Erscheinung“ hat doch streng genommen nur Anspruch, was durch Wahrnehmung erfaſsbar ist. Der Sprachgebrauch ist freilich thatsächlich nicht ganz so streng: er verwehrt nicht durchaus, etwas Phänomen zu nennen, was in der Zeit verläuft, so etwa Bewegungen, ja wohl sogar Zeitstrecken selbst, wenn sie nicht zu ausgedehnt sind. Aber je mehr man derlei mit in Betracht zieht, um so mehr verliert der Begriff des Phänomenalen an Bedeutsamkeit um so mehr kommt zugleich in dem uns hier beschäftigenden Falle das Bedürfnis zur Geltung, über das Gemeinsame ins klare zu kommen, um deswillen wahrnehmbare und anschaulich einzubildende Gröſsen hier unter dem Einen Namen der „phänomenalen Gröſsen“ zusammenstehen. Was die Wahrnehmungsvorstellungen mit den anschaulichen Einbildungsvorstellungen zunächst gemein haben, ist ohne Frage eben die Anschaulichkeit; es dürfte darum in der That sowohl den Intentionen Höflers, als den Thatsachen besser Rechnung getragen werden, wenn wir im Folgenden von „anschaulich vorstellbaren Gröſsen“ gegenüber solchen reden, die nicht anschaulich vorstellbar sind. Daſs ich mir vier Teilstriche an einem Gradbogen oder die Distanz im Betrage eines Zentimeters anschaulich vorstellen kann, daran zweifelt ja auch

---

[1] „Psychische Arbeit.“ *Diese Zeitschr.* Bd. VIII. S. 49. (S. 6 des Sonderabdruckes.)

der nicht, der nicht zuzugeben vermöchte, dafs eine Anzahl oder eine Verschiedenheit zu dem im strengen Sinne Wahrnehmbaren gehört.

Dadurch ist natürlich keineswegs in Frage gestellt, dafs im Gebiete des Anschaulichen dem Wahrnehmbaren etwas wie eine Art Prärogative zukommt. Sicherlich kann man, was anschauliche Gröfsen seien, durch nichts deutlicher machen, als durch den Hinweis etwa auf die der Wahrnehmung so häufig sich darbietenden „Intensitäten", wie sie an Vorstellungsgegenständen z. B. als Tonstärke, Wärme- und Kältestärke (ein gebräuchlicheres Wort, das physikalische Nebengedanken an Temperaturgrad oder gar Wärmemenge genügend ausschlösse, steht nicht zu Gebote), übrigens aber auch an psychischen Thatsachen, die nicht dem Vorstellungsgebiet zugehören, hervortreten, was wenigstens mit Rücksicht auf die Gefühle von niemandem in Zweifel gezogen wird. Beispielen gegenüber, die eine so deutliche Sprache reden, braucht sich die Theorie um eine Legitimation für die Aufstellung der ersten der beiden obigen Gröfsenklassen weiter nicht zu bemühen.

Bei weitem nicht so einfach stehen indes die Dinge in betreff der zweiten Klasse. Um Beispiele von „Gröfsen", die sich nicht anschaulich vorstellen lassen, wird freilich auch hier niemand verlegen sein: man braucht sich etwa nur elementarer physikalischer Begriffe, wie des der lebendigen Kraft, der mechanischen Arbeit oder dergl. zu erinnern. Die Frage ist aber, ob diese zweifellos der Anschaulichkeit entbehrenden Konzeptionen auch als besondere, eigenartige Ausgestaltungen des Gröfsengedankens anerkannt werden können. Die Gepflogenheit der Physiker, dergleichen Begriffe einfach durch die betreffenden Formeln zu definieren, erzeugt den Anschein und ist sicher auch vielfach der Meinung entsprungen, „lebendige Kraft" sei überhaupt gar nichts anderes als das Produkt aus Masse und Quadrat der Geschwindigkeit, mechanische Arbeit sei nichts weiter als das Produkt von Kraft (Spannung[1]) und Weg u. s. f. Was sich da der Benennung nach als verschiedene Gröfsenarten darstellt, wären im Grunde nichts als Rechnungsergebnisse, also zuletzt Zahlengröfsen, an deren Natur die besondere Bedeutung der Zahlenwerte, aus denen

[1] Vergl. Höfler a. a. O. S. 46. (S. 3 des Sonderabdruckes.)

heraus sie durch Rechnung gewonnen sind, nichts zu ändern vermöchte.

Man könnte hier sogar noch einen Schritt weiter gehen, der nicht unerwähnt bleiben mag, weil er dem bekanntlich immer noch nicht gerade seltenen Bedürfnisse gemäfs wäre, den psychischen Thatsachen gegenüber, solange es nur irgend angeht, Vogel Straufs zu spielen. Es liefse sich nämlich die Frage aufwerfen, ob wir in den angeblichen Begriffen der Geschwindigkeit, Beschleunigung, Arbeit etc. denn wirklich Begriffe, und nicht vielmehr blofs formelhafte, geschriebene oder gesprochene Zusammenfassungen von Daten vor uns haben, die gar nicht zu einem bestimmten Gedanken vereinigt auftreten müfsten. Ihre Bedeutung läge dann einfach in den in sie aufgenommenen numerischen Einzelbestimmungen, die zusammen nichts weiter ausmachten, als was ich in anderem Zusammenhange[1] als „objektives Kollektiv" bezeichnet habe. Wie wenig indes, wenn man der Geschwindigkeit gegebenen Falles einen bestimmten Wert zuspricht, damit etwa ein bestimmter Wert von s mit einem bestimmten Wert von t einfach zusammen angegeben sein will, erhellt einfach daraus, dafs die nämliche Geschwindigkeit bei den verschiedensten Beträgen von s und t und beliebig verschiedene Geschwindigkeit bei dem nämlichen Werte von s oder t vorliegen kann.

Psychologischer wäre da schon die Annahme, „Gröfsen" der in Rede stehenden Art seien immerhin bestimmte, gleichviel, ob in mehr oder weniger eigenartiger Weise vorgestellte Komplexionen, ihre Bezeichnung als Gröfsen aber sei nur ein ungenauer Ausdruck dafür, dass dieselben eine anschaulich vorstellbare Gröfse oder deren mehrere zum Bestandstück haben. So könnte man etwa beim Begriffe der Veränderung das Mehr und Weniger, das man dieser zuzuschreiben pflegt, als das Mehr und Weniger der Distanz verstehen, die zwischen dem Ausgangs- und Endpunkte der Veränderung besteht. Aber was in diesem besonderen Falle die Annahme am meisten empfiehlt, ist am Ende doch die Voraussetzung, dafs der wesentlich negative Charakter des Veränderungsbegriffes[2] eine eigentliche

---

[1] „Beiträge zur Theorie der psychischen Analyse." *Diese Zeitschr.* Bd. VI. S. 352 f. (S. 13 f. des Sonderabdruckes.)

[2] Negativ natürlich nicht etwa deshalb, weil der Gedanke „Veränderung oder Übergang des A in B" ein B verlangt, das vom A verschieden

Steigerungsfähigkeit ausschliefse. Nun bedeutet aber bereits das Limitieren gegen Null, das wir den Gröfsen charakteristisch gefunden haben, eine Art Übergang zwischen Dasein und Nicht-Dasein, so seltsam, ja fast absurd sich der Gedanke anzulassen droht; es wird also am Ende auch bei der Veränderung Raum für einen Übergang gestattet werden können. Was aber die in Rede stehende Gröfsenauffassung im allgemeinen betrifft, so tritt deren Unhaltbarkeit sofort zu Tage, sobald man eine Komplexion aus mehr als einer Gröfsenbestimmung als Bestandstück vor sich hat. Der oben an *s* und *t* illustrierte Einwand liefse sich mutatis mutandis auch hier vorbringen; es fehlte eben jeder Anhaltspunkt, weshalb man die auf die Komplexion bezogene Quasi-Gröfsenbestimmung lieber nach dem einen als nach dem anderen der gewissermafsen konkurrierenden Bestandstücke vornehmen sollte.

Es wird also wirklich nichts anderes übrig bleiben, als anzuerkennen, dafs, was man sich unter Beschleunigung, mechanischer Arbeit u. s. f. vorstellt, Gröfsen sind; es wird dies auch nicht leicht bestritten werden, aber eben unter der oben berührten Voraussetzung, dafs es, streng genommen, Zahlengröfsen, Gröfsen unbenannter Zahlen sind und nichts als dieses. Unbenannt nämlich scheinen diese Produkte, Quotienten etc. doch besten Falles sein zu müssen, da sich der Weg nicht durch die Zeit dividieren, die Masse nicht mit der Geschwindigkeit multiplizieren läfst[1], sonach ein Absehen von allen Zahlenbenennungen aufser etwa einer einzigen unerläfslich, das Zurückbehalten dieser einzigen aber augenscheinlich willkürlich wäre. Daran ist nur zweifellos so viel richtig, dafs es sich hier sehr häufig um Gröfsen handelt, die durch Zahlen präzisierbar sind, aber für keinen dieser Fälle ist, soweit ich sehe, die Unbenanntheit der betreffenden Zahlen zuzugeben. Es ist um nichts weniger unnatürlich, die Beschleunigung als etwa den

---

ist, und weil sich diese Verschiedenheit auch im Satze: „*B* ist nicht *A*“ ausdrücken liefse. Aber um Veränderung zu denken, genügt es ja nicht, an zwei verschiedene Objekte zu denken; es ist auch erforderlich, dafs das *B* an Stelle des *A* trete, das *A* gleichsam ersetze, und darin liegt vor allem, dafs das *A* zu existieren aufhört, bevor *B* zu existieren anfängt. Der so unerläfsliche Gedanke der „Nichtexistenz des *A*“ ist die im Text gemeinte Negation.

[1] Vergl. auch v. Kries a. a. O. S. 262.

gemessenen Weg oder die gemessene Zeit für eine bloſse Zahl zu erklären; einigermaſsen sorgfältige Beachtung dessen, was man das eine und das andere Mal wirklich denkt, lehrt dies unmittelbar. Die Beantwortung der Frage, was denn sonach bei numerisch bestimmter Beschleunigung, Dichte und dergl. eigentlich gezählt werde, müſste darum noch gar nicht sich von selbst darbieten. Doch scheint mir ein erster Aufschluſs hierüber gleichfalls nicht allzu schwer zu gewinnen.

Augenscheinlich ist die Hauptfrage diese: wenn hier wirklich benannte Zahlen vorliegen, welcher Art sind die Benennungen, — anders ausgedrückt: welcher Art sind die zahlenmäſsig bestimmten Komplexionen, in denen die zahlenmäſsig bestimmten, übrigens von Natur anschaulichen Gröſsen hier vereinigt vorgestellt werden? Da die Komplexionsgröſse jedesmal als Funktion der Bestandstückgröſsen auftritt, so verspricht die Natur dieser Funktion in jedem Einzelfalle den nächsten Anhaltspunkt zu bieten; es kommt also darauf an, warum gegebenen Falles gerade diese Funktion auftritt und keine andere. Warum bestimmt man etwa die lebendige Kraft gerade durch das (halbe) Produkt von Masse und Quadrat der Geschwindigkeit, warum die Geschwindigkeit gerade durch den Quotienten von t in s, — warum nicht lieber die Geschwindigkeit durch ein Produkt, die lebendige Kraft durch einen Quotienten aus den betreffenden Variablen?

Man wird dies zunächst durch den Hinweis darauf begründen wollen, daſs man eben jenes Produkt und nichts anderes lebendige Kraft, diesen Quotienten und nichts anderes Geschwindigkeit genannt habe. Bei der hohen, meines Erachtens allerdings viel zu hohen Meinung, die man, gestützt auf wirkliches oder vermeintliches Vorgehen der Mathematik, sich in betreff der Definitionsfreiheit gebildet hat — man könnte geradezu von einer Art Definitions-Indeterminismus reden —, darf dieser Bescheid auf die Zustimmung rechnen, die sonst nur Selbstverständlichem zu teil wird. Gleichwohl wird man sich darüber nicht täuschen können, daſs bei derlei „Benennungen" Freiheit so wenig als sonst irgendwo ein Recht auf Willkür begründet: auch der Nicht-Physiker wird es wagen dürfen, sich zur Rechtfertigung seines Gegensatzes gegen die unter den Physikern zur Zeit wohl noch vorherrschende Meinung auf die empirisch festgestellte Bedeutsamkeit oder Brauchbarkeit der betreffenden

Zusammenstellungen für Beschreibung und Erklärung zu berufen, wobei zu der hierher gehörigen Empirie sicherlich auch die bei rechnerischer Bearbeitung eines Problems erwachsenden Bedürfnisse zu zählen sind. Immerhin darf man aber nicht besorgen, dabei etwa alle fachmäſsigen Vertreter der Physik gegen sich zu haben; das beweist der Ausspruch POSKES,[1] „daſs jeder physikalische Begriff eine anschauliche Grundlage hat, und daſs der Zusammenhang mit dieser Grundlage nicht aufgehoben werden darf, wenn das volle Verständnis des Begriffes erhalten bleiben soll. So bedeutet Geschwindigkeit nicht den Quotienten $\frac{s}{t}$, der an sich völlig sinnlos ist, sondern vielmehr einen eigenartigen Zustand eines Körpers, dessen genaue Messung mit Hülfe dieses Quotienten möglich wird; so bedeutet Masse nicht $\frac{p}{g}$, sondern eine Eigenschaft, vermöge welcher ein Körper unter der Einwirkung einer bestimmten Kraft eine bestimmte Beschleunigung erfährt. . . . .“

Für unsere auf den den betreffenden Formeln wesentlichen Gedanken gerichtete Fragestellung verdient hier insbesondere der Hinweis auf die „anschauliche Grundlage“ Erwägung. Naheliegende Erfahrungen kommen diesem Hinweise zu statten. Es bedarf nur eines Blickes auf das Alltagsdenken, um sich davon zu überzeugen, daſs der Gegensatz von Geschwind und Langsam diesem Denken gar wohl bekannt ist, die Formel der Mechanik dagegen nicht, — und daſs jener Gegensatz ebenso der Anschauung oder wenigstens Anschaulichkeit zugänglich ist, wie die Bewegung selbst, als deren nähere, eben quantitative Bestimmung die Geschwindigkeit sich darstellt. Ganz Ähnliches ist von der Dichte zu sagen. Was es heiſsen soll, daſs eine Allee mehr oder weniger dicht mit Bäumen bepflanzt sei, oder daſs sich die Menschen mehr oder weniger dicht in einem engen Raume zusammendrängen muſsten u. dergl., versteht jedermann, ohne entfernt an einen Quotienten zu denken. Den Unterschied nicht nur bei einem quantum discretum, einer Menge, zu machen, sondern auch bei einem quantum continuum, fällt dem Nicht-Physiker freilich nicht mehr ebensoleicht; aber vielleicht unterscheidet sich auch hier der Physiker oft nur dadurch vom

---

[1] *Zeitschr f. d. physik. u. chem. Unterr.* Jahrg. III. S. 161, zitiert von A. HÖFLER im VIII. Jahrgang derselben Zeitschrift. S. 125.

Laien, daſs er sich den Schritt vom Discretum zum Continuum etwa durch eine atomistische Theorie zu ersparen hofft. Natürlich sind nun Beispiele dieser Art, deren sich mehr anführen lieſsen, nicht so zu verstehen, als ob das auſserphysikalische Vorstellen den Geschwindigkeitsgedanken ohne Weg und Zeit, den Dichtegedanken ohne Raum und Raumerfüllung zu konzipieren vermöchte. Wer an Geschwindigkeit denkt, denkt sicherlich an Weg und an Zeit; aber er stellt Weg und Zeit nicht etwa bloſs gleichsam nebeneinander vor, sondern in engster Verbindung, genauer, in einer Relation, vermöge welcher[1] sie sich zu einem Vorstellungsgebilde höherer Ordnung zusammenschlieſsen, zu einer derjenigen Komplexionen, für welche der von Ehrenfels entdeckte[2] Thatbestand der Inhaltsfundierung wesentlich ist. Geschwindigkeit, Dichte und vieles andere wird vom theoretisch Naiven gedacht vermöge fundierter Inhalte;[3] und was die mathematische Bearbeitung dieser Gedanken, die Übertragung derselben in die Formelsprache, zunächst leistet, ist nichts weiter, als die Präzisierung jener Gröſsenrelationen, die zwischen den fundierenden Gröſsen und der fundierten Gröſse vermöge der Natur der betreffenden Komplexion bestehen.

Lieſse sich nun freilich das am einzelnen Beispiele Dargethane auch auf alle übrigen Fälle übertragen, dann hätte dieses Ergebnis mindestens für den gegenwärtigen Zusammenhang ein Zuviel aufzuweisen. Wir hätten es da am Ende ausschlieſslich mit anschaulichen Gröſsen zu thun, indes unser gegenwärtiges Absehen doch auf die unanschaulichen Gröſsen gerichtet ist. Inzwischen ist weder anzunehmen, daſs das anschauliche Denken allen physikalischen Grundformeln durch entsprechende fundierte Inhalte voranzugehen oder auch nur zu folgen vermöchte, noch daſs dort, wo Anschaulichkeit innerhalb gewisser Grenzen zu erzielen ist, diese auch über alle

---

[1] Vergl. meine Ausführungen „Zur Psychologie der Komplexionen und Relationen“. *Diese Zeitschr.* Bd. II. S. 254.

[2] „Über Gestaltqualitäten“. *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1890. S. 249 ff.

[3] Ausgesprochen von A. Höfler in dem Vortrage über „Einige nähere und fernere Ziele für die Weiterbildung des physikalischen Unterrichtes am Gymnasium“ in der *Zeitschr. f. d. physik. u. chem. Unterr.* Jahrg. VIII. S. 125 f. — Vergl. auch desselben Autors Ausführungen über „Krümmungskontrast“. *Diese Zeitschr.* Bd. X. S. 106.

Grenzen hinaus zu bewahren wäre. Und zwar gilt dies nicht nur von den Grenzen gegen oben und gegen unten, sondern eventuell auch von Bestimmungen ganz anderer Art. Um z. B. nochmals an den Gedanken der Geschwindigkeit anzuknüpfen, so steht wohl aufser jedem Zweifel, dafs Bewegung in jenem eigentlichsten Sinne, dem gegenüber sich z. B. der Gedanke der Wellenbewegung als eine ganz unverkennbare Erweiterung darstellt, mehr ist als blofse Succession kontinuierlich ineinander übergehender Ortsbestimmungen, da ihr ja auch die Identität dessen wesentlich ist, das die verschiedenen Orte hintereinander einnimmt, das „sich bewegt". Diese Identität des zeitlich Verschiedenen ist wohl niemals anschaulich zu erfassen, und wo sie nicht mit in Betracht gezogen ist, kann man, streng genommen, höchstens von Scheinbewegung[1] sprechen. Insofern ist, streng genommen, auch nicht die Geschwindigkeit, sondern eine im eben bezeichneten Sinne zu nehmende „Scheingeschwindigkeit" eine anschaulich vorstellbare Gröfse. Ganz Analoges wäre vom Begriff der Dichte in jenem wohl wieder mit besonderem Rechte als „eigentlich" zu bezeichnenden Sinne zu sagen, der den jedenfalls unanschaulichen Massengedanken mit in sich fafst.

Bleibt so die Anschaulichkeit bereits Determinationen gegenüber zurück, welche die Sphäre des Alltagsdenkens eben erst, wenn überhaupt, überschreiten, so dürfen wir gegenüber der Gesamtheit der mathematisch-physikalischen Konzeptionen vollends keinen Irrtum besorgen, indem wir ihrer unter dem Gesichtspunkte der unanschaulichen Gröfsen gedenken. Zweierlei

[1] Einen wenigstens didaktisch sicher nicht wertlosen Fall solch anschaulicher Scheinbewegung erlebt man so ziemlich bei jeder Eisenbahnfahrt, wo die Telegraphendrähte neben der Bahntrace laufen. Namentlich, wenn man nicht unmittelbar am Fenster sitzt, gewinnt man da bekanntlich sehr oft den Eindruck einer bald langsameren, bald rascheren Auf- oder Abwärtsbewegung der Drähte, was bei dem Umstande, dafs der Eisenbahnzug sich relativ zu seiner ruhenden Umgebung doch nur horizontal bewegt, zunächst befremden könnte. Natürlich ist das Charakteristische der ganzen Erscheinung darin begründet, dafs unmerklich immer neue Stücke des Drahtes ins Gesichtsfeld treten, so dafs eben die oben betonte Identität in Wahrheit nicht vorliegt. Gerade ihrer Einfachheit halber verdient diese Erfahrung, wenn ich recht sehe, ins psychologische Laboratorium verpflanzt zu werden, was natürlich mit leichter Mühe zu bewerkstelligen ist. (Vergl. z. B. E. Mach, *„Leitfaden der Physik für Studierende"*. S. 91. Fig. 118, 3.)

jedoch möchte durch den Hinweis auf den Anteil des Anschaulichen an jenen Konzeptionen im Interesse richtiger Würdigung der letzteren geleistet sein. Ist es ein Fortschritt des unanschaulichen Denkens, die Grenzen zu überschreiten, die dem anschaulichen gesteckt sind, erkennt man zugleich das damit verbundene Aufgeben des Anschaulichkeitsvorzuges als Mangel, so bedeuten diese unanschaulichen Konzeptionen Aufgaben für anschauliches Vorstellen, die für ideal gesteigerte Fähigkeiten keineswegs unlösbar heiſsen dürften. Dann aber, und vor allem: mag man die Bedeutung dieser unanschaulichen Konzeptionen in jenen, man könnte sagen, psychologischen Idealen erblicken, denen sie gleichsam zustreben, oder, was dem Physiker sicherlich näher liegen wird, in den „eigenartigen Zuständen der Körper", die mit ihrer Hülfe erfaſst werden können, in keinem Falle wird man weiter noch Neigung haben, das Ganze über seine Teile, „den Wald vor lauter Bäumen" zu übersehen.

Man kann also allgemein von den unanschaulich vorgestellten Gröſsen der Physik, natürlich ebenso von analog gebildeten Konzeptionen anderer Wissenschaften, sagen: sie werden erfaſst nicht durch Zahlen oder Formeln, auch nicht durch die Vorstellung von Zahlen oder Formeln, sondern durch die Vorstellung eines Gegenstandes höherer Ordnung, an dem von Natur anschaulich vorstellbare (und meſsbare) Objekte niederer Ordung in solchen Relationen beteiligt sind, daſs die Gröſse des Gegenstandes höherer Ordnung in der durch die betreffende Formel ausgedrückten Weise mit den Gröſsen der Gegenstände niederer Ordnung variiert.[1] In diesem Sinne wäre z. B. mechanische Arbeit zu bestimmen als „etwas, das sich auf Weg und Spannung in der Weise aufbaut, daſs seine Gröſse durch das Produkt aus den Maſszahlen dieser beiden Bestandstücke gegeben ist". Über die Natur dieses „etwas" wäre durch so indirekte Charakteristik freilich wenig genug ausgemacht, — immerhin aber so viel, daſs die mechanische Arbeit nicht etwa dieses Produkt selbst ist.

Nachträglich mag nun aber der Überschätzung der Bedeutung der Zahl für die unanschaulichen Gröſsen auch noch

---

[1] Die fundamentale Bedeutung des sich hier aufdrängenden Begriffes der Ordnungshöhe bei Gegenständen (resp. Inhalten) darzulegen, muſs ich einer anderen Gelegenheit vorbehalten.

die Thatsache entgegengehalten sein, dafs es unanschauliche Gröfsen genug giebt, die sich als Zahlengröfsen einfach deshalb nicht auffassen lassen, weil sie einer zahlenmäfsigen Bestimmung, sei es zur Zeit, sei es überhaupt, unfähig sind. Nichts ist z. B. natürlicher, als einem Dinge bald mehr, bald weniger Wert zuzuschreiben, und von der so zweifellos vorliegenden Wertgröfse läfst sich zeigen, dafs sie eine höchst einfache Funktion zweier Variablen ist, der Stärke des Gefühls, das sich an das Wissen um die Existenz, und der Stärke des Gefühls, das sich an das Wissen um die Nicht-Existenz des betreffenden Dinges knüpft.[1] Aber wir sind gegenwärtig ganz aufser stande, die Gröfsen dieser Variablen durch Zahlenäquivalente auszudrücken; die Wertgröfse ist also unmöglich eine Zahlengröfse, indes die Unanschaulichkeit dem Wertgedanken gerade durch die gegensätzliche Natur der in denselben einbezogenen, untereinander unverträglichen Sachlagen garantiert ist.

Als Nebenergebnis unserer Erwägungen verdient vielleicht noch ausdrücklich bemerkt zu werden, dafs auf dem Gebiete der unanschaulichen Gröfsen die Definition, vielleicht könnte man allgemeiner sagen, die absichtliche Gedankenbildung bei weitem nicht unumschränkte Herrschaft hat. Ich habe gelegentlich[2] die Komplexionen in vorfindliche und erzeugbare unterschieden; es bleibe hier dahingestellt, ob den zwei so gebildeten Komplexionsklassen in jeder Hinsicht die Bedeutung von Grundklassen zukommt. Im gegenwärtigen Zusammenhange wenigstens scheint die Gegenüberstellung das Wesentliche zu treffen, und man kann sagen: es wäre unrichtig, an den Vorstellungen unanschaulicher Gröfsen alles für Kunstprodukt zu halten, und es steht zu vermuten, dafs auch hier, wie sonst, die Natur das Beste vorgegeben und der menschlichen Intelligenz, zunächst Kombinationsfähigkeit, weit weniger Anlafs, ja auch nur Gelegenheit zum freien Walten geboten hat, als man, vielleicht nicht ohne einen geheimen Zusatz von Selbstgefälligkeit, zu glauben geneigt wäre.

Es wäre sicher ein verdienstliches Unternehmen, dem Anteil

---

[1] Vergl. meine Ausführungen „Über Werthaltung und Wert“ im *Arch. f. systemat. Philos.* Bd. I. S. 327 ff. — als Nachtrag zu meinen *Psychologisch-ethischen Untersuchungen zur Wert-Theorie“*. Graz. 1894.

[2] „Phantasie-Vorstellung und Phantasie“ in der *Zeitschr. f. Philos. u. philos. Kritik.* 1889. Bd. 95. S. 175.

des sozusagen Natürlichen und Künstlichen in den unanschaulichen Gröſsengedanken mit ausreichender Genauigkeit analysierend nachzugehen; schon aus dem wenigen hier Beigebrachten erhellt, daſs dieser Anteil keineswegs in allen Fällen der gleiche ist. Allen scheint noch eine Eigentümlichkeit zuzugehören, die ich nicht unerwähnt lassen möchte, obwohl sie eher zu Ungunsten als zu Gunsten des hier doch zunächst betonten Momentes der „Natürlichkeit" gedeutet werden könnte. Ich meine den Umstand, daſs die unanschaulichen Gröſsen sich nicht direkt, sondern nur indirekt vergleichen lassen, genauer, daſs nur die indirekte Vergleichung zu Ergebnissen, zunächst evidenten Urteilen führt. Direkt müssen die Bestandstücke verglichen und aus der Natur der Funktion auf das Gröſsenverhältnis der Komplexion geschlossen werden. Davon macht wahrscheinlich auch die Geschwindigkeit keine Ausnahme: was an zwei Bewegungen direkt verglichen wird, möchten doch wohl allemal nur Orts- und Zeitbestimmungen sein.

§ 3. Teilbare und unteilbare Gröſsen.

Daſs im obigen auf einige, die unanschaulichen Gröſsen betreffende Probleme, obwohl zu deren Lösung kaum mehr als ein recht bescheidener Beitrag geliefert werden konnte, hingewiesen worden ist, geschah weit mehr um dieser Probleme selbst, als um ihrer Bedeutung für die Hauptuntersuchung willen, die ihrer Natur nach zunächst auf die anschaulichen Gröſsen angewiesen ist. Um so wichtiger ist für diese Untersuchung ein anderer Gegensatz innerhalb der verschiedenen Gröſsenklassen, und es darf vom Standpunkte eines befriedigenden Fortganges dieser Untersuchungen jedenfalls als willkommener Vorteil begrüſst werden, daſs bei diesem Gegensatze ernstliche Schwierigkeiten vorerst nicht zu überwinden sind.

Nichts ist gewöhnlicher, als von der Teilbarkeit gewisser Gröſsen zu sprechen: es handelt sich dabei nicht nur darum, daſs man da Komplexionen vor sich hat, an denen sich überhaupt Bestandstücke unterscheiden lassen, die dann als Teile dem Ganzen gegenüberstehen, sondern auch noch insbesondere darum, daſs die so gewonnenen Teile dem Ganzen gleichartig sind, daſs sie Gröſsen sind wie das Ganze und zwar, wie man die bei den Zahlen gebräuchliche Ausdrucksweise übertragend oder erweiternd sagen könnte, gleichbenannte Gröſsen. Räumliche und zeitliche Strecken bieten die geläufigsten und zugleich durchaus einwurfsfreie Beispiele: jeder Raum „besteht“ aus Räumen, jede Zeit aus Zeiten, womit natürlich keineswegs gesagt sein mufs, dafs die gröfseren Räume und Zeiten erst irgendwie aus den kleineren hervorgegangen, durch explizite Zusammensetzung entstanden anzunehmen sind. Jede Strecke hat Strecken zu Bestandstücken, und diese wieder Strecken u. s. f. ins Unendliche; von dem aber, was man namentlich aufserhalb der Theorie als Teile eines Zusammengesetzten anzuerkennen pflegt, unterscheiden sie sich charakteristisch dadurch, dafs sie, wie man kurz sagen kann, implizite Bestandstücke sind.

Weit minder populär, übrigens gleichfalls nichts weniger als neu ist nun aber die Thatsache, dafs es auch Gröfsen giebt, bei denen von einer Teilbarkeit im obigen Sinne in keiner Weise die Rede sein kann. Es hätte keinen Sinn, von einem lauten Geräusch zu sagen, es enthalte ein leises von übrigens genau der nämlichen Qualität als Teil in sich, falls man dabei nicht etwa sehr ungenauerweise die physischen Erreger des Geräusches im Auge hat. Das Gleiche gilt von der stärkeren Wärme oder Kälte gegenüber der schwächeren, vom gröfseren Schmerz gegenüber dem kleineren u. s. f. Man hat auf Grund dessen Thatbeständen dieser Art geradezu den Gröfsencharakter absprechen wollen; [1] haben wir aber einmal die Fähigkeit, gegen die Null zu limitieren, als Gröfsenkriterium anerkannt, so ist an den Ausschlufs solcher Fälle aus dem Gröfsengebiete weiter gar nicht zu denken. In der That entspricht es durchaus dem Herkommen, sie als intensive Gröfsen den erstberührten als extensiven Gröfsen gegenüberzustellen. Es ist aber mindestens sehr fraglich, ob sich alles, was Gröfse ist, zwanglos unter die beiden Titel des Extensiven und Intensiven einordnen läfst; dagegen hat man die Gewähr einer vollständigen Disjunktion, wenn man der Klasse der teilbaren Gröfsen die der unteilbaren gegenüberstellt, [2] die beiden Ausdrücke bieten wenigstens für unsere nächsten Zwecke zugleich den Vorteil, den für sie fundamentalen Umstand ausdrücklich namhaft zu machen.

---

[1] So Exner und Boas, vergl. oben S. 82. Anm. 1.

[2] Vergl. auch Ehrenfels in der *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1891. S. 301, und bereits J. v. Kries im Jahrgang 1882 *derselben Zeitschrift.* S. 278 f.

Wie wenig die Gegenüberstellung des Extensiven und Intensiven, solange man diese Begriffe nicht erweitert, die Gesamtheit der (anschaulichen) Gröſsen in sich faſst, beweisen die im Vorhergehenden so oft genannten Zahlen, von denen hier übrigens vorerst natürlich nur die wenigen in Betracht kommen, die dem direkten, anschaulichen Vorstellen zugänglich sind. Dagegen wird man nicht Anstand nehmen, die Zahlen zu den teilbaren Gröſsen zu rechnen mit Ausnahme der Einheit, die von Natur unteilbar ist. Gegenüber den Streckengröſsen verdient Beachtung, daſs man es hier mindestens nicht ausschlieſslich mit impliziten Bestandstücken zu thun hat: in der Zahlengröſse Fünf findet sich die Zahlengröſse Drei als implizites Bestandstück, indes die fünf Einheiten durchaus den Charakter expliziter Bestandstücke an sich tragen.

Sehr wichtig ist die Frage, ob Verschiedenheiten oder Distanzen zu den teilbaren oder zu den unteilbaren Gröſsen gehören; doch scheint mir die Beantwortung ohne Schwierigkeit und ohne den geringsten Zweifel möglich. Man muſs zu diesem Ende nur den Distanzgedanken klar erfassen und sich namentlich davor hüten, den Streckengedanken unvermerkt an dessen Stelle treten zu lassen, was insbesondere bei Distanzen zwischen Raum- oder Zeitpunkten eine sehr naheliegende Gefahr ist.[1] Dennoch wird ja sicher niemand darüber im ungewissen sein, daſs der Gedanke an die Verschiedenheit zweier Punkte im Raume etwas anderes ist, als der Gedanke an die zwischenliegende Strecke, mag eines durch das andere auch noch so eindeutig bestimmt sein. Hält man also Distanz und Strecke wohl auseinander, dann erkennt man mit unmittelbarer Evidenz, daſs eine Verschiedenheit, eine Distanz in Verschiedenheiten teilen ganz denselben Ungedanken bedeutet, als die Tonstärke in Teile zerlegen. Distanz ist eine unteilbare Gröſse, — ein Satz, der übrigens wahrscheinlich auch daraus zu deduzieren wäre, daſs Distanz eine Relation ist. Eine Relation kann nämlich zu allerlei Komplexionen Bestandstück sein, aber man wird so gebildete Komplexionen schwerlich je im eigentlichen

[1] Vergl. auch K. Zindler, „Beiträge zur Theorie der mathematischen Erkenntnis“ *Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien,* Philos.-hist. Kl. Bd. CXVIII. 1889. S. 4 ff. des Sonderabdruckes; dazu die Bemerkungen A. Höflers in der Anzeige der genannten Schrift in Jahrgang 1890 der *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* S. 497 f.

Sinne noch Relationen nennen können; vielmehr scheinen Relationen als solche einfach sein zu müssen. Doch soll auf dieses Prinzip hier weiter nicht Bezug genommen werden: die Unteilbarkeit der Distanz verrät sich ohne weiteres von selbst. Übrigens giebt es, soviel mir bekannt, aufser der Verschiedenheit und Ähnlichkeit sonst keine steigerungsfähige, also unter die Gröfsen gehörige Relation.

Fragt man, wie sich die unanschaulichen Gröfsen zum Gegensatze von Teilbarkeit und Unteilbarkeit stellen, so erhellt sofort, dafs hier den unteilbaren durchaus das Übergewicht zufällt; Kries fafst die meisten derselben ohne weiteres unter dem Namen „Intensitäten“ zusammen.[1] Doch giebt es hier jedenfalls auch Teilbares, wie das Beispiel der Masse im Sinne der Mechanik oder das sonst irgend einer „Menge“ beweist. Dafs hierhergehörige Relationen namhaft zu machen sind, möchte ich auf Grund des eben berührten Prinzipes für sehr unwahrscheinlich halten. Auch in dieser Richtung ist das Gebiet der unanschaulichen Gröfsen erst eingehenden Untersuchungen zu unterziehen, die uns aber vom eigentlichen Ziele dieser Darlegungen allzusehr abführen würden.

Zweiter Abschnitt.

Über Vergleichung, insbesondere Gröfsenvergleichung.

§ 4. Wesen des Vergleichens.

Der Ausdruck „Vergleichen“ hat mit vielen anderen Worten, die zunächst dem Sprachschatze des täglichen Lebens zugehören, die Eigenschaft gemein, nicht völlig eindeutig zu sein. Wer eine Bestellung nach Muster gemacht hat, „vergleicht“ die erhaltene Ware mit dem Muster, ob sie diesem auch wirklich entspreche; und wenn er zu dem Ergebnis kommt, dafs die erwartete Übereinstimmung nicht bestehe, so wird doch niemand daran denken, auf Grund dieses Ergebnisses ihm abstreiten zu wollen, dafs er verglichen habe. Gleichwohl hört

[1] *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1882. S. 273.

man nicht selten die Wendung, zwei Dinge seien so verschieden, daſs sie sich gar nicht „vergleichen“ lassen; näher präzisiert man dann auch wohl die Bedingung für das Vergleichen durch die Forderung eines angemessenen „tertium comparationis“. Wieder in anderen Fällen stellt man dem „Vergleichen“ das Unterscheiden geradezu als Gegensatz zur Seite, was doch wohl nur so zu verstehen ist, daſs da der Ausdruck „Vergleichen“ einfach im Sinne von „gleich finden“ oder wenigstens „ähnlich finden“ gemeint sei. Solchen Thatsachen gegenüber empfiehlt es sich, dem theoretischen Gebrauche des Wortes „Vergleichen“ eine Feststellung vorausgehen zu lassen, wie dasselbe im Folgenden verstanden sein will.

Alles Thun ist auf ein Ziel gerichtet, dies Wort allgemein (oder ungenau) genug gefaſst, daſs eine Begehrung seitens dessen, der „thut“, nicht impliziert ist; alles Thun besteht im Annähern an sein Ziel[1] und wird zunächst durch nichts natürlicher charakterisiert, als durch dieses Ziel, mag es übrigens erreicht werden oder nicht. Auch das Vergleichen ist ein Thun; das Ziel aber, auf das es gerichtet und durch das es völlig natürlich und ausreichend bestimmt wird, ist ein Urteil über Gleichheit oder Verschiedenheit, Ähnlichkeit oder Unähnlichkeit dessen, was eben „verglichen“ wird. Mit Rücksicht hierauf ist es angemessen, die genannten Relationen unter dem Klassennamen „Vergleichungsrelation“ [2] zu vereinigen; und denkt man sich fürs erste den Namen wirklich nur durch die obige Aufzählung definiert, so kann man, höchstens den Schein einer Zirkelbestimmung auf sich nehmend, auch sagen: Vergleichen ist die Thätigkeit, welche auf die Fällung von Vergleichungsrelationsurteilen, kürzer von Vergleichungsurteilen, gerichtet ist.

Immerhin ist aber noch eine wichtige Einschränkung erforderlich. Wer in der Schule „gelernt“ hat, der M. sei ein hervorragenderer Staatsmann gewesen, als der N., oder das Kunstwerk x nehme einen höheren Rang ein, als das Kunstwerk y, der fällt eventuell ebenfalls Vergleichungsurteile; und

---

[1] Vergl. meine Bemerkungen in Bd. VI *dieser Zeitschr.* S. 449. Dazu die wichtigen Ergänzungen Höflers in Bd. VIII *dieser Zeitschr.* S. 74f. (S. 31f. des Sonderabdruckes.)

[2] Vergl. meine Ausführungen „Zur Relationstheorie“. (*Hume-Studien*, II.) S. 76ff.

wenn er sich bemüht, bei Gelegenheit sein Schulwissen wieder hervorzuholen, so liegt auch wohl eine Thätigkeit vor, die auf das Vergleichungsurteil gerichtet ist: dennoch sagt niemand in diesem Falle, er habe „verglichen“. Nicht jedes Vergleichungsurteil kann eben als charakteristisches Ziel des Vergleichens betrachtet werden, sondern nur das evidente Vergleichungsurteil, und auch dieses nur, sofern dessen Evidenz wesentlich auf die zu beurteilenden Objekte gegründet ist: dem Vergleichungsurteil auf Grund der Erinnerung an früheres Vergleichen mangelt, wenn ich recht sehe,[1] nicht jede Evidenz; wer sich aber bloſs erinnert, mit Erfolg verglichen zu haben, hat nicht neuerdings verglichen.

Sehen wir im Folgenden von Evidenzfällen dieser letzten Art ab, so darf wohl durch umfassendste Empirie beglaubigt gelten, daſs kein evidentes Vergleichungsurteil ohne Vergleichung zu stande kommt. Dagegen erhellt bereits aus dem oben Gesagten, daſs keineswegs auch umgekehrt jede Vergleichung ein evidentes Urteil als Resultat verlangt; sie kann eben auch ergebnislos verlaufen. Vergleichen ist eben nicht soviel als Urteilen, am wenigsten Urteilen in einer bestimmten Richtung; „Vergleichen“ als Gegensatz zu „Unterscheiden“ ist durch unsere Bestimmung sonach ausgeschlossen.

Weiter lehrt aber die Erfahrung, daſs, wenn auch ergebnisloses Vergleichen den Anspruch hat, für Vergleichen zu gelten, es schlechterdings nichts Unvergleichbares innerhalb des Erfaſsbaren giebt, nichts, an dem nicht mindestens der Versuch gemacht werden könnte, zu einem Vergleichungsurteile darüber zu gelangen. Wer also von Dingen redet, die sich aus diesem oder jenem Grunde nicht vergleichen lassen, vermiſst an ihnen nur ein Vergleichen mit Ergebnis, vielleicht sogar (indem er sich geradezu auf allzugroſse Verschiedenheit, die doch selbst durch Vergleichung ermittelt sein muſs, beruft,) nichts als ein Vergleichen mit ausreichend wichtigem Ergebnis. Auch diese Bedeutung des Wortes Vergleichung ist durch obige Bestimmung ausgeschlossen, mag uns aber veranlassen, den Bedingungen erfolgreichen Vergleichens einige Erwägungen zu widmen.

---

[1] „Zur erkenntnis-theoretischen Würdigung des Gedächtnisses.“ *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1886. S. 30ff.

§ 5. Unmittelbares und mittelbares Vergleichen. Vergleichungsbedingungen.

Es empfiehlt sich, hierbei des Umstandes eingedenk zu sein, dafs die Thätigkeit des Vergleichens sich wesentlich anders anläfst, wenn das günstigen Falles resultierende Vergleichungsurteil unmittelbar evident und wenn es nur mittelbar evident ist. Ich will mit Rücksicht auf diese Verschiedenheit des eventuellen Erfolges bezw. von unmittelbarer und mittelbarer Vergleichung reden. Sieht man in den Strafsen der Stadt etwa Gasflammen, elektrisches Glühlicht und Petroleumflammen ausreichend nahe nebeneinander, so kann man sie „unmittelbar vergleichen"; nicht so die Länge des Rheins mit der der Donau. Dennoch wird man demjenigen, der an der Hand der Karte mittelst irgend eines mehr oder weniger geeigneten Verfahrens in dieser Sache zu einem Urteil zu gelangen sucht, nicht wohl absprechen, dafs er die beiden Ströme auf ihre Länge vergleiche; ich nenne dieses Vergleichen ein mittelbares, und man sieht sogleich, wie einem im wesentlichen immer wiederkehrenden Typus des unmittelbaren Vergleichens eine grofse Mannigfaltigkeit von Verfahrungsweisen gegenübersteht, die mit gleichem Rechte als Fälle mittelbaren Vergleichens zu betrachten sind.

Dafs nun das unmittelbare Vergleichen an andere Bedingungen gebunden, von anderen Erleichterungen und Erschwerungen abhängig ist als das mittelbare Vergleichen, erhellt schon aus der einfachen Erwägung, dafs das mittelbare Vergleichen normalerweise keine andere Aufgabe haben kann, als dort einzutreten, wo dem unmittelbaren Vergleichen der Erfolgt versagt ist. Die Vielgestaltigkeit des mittelbaren Vergleichens aber läfst sogleich vermuten, dafs die Feststellung der Bedingungen, Erleichterungen und Erschwerungen für die unmittelbare Vergleichung die bei weitem leichter lösbare Aufgabe ausmachen wird. Dennoch und trotz ihrer augenscheinlichen Bedeutsamkeit möchte es uns zu weit führen, derselben eine eingehendere Behandlung zu widmen; ich mufs mich vielmehr auf einige Bemerkungen beschränken, die mir für den Fortgang der hier mitzuteilenden Untersuchungen wesentlich scheinen.

Da alles unmittelbare Vergleichen eine psychische, näher eine intellektuelle Thätigkeit ist, die nur an Vorstellungsinhalten direkt angreifen kann, so ist es selbstverständlich, dafs streng genommen nur Vorgestelltes sich unmittelbar vergleichen läfst,[1] und nichts ist natürlicher, als dafs es zunächst von der Beschaffenheit der betreffenden Inhalte abhängen wird, ob die unmittelbare Vergleichung Erfolg hat oder nicht. Ohne allen Zweifel sind zwei Gegenstände, sie mögen wie immer beschaffen sein, entweder gleich oder verschieden; eine unbegrenzt gesteigert gedachte Erkenntniskraft müfste dies auch unmittelbar festzustellen im stande sein. Nicht so die begrenzte, an Bedingungen geknüpfte Leistungsfähigkeit des Intellektes, mit dem wir es thatsächlich zu thun haben; vielmehr versagt dieser z. B. unanschaulich vorgestellten Gegenständen gegenüber ganz regelmäfsig seinen Dienst (ich kann die Stärken oder Spannungen zweier galvanischen Ströme nicht unmittelbar vergleichen), — aber auch anschaulichen Gegenständen höherer Ordnung gegenüber, wenn das oben über Masse, Dichte, Geschwindigkeit u. dergl. Gesagte im Rechte ist.

Ferner hängt der Erfolg der unmittelbaren Vergleichung sichtlich von der Umgebung ab, in der das zu Vergleichende auftritt: man könnte hierher bereits den Umstand rechnen, dafs jedes der zu vergleichenden Objekte einen Teil der näheren oder ferneren Umgebung des anderen ausmachen wird. Vor allem aber habe ich die Gleichartigkeit dieser Umgebung im Auge, genauer die Thatsache, dafs, was als Bestandstück einer Komplexion gegeben ist — und was wäre nicht als ein solches gegeben? — um so leichter mit dem Bestandstück einer anderen Komplexion vergleichbar ist, je gröfsere Übereinstimmung zwischen den beiden Komplexionen sonst besteht. Zwei Flächen vergleichen sich leichter ihrer Gröfse nach, wenn sie gleich, als wenn sie ungleich gefärbt sind, zwei Farben leichter, wenn sie an Flächen von gleicher Gestalt und Ausdehnung gegeben sind, ebenso zwei Tonstärken leichter an gleich hohen, als an ungleich hohen Tönen u. s. f., — die Beispiele zeigen zugleich bereits, dafs es in betreff des Grades dieser Erleichterung oder Erschwerung noch sehr darauf ankommt, was für Bestandstücke

---

[1] Inwieweit darin zugleich ein Wirkliches erfafst wird, wie etwa in den obigen Beispielen, ist zunächst unwesentlich.

und was für Komplexionen vorliegen. Besonders charakteristisch und wichtig scheinen mir hier die Beziehungen zwischen Gestalt und Ausdehnung zu sein. Gerade Linien lassen sich in betreff ihrer Länge mit geraden Linien unter bester Aussicht auf Erfolg unmittelbar vergleichen (von der Erschwerung durch Verschiedenheit der Richtungen sei hier abgesehen), mit krummen dagegen streng genommen, d. h. wenn man alle Hülfsmittel ausschliefst, wahrscheinlich gar nicht. Gleiches gilt von Flächen- oder Körperinhalten bei Verschiedenheit der betreffenden Flächen- oder Körpergestalten; dafs man gelegentlich auf den ersten Blick etwa ein Polygon für kleiner erklärt als einen Kreis, in den sich augenscheinlich jenes ohne Mühe hineinzeichnen liefse, ist schon keine unmittelbare Vergleichung mehr.

§ 6. „Festsetzungen" über Gleichheit und Verschiedenheit.

Weit entfernt von der Vermutung, hiermit alles Wesentliche namhaft gemacht zu haben, erachte ich es gleichwohl für kein Wagnis, einem Umstande, auf den J. v. Kries viel Gewicht legt,[1] den Rang einer Bedingung unmittelbaren (oder auch mittelbaren) Vergleichens abzusprechen. Ich habe die von Kries geforderte definitorische, wohl gar „willkürlich" festzusetzende Bestimmung darüber im Auge, was mit Gleich oder Verschieden im betreffenden Falle „gemeint" sei. Denn mit Gleich und Verschieden ist unter allen Umständen ein und dasselbe,[2] und zwar etwas so Wohlbekanntes, zugleich so Klares und Bestimmtes gemeint, dafs eine Definition, wo sie etwa möglich sein sollte, zum mindesten für die Praxis des Vergleichens nichts zu leisten fände, von Willkürlichkeit in der Festsetzung aber einem so eindeutig Vorgegebenen gegenüber vollends nicht die Rede sein kann. In der That kann ich keinen der Fälle, auf die sich Kries beruft, so verstehen, als ob dabei die Gleichheit resp. Verschiedenheit selbst irgendwie einer Definition oder Determination unterzogen würde. Aufserdem handelt es sich dabei in der Regel um völlig gesetzmäfsige Thatbestände, die für willkürliche Bestimmungen nicht im geringsten Raum lassen, — Thatbestände, deren wesentliche

---

[1] *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1882. S. 259 ff.
[2] Vergl. übrigens unten § 8.

Leistung darin liegt, daſs sie der mittelbaren Vergleichung dort einen Erfolg sichern, wo dieser bei unmittelbarer Vergleichung ausgeblieben wäre.

Man erwäge etwa den Fall der Flächeninhalte.[1] Es mag ja wirklich auf den ersten Blick einer Erklärung bedürftig scheinen, was es heiſsen solle, ein bestimmtes Dreieck sei einem bestimmten Parallelogramme inhaltsgleich. Wenn man aber dem Fragenden etwa beweisen kann, die Figuren, auf deren Vergleichung es ankommt, seien beide aus demselben Parallelogramme hervorgegangen, das Dreieck etwa durch Ziehen einer Diagonale, das Viereck, indem die Halbierungspunkte zweier parallelen Seiten des vorgegebenen Parallelogramms verbunden wurden, wird dann an der Behauptung der Gleichheit der beiden so gewonnenen Flächeninhalte noch Anstoſs genommen werden, und wenn diese Gleichheit jetzt keiner Erklärung bedarf, hat sie vorher einer solchen bedurft? Wer weiſs, was ein Flächeninhalt ist und was gleich ist, muſs auch wissen, was ein gleicher Flächeninhalt ist; und sollte er die Gleichheit so wenig definieren können, als er den Flächeninhalt definieren kann,[2] so thut dies der Zuverlässigkeit dieses Wissens keinen Eintrag. „More mathematico“ ist der Appell an die Definition sicherlich gedacht; wie wenig dieses mathematische Herkommen aber vor Unnatürlichkeiten schützt, beleuchtet nichts deutlicher als der gleichfalls im Sinne dieses Herkommens bereits mehr als einmal gemachte und vielfach acceptierte Versuch, in den einfachen Gedanken der Zahlengleichheit den so künstlichen der Einheitenzuordnung hineinzuinterpretieren. Wenn man also thatsächlich die Vergleichung der in Rede stehenden Flächeninhalte etwa in der Weise vornimmt, daſs man sie nach bekannten Formeln aus Grundlinie und Höhe „berechnet“ und dann die erhaltenen Maſszahlen vergleicht, so impliziert dies keineswegs die Voraussetzung, daſs mit Gleichheit von Flächeninhalten etwas anderes „gemeint“ sei, als mit der Gleichheit bei Körperinhalten, noch weniger bedeutet es eine nähere Bestimmung darüber, was

---

[1] Vergl. Kries a. a. O. S. 259.

[2] Über Undefinierbares im Vorstellungsschatze der Mathematik vergl. auch Zindler, „Beiträge zur Theorie der mathematischen Erkenntnis.“ *Sitzgs.-Ber. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien.* Philos.-hist. Kl. Bd. CXVIII. S. 3 des Separatabdruckes.

mit Flächengleichheit gemeint sei. Wir haben vielmehr, soviel ich sehe, nichts als ein Verfahren vor uns, das zu einem evidenten Vergleichungsurteil dort führt, wo ein solches ohne Anwendung dieses Verfahrens vermöge der Natur des zu Vergleichenden ausgeblieben wäre.

Wie steht es nun aber dort, wo v. KRIES nicht nur eine „Festsetzung" in betreff des Sinnes der Gleichheit, sondern geradezu eine „willkürliche Festsetzung" in Anspruch nimmt? Er beleuchtet seine Forderung durch das Beispiel der Massenvergleichung bei Verschiedenartigkeit der Substanzen. „Was ... gemeint sei," führt er aus,[1] „wenn wir die Masse des Goldklumpens *A* für derjenigen des Kupferklumpens *B* gleich erklären, das ist gar nicht selbstverständlich. Es gewinnt vielmehr erst einen Sinn durch die Festsetzung, dafs als Einheit der Masse einer jeden Substanz dasjenige Quantum betrachtet werden soll, welches mit einem bestimmten Quantum einer bestimmten Substanz (etwa 1 ccm Wasser beim Maximum seiner Dichtigkeit) gleiches Gewicht hat." Diese Festsetzung ist aber eine willkürliche, denn es „steht logisch durchaus nichts irgend einer anderen Festsetzung entgegen, z. B. der, dafs jene Quanta aller Substanzen als gleich betrachtet werden sollen, welche durch die gleiche Wärmemenge von 0^0 auf 1^0 C. erwärmt werden". Nun verkennt unser Autor jedoch keineswegs, dafs es sich bei dem thatsächlich allenthalben acceptierten Vorgehen um eine „Festsetzung" handelt, „welche in Anlehnung an gewisse empirisch konstatierte Thatsachen möglichst zweckmäfsig getroffen ist".[2] Wie viel bleibt demgegenüber von der „Willkürlichkeit" noch übrig? Wer möchte dem Gravitationsgesetz deshalb Willkürlichkeit nachsagen, weil „logisch", d. h. in diesem Falle zugleich ohne Rücksicht auf die Empirie, nichts im Wege stände, statt des Produktes aus den Massen den Quotienten, statt des Quadrates der Distanz den Kubus derselben in die Formel zu setzen? Vor allem wichtig scheint mir aber, dafs, was in unserem Falle an „Festsetzung", sei es in quantitativer, sei es in qualitativer Richtung vorliegen mag, die Masseneinheit, sicher aber nicht die Massengleichheit betrifft. Ich glaube, auch in dieser Sache KRIES selbst zum

---

[1] A. a. O. S. 260 f.

[2] A. a. O. S. 262.

Zeugen anrufen zu dürfen. Unter den „empirischen Gesetzen“, um deren willen „die übliche Festsetzung bei weitem die einfachste und zweckmäfsigste ist“, macht er als erstes „die Proportionalität“ geltend, „welche zwischen dem Wachstum der Gewichte und der Massen besteht“.[1] Wie könnte ein Gesetz über Proportionalität konstatiert, wie könnte es auch nur ausgedacht werden, solange der Gedanke der Massengleichheit, resp. -verschiedenheit gleichsam noch unvollendet wäre?

An dem einfachen Beispiele der Masse dürfte wohl auch klar geworden sein, was ich den komplizierteren Beispielen von „kombinierten Einheiten“[2] entgegenzuhalten hätte, auf die übrigens bei Besprechung des Messens noch einmal zurückzukommen sein wird. „Weder die Einheit, noch die Dimension irgend einer physikalischen Gröfse,“ sagt Kries gelegentlich,[3] „ergeben sich von selbst; beide bedürfen vielmehr einer willkürlichen (konventionellen) Festsetzung, welche erst auf Grund von Erfahrungen in zweckmäfsiger Weise geschehen kann.“ Man kann diesem Satze im wesentlichen zustimmen und die Wichtigkeit, ja Unentbehrlichkeit dieser Festsetzungen für die mittelbare Vergleichung rückhaltslos anerkennen, ohne einzuräumen, dafs dabei aufser an den Einheiten und Dimensionen auch noch an der Gleichheit der betreffenden Gröfsen auch nur das Mindeste festgestellt worden oder auch nur feststellbar sei.

Nicht überflüssig möchte es dagegen sein, hier noch auch kurz des Falles der Temperaturvergleichung zu gedenken, der zunächst die hier bekämpfte Position in besondes auffallender Weise zu stützen scheint. „Die Grade des Quecksilberthermometers“, bemerkt Kries,[4] „sind, am Luftthermometer gemessen, nicht gleich. . . . . Selbstverständlich würde es nun keinen Sinn haben, darüber zu streiten, ob das Quecksilber oder das Platin oder die Luft sich proportional ‚der Temperatur‘ ausdehnt. . . .“. Aber es hätte wahrscheinlich auch keinen Sinn, darüber zu streiten, ob das neue Universitätsgebäude in Graz aus x oder aus $x+1$ Stück Ziegeln erbaut ist, und zwar nicht etwa deshalb, weil eine diesbezügliche Behauptung „keinen Sinn“ hätte, sondern darum, weil den Wahrheitsbeweis für

---

[1] A. a. O. S. 261.
[2] A. a. O. S. 262 ff.
[3] A. a. O. S. 264.
[4] A. a. O. S. 267.

dieselbe zu erbringen schwerlich jemand geneigt oder im stande sein wird. Näher handelt es sich bei dem anscheinenden Paradoxon in betreff der Temperaturmessung nicht um Gleichheit der Temperaturen, sondern, wie hier, Späterem vorgreifend, kurz gesagt werden darf, um Gleichheit von Temperaturverschiedenheiten. Sobald man nun den Wärmezustand eines Körpers[1] von den Begleit- und Folgethatsachen dieses Zustandes zu unterscheiden sich für berechtigt hält, hat die Frage, ob gleiche Veränderungen jenes Wärmezustandes mit gleichen Veränderungen in der Reihe dieser oder jener Folgethatsachen Hand in Hand gehen, einen völlig klaren Sinn, mag man die Frage übrigens zu beantworten im stande sein oder nicht. Dagegen schiene mir die Behauptung, dafs die nämlichen beiden Veränderungen mit gleich gutem Rechte als gleich, wie als ungleich betrachtet werden dürften,[2] nur in dem einzigen Falle acceptierbar, dafs zu der einen Behauptung so wenig Recht vorliegt, als zu der anderen.

Ein Fall wirklich „willkürlicher Festsetzung“ würde meines Erachtens vorliegen, so fern man „zwei Lichtintensitäten als gleich“ betrachtete, „wenn sie unserem Auge gleich hell erscheinen“:[3] die Willkürlichkeit tritt in der Möglichkeit zu Tage, durch Ver-n-fachung der bezüglichen lebendigen Kräfte Intensitätenzu erhalten, die dem Auge nicht gleich erscheinen. Aber diese Inkonvenienz läfst sich dann nicht durch eine weitere

---

[1] Vergl. z. B. Mach, *Leitf. d. Phys. f. Stud.* 1891. S. 157.

[2] Die dieser Behauptung zu Grunde liegende Auffassung hat A. Höfler neuerlich die „nominalistische“ genannt (*Vierteljahresber. d. Wien. Vereins z. Förd. d. physik. u. chem. Unterr.* Jahrg. I. 1. Heft. S. 51). — Man wird ihr eine wenigstens relative Berechtigung dem „Realismus“ gegenüber nicht absprechen können, der in der folgenden, in Sachen psychischer Messung gegebenen Anweisung zur „Konstruktion des Thermometers“ zu Tage tritt: „Man messe seinerseits die Wärme an einer Einheit ihrer Art, also an einer Wärmeeinheit, desgleichen das Volumen des Quecksilbers an der Volumeneinheit. . . . . . In der That hat man auf diese Weise gefunden, dafs zwischen der Wärmemenge und der entsprechenden Ausdehnung des Quecksilbers eine konstante Beziehung besteht, nämlich die der Proportionalität. . . . .“ (A. Köhler, „Über die hauptsächlichsten Versuche einer mathematischen Formulierung des psychophysischen Gesetzes von Weber“ in *Wundts Philos. Stud.* Bd. III. S. 575.) Vergl. übrigens unten § 15.

[3] v. Kries a. a. O. S. 269.

„willkürliche Festsetzung“ beseitigen;[1] die Konsequenz beweist vielmehr, daſs es eben unberechtigt und unstatthaft ist, auf Grund' des bloſsen Gleich-erscheinens ein Gleich-sein anzunehmen, geschweige ex definitione aus dem Gleich-erscheinen ein Gleich-sein zu machen.[2]

§ 7. Spezielles über Gröſsenvergleichung.

Dem im Bisherigen vertretenen Prinzipe der von Natur unbeschränkten und darum nicht erst durch gleichviel in welcher Weise zu treffende Bestimmungen gewissermaſsen erst zu ermöglichenden Geltung des Gegensatzes von Gleich und Ungleich steht nun aber doch eine Gruppe von Thatsachen gegenüber, die insofern für die oben bekämpfte Position noch eine Art Stütze abzugeben scheinen und sowohl deshalb, als um ihrer sonstigen Bedeutsamkeit willen hier noch zur Sprache kommen müssen. Den Knall eines Kanonenschusses stärker finden als die Helligkeit eines elektrischen Bogenlichtes, wäre ebenso absurd, als ihn weniger stark oder gleich stark finden. Es wäre nicht besser, wenn einer eine Wegstrecke mit einer Zeitstrecke, oder die Höhe der in einem Zimmer herrschenden Temperatur mit der Stärke eines den Raum durchdringenden Wohlgeruches „vergleichen“ wollte.[3] In solchen Fällen scheint auch der Unbefangenste das „Vergleichen“, d. h. hier das Gleich-finden wie das Ungleich-finden nicht anders als für sinnlos erklären zu können. Wie leicht zu ersehen, lassen sich Beispiele hierfür in groſser Mannigfaltigkeit zusammenstellen; das eine aber haben alle gemein, daſs das, zwischen dem die Vergleichung hier statthaben sollte und augenscheinlich nicht statthaben kann, jedesmal G r ö ſ s e n sind. Wir gelangen damit auch in betreff des Vergleichens auf das die gegenwärtigen Untersuchungen vor allem betreffende Gebiet und haben uns nunmehr ganz ausdrücklich mit den Gröſsenvergleichungen zu beschäftigen, nachdem wir im Vorhergehenden das Gebiet derselben bereits gelegentlich in Beispielen gestreift haben.

Gröſsen vergleichen sich im allgemeinen nicht anders als andere Objekte; dagegen fällt in betreff der Ergebnisse

[1] Gegen Kries a. a. O. S. 270.

[2] Vergl. übrigens unten § 9.

[3] Scheinausnahmen berührt Kries a. a. O. S. 291 ff.

der Gröſsenvergleichung eine zunächst terminologische Eigentümlichkeit ins Auge. Wer die Gröſsen A und B miteinander vergleicht, wird, wenn er nicht Gleichheit gefunden hat, das Resultat doch nicht leicht in der Form ausdrücken: „A ist von B verschieden"; er wird vielmehr normalerweise etwa sagen: „A ist gröſser" oder „B ist kleiner". Ich glaube nicht, daſs man diesen Ausdrücken einen anderen Sinn beimessen kann als den, etwas näheres über die Stellung des A und B auf jener Linie anzugeben, die sie beide in der, wie wir sahen, für alle Gröſsen charakteristischen Weise[1] mit der Null verbindet. Es ist also eine Art Lage- oder Richtungsmoment, das hier an dem Verschiedenheitsgedanken hervortritt. Inwieweit die Verschiedenheit auch in anderen Fällen einer analogen Determination zugänglich ist, kann hier unerwogen bleiben; unter allen Umständen ist es ganz wohl begreiflich, daſs der Richtungsgedanke gerade da zunächst zur Geltung kommt, wo das (gegen die Null) Gerichtet-sein die Sachlage in besonderer Weise charakterisiert.

Es ist ferner unmittelbar ersichtlich, daſs die Wege, auf denen Gröſsen verschiedener Klassen sich der Null nähern oder von ihr entfernen können, keineswegs zusammenfallen. Raumgröſsen, Zeitgröſsen, die verschiedenen „Intensitäten" u. s. f., sie alle gehören je einer Geraden an, die, gehörig verlängert, die Null erreicht: aber diese Geraden fallen sonst in keinem Punkte als etwa höchstens[2] im Nullpunkte zusammen; jede hat eine andere Richtung. Die Null stellt sich sonach als Element einer mindestens zwei-, vielleicht aber auch drei- oder noch mehr-dimensionalen Mannigfaltigkeit dar, und mir scheint dieser Sachverhalt geeignet, einer auf das Verhältnis von Qualität und Gröſse gerichteten Untersuchung Anhaltspunkte zu bieten. Insbesondere liegt es nahe, das im ersten Abschnitte in suspenso gelassene Wesen des Gröſse-seins[3] nicht etwa in einem besonderen, neben der Qualität vielleicht selbständig hergehenden Bestandstück, sondern in der Eignung der betreffenden Qualität, einer jener gegen die Null konvergierenden Richtungen anzugehören, insofern also in einer relativen Be-

---

[1] Vergl. oben § 1.

[2] Ein Versuch, genauer zu sein, soll am Ende dieses Paragraphen (unten S. 113f.) gemacht werden.

[3] Vergl. oben § 1.

stimmung zu suchen. Die Bemerkuug STUMPFS,[1] daſs man immerhin leichter eine Qualität ohne Intensität vorzustellen vermöchte als eine Intensität ohne Qualität, könnte jedenfalls als Bestätigung dieser Auffassung gelten. Befremdlicher erscheint vielleicht auf den ersten Blick eine andere Konsequenz, die nämlich, daſs, was eben das „Gröſse-sein“ genannt wurde, streng genommen gar nicht steigerungsfähig ist; etwas kann nicht mehr, ein anderes nicht weniger einer Richtung angehören, die zur Null führt, sondern es gehört dieser Richtung entweder an oder nicht. Steigerungsfähig ist vielmehr eigentlich nur die Qualität, die eben, sofern sie auf einer solchen Richtungslinie sich gleichsam bewegen kann, „Gröſse hat“. Aber, sehe ich recht, so ist es nicht eben schwer, über dieses Befremden hinauszukommen, und die Auffassung besteht eine Probe, indem sie die Schwierigkeit, die uns zur Untersuchung der Gröſsenvergleichung geführt hat, in befriedigender Weise zu lösen gestattet.

Wie erwähnt, ist es zunächst Thatsache, gleichviel, worin dieselbe ihren Grund haben mag, daſs, wenn man „Gröſsen vergleicht“, man sein Absehen normaler Weise nicht einfach auf das Urteil „gleich“, oder das Urteil „verschieden“ gerichtet hat, sondern auf ein Glied der Disjunktion „gleich groſs, gröſser oder kleiner“. Selbstverständlich ist damit vorausgesetzt, daſs die zu vergleichenden Daten einer und derselben aus der Zahl der gegen Null gerichteten Linien angehören; denn der Punkt a' der einen, der Punkt a'' einer anderen dieser Linien bestimmen zwar auch eine Richtung, aber keine, die zur Null führt.[2] In a' und a'' hat man dann zwei Gröſsen vor sich, die sich „nicht vergleichen lassen“, eben unter der stillschweigenden Voraussetzung, daſs mit „vergleichen“ die Bestimmung auf gröſser, kleiner oder gleichgroſs gemeint ist.

Wie aber, wenn diese Voraussetzung ausdrücklich ausgeschlossen wird? Ist dann a' und a'' immer noch unvergleichbar im Sinne der notwendigen Ergebnislosigkeit, oder, wenn doch auch für sie die Disjunktion „entweder gleich oder verschieden“ gilt, welches der beiden Disjunktionsglieder trifft für

[1] *Tonpsychologie* Bd. I. S. 350.

[2] Auch hier sei übrigens auf die am Ende dieses Paragraphen vorzunehmenden Präzisierungen im voraus verwiesen.

sie zu? Mir scheint es darauf nur Eine natürliche Antwort zu geben: a' und a'' sind einander gleich, insofern jedes von ihnen Gröfse ist, übrigens aber, d. h. abgesehen davon, dafs jedes von ihnen einer nach Null führenden Linie angehört, sind sie verschieden. Ich verkenne nicht, dafs sich nun neuerlich eine Art Tendenz geltend macht, zu fragen: wenn a' und a'' Gröfsen, also „grofs" sind, welches von beiden ist das gröfsere, falls sie nicht etwa gleich grofs wären? Darauf ist aber dann eben zu antworten: das „Grofs-sein" kommt freilich beiden zu, aber darin giebt es kein mehr oder weniger, darin sind sie gleich. Das „wie grofs" aber impliziert bereits wieder das Vorgegebensein einer nach der Null weisenden Richtung für beide Objekte; man kann nicht eine an eine gewisse Bedingung geknüpfte Frage aufrecht erhalten, wenn die Bedingung nicht erfüllt ist. Eine Bedingung fürs Vergleichen im allgemeinen Sinne, für die Beantwortung der Frage nach Gleich oder Ungleich, ist dieselbe aber nicht.

Noch soll ein Gedanke hier nicht unberührt bleiben, auf den bereits im Anfange dieser Schrift gelegentlich der Präzisierung des Gröfsengedankens Bezug genommen worden ist. Bedeutet denn gröfser und kleiner nicht etwas in betreff der Entfernung von der Null? Und wenn dem so ist, was läfst sich gegen die Frage einwenden, ob a' oder ob a'' von der Null weiter entfernt sei? Solcher Frage gegenüber ist vor allem daran zu erinnern, dafs gröfser und kleiner dem durch diese Wörter bezeichneten Gedanken nach durch Hinweis auf Distanzen sicher nicht interpretiert werden kann: man müfste ja doch gröfser dann etwa bestimmen, als „weiter von der Null", analog kleiner als „näher zur Null" oder dergl. Das Gröfser und Kleiner wäre beschrieben als das Gröfser und Kleiner einer Distanz: der Zirkel ist offenbar. In betreff der Brauchbarkeit einer solchen Distanzbestimmung sei aber vorgreifend auf die im folgenden Abschnitte[1] zu berührende Thatsache hingewiesen, dafs die Distanz zwischen Null und einer endlichen Gröfse jederzeit unendlich grofs ist, so dafs die erfahrungsmäfsig feststehende Ergebnislosigkeit solcher Versuche auch bereits theoretisch legitimiert ist. Überdies wäre daraus, dafs auf einer und derselben Gröfsenlinie der gröfseren Distanz

[1] Vergl. unten § 18.

von der Null auch die gröfsere Gröfse entspräche, gar nicht die Umkehrung zu schliefsen, dafs das weiter Abstehende bei ungezwungenem Wortgebrauche auch dann das Gröfsere heifsen dürfte, wenn es sich um verschiedene Gröfsenlinien handelt.

Zum Schlusse dieser Ausführungen mufs nun aber noch ausdrücklich hervorgehoben werden, dafs das denselben zu Grunde gelegte Bild von den gegen einen Nullpunkt konvergierenden Gröfsenlinien sich doch zunächst nur durch seine Einfachheit empfiehlt, bei näherer Untersuchung sich aber einerseits nicht unerheblichen Bedenken ausgesetzt, andererseits auch mit direkten Erfahrungen nicht immer im Einklange zeigt. Auf beides mufs hier noch kurz hingewiesen werden.

1. Ist es selbstverständlich oder erweislich, dafs alle Gröfsenlinien einen und denselben Nullpunkt haben? Nahe liegt es freilich, anzunehmen, dafs, wenn gleichsam mit der Gröfse zugleich alle Qualität verschwunden ist, auch von Verschiedenheit weiter nicht mehr die Rede sein kann. Andererseits aber kann man aus direkter Vergleichung heraus doch schwerlich behaupten, dafs etwa der schwache Schall dem schwachen Geruch ähnlicher sei, als der starke dem starken.[1] Der Gedanke einer Mehrheit von Nullpunkten, am besten dann wahrscheinlich so, dafs jeder Gröfsenlinie ein besonderer Nullpunkt entspräche, ist also vorgängig nicht von der Hand zu weisen. Das oben über Gröfsenvergleichung Gesagte könnte darum immer noch aufrecht bleiben; nur müfste man sich die Gröfsenlinien so zu einander gelegen denken, dafs keine der zwischen Punkten zweier dieser Gröfsenlinien zu ziehenden Verbindungslinien in ihrer Verlängerung einen der anderen Nullpunkte treffen könnte, von Ausnahmen abgesehen, von denen sogleich zu reden sein wird. Da über die Anzahl der Dimensionen nichts vorbestimmt ist, so möchten der Erfüllung dieses Erfordernisses kaum Hindernisse im Wege stehen.

2. Es giebt Gröfsenlinien, deren Punkte trotz zweifelloser Verschiedenheit der Linien auf gröfser oder kleiner verglichen werden können und sonach eine ganz direkte Ausnahme zu dem oben besprochenen Gröfsenvergleichungsgesetze abgeben.

---

[1] Von den bekannten Erfahrungen über Verwechselung schwacher Druck- mit schwachen Temperaturempfindungen darf im gegenwärtigen Zusammenhange wohl abgesehen werden.

Den besten Beweis liefern die Töne und die Feinheit, mit welcher die musikalische Praxis deren Stärke auch bei ungleicher Höhe und Klangfarbe gegeneinander abwägt; ein anderes Beispiel dafür wird uns im folgenden Paragraphen an den Verschiedenheitsgröfsen begegnen. Im Grunde ist ja schon vorgängig zu erwarten, dafs die Gröfsenvergleichungen an die betreffenden Gröfsenlinien sozusagen nicht mit mathematischer Strenge gebunden sein können. Dieser durch Instanzen von der erwähnten Art auch erfahrungsmäfsig gesicherte Spielraum für die Gröfsenvergleichung ist gleichwohl dem oben dargelegten allgemeinen Gesichtspunkte unterzuordnen, wenn man sich einmal mit dem Gedanken an die Vielzahl der Nullpunkte vertraut gemacht hat. Die betreffenden Gröfsenlinien müfsten dann nur derart gegeneinander gelegen sein, dafs die betreffenden Verbindungslinien im Gegensatz zu der oben sub 1 ausgesprochenen allgemeinen Forderung in ihrer Verlängerung dann doch auf einen Nullpunkt träfen.

Auf eine weitere Ausgestaltung und zugleich Überprüfung des Gedankens kann hier natürlich nicht eingegangen werden. Ich mufs mich damit begnügen, ihn kurz gekennzeichnet und seine Brauchbarkeit für das Verständnis der an den Gröfsenvergleichungen beobachteten Thatsachen aufgezeigt zu haben.

§ 8. von Kries über „atypische Beziehungen“.

Sind die vorstehenden Ausführungen, wie dem Leser derselben längst aufser Zweifel sein wird, zunächst dem Bestreben entsprungen, in einer für die vorliegenden Untersuchungen fundamentalen Sache den Anregungen gebührend Rechnung zu tragen, welche ich J. von Kries' oben wiederholt zitiertem Aufatze „*Über die Messung intensiver Gröfsen und das sog. psychophysische Gesetz*“ verdanke, so kann es der hier erstrebten Klärung nur förderlich sein, wenn nun auch die Vertretung nicht unberücksichtigt bleibt, welche der genannte Forscher dem oben bekämpften Gedanken in einem unter dem 19. Oktober 1892 an mich gerichteten Briefe hat zu teil werden lassen. Die freundlichst erteilte Zustimmung des Verfassers setzt mich vor allem in die angenehme Lage, den hierher gehörigen Teil des genannten Briefes im Wortlaute folgen lassen zu können:

„Sie sind, soviel ich sehe, darin mit mir gleicher Meinung, dafs im Gebiete der Mathematik die Gleichheit ein völlig fester, einer Erklärung weder bedürftiger noch fähiger Begriff ist. Dagegen scheint mir überall sonst (von einigen ganz besonderen Ausnahmefällen hier abgesehen) der Begriff ein äufserst unbestimmter und Allermannigfaltigstes zusammenfassender zu sein.... Betrachten wir z. B. den Fall zweier Intensitäts- oder Qualitätsstufen innerhalb eines Sinnesgebietes, etwa das Intervall $c:d$ und $a:h$. Die Vergleichung führt hier meines Erachtens immer zunächst zu dem Ergebnis, dafs die beiden Stufen etwas wesentlich untereinander Verschiedenes darstellen. Erinnert man sich der eigentümlichen Gleichartigkeit, welche die sämtlichen Elemente des Raumes oder der Zeit besitzen, so könnte man jene Stufen wohl zunächst untereinander inkommensurabel nennen. Bezeichnen wir sie gleichwohl in gewissen Fällen als „gleich grofs“, nennen wir in anderen die eine Stufe gröfser als eine andere, so beruht dies meines Erachtens auf eben derselben intellektuellen Funktion, die auch anderwärts eine so bedeutungsvolle Rolle spielt, auf der Bildung von Allgemeinvorstellungen, unter die Einzelnes, Individuelles subsumiert wird. Im Grunde ist jede Beziehung zweier Empfindungen etwas Eigenartiges, Individuelles, was eben nur diesen beiden Empfindungen zukommt. Die Subsumtion unter die Allgemeinvorstellung „gleich grofs“ ist demgemäfs dann auch eine unsichere. Die Frage aber, ob zwei derartige Stufen wirklich gleich grofs seien oder nicht, ist ebensowenig zu beantworten, wie etwa die, ob eine bestimmte Empfindung rot oder orange sei, sofern durch diese Worte nur die unbestimmten, aus einer Reihe von Einzelempfindungen gebildeten Allgemeinvorstellungen bezeichnet sind. — Eine allgemeine Übersicht über die Beziehungsurteile ergiebt also meines Erachtens, dafs in gewissen Fällen, so beim Zusammenhangsurteil, bei den mathematischen, die behaupteten Beziehungen völlig scharf bestimmte, in zahlreichen Fällen genau die nämlichen sind, es ergeben sich so bestimmte Klassen typischer Beziehungsurteile. Daneben giebt es aber eine Menge, in denen gerade das die Natur des Urteils bestimmende Element, die Art der behaupteten Beziehungen, ganz verschiedenartig ist; ich möchte diese (vorbehaltlich besserer Bezeichnung) atypische Beziehungsurteile nennen.

Der Hauptgrund der entgegengesetzten Auffassung liegt, meine ich, darin, dafs mit der Gleichheit thatsächlich nicht diese subjektiven Gleichschätzungen, sondern eine wirkliche, objektive Gleichheit gemeint wird; in Wirklichkeit, sagt man, können zwei Dinge, auch Empfindungsstufen, doch nur gleich oder ungleich sein. Dafs Fechner selbst seine Messung der Empfindungsstärke in einem solchen Sinne genommen hat, ist wohl unbestreitbar. Aus dem gleichen Gesichtspunkte, wie mir scheint, bestreiten Sie, dafs es sich bei der Gleichheit irgendwo um „willkürliche Festsetzungen" handeln könne. Meiner Ansicht nach führt innerhalb der Gebiete, um die es sich hier handelt, die objektive Vergleichung zunächst immer nur zu dem Ergebnis der Inkommensurabilität. Die Steigerung der Intensität einer Saitenschwingung von a auf $a+x$ und von b auf $b+y$ sind völlig verschiedene Vorgänge. Erst indem wir für unsere Betrachtung irgend welche bestimmte Seiten willkürlich herausgreifen, gewinnen wir die Möglichkeit, von Gleichheitsbeziehungen zu reden, die einen festen und bestimmten Sinn haben. Die Gleichheitsbeziehungen, von denen die theoretische Physik handelt, sind also thatsächlich stets nur abgekürzte Ausdrücke für Gröfsenbeziehungen von extensiven und Zahlengröfsen.[1] Eine Ermittelung aber, welche Intensitätszunahmen irgend eines Vorganges wirklich gleich seien, ist (mangels einer solchen Festsetzung) weder möglich, noch in irgend einem Sinne erforderlich; es ist eine falsch gestellte Aufgabe. Man kann die Vorgänge aufs genaueste kennen, jede Abmessung und jedes Zahlenverhältnis, das ganze Detail des Geschehens, und jene Frage doch unbeantwortbar finden."

Indem ich es vermeide, bereits vorher Erörtertes nochmals zur Sprache zu bringen, wende ich mich sofort dem Hauptgedanken der vorliegenden Ausführungen zu, der in der Benennung „atypische Beziehungen" zum Ausdrucke gelangt. Ein Versuch, seiner Bedeutung ganz im allgemeinen nachzugehen, kann hier natürlich nicht gemacht werden; die Verwendung, die er seitens seines Urhebers findet, weist uns

[1] Eine Ausnahme, die sachlich nicht von Bedeutung ist, macht hier nur die Gleichsetzung zweier Temperaturen. Die Vergleichung von Temperatur*stufen* aber ist durchaus in dem angeführten Sinne willkürlich. (Anmerkung von J. v. Kries.)

vielmehr sofort auf das spezielle, auch im vorhergehenden bereits betretene Gebiet der Gröſsenvergleichung. Verschiedenheiten zwischen verschiedenen Fundamenten sind zwar, das ist doch wohl die Meinung unseres Autors, jederzeit Gröſsen, aber sie sind auch qualitativ verschieden, und ihre Zusammenordnung unter den Gesamtnamen „Verschiedenheit“ besagt für qualitative Gleichheit nicht mehr als die Zusammenordnung qualitativ sehr verschiedener Daten unter dem Namen „Blau“ oder „Grün“ und dieser und vieler anderer unter dem Namen „Farbe“. Darum sind Verschiedenheiten streng genommen „unvergleichbar“ in dem besonderen, im vorigen Paragraphen erörterten Sinne, d. h. sie gestatten keine Beurteilung nach Gröſser und Kleiner, und erst die „willkürlichen Festsetzungen“ können eine solche ermöglichen.

Dem gegenüber scheint mir nun aber vor allem das Zeugnis der Erfahrung angerufen werden zu müssen, das uns in den seit Plateau so oft gemachten Versuchen nach der Methode der „übermerklichen Unterschiede“ entgegentritt. Es handelt sich dabei um Urteile über Gröſser und Kleiner bei Verschiedenheiten, Urteile, vor denen die von Kries anerkannten Ergebnisse der Raum- und Zeitvergleichung höchstens einen graduellen Zuverlässigkeitsvorzug voraushaben. Von „Festsetzungen“ ist beim Fällen solcher Urteile thatsächlich nicht die Rede, und ich kann auch gar nicht absehen, was für Festsetzungen hier zu Gröſsenvergleichungen zu führen vermöchten, wenn solche durch die Natur des zu Vergleichenden ausgeschlossen wären.

Dagegen scheint mir unstatthaft, daraufhin auch der These von der nicht bloſs quantitativen, sondern auch qualitativen Variabilität der Verschiedenheit entgegenzutreten, nur ist mir sehr zweifelhaft, ob die Erfahrungen, auf die ich mich zu Gunsten dieser These berufen muſs, mit denen zusammenfallen, welche für Kries maſsgebend waren. Denn auch in dieser Sache kann ich Raum und Zeit so wenig in einer Ausnahmestellung finden, daſs mir vielmehr das qualitative Moment nirgends deutlicher erfaſsbar scheint als beim Raume, wo ihm sogar die Sprache durch Ausdrücke Rechnung trägt, die dem Wortvorrate des Alltagslebens angehören. Jedermann weiſs, daſs zwei „verschiedene“ Punkte im Raume nicht nur eine gewisse Distanz, sondern auch eine gewisse Lage zu einander haben, die bei gleichbleibender Distanz sich ändern, bei geänderter Distanz gleich bleiben kann.[1] Nichts könnte hier ungezwungener sein, als in der Distanz die quantitative, in der Lage die qualitative Seite der Verschiedenheitsrelation zu erblicken, die zwischen den betreffenden beiden Ortsbestimmungen besteht. Bei Zeitverschiedenheiten giebt es freilich keine Variabilität der Lage: daſs aber auch diesen Relationen nicht jede Qualität fehlt, ist schon vorgängig selbstverständlich;[2] und daſs diese Qualität der räumlichen Lage analog ist, ergiebt die Thatsache, daſs zwei Zeitpunkte ohne Rücksicht auf die Gröſse des Abstandes zwei einander diametral entgegengesetzte Zeitrichtungen ganz ebenso in sich schlieſsen, wie in der Lage zweier Raumpunkte zwei entgegengesetzte Raumrichtungen eingeschlossen sind. In gleicher Weise zeigen die Continua der Empfindungsqualitäten entweder Punkte von unverkennbar verschiedener „Lage" zu einander, oder, wo die Lage vermöge der Eindimensionalität der betreffenden Mannigfaltigkeit nicht variabel ist, verrät sich der Lage-Charakter an der Möglichkeit entgegengesetzter Richtungen; und soweit ich sehe, giebt es überhaupt keine Verschiedenheit, bei der man neben der Gröſse nicht wenigstens von Richtung und daher von Lage reden dürfte.

Daraus folgt nun natürlich keineswegs, daſs etwa zwei verschiedene Verschiedenheiten jedesmal auch qualitativ verschieden sein müſsten; für den Fall aber, daſs sie es sind, scheint das im vorigen Paragraphen ausgesprochene Gröſsenvergleichungsgesetz eine Beurteilung der beiden Verschiedenheiten auf Gröſser und Kleiner auszuschlieſsen. Damit stimmen denn auch manche Erfahrungen aufs beste überein: eine Raumdistanz gröſser oder kleiner finden als eine Zeitdistanz, hätte kaum erheblich mehr für sich als das analoge Urteil über Raum- und Zeitstrecken. Dagegen wird gegen eine Gröſsenvergleichung in Bezug auf horizontale mit vertikalen oder schrägen Abständen auch Kries nichts einwenden, wenn auch

---

[1] Vergl. auch A. Höfler, „Zur Analyse der Vorstellungen von Abstand und Richtung" in Bd. X *dieser Zeitschrift* S. 223 ff., dem gegenüber ich jedoch auf der Nebeneinanderstellung von Abstand und Lage (statt Richtung) beharren muſs. Richtung ist doch wohl ein auf Lage gebauter Gedanke höherer Ordnung, da Eine Lage je nach Wahl des Ausgangspunktes zwei entgegengesetzte Richtungen fundieren kann.

[2] Vergl. oben S. 110 f.

die Lageverschiedenheiten sich als gelegentlich recht erhebliche Erschwerungen für das Vergleichen fühlbar machen werden. Wir befinden uns hier also ohne Zweifel in dem vom allgemeinen Gröfsenvergleichungsgesetze ausgenommenen Gebiete, von dem schon zu Ende des vorigen Paragraphen die Rede war,[1] und die dort skizzierte Auffassung dürfte sich, wenn ich recht sehe, auch hier bewähren. Dafs im allgemeinen Verschiedenheiten, gleichviel von welcher qualitativen Determination, einander in ähnlicher Weise nahe stehen, daher in ähnlicher Weise nahestehende Nullpunkte haben werden, wie etwa Töne von verschiedener Höhe, das spricht ja für sich selbst; dafs dies aber für Verschiedenheiten aller möglichen Qualitäten gelten müfste, dafür fehlt jede Evidenz, und das obige Beispiel von Raum- und Zeitdistanz läfst das Gegenteil vermuten. Nur wird man sich hüten müssen, dort logische Unmöglichkeit der Gröfsenvergleichung anzunehmen, wo die Unmöglichkeit vielleicht blofs eine empirische ist, d. h. auf eine für die thatsächlich vorliegenden intellektuellen Kräfte nicht zu bewältigende Aufgabe zurückgeht. Man wird sicher geneigt sein, Farben- und Tonhöhenverschiedenheiten für a priori „unvergleichbar“ zu halten, und doch urteilt man mit vollster Evidenz, dafs die Verschiedenheit zwischen zwei Farben oder die zwischen zwei Tönen kleiner ist als die zwischen Ton und Farbe. Viel weiter noch gehen Münsterbergs Versuche, Gewichts- mit Licht-, Schallstärke-Verschiedenheiten u. s. f. zu vergleichen;[2] und mag man denselben auch alle erdenkliche Zurückhaltung entgegensetzen,[3] jedenfalls bedeuten sie eine sehr beachtenswerte Anregung, den Schein apriorischer Selbstverständlichkeit auch in dieser Sache an der Hand des Experimentes ausdrücklich nachzuprüfen.

Es dürfte sich empfehlen, die Diskussion der Kriesschen

---

[1] Vergl. oben S. 113 f.

[2] *Beitr. z. experim. Psychol.* Heft 3. S. 59 ff.

[3] Immerhin habe ich aus ein paar nur ganz vorläufigen Proben einen freilich blofs subjektiven Eindruck gewonnen, der dem Vorhaben weit eher günstig als ungünstig ist. Wieviel davon auf Rechnung sekundärer Kriterien oder Scheinkriterien (vergl. die schon einmal angezogene Stelle bei Kries a. a. O. S. 291 ff.) zu setzen ist, bedarf natürlich noch sorgsamster Untersuchung; und an eine „neue Grundlegung der Psychophysik“, genauer an einen Aufbau derselben auf „Muskelempfindungen“, wird man darum noch lange nicht zu denken brauchen. Offenbar un-

Aufstellungen[1] durch eine kurze Erinnerung an die dabei gewonnenen Hauptergebnisse zu beschliefsen. Vergleichungsurteile bedürfen einer „Festsetzung“ darüber, was Gleichheit oder Verschiedenheit ist oder sein soll, nicht und gestatten sie nicht; dagegen können Präzisierungen in betreff dessen, was verglichen werden soll, gar wohl erforderlich, unter besonderen Umständen vielleicht auch willkürlich zu treffen sein. Während ferner nichts im allgemeinsten Sinne unvergleichbar heifsen kann, ist die Gröfsenvergleichung, die Beurteilung auf Gröfser und Kleiner, an die Bedingung geknüpft, dafs die auf ihre Gröfse zu vergleichenden Objekte ihrer Qualität nach einander ausreichend nahe stehen. Dies gilt auch für den noch spezielleren, für unsere späteren Untersuchungen aber vor allem wichtigen Fall, dafs die zu vergleichenden Gröfsen Verschiedenheiten sind, nur wäre es in gleicher Weise zu weit gegangen, wenn man die Relation „Verschiedenheit“ ganz im allgemeinen für „atypisch“ erklären, als wenn man in den eventuell vorliegenden Qualitätsverschiedenheiten innerhalb des Verschiedenheitsgebietes ein unter allen Umständen unübersteigliches, gleichviel, ob apriorisches oder empirisches, Gröfsenvergleichungshindernis erblicken wollte.

§ 9. Die Thatsache der Unterschiedsschwelle.

Als das Ziel, auf das alle Vergleichungsthätigkeit gerichtet ist, wurde oben das evidente Urteil über Gleichheit oder Verschiedenheit, kürzer das evidente Vergleichungsurteil bezeichnet. Es wird entbehrlich sein, der Beschaffenheit dieses Urteiles hier eine eingehendere Untersuchung zu widmen; nur der eine Umstand kann nicht unerwähnt bleiben, dafs in betreff der zu erzielenden Evidenz das Gleichheits- dem Verschiedenheitsurteil keineswegs auf gleicher Stufe zur Seite steht, zum

---

abhängig davon ist die Behauptung Ehrenfels' („Zur Philosophie der Mathematik.“ *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1891. S. 301), es habe „einen sehr guten Sinn, von einer Tonstärke zu sprechen, welche zu einer anderen das gleiche Gröfsenverhältnis aufweist wie etwa die Zahl Drei zur Zahl Eins, oder Fünfzehn zu Fünf, oder der Kubikinhalt eines Prismas zu der zugehörigen Pyramide“. Das Recht, hier statt „Verhältnis“ genauer „Verschiedenheit“ zu setzen, werden die Untersuchungen der folgenden Abschnitte darthun.

[1] Ein kleiner Nachtrag zu derselben soll noch im nächsten Paragraphen aus anderem Zusammenhange heraus geliefert werden.

mindesten dort nicht, wo es sich um die Vergleichung von Gegenständen handelt, die einem Continuum oder Quasi-Continuum (was hiermit gemeint ist, wird sich sofort ergeben) angehören. Charakteristisch hierfür ist der Umstand, daſs in solchem Falle kein Besonnener Anstand nehmen wird, eine auf Vergleichung gegründete Gleichheitsbehauptung dahin zu restringieren, daſs er keine Verschiedenheit habe bemerken können,[1] während umgekehrt niemand sich einfallen lieſse, bei zweifellos erkannter Verschiedenheit, etwa der zwischen einem grünen und einem roten Pigment, auch nur die Möglichkeit einer unerkannten Gleichheit aufkommen zu lassen. Hält man, wogegen vom Standpunkte des theoretisch Unvoreingenommenen ein Einwand kaum zu besorgen sein wird, erkannte von thatsächlicher Gleichheit resp. Verschiedenheit auseinander, so kann man sagen: es giebt Gebiete, auf denen sich Gleichheit streng genommen niemals mit Sicherheit erkennen läſst; was für solche Erkenntnis genommen werden könnte, ist bloſs ein Schein von Gleichheit, dem mit groſser, vielleicht unendlich groſser Wahrscheinlichkeit[2] die Wirklichkeit nicht gemäſs ist. Dagegen kann von einem trügenden Scheine der Verschiedenheit normalerweise nicht die Rede sein, vielmehr bleibt hier, wenn man so sagen darf, der Schein gleichsam hinter der Wahrheit zurück. Was verschieden erscheint, ist auch verschieden; was hingegen verschieden ist, erscheint als verschieden nur bis zu einer Grenze, jenseits welcher der Schein der Gleichheit eintritt. Die Grenze heiſst bekanntlich Unterschiedsschwelle: sie scheidet die merklichen von den unmerklichen oder, wie man auch sagt, die übermerklichen von den untermerklichen Verschiedenheiten; geordnete Reihen des nur untermerklich Verschiedenen aber präsentieren sich durchaus wie Continua, und Fälle dieser Art sind es, die mit Rücksicht hierauf oben unter dem Namen Quasi-Continua mit in Betracht gezogen worden sind.

Die in Erfahrungen dieser Art hervortretende Inferiorität

---

[1] Über die charakteristische Unsicherheit der Gleichheitsurteile vergl. auch Fechner, „Über die psychophysischen Maſsprinzipien und das Webersche Gesetz“ in *Wundts Philos. Stud.* Bd. IV. S. 192, nur daſs dort die Bedeutung der „zeitlich-räumlichen Nicht-Koincidenz“ (ibid. S. 190 ff.) erheblich überschätzt sein dürfte.

[2] Vergl. Stumpf, *Tonpsychologie,* Bd. I. S. 33.

der Gleichheitsaffirmation und Verschiedenheitsnegation gegenüber der Gleichheitsnegation und Verschiedenheitsaffirmation gehört ohne Zweifel zu den Fundamentalthatsachen der Erkenntnistheorie. Ohne auf ihre prinzipielle Bedeutung hier näher eingehen zu können, mufs doch auf ein paar, auf den ersten Blick paradox erscheinende Konsequenzen derselben hingewiesen werden, die sich einstellen können, wenn mehrere Urteile der eben bezeichneten Beschaffenheit zusammentreffen. Die Erfahrung lehrt, dafs, wenn mir *a* gleich *b* und *b* gleich *c* erscheint, mir darum *a* nicht auch gleich *c* erscheinen mufs.[1] Ebenso kann mir eine Distanz *a b* gleich *A B*, *b c* gleich *B C* erscheinen, dennoch *a c* nicht gleich *A C*,[2] wenn die im Alphabet einander nächststehenden Buchstaben eben merklich Verschiedenes, die beiden Alphabete aber Regionen verschiedener Unterschiedsempfindlichkeit bedeuten u. dergl. m. Wirkliche Probleme wird darin, wer sich mit der erwähnten Fundamentalthatsache abgefunden hat, nicht wohl mehr erblicken können; und gilt die Fundamentalthatsche von ganz beliebigen Continuen und Quasi-Continuen ohne Rücksicht auf ihre qualitative Beschaffenheit, so werden auch Scheinparadoxien der eben bezeichneten Art nicht wohl an bestimmte Vergleichungsgebiete gebunden sein. Es scheint mir erforderlich, dies ausdrücklich hervorzuheben, weil J. v. Kries der Vergleichung und Messung des Psychischen in dieser Hinsicht eine Ausnahmestellung anzuweisen und zugleich auf diesem Ausnahmegebiete seiner oben bekämpften Ansicht von den „willkürlichen Festsetzungen“ eine besondere Stütze zu geben versucht hat. „Im Gebiete der physischen Gröfsen,“ meint er,[3] „erhalten die Aussagen über Gleichheit oder sonst eine Gröfsenbeziehung ihre weittragende Bedeutung durch den den mathematischen Gesetzen entsprechenden Zusammenhang, in welchem die Gesamtheit solcher Statuierungen stehen mufs. . . . . . Im Gegensatze hierzu nur ist die subjektive Gleichheit, das Gleicherscheinen zunächst von durchaus singulärer Bedeutung.“ Hier „ist also, ehe von einer Messung die Rede sein kann, eine Festsetzung darüber

---

[1] Vergl. Stumpf, a. a. O.

[2] Vergl. J. v. Kries, „Über Real- und Beziehungsurteile“. *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1892. S. 283.

[3] A. a. O. S. 282 ff.

erforderlich, was man gleich nennen will, und der (nur empirisch zu führende) Nachweis, dafs diese Gleichsetzungen in einem den mathematischen Gesetzen entsprechenden Zusammenhang faktisch stehen". Ohne hier schon auf die erst in den folgenden Abschnitten abzuhandelnden Angelegenheiten der Messung eingehen zu wollen, meine ich im Hinblick auf die ja bereits vor jeder besonderen Erwägung klare Zusammengehörigkeit von Vergleichen und Messen schon hier der Position J. v. Kries' zweierlei entgegenhalten zu müssen. Einmal halte ich dafür, dafs, wer gewillt ist, den Schein der Gleichheit nur dort für wahre Gleichheit gelten zu lassen, wo die Konformität mit den Gesetzen der Mathematik gewahrt bleibt (deutlicher könnte man wohl sagen: wo man auf keine Unvereinbarkeiten geführt wird,[1] insofern noch überhaupt nichts, also im besonderen auch nichts über Gleichheit „willkürlich festsetzt", sondern nur den sonst jederzeit bindenden Denkgesetzen auch hier Rechnung trägt. Dann aber giebt es, wie schon oben berührt, den eventuell trügenden Schein der Gleichheit auf physischem Gebiete im Prinzip ganz ebenso wie auf psychischem, weil die in Rede stehende Inferiorität der Gleichheitsaffirmation sich ganz ebenso geltend machen mufs, wenn das Verglichene physisch als wenn es psychisch ist. Dafs es beim Messen gerade darauf ankommt, den eigentümlichen Mängeln menschlicher Vergleichungsfähigkeit nach Thunlichkeit nachzuhelfen, soll hier so wenig in Abrede gestellt werden, als dafs auf physischem Gebiete ungleich günstigere Vorbedingungen hierzu vorliegen. Aber völlig beseitigen lassen sich diese Mängel ja thatsächlich nirgends; dies bezeugt am deutlichsten die Theorie der Beobachtungsfehler,

---

[1] Ob freilich nicht gelegentlich auch einmal der Versuch gemacht wird, es an diesem Willen fehlen zu lassen? Man möchte solches vermuten, wenn S. Exner die Camererschen Hautsinnversuche in den Sätzen zusammenfafst: „Zwei gleiche Empfindungsgröfsen verdoppelt, geben ungleiche", und „Zwei Empfindungsgröfsen einer dritten gleich sind nicht untereinander gleich" (*„Entwurf zu einer physiologischen Erklärung der psychischen Erscheinungen"*. Teil I. Leipzig und Wien. 1894. S. 180). Indes hat es keine Gefahr, dafs der Satz des Widerspruches oder seinesgleichen durch Ungenauigkeiten im Ausdruck um seine Geltung gebracht werden könnte. Andererseits wird man aber auch in der sehr beachtenswerten Angelegenheit der „sekundären Empfindungen", um die es Exner am Ende doch zunächst zu thun ist, auf einen Konflikt mit der Logik sicher nicht angewiesen sein.

deren Begründern nichts ferner gelegen haben wird als die Intention, speziell den Bedürfnissen psychologischer Forschung zu dienen.

§ 10. Verschiedenheit und Merklichkeit.

Es ist nicht zu verkennen, daſs, wenn man eine Verschiedenheit das eine Mal als groſs oder klein, das andere Mal als merklich oder unmerklich bezeichnet findet, man es mit zwei ganz verschiedenen Weisen des Charakterisierens zu thun hat, dort mit einer mehr direkten, man könnte sagen, innerlichen, hier mit einer mehr indirekten, sozusagen äuſserlichen, insofern dort auf eine der betreffenden Verschiedenheit selbst zukommende Eigenschaft, hier auf das Verhalten eines ihr zugewandten Intellektes hingewiesen ist. Die Charakterisierung eines Sachverhaltes durch das Erkennen hindurch bleibt ein Umweg, aber ohne Zweifel jederzeit der natürlichsten einer; leicht kann er immer noch, wenn nämlich der gerade Weg aus irgend einem Grunde unzugänglich ist, unter den zugänglichen Wegen der direkteste sein, leicht auch, wo der gerade Weg nicht geradezu verschlossen ist, neben ihm seinen eigentümlichen Wert behalten. Thatsächlich hat sich denn auch der Gedanke der Merklichkeit überall, wo man den Gesetzmäſsigkeiten des Vergleichens nachzugehen unternommen hat, in hohem Maſse brauchbar erwiesen, und auch hier kann seine Bedeutung nicht völlig unerwogen bleiben.

Bei den sehr weit gehenden Konzessionen, die man diesem Gedanken namentlich auf jenem Gebiete der experimentellen Psychologie gemacht hat, das man, Fechner zu bleibendem Ruhme, als Psychophysik zu benennen pflegt, hat man sich ohne Zweifel vielfach durch erkenntnistheoretische Erwägungen leiten lassen, zu denen sich nicht etwa nur bei den Vergleichungen Anlaſs zu bieten schien. So meint Wundt, daſs die Frage, „wie sich die Empfindungen unabhängig von ihrer Auffassung und Vergleichung verhalten“, der direkten Untersuchung unzugänglich ist;[1] und wie nahe die hier berührte „Auffassung“ dem uns jetzt beschäftigenden Merklichkeitsgedanken steht, er-

[1] *Physiol. Psychol.* 4. Aufl. Bd. I. S. 333. „Auf das entschiedenste“, betont z. B. auch J. Merkel (*Philos. Studien*, Bd. IV. S. 541), daſs er „in Übereinstimmung mit Wundt und Köhler nur eine Untersuchung der Abhängigkeit zwischen Reiz und Empfindungschätzung für möglich halte.“

hellt deutlich genug daraus, daſs der genannte Autor später, da er zum „mathematischen Ausdruck des Beziehungsgesetzes" gelangen will, sich geradezu „die Merklichkeitsgrade der Empfindung auf eine Abscissenaxe" aufgetragen denkt.[1] Wir kommen auf dieses Vorgehen weiter unten noch kurz zurück; hier ist es nur berührt wegen der Analogie zu dem, was bei der Vergleichung speziell im Falle der Verschiedenheit Sache unserer näheren Erwägung sein muſs.

„Direkt gegeben", das scheint ja auch hier ziemlich selbstverständlich, sind uns nicht die objektiven Verschiedenheiten, sondern unser Wissen um dieselben, das Bemerken oder „Merken" derselben. Wir können darum von einer Verschiedenheit nichts uns Näheres aussagen, als ihre Merklichkeit; und soweit diese Merklichkeit noch näheren Bestimmungen zugänglich ist, scheinen es diese Bestimmungen zu sein, an die eine möglichst unbefangene Beschreibung des empirisch Vorliegenden sich zu halten hat. Und wirklich haben wir in dem für den Schwellenbegriff so wesentlichen Gedanken des „eben merklichen" Unterschiedes eine solche Bestimmung vor uns. Eine andere bietet sich in der Merklichkeitsgröſse, dem Mehr oder Weniger der Merklichkeit dar, das man denn auch wirklich den Vergleichungen von Verschiedenheiten zu Grunde liegend angenommen hat. So erachtet es z. B. S. Exner einer besonderen Begründung augenscheinlich gar nicht bedürftig, wenn er behauptet, daſs „die Gröſse eines Empfindungsunterschiedes nur durch seine gröſsere oder geringere Merklichkeit gegeben ist".[2] Nach G. E. Müller bedeutet, „daſs wir beim Übergange von einer Empfindung zur anderen im einen Falle den Eindruck einer gleich groſsen Verschiedenheit erhalten wie im anderen Falle", nichts anderes, als „daſs uns der Unterschied im einen Falle ebenso merklich sei, wie im anderen".[3] In gleicher Weise meint

---

[1] *Physiol. Psychol.* 4. Aufl. Bd. I. S. 400. „Wundt denkt sich die Empfindung", interpretiert A. Köhler (in *Wundts Philos. Stud.*, Bd. II. S. 595), „oder besser den Merklichkeitsgrad einer Empfindung ... aus einer Reihe von Merklichkeitszuwüchsen ..... bestehend ...".

[2] *Hermanns Handbuch.* II. 2. S. 244; vgl. ibid. S. 218.

[3] *Zur Grundlegung der Psychophysik,* S. 388; vgl. auch die Definition der Unterschiedsempfindlichkeit als „Fähigkeit, vermöge welcher der Unterschied zweier gegebener Reizgröſsen uns in höherem oder geringerem Grade merklich werden kann", a. a. O. S. 1.

noch A. Grotenfelt: „Wir können unmittelbar wirklich nur die Merklichkeitsgrade der Unterschiede vergleichen, d. h. dieselben als mehr oder weniger merklich schätzen".[1]

Hier sind es zunächst wohl die „Merklichkeitsgrade", die einiges Befremden wachrufen. Giebt es denn „Grade" des Merkens? Entweder man merkt etwas, oder man merkt es nicht; wo sollte da Gelegenheit zur Steigerung sein, wie wir sie für jedes Mehr oder Weniger unerläfslich gefunden haben? Ich glaube in der That, dafs der Gedanke des Merkens einer Gröfsenbestimmung unzugänglich ist. Inzwischen erwächst hieraus eine nennenswerte Schwierigkeit deshalb nicht, weil die in Rede stehenden Stufen offenbar nicht am Merken selbst, wohl aber an dem leicht anzutreffen sind, was man die Leichtigkeit oder Schwierigkeit des Merkens, oder eben besser die gröfsere oder geringere Leichtigkeit des Merkens nennen kann.[2] Es handelt sich einfach um das Mehr oder Weniger der zum Erkennen der betreffenden Verschiedenheit erforderlichen psychischen Arbeit,[3] und es bedeutet höchstens eine ganz unerhebliche Gewaltsamkeit im Ausdruck, wenn in diesem Sinne statt „leichter merklich" kurzweg „merklicher" gesagt wird.

Dagegen ist es nun aber weit mehr als eine blofs terminologische Frage, ob die sozusagen prinzipielle Vorzugsstellung, welche wir gemäfs der eben wiedergegebenen Ansicht dem Merklichkeitsmomente angewiesen finden, auch eine verdiente ist. Ich kann dies weder dort einräumen, wo es eine sozusagen isolierte oder vereinzelte Verschiedenheit zu erkennen, noch, wo es Verschiedenheiten zu vergleichen gilt.

---

[1] *Das Webersche Gesetz und die psychische Relativität.* Helsingfors 1888. S. 121 f. und sonst. Sogar „untermerkliche Reizunterschiede" werden unter Voraussetzung einer „Tendenz, bemerkt zu werden" in diese Auffassung einbezogen. Vgl. a. a. O. S. 104.

[2] Lipps identifiziert geradezu „das unmittelbare Bewufstsein des Grades der Ähnlichkeit" mit dem „unmittelbaren Bewufstsein der Schwierigkeit des Unterscheidens oder Auseinanderhaltens" (*Grundzüge der Logik.* S. 104).

[3] Vgl. A. Höfler, Psychische Arbeit, *diese Zeitschr.* Bd. VIII. S. 97 f. (S. 54 f. des Sonderabdruckes) — übrigens in der gegenwärtigen Anwendung mit erstaunlicher Klarheit antizipiert von F. Boas, „Über die Grundaufgabe der Psychophysik" in *Pflügers Arch.* Bd. 28. 1882. S. 574 f., wo z. B. die Leichtigkeit, mit der ein Verschiedenheitsurteil gefällt wird, als „das Mafs der psychischen Arbeit" bezeichnet erscheint, „welche zum Fällen des Urteils nötig ist".

1. Bezeichnen wir mit e eine Empfindung und mit m_e deren Merklichkeit, ebenso mit v eine Verschiedenheit und mit m_v deren Merklichkeit, so besagt die erste der beiden in Rede stehenden Positionen: unmittelbar gegeben ist nicht e, sondern m_e, — nicht v, sondern m_v. Allein, was bedeutet dieses Gegebensein? Doch wohl nur Erkanntwerden, natürlich mit der erforderlichen Sicherheit und Evidenz. Nun handelt es sich ja aber gerade darum, dafs einmal e, das andere Mal v „gemerkt", d. h. doch auch hier nur, dafs es erkannt wird; in welchem Sinne oder mit welchem Rechte könnte man nun sagen, dafs hier e oder v weniger „unmittelbar" erkannt werde als m_e oder m_v? Und wäre die auf e oder v gerichtete Erkenntnis minder unmittelbar als die des betreffenden m, warum sollte diese letztere als unmittelbar genug toleriert werden? Der Erkenntnis des Merkens kann ja auch eine Erkenntnis der Erkenntnis des Merkens, sozusagen eine Erkenntnis des Merkens des Merkens zur Seite gestellt werden u. s. f. in infinitum. Man sieht, apriorische Erwägungen, soweit sie hier überhaupt zum Worte kommen, sind weit eher geeignet, vor dem Hinausgehen über das, oder genauer vor einem Zurückgehen hinter das e und v zu warnen, als es zu verlangen; es bliebe also nur noch zu fragen, ob vielleicht empirische Gründe, etwa die erfahrungsmäfsig festgestellte oder zu vermutende gröfsere Zuverlässigkeit, es ratsam machen, sich an die Erkenntnis des m statt an die des e oder v zu halten. In einem speziellen Falle, von dem sogleich[1] zu reden sein wird, ist dem nun wirklich so: von einem allgemeinen Zuverlässigkeitsvorzuge aber lehrt die Erfahrung, soviel mir bekannt, nichts. Dagegen bietet sie anderweitig so viele Belege dafür, um wie vieles besser unsere intellektuellen Fähigkeiten auf die Beschäftigung mit äufseren als inneren Thatbeständen eingerichtet sind oder sich eingerichtet haben, dafs die Erkenntnis des Merkens namentlich gegenüber der Erkenntnis der Verschiedenheit sicher wenigstens dort im Nachteile sein wird, wo es Physisches zu vergleichen gilt.[2] Man

[1] Vergl. unten § 11.

[2] Verschiedenheit an sich ist natürlich, wie ich schon an anderem Orte berührt habe („Beiträge zur Theorie der psychischen Analyse" in Bd. VI *dieser Zeitschrift* S. 441 f., S. 71 des Sonderabdruckes) nichts Physisches, aber auch nichts Psychisches, woran ausdrücklich zu erinnern der oben (S. 126, Anm. 2) zitierten Stelle aus Lipps' „*Grundzügen der Logik*"

könnte nun nur noch etwa daran denken, daſs das Merklichkeitsmoment bei Vergleichung von Verschiedenheiten entscheidende Vorzüge aufzuweisen habe; wir gelangen damit zum zweiten Hauptpunkte der hier zu prüfenden Ansicht.

2. Es sollen nach dieser Ansicht nur die Merklichkeitsgrade der Verschiedenheiten verglichen werden können; warum nicht die Verschiedenheiten selbst? Sieht man von apriorischen Scheingründen, wie sie eben sub 1. gewürdigt wurden, ab, so ist man hier entweder auf direkte Erfahrungen über die Ergebnislosigkeit von Verschiedenheitsvergleichungen, oder auf Schlüsse aus der Beschaffenheit einerseits der Verschiedenheiten, andererseits der Merklichkeiten angewiesen. Erfahrungen der erstbezeichneten Art sind aber meines Wissens nicht gemacht, noch weniger als Legitimation obiger Behauptung ins Feld geführt worden. Dagegen könnte die Frage, ob denn Verschiedenheit ihrer Natur nach überhaupt steigerungsfähig sei, immerhin aufgeworfen werden, wenn man, wie ja gelegentlich geschehen ist,[1] den Verschiedenheitsgedanken auf die Negation zurückzuführen versuchen wollte. Aber vor allem ist dieser Versuch schon an sich mit der direkten Empirie nicht in Einklang zu bringen. Ist auch der Tisch vom Sessel verschieden, so kann ich doch den Tisch nicht vom Sessel negieren, so wenig, als den Sessel vom Tisch; nur eine Relation kann man in Bezug auf die beiden Objekte in Abrede stellen, hier natürlich eine Vergleichungsrelation, etwa Gleichheit oder gar Identität. Derlei kann ohne Zweifel in diesem oder jenem besonderen Falle einem Vergleichungsurteile zu Grunde liegen; in der Regel aber zeigt daran unvoreingenommene Beobachtung weder negativen Charakter noch eine andere zum Zwecke des Negierens implizierte Relation. Weiter zeigt aber die direkte Erfahrung auch noch dies mit gröſster Klarheit, daſs Abstände

---

gegenüber nicht überflüssig ist. Das „Auseinanderhalten“, dessen Sicherheit nach S. 122 des erwähnten Buches das „unmittelbare Bewuſstsein“ der Verschiedenheit „bestimmt“, ist jedenfalls eine psychische Leistung, indes doch niemand daran denken wird, Verschiedenheit als eine solche zu bezeichnen. Ein sekundäres Kriterium könnte darin natürlich immer noch liegen, aber nur unter günstigen Umständen, die, wenn das im Texte von der Vorzugsstellung des Physischen Gesagte seine Richtigkeit hat, weit davon sein werden, die Regel auszumachen.

[1] So von Brentano (*Vom Ursprung sittlicher Erkenntnis.* Leipzig 1889. S. 73).

zwischen Orten, Tönen u. a., also Verschiedenheiten, verglichen werden können, ohne dabei entfernt an Merklichkeit oder andere Hülfsdaten zu denken, und daſs das Ergebnis solcher Vergleichungen durchaus nicht etwa Gleichheit oder Ungleichheit sein muſs, sondern ein sehr entschiedenes Urteil im Sinne von Gröſser oder Kleiner sein kann. Zieht man aber schlieſslich die vielberufenen Merklichkeitsgrade selbst in Betracht, so fällt, was sich dabei heraustellt, ganz und gar nicht zu ihren Gunsten in die Wagschale. Ein Anderes ist es freilich, wenn das eine Mal eine Verschiedenheit sich kaum oder nur mit gröſster Mühe erkennen läſst, indes sie ein ander Mal sozusagen von selbst in die Augen springt; und ohne Zweifel giebt es auch Übergangsstufen zwischen diesen Extremen. Aber ebenso bekannt ist, daſs sich die Kurve der Leichtigkeiten, wenn man so sagen darf, ihrem Maximum asymptotisch nähert, noch lange bevor die als Abscissen gedachten Verschiedenheitsgröſsen ihre etwaige Maximalgrenze erreichen. Für einen Menschen mit normalem Tonsinn ist die Sekunde nicht „schwerer" zu unterscheiden, als Terz oder Sext oder Undecim oder Doppeloktave und was darüber hinausliegt, indes die Verschiedenheitszunahme sicher auffällig genug ist. Wer aber etwa in der Besonderheit des Toncontinuums Anlässe findet, die Triftigkeit dieses Beispieles in Frage zu ziehen, kann unschwer aus dem Farbencontinuum sich unangreifbarere Beispiele in Menge auswählen. Kurz, man würde übel genug wegkommen, wenn man sich bei Verschiedenheitsvergleichungen darauf steifen wollte oder könnte, sich ausschlieſslich an die betreffenden „Merklichkeiten" zu halten, — von der Absonderlichkeit ganz abgesehen, die doch jedenfalls darin läge, wenn allemal ein Mehr (an Verschiedenheit) gerade dort behauptet würde, wo die Vergleichung eigentlich ein Weniger (an aufgewendeter Arbeit) ergeben hätte.

§ 11. Das ebenmerklich Verschiedene.

Muſs ich sonach dem, was mir als eine beträchtliche Überschätzung der Bedeutung des Merklichkeitsmomentes erscheint, entschieden entgegentreten, so soll doch damit in keiner Weise in Zweifel gezogen sein, daſs unter besonderen Umständen die Merklichkeit und deren Erkenntnis für den Ausfall der Vergleichung, zunächst für die Präzisierung ihres

Ergebnisses von groſsem Vorteile, vielleicht aber auch als Fehlerquelle von Nachteil werden kann. Ich denke natürlich zunächst an die Thatsache der Unterschiedsschwelle und an den darauf gegründeten Begriff der „Ebenmerklichkeit", für dessen Bedeutung Theorie wie Praxis übereinstimmendes Zeugnis ablegen. Trotz dieser Übereinstimmung möchte es jedoch nicht überflüssig sein, das eben über das Verhalten von Verschiedenheit und Merklichkeit Dargelegte durch ein paar diesem Spezialfalle gewidmete Erwägungen zu ergänzen.

Daſs vor allem zwei eben merkliche Verschiedenheiten darum nicht, wie z. B. noch Exner annimmt,[1] auch gleich sein müssen, ist nach Obigem nun völlig selbstverständlich. So weit ist der Position Brentanos[2] in dieser Sache unbedenklich zuzustimmen; streng genommen aber schon nicht mehr darin, daſs dieser eben Merkliches doch als jedenfalls gleichmerklich konzediert,[3] wenigstens nicht, sofern bei „gleichmerklich" an Gleichheit dem Merklichkeitsgrade nach gedacht ist. Man mache sich doch die Eigentümlichkeit des Gedankens klar, der *in* den Worten „eben merklich" seinen Ausdruck findet. Der betreffende Merklichkeitsgrad ist hier dadurch charakterisiert, daſs er einer Verschiedenheit zugehört, die, wenn nur ums geringste herabgesetzt, unmerklich wird. Wie groſs also die Merklichkeit ist, die sich zuerst geltend macht, indem der Unterschiedsschwellenwert eben überschritten wird, darüber ist im Begriffe des „eben Merklichen" eigentlich noch gar nichts vorgegeben: der Möglichkeit nach könnte die Merklichkeitslinie mit einem hohen wie mit einem niedrigen Merklichkeitsgrade einsetzen, und ob es immer der nämliche Grad ist, darüber kann am Ende nur die Empirie entscheiden. Nur wenn man das „gleich" in „gleich merklich" auf die Umstände bezieht, nach denen im Falle der Ebenmerklichkeit die Sachlage charakterisiert ist, dann werden natürlich zwei Fälle von Ebenmerklichkeit auch als Fälle von „Gleichmerklichkeit" anzuerkennen sein.

So wenig nun Gleichheit der Verschiedenheiten begrifflich

---

[1] *Hermanns Handbuch* II. 2. S. 218. Noch weiter in gewissem Sinne geht Lipps' Position: „Das eben Merkliche hat — für die Wahrnehmung nämlich — keine Gröſse mehr" (*Grundzüge der Logik.* S. 121).

[2] *Psychol.* I. S. 9.

[3] A. a. O. S. 88.

an deren Ebenmerklichkeit gebunden ist, so wenig geht eines mit dem anderen thatsächlich jedesmal zusammen. Dafür bürgt die Variabilität jener dispositionellen Faktoren, für die der Ausdruck „Unterschiedsempfindlichkeit" doch kaum mehr als ein Sammelname ist, der den praktischen Bedürfnissen gemäſs die zu vergleichenden „Reize" und das Vergleichungsergebnis als Anfangs- und Endglied herausgreift, indes genauere Analyse mindestens sozusagen zwei Stufen auseinanderzuhalten genötigt sein wird. Ich meine einmal die Weise, in der die Empfindung den Veränderungen der Reize zu folgen vermag, dasjenige im Verhalten des vergleichenden Subjektes, dem Stumpf die Bezeichnung „Unterschiedsempfindlichkeit" ausschlieſslich vorbehalten möchte,[1] indes mir angemessener schiene, hier im Hinblick auf einen sofort zu berührenden Gegensatz „Reizunterschiedsempfindlichkeit" zu sagen. Ferner die Weise, in der die vergleichende Thätigkeit das der Reizunterschiedsempfindlichkeit gemäſs beschaffene inhaltliche Material gleichsam zu bewältigen im stande ist, was in der von Stumpf erwiesenen[2] Urteilsschwelle zu Tage tritt; es schiene mir charakteristisch, im Gegensatz zur Reizunterschiedsempfindlichkeit hier von „Inhaltsunterschiedsempfindlichkeit" oder auch Gegenstandsunterschiedsempfindlichkeit zu reden. Wo dergleichen Distinktionen entbehrlich sind, könnte dann immer noch der Terminus „Unterschiedsempfindlichkeit" schlechtweg seine herkömmliche Anwendung finden.

Was nun zunächst die Reizunterschiedsempfindlichkeit anlangt, so ist sofort klar, daſs, je nachdem die Empfindung bei möglichst kontinuierlich sich veränderndem Reize gröſsere Sprünge machen muſs, die eben merklichen Verschiedenheiten gröſser sein werden, als wenn die Sprünge kleiner sind. Das nächstliegende Beispiel dafür geben wohl die Verschiedenheiten der Sehschärfe bei direktem und bei indirektem Sehen, indem sonst, wie schon J. v. Kries bemerkt hat,[3] „bei der groſsen Stumpfheit des peripheren Raumsinnes im Vergleich zum centralen jeder Gegenstand beim Übergang vom direkten ins indirekte Sehen vollständig zusammenzuschrumpfen scheinen" müſste.

---

[1] *Tonpsychologie* Bd. 1. S. 30.

[2] A. a. O. S. 33.

[3] *Vierteljahrsschr.* 1882. S. 287.

In gleicher Weise wird aber auch die Inhaltsunterschiedsempfindlichkeit zur Geltung kommen müssen, falls die Urteilsschwelle, wie doch nicht zu bezweifeln, verschiedene Werte annehmen kann. Wenn ich dagegen vor Jahren den Versuch gemacht habe,[1] der Urteilsdisposition des vergleichenden Subjektes unter dem Namen der „Unterscheidungsschärfe" auch der übermerklichen Verschiedenheit gegenüber eine die Gröfse der letzteren modifizierende Bedeutung zu wahren, so scheint mir solches heute für den wichtigsten der dabei in Frage kommenden Fälle aus einem prinzipiellen Grunde mehr als bedenklich. Erkenne ich (durch evidentes Urteil) *a* und *b* als verschieden, und zwar, wie nach Obigem selbstverständlich, in bestimmtem Grade verschieden, so hängt dieser Grad mit Notwendigkeit an der Beschaffenheit von *a* und *b*. Die mit Evidenz erkannte Verschiedenheit ist die Verschiedenheit von *a* und *b*, und „erscheint" nicht etwa blofs als solche. Es hat dann aber keinen Sinn, anzunehmen, dafs das nämliche *a* und *b* je nach Dispositionen des Vergleichenden bald mehr, bald weniger verschieden wäre.[2] Dagegen wird für evidenzlose Vergleichungsurteile, deren Möglichkeit namentlich für den Fall untermaximaler Aufmerksamkeit doch nicht wohl in Abrede zu stellen sein möchte, der Gedanke an einen Einflufs der Subjektivität auch auf die Gröfse der dem betreffenden Urteile zu Grunde liegenden „vor-

---

[1] „Über Sinnesermüdung im Bereich des WEBERschen Gesetzes". *Vierteljahrsschr.* 1888. S. 21.

[2] Der Einwand trifft, wenn ich recht sehe, zugleich auch FECHNERS sog. „Unterschiedsmafsformel". (*Elemente.* Bd. II. S. 96 ff.), sofern diese, von erst weiter unten zu erwägenden Schwierigkeiten ganz anderer Art noch abgesehen, zusammen mit der „Unterschiedsformel" (vergl. unten § 31) die Konsequenz in sich schliefst, „dafs allgemein der Empfindungsunterschied *U* die Unterschiedsempfindung *u* um einen gewissen, dem Logarithmus der Verhältnisschwelle *v* proportionalen Wert übertrifft" (vergl. FECHNER „Über die psychophysischen Mafsprinzipien und das WEBERsche Gesetz" in *Wundts Philos. Stud.* Bd. IV. S. 194). Ist „Unterschiedsempfindung" so viel als beurteilte (vielleicht wäre noch deutlicher zu sagen: geurteilte) Verschiedenheit, dann geht es nicht an, ihr die wahre Verschiedenheit als ein mit ihr nur funktionell Zusammenhängendes gegenüberzustellen. Auch den von RADAKOVIČ („Über FECHNERS Ableitungen der psychophysischen Mafsformel", *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1890. S. 21 ff.) der Natur dieser Funktion gewidmeten Untersuchungen steht dieses prinzipielle Bedenken entgegen.

gestellten" Verschiedenheit mindestens nicht vorgängig von der Hand zu weisen sein.[1]

Darf man sonach im allgemeinen darauf rechnen, daſs bei Verschiedenheit der Unterschiedsempfindlichkeit (im weiteren Sinne) eben merkliche Verschiedenheiten nicht gleich sein werden, so bedeutet im Gegensatze hierzu Gleichheit der Unterschiedsempfindlichkeit eine wohlbegründete Präsumtion für Gleichheit der eben merklichen, man kann übrigens ohne weiteres auch sagen: der gleich merklichen Verschiedenheiten.[2] Der nächste Grund, warum die eine Verschiedenheit über, die andere Verschiedenheit unter der Schwelle zu liegen kommt, ist am Ende doch die Gröſse der betreffenden Verschiedenheit.[3] Damit ist aber natürlich keineswegs die Möglichkeit ausgeschlossen, daſs das „Merken" sich nicht auch noch von Faktoren abhängig erweisen könnte, die sich unter den Gedanken der Unterschiedsempfindlichkeit nicht oder schwer subsumieren lassen. Wir werden einer solchen Eventualität gegenüber weiter unten Stellung zu nehmen haben, sobald wir die in den letzten Darlegungen nur vorübergehend herangezogenen Vergleichungen von Verschiedenheiten ausdrücklich zum Hauptobjekt der Untersuchung gemacht haben werden.

Einstweilen aber dürfte im bisherigen die Rechtfertigung dafür gewonnen sein, künftig zunächst von der Verschiedenheit und nur etwa im Bedürfnisfalle auch von deren Merklichkeit zu handeln.

---

[1] Der schwerfälligere Ausdruck „Inhalts- (oder Gegenstands-) Unterschiedsempfindlichkeit" scheint mir vor dem minder schwerfälligen Terminus „Unterscheidungsschärfe" den Vorzug zu haben, daſs darin auch äuſserlich die Zugehörigkeit zu dem hervortritt, was man sich nun einmal thatsächlich in den Sinn des Wortes „Unterschiedsempfindlichkeit" einzubegreifen gewöhnt hat. Dieser Sinn ist ja, falls ich meinem subjektiven Sprachgefühl nicht zu viel Geltung beimesse, natürlichst durch die Wendung: „Empfindlichkeit für Unterschied" wiederzugeben, wobei als zu „Empfindendes" nicht etwa die Reize, sondern der „Unterschied" (genauer die Verschiedenheit, vergl. unten § 21) gedacht ist, wie schon Fechners Termini „Unterschiedsempfindung" und „empfundener Unterschied" deutlich machen.

[2] Übereinstimmend auch G. E. Müller (*Zur Grundlegung*, S. 227, 395 unten) von Bedenken gegen „Empfindungszuwüchse" (vergl. unten § 27) darf hier noch abgesehen werden.

[3] Vergl. auch Grotenfelt a. a. O. S. 58.

(Fortsetzung folgt.)

Über die Bedeutung des WEBERschen Gesetzes.

Beiträge zur Psychologie des Vergleichens und Messens.

Von

A. MEINONG.

Dritter Abschnitt.

Über Teilvergleichung und Messung.

§ 12. Relationen durch Teilvergleichung.

Wie alle Verschiedenheiten, so sind im besonderen auch die Gröfsenverschiedenheiten selbst wieder Gröfsen, und zwar bestimmte Gröfsen, so gewifs die verglichenen Gröfsen bestimmte sind. Denn zwischen zwei gegebenen Gröfsen giebt es, wie auch zwischen zwei sonstigen Vergleichungsfundamenten, nur eine Verschiedenheit. Gleichwohl kann es zwischen zwei Gröfsen mehr als eine Vergleichungsrelation geben. Ich denke nicht an die Ähnlichkeit, deren Verhältnis zur Verschiedenheit hier ununtersucht bleibe, da sie bei Gröfsen ohnehin nicht leicht zur Sprache kommen wird. Aber Vergleichungsrelationen müssen doch jedenfalls auch solche Beziehungen heifsen, die sich statt aus der Vergleichung der vorgegebenen ganzen Gröfsen aus der Vergleichung ihrer Teile ergeben und dann auf das betreffende Ganze mit dem Rechte übertragen werden, mit dem sich, was von den Teilen gilt, gleichsam durch diese hindurch auch vom Ganzen aussagen läfst. Man wird Relationen dieser Art, die natürlich zunächst nur an teilbaren Gröfsen anzutreffen sein werden, passend Relationen durch Teilvergleichung nennen; die beiden einfachsten Fälle derselben verdienen hier vor allem unsere Aufmerksamkeit.

I. Sind A und B die vorgegebenen Gröfsen, Raumstrecken z. B., und ist A gröfser als B, so läfst sich A in zwei Teile zerlegen oder zerlegt denken derart, dafs der eine der beiden Teile genau gleich B ist. Den anderen Teil nennt man bekanntlich den Unterschied oder die Differenz zwischen A und B; für die Relation aber, in die auf Grund solcher Teilvergleichung A und B gesetzt ist, hat man den bekannten symbolischen Ausdruck: $A—B$, wofür auch die Benennung „arithmetisches Verhältnis" vorliegt.

II. Zunächst unter der Voraussetzung, dafs der „Unterschied" immer noch gröfser als B ist, läfst sich an ihm das eben gekennzeichnete Verfahren wiederholen, ebenso eventuell am zweiten so gewonnenen Unterschiede u. s. f., bis man eben zu einem Unterschiede kleiner als B gelangt. Das charakteristische Ergebnis dieses Verfahrens ist jedenfalls eine Zahl, nämlich die Anzahl Unterschiedsbestimmungen (resp. Unterschiede), zu welchen das A dem B vermöge der Gröfse dieser beiden Gelegenheit giebt. Für die in Rede stehende Relation zwischen A und B aber ist das Symbol $A : B$, sowie die Benennung „geometrisches Verhältnis" gebräuchlich. Die Weiterführung des skizzierten Verfahrens unter besonderen Voraussetzungen, wie namentlich der, dafs für A und B Zahlen eintreten, bedarf keiner besonderen Darlegung. Ohne die in diesem Falle möglichen Präzisierungen und wohl auch Umdeutungen kommt bei diesem Verfahren der allfällige letzte Rest nicht zur Geltung, falls ihm nicht schliefslich noch im Sinne des Verfahrens I Rechnung getragen wird.

Dem Umstande gegenüber, dafs es herkömmlich ist, arithmetische wie geometrische Verhältnisse durch Zahlen zu bestimmen, mufs gefragt werden, ob uns nicht schon hier Instanzen gegen die oben freilich nur vorübergehend ausgesprochene Behauptung entgegentreten, dafs es aufser Verschiedenheit (und Ähnlichkeit) keine Relationen gebe, die Gröfsen sind. In der That ist es ja völlig korrekt, $4 - 2 = 2$, oder $6 : 2 = 3$ zu setzen u. dergl.; aber sollte, was da der 2 oder 3 gleich gesetzt wird, wirklich die Relation sein, der dann freilich Gröfse zukommen müfste? Es hätte doch gar keinen Sinn, eine Relation einer Zahl, die natürlich stets eine Komplexion ist, gleichzusetzen; — unter welchen ganz besonderen Voraussetzungen Verschiedenheiten durch Zahlen „ausdrückbar" sein mögen, davon soll weiter unten die Rede sein. Zudem ist, was bei obiger Anschreibung des arithmetischen Verhältnisses rechts vom Gleichheitszeichen steht, nur dann eine unbenannte Zahl, wenn auch links unbenannte Zahlen oder benannte ausschliefslich nach ihrem Zahlenwerte in Betracht kommen; und 2 Äpfel, 2 Meter oder 2 Stunden wird vollends niemand für Relationen halten. Die „unbenannte“ Zahl im Falle des g e o m e t r i s c h e n Verhältnisses aber hat im Grunde ja ebenfalls ihre, wenn auch unausgesprochene Benennung: sie sagt, wievielmal der oben charakterisierte Vorgang der Teilvergleichung unter den gegebenen Umständen stattfinden kann, und die Gesamtheit dieser „Male“ ist wieder nichts weniger als eine Relation. Und in der That, hält man sich die Natur der Relation vor Augen, in welche zwei Gröfsen durch diese oder jene Art der Teilvergleichung zu einander treten, so läfst sich an derselben die Gelegenheit zu Steigerung oder Herabsetzung schlechterdings nicht finden. Dagegen führen diese Operationen allerdings auf Ergebnisse, die zwar nicht selbst Relationen, wohl aber Gröfsen und eventuell durch Zahlen ausdrückbar sind.

An dieses Ergebnis, das ja bei ausreichender Erweiterung der arithmetischen Grundbegriffe zu beliebiger Genauigkeit geführt werden kann, wird man sich zunächst auch der Thatsache gegenüber zu halten haben, dafs aus Gleichsetzung zweier „geometrischer“ Verhältnisse die neue, komplexere Relation der Proportionalität hervorgeht. Aber allerdings möchte dies für die Rolle, welche der Proportionalität allenthalben zukommt, nicht das einzig Mafsgebende sein. Wir werden weiter unten sehen, dafs der zu einem geometrischen Verhältnis gehörige Zahlenwert mit der Verschiedenheit der in dieses Verhältnis gesetzten Gröfsen in derart innigem Zusammenhange steht, dafs jener Zahlenwert unter Umständen sehr wohl als Repräsentant der Gröfse dieser Verschiedenheit dienen kann, insbesondere die Gleichheit zweier der in Rede stehenden Zahlengröfsen die Gleichheit der betreffenden Verschiedenheiten garantiert. Wirklich bedeutet Proportionalität oft in erster Linie Gleichheit der Verschiedenheiten; an der Auffassung jener Relationen, die zu diesen übereinstimmenden Ergebnissen geführt haben, kann das aber nichts ändern.

§ 13. Das Messen.

Niemand wird auf die Thatsachen der Teilvergleichung achten, ohne sofort auch an das Messen zu denken, redet man doch schon bei der rein rechnerischen Auswertung des geometrischen Verhältnisses in analoger Weise von der Maſszahl, wie man beim arithmetischen Verhältnisse vom Unterschiede spricht. Es gilt nun, das Verhältnis zwischen Messung und Teilvergleichung ausdrücklich festzustellen und daraus für die Messung die uns für das Weitere wichtigen Konsequenzen zu ziehen.

Alles Messen ist seiner Natur nach Teilvergleichung, aber es gehört mit zu dieser Natur, nicht nur Teilvergleichung zu sein. Ganz wesentlich kommen nämlich noch gewisse Operationen hinzu, die bestimmt sind, der Vergleichung eine ohne sie unerreichbare Exaktheit und Zuverlässigkeit zu geben: das „Auftragen“ einer Strecke, das Anlegen des Maſsstabes, das Anfüllen eines Hohlmaſses sind Operationen dieser Art; nicht minder gehören die mannigfaltigen Verrichtungen hierher, die der Sprachgebrauch unter dem Namen des Wägens von dem streng genommen in zu engem Sinne verstandenen Messen ausdrücklich zu sondern liebt. Trotz ihrer so weitgehenden Verschiedenartigkeit dienen alle diese Verrichtungen in ganz unverkennbarer Weise dem einen gemeinsamen Zwecke der Bestimmung von Gleichheiten; sie kommen damit der Vergleichungsthätigkeit gerade dort zu Hülfe, wo eine solche mit Rücksicht auf die im Schwellengesetze hervortretende Unvollkommenheit menschlicher Erkenntnisfähigkeit vor allem not thut.

Es kann Denjenigen, der gewohnt ist, die wesentlich psychische Natur eines jeden Erkenntnisaktes stets im Auge zu behalten, fürs erste ein wenig befremden, wie Vorgänge wesentlich psychischer Natur im stande sein sollen, jene psychischen Leistungen auf ein, gelegentlich noch dazu so beträchtlich höheres Niveau zu erheben. Indes genügt ein Blick auf die Bedeutung etwa des einfachsten Aufeinander- oder Aneinanderlegens, hierüber ins klare zu kommen. Für die Zuverlässigkeit einer Vergleichung sind, wie wir sahen, die äuſseren Umstände, unter denen sie sich vollzieht, und insbesondere die Raum- und Zeitlage des zu Vergleichenden durchaus nicht gleichgültig: räumlich und zeitlich Nahes vergleicht sich leichter als Fernes; es müſste also schon ein Verfahren zur Herstellung der günstigsten äuſseren Vergleichungsbedingungen die Aussicht auf zuverlässige Ergebnisse erhöhen.

Nun wäre aber mit dem Hinweise hierauf im vorliegenden Falle doch kaum das Wesentliche getroffen. Man kann ja nicht sagen, dafs, wenn ich einen Mafsstab etwa von der Länge eines Dezimeters an eine zu messende Linie anlege, dadurch die Situation geschaffen ist, in der sich die durch den Mafsstab repräsentierte Strecke mit der an der zu messenden Linie durch dieses Anlegen herausgehobenen Teilstrecke am besten vergleichen liefse. Der Messende denkt auch gar nicht daran, hier Strecken zu vergleichen, sondern beschränkt sich darauf, die Punkte der Linie zu beachten, eventuell zu fixieren, die mit dem Anfangs- und Endpunkte des Mafsstabes „zusammenfallen". Allerdings ist er aber zugleich überzeugt, dafs das in dieser Weise abgeschnittene Stück der zu messenden Linie viel genauer der Länge eines Dezimeters entspricht, als, von unwahrscheinlichsten Zufällen abgesehen, mit Hülfe des „blofsen" Augenmafses zu erzielen wäre. Und dieses Zutrauen ist vollberechtigt: es beruht auf der Erfahrung, dafs wir, mehr kurz als genau geredet, Orte schärfer unterscheiden als Ausdehnungen. In gleicher Weise wird, wer einen gegebenen Abstand mit Hülfe des Zirkels auf einer Linie „aufträgt", eine besondere Vergleichung des vorgegebenen mit dem aufgetragenen Abstande sicher nicht vornehmen; von der Gleichheit der beiden Abstände aber wird er ohne weiteres in dem Mafse überzeugt sein, als er ein gutes Zutrauen darauf hat, dafs die Zirkelspitzen den rechten Abstand erhalten haben und während der Bewegung des Zirkels von einem Orte nach einem anderen in unverändertem Abstande gegeneinander geblieben sind. Ähnliches liefse sich natürlich nun auch von anderen Gestalten des Messens darthun, so dafs man zusammenfassend sagen kann: die Mefsoperationen sind Verfahrungsweisen, eventuell auch ohne ausdrückliche Vergleichung Gleichheiten mit gröfserer Zuverlässigkeit festzustellen, als der Unvollkommenheit unserer Vergleichungsfähigkeit nach durch direktes Vergleichen ohne solche Hülfsmittel zu erzielen wäre. Ihren Wert gewinnen die so ermittelten Teilgleichheiten dann dadurch, dafs damit die Voraussetzungen zur Feststellung jener Relationen gewonnen sind, von denen oben als Relationen durch Teilvergleichung die Rede war. Umgekehrt wird der Wert der Teilvergleichung nicht zum geringsten darin zu finden sein, dafs sie die Formen darbietet, um die Ergebnisse der Messung zusammenzufassen und durch Rechnung weiterzuführen.

Da es immer noch Theoretiker giebt, denen die Anerkennung psychischer Thatsachen besten Falles als ein notwendiges Übel erscheint, das auf das Minimum des Zulässigen zu reduzieren, stets im Interesse wissenschaftlicher Strenge wäre, so mag es an dieser Stelle nicht überflüssig sein, dem eben Dargelegten gegenüber ausdrücklich das Misverständnis auszuschliefsen, als hätte man im Messen das Mittel gefunden, sich des im direkten Vergleichen nun einmal unverkennbar vorliegenden Anteils des Psychischen zu entledigen, die psychischen Leistungen ohne Rest durch physische zu ersetzen. Denn sind auch die Messungsoperationen, wie berührt, zumeist physischer Natur, so kommt ihnen ihr Wert eben doch nur insoweit zu, als ihren Ergebnissen eine Bedeutung beizulegen ist, die sich in einem anderen Sinne als dem einer psychischen Thatsache nun und nimmer erfassen läfst. Was hätte auch das Aufeinanderlegen zu besagen, wäre es nicht das Mittel, die betreffenden Strecken eventuell zur „Deckung“ zu bringen? Und welchen Anlafs hätte man, sich bei der Thatsache einer solchen Deckung aufzuhalten, wüfste man nicht, dafs, was sich genau „deckt“, auch für genaueste Vergleichung stets nur Gleichheit ergeben könnte? Das Messen als einen rein physischen Vorgang ansehen, hiefse demnach soviel, als etwa meinen, Addieren und Multiplizieren werde dadurch in ein Physisches umgewandelt, dafs sich beides an der Rechenmaschine verrichten läfst. — Vielleicht verdient hier nebenbei noch angemerkt zu werden, dafs es überdies sehr wohl auch Messungsoperationen geben kann, die ausschliefslich innerhalb psychischen Geschehens verlaufen. Bei rasch aufeinanderfolgenden Geräuschen, etwa dem Ticken einer Taschenuhr, erweist es sich bekanntlich oft als bequem, statt jedes einzelne der betreffenden Geräusche zu zählen, dieselben in Gruppen zusammenzufassen und an diesen die Zählung vorzunehmen; beim Zählen von Schwebungen insbesondere ist dies oft geradezu das einzige Mittel, zum Ziele zu gelangen. Herkömmlich ist es nun freilich nicht, solches Vorgehen Messen zu nennen; aber die Wesensgleichheit liegt zu Tage, obwohl dabei physische Hülfsmittel, wie etwa das Niederlegen je eines Fingers nach Ablauf je einer Gruppe zwar oft vorteilhaft, aber sicher durch nichts gefordert sind.

Nun erwächst jedoch aus dem Nachdruck, mit dem der Anteil des Psychischen an allen Messungsthatsachen betont wird, eine Art Gerechtigkeitsverpflichtung, zugleich ebenso rückhaltslos einzuräumen, daſs jene ihrer Natur nach zumeist psychischen Operationen es sind, auf die zum allergröſsten Teile jener Exaktheitsvorzug zurückgeht, der manchen Wissensgebieten mit Recht nachgerühmt werden darf. Sich selbst überlassen bleibt die Vergleichungsthätigkeit dem Schwellengesetze gegenüber gleichsam wehrlos: der gröſste Scharfsinn vermöchte, falls er nicht etwa weit über die durch die Erfahrung gezogenen Grenzen hinaus gesteigert gedacht würde, für Zirkel oder Maſsstab keinen Ersatz zu bieten. Freilich verlangt dieser Exaktheitsvorzug ein Opfer, das mindestens erkenntnis-theoretisch von prinzipiellster Bedeutung ist: er ist nur um den Preis jener Apriorität zu erreichen, welche unter günstigen Umständen die Ergebnisse des direkten, nicht auf äuſsere Hülfen gestützten Vergleichens auszeichnet. Vergleiche ich zwei Objekte A und B, und gelange ich auf diesem direkten Wege zur Einsicht in ihre Verschiedenheit, so ist die so gewonnene Erkenntnis von aller Erfahrung — auſser etwa derjenigen, die mich mit den Inhalten A und B versehen hat, — unabhängig, in diesem Sinne also durchaus apriorisch. Stelle ich hingegen durch Messung fest, daſs B etwa fünfmal in A enthalten ist, so sind zum mindesten über die Konstanz des Maſsstabes während der Messungsoperation Voraussetzungen gemacht, die in anderem als in diesbezüglichen Erfahrungen nicht begründet sein können, dadurch aber auch dem Messungsergebnis den Charakter der von der Erfahrung abhängigen, also der empirischen Erkenntnis aufdrücken. Praktisch wird der hierin implizierte Verlust an Sicherheit natürlich um so weniger in Betracht kommen, je mehr sich selbst die aprioristischeste aller Wissenschaften, die Mathematik, schon nach den allerersten Schritten vermöge der Unvollkommenheit des menschlichen Intellektes auf empirische Hülfen angewiesen findet,[1] ohne dabei praktisch merklichen Schaden zu nehmen.

[1] Vergl. Ehrenfels in der *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* Jahrg. 1891. S. 311 ff.

§ 14. Unmittelbare und mittelbare Messung.

So einfach dem Gesagten zufolge alles Messen seinem Grundgedanken nach ist, so werden ihm doch durch die Bedürfnisse der Praxis konkrete Aus- und Umgestaltungen aufgedrängt, von denen hier als von den verschiedenen Arten des Messens kurz die Rede sein mufs.

Im Bisherigen wurde stillschweigend vorausgesetzt, das „Mafs“ könne an das zu Messende sozusagen unmittelbar herantreten, zu diesem unmittelbar in die erforderliche Beziehung gesetzt werden. Dies wird jedoch oft nicht leicht genug, oft auch gar nicht ins Werk zu setzen sein, und in solchen Fällen empfiehlt es sich, die Messung an einem Stellvertreter des zu Messenden vorzunehmen. Gilt es, die Länge einer Linie zu bestimmen, welche eine Seite in einem Quadrat ausmacht, so kann ich, wenn aus irgend einem Grunde eine andere der Quadratseiten der Messung leichter zugänglich ist, ganz gut an dieser statt an jener die Messung vornehmen; ich hätte natürlich ebensogut die Messung an einer halb oder einer doppelt so langen Linie vornehmen können, wenn eine solche Linie nebst ihrem Gröfsenverhältnis gegenüber der zu messenden Linie gegeben gewesen wäre. Es giebt Umstände, durch welche diese Art des Vorgehens ausnahmslos geboten erscheint: das Wägen ist ein einfaches Beispiel hierfür. Fafst man das Wägen, wie man doch wohl mufs, als ein Vorgehen, dazu bestimmt, das Gewicht eines Gegenstandes zu messen, so ist sofort auffällig, dafs, was man hier durch Auflegen von bekannten Gewichten auf die eine Wagschale zusammensetzt und in dieser Weise bestimmt, niemals das Gewicht des betreffenden Körpers selbst, sondern in der Regel blofs ein vermöge der Konstruktion der Wage genau gleiches Gewicht ist, ausnahmsweise jedoch, wie bei der Dezimal- und sogenannten Schnellwage, ein beträchtlich davon verschiedenes sein kann, dessen Gröfse zu der des zu messenden Gewichtes in einem mehr oder weniger einfachen, jedenfalls aber bekannten funktionellen Verhältnisse steht. Ich will Messungen dieser Art als mittelbare Messungen denen ohne Stellvertretung als unmittelbaren Messungen gegenüberstellen.

Übrigens sei der Aufstellung dieser Einteilung sogleich die Bemerkung beigefügt, dafs ihr eine erhebliche praktische

Bedeutung deshalb nicht wohl zukommen wird, weil es nicht selten von ganz nebensächlichen Umständen, ja geradezu von Zufällen abhängen kann, ob eine Messung unmittelbar oder mittelbar, und im letzteren Falle, ob sie mehr oder weniger mittelbar, d. h. von unmittelbaren Messungsvorgängen durch mehr oder weniger Zwischenglieder getrennt, stattfindet. Von theoretischem Interesse ist dagegen die Frage nach der Eignung für unmittelbare Messung. Ohne Zweifel kommt in dieser Beziehung dem Raume eine Vorzugsstellung zu; mir schiene indes zu weit gegangen, wollte man Räumliches als das allein unmittelbar Mefsbare bezeichnen.[1] Dafs nämlich im besonderen Zeit oft genug an Raum, also mittelbar gemessen wird, steht ja fest und hat an der Verwendung der Uhr ein ausreichend deutliches Beispiel. Aber schon, wer eine Zeitstrecke nach Pendelschwingungen mifst,[2] nimmt die Teilung und Teilvergleichung nicht an einer Raumstrecke, sondern an der zu messenden Zeitstrecke selbst vor, wenn auch, soweit die Amplitude der Schwingungen in Frage kommt — aber auch nur so weit — mit Hülfe einer (günstigen Falles) gleichbleibenden Raumstrecke. Noch auffälliger wird übrigens die prinzipielle Unabhängigkeit der betreffenden Zeit- von der Raummessung, wenn nicht die Pendelschwingungen mit dem Auge verfolgt, sondern vielleicht Pendelschläge, etwa auch Schwebungen oder sonstige Gehörsdaten, gezählt werden. Zweifel an der Möglichkeit unmittelbarer Zeitmessung könnten leicht auf dem Mifsverständnis beruhen, dafs man unvermerkt dort unmittelbare Vergleichung fordert, wo man doch nur den Thatbestand unmittelbarer Messung ins Auge fassen soll; wirklich ist in den eben berührten Beispielen von unmittelbarer Vergleichung der einzelnen Zeitabschnitte untereinander oder mit einem „Zeitmafsstabe" nicht die Rede. Aber die obigen Darlegungen über das Wesen der (zunächst unmittelbaren) Messung dürften bereits deutlich gemacht haben, dafs, so gewifs alles Messen wie alles Vergleichen in letzter Linie auf unmittelbares Vergleichen hinauslaufen mufs, es doch gerade die Hauptaufgabe des Messens bleibt, den Unzuverlässigkeiten des unmittelbaren

---

[1] So z. B. Fechner, *Philos. Stud.*, Bd. IV. S. 217 f., wohl auch Lipps, *Grundzüge der Logik.* S. 121 f.

[2] Vergl. Kries in der *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1892. S. 281.

Vergleichens durch Einschieben angemessener Zwischenvorgänge möglichst abzuhelfen.

§ 15. Eigentliche und surrogative Messung.

Nun mufs es aber auch Messungen geben, auf welche die obige Charakteristik der mittelbaren Messung so wenig Anwendung findet als die der unmittelbaren. Eine einfache Erwägung genügt, dies darzuthun. Ist alle Messung, so wie wir sie bisher kennen gelernt haben, Teilvergleichung, so können selbstverständlich nur solche Gröfsen mefsbar sein, die in gleichbenannte Teile zerlegbar sind, also die bereits oben im besonderen so genannten teilbaren Gröfsen. Nun nimmt man aber bekanntlich gar keinen Anstand, etwa Distanzen oder Verschiedenheiten zu messen, obwohl, wie schon einmal zu berühren Gelegenheit war, alle Relationen einfach, insbesondere Verschiedenheiten jedenfalls nicht aus Verschiedenheiten zusammengesetzt sind. Auch Temperaturhöhen[1] und Geschwindigkeiten werden gemessen, obwohl keine Temperatur aus Temperaturen, keine Geschwindigkeit aus Geschwindigkeiten besteht. Wir haben es hier also offenbar mit einer Erweiterung des Mafsbegriffes zu thun, und es gilt, nun auch die Klasse von Messungsvorgängen zu charakterisieren, in welcher diese Erweiterung zur Geltung kommt.

Der für uns ohnehin besonders wichtige Fall der Messung von Distanzen biete hierzu den Ausgangspunkt. Man kann, das steht aufser Zweifel, nicht eine Verschiedenheit nehmen und sie auf eine andere Verschiedenheit einmal oder mehrere Male „auftragen“; was meint man also, wenn man die eine Verschiedenheit etwa doppelt so grofs nennt? Fafst man zunächst etwa räumliche oder zeitliche Verschiedenheiten oder, wie man hier in besonderer Weise ungezwungen sagen kann, Fälle räumlicher oder zeitlicher Distanz ins Auge, so könnte vor allem die Einführung des Wortes „Distanz“ die Neigung erwecken, das von der Verschiedenheit anstandslos Zugegebene in Bezug auf die „Distanz“ zurückzunehmen. Warum sollte ich nicht eine Distanz zwischen zwei Zirkelspitzen nehmen, auf

[1] Allfälligen Bedenken gegen die Berechtigung des Ausdruckes „Temperaturmessung“ dürfte durch die folgenden Ausführungen wohl ausreichend Rechnung getragen werden.

einer Linie n-mal auftragen und auf diese Weise eine n-mal so groſse Distanz erhalten können? Die Weite des Sprachgebrauches, der solche Ausdrucksweise ohne den Schein besonderer Ungenauigkeit gestattet,[1] verrät, wie mir scheint, deutlich genug die Stelle, an der der Messungsgedanke in der uns bereits bekannten, sozusagen ursprünglichen Gestalt einsetzen kann. Ist die „Distanz", welche ich zwischen die Zirkelspitzen nehmen und übertragen kann, zunächst und in erster Linie wirklich eine Verschiedenheit und nicht vielmehr eine Strecke, deren Anfangs- und Endpunkt allerdings eine durch die Länge der Strecke völlig bestimmte Verschiedenheit aufweist? Jede Raum- oder Zeitstrecke zerfällt in Strecken und ist darum meſsbar im eigentlichsten Sinne. Jeder Raum- oder Zeitstrecke gehört ferner eine Raum- resp. Zeitdistanz zu, der ganzen Strecke wie ihren Teilstrecken. Und zwar ist nicht nur jeder Streckengröſse eine Distanzgröſse, sondern auch jeder Distanzgröſse eine Streckengröſse zugeordnet. Es liegt unter solchen Umständen nahe genug, was so notwendig zusammengeht, nicht streng auseinanderzuhalten, und nicht von Messung der Distanzen zu reden, wo man zunächst nur von Messung der zugeordneten Strecken reden dürfte. Man könnte dergleichen nun freilich einfach als Ungenauigkeit des Ausdruckes verwerfen, würde man nicht durch andere, unter ganz analogen Umständen sich vollziehende Überschreitungen der in unserer ersten Charakteristik des Messens gezogenen Schranken darüber belehrt, daſs es ganz bestimmte Bedürfnisse sind, die hierbei zu ihrem guten Rechte gelangen.

Was hat man sich denn eigentlich bei der Behauptung zu denken, daſs das Thermometer die Wärme zu „messen" bestimmt ist? Gemessen im eigentlichsten Wortsinne wird hier doch nur die Quecksilbersäule an einem allerdings in besonderer Weise angefertigten Maſsstabe; der Zusammenhang mit der Temperatur wird nur dadurch hergestellt, daſs einer bestimmten Höhe der Quecksilbersäule eben ein bestimmter Temperaturzustand entspricht, und daſs mit der Steigerung und Herabsetzung der Länge dieser Säule auch am Temperaturzustande ihrer Umgebung sich etwas steigert resp. herabsetzt. Die

[1] Vergl. auch A. Höfler in der *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1890. S. 497 f.

Annahme eines Parallelismus in den Veränderungen mufs dabei nicht einmal so gar wesentlich sein; sonst müfste es dem Alltagsdenken, dem bei „Wärme“ doch jederzeit die sensible Qualität vorschwebt, mehr Schwierigkeit bereiten, mit dem „Sinken“ des Quecksilbers eventuell auch ein „Steigen“, das der Kälte nämlich, in Verbindung zu bringen. Jedenfalls kann man also sagen: die Wärme gilt hier für „gemessen“, sobald ein anderes gemessen ist, dessen verschiedene Zustände mit den Wärmezuständen in empirisch festgestellter Regelmäfsigkeit koexistieren.

Und wie geht schliefslich das Messen der Geschwindigkeit vor sich? Bekanntlich so, dafs man Weg und Zeit mifst und die erhaltenen Mafszahlen durch Division (der ersten Mafszahl durch die zweite) verbindet. Wäre im Sinne einer früher besprochenen Annahme Geschwindigkeit selbst nicht anderes als Weg und Zeit, so hätten wir hier nichts als zwei Messungen im engsten Sinne vor uns, und nur die Division wäre eine schwer verständliche Zuthat. Ist aber Geschwindigkeit, wie oben zu zeigen versucht wurde, thatsächlich etwas anderes als „Weg und Zeit“, dann stellt das Messen der Geschwindigkeit wieder einen Fall dar, wo etwas für gemessen gilt, sobald ein anderes gemessen ist, das mit ersterem in ausreichend enger Verbindung steht. Die Verbindung ist diesmal keine blofs erfahrungsmäfsige, sondern eine ersichtlich notwendige: Geschwindigkeit ist eine Komplexion aus Weg und Zeit; ebenso ist der Quotient aus den zugehörigen Mafszahlen eine Komplexion aus diesen, allerdings eine ganz andere als die Geschwindigkeit, aber eine, deren Natur zusammen mit der der Geschwindigkeit garantiert, dafs jedem Werte dieses Quotienten eine bestimmte Gröfse der Geschwindigkeit entspricht, und dafs Steigerung und Herabsetzung der einen Gröfse stets mit entsprechender Steigerung und Herabsetzung der anderen Gröfse Hand in Hand geht.

Dafs man in Fällen, wie diese drei Beispiele uns deren vorführen, es mit etwas von der oben beschriebenen mittelbaren Messung völlig Verschiedenem zu thun hat, leuchtet auf den ersten Blick ein. Dennoch könnte man zunächst versuchen, den Unterschied in einen relativ äufserlichen Umstand zu verlegen, in die Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit des die Messung ermöglichenden Zwischengliedes mit dem zu Messenden. Auch in den drei letzten Fällen liegt nämlich ein solches

Zwischenglied vor: während aber bei dem, was oben mittelbare Messung genannt wurde, die Linie mit Hülfe einer, sei es gleichen, sei es ungleichen Linie, das Gewicht mittelst Gewicht gemessen wurde, fanden wir in den drei letzten Fällen Distanz an Strecke, Temperatur an räumlicher Ausdehnung, Geschwindigkeit an räumlicher zusammen mit zeitlicher Ausdehnung gemessen. Nun versagt aber das Gleichartigkeitskriterium bei mehr als einer Gelegenheit seinen Dienst, indem es Fälle, deren Zugehörigkeit zur „mittelbaren Messung" ohne weiteres klar ist, entweder ganz eindeutig in die Analogie zu den drei letzten Beispielen drängt, oder es gar zu einer Sache der Willkür macht, sie dieser Analogie oder der der mittelbaren Messung im obigen Sinne zuzuweisen. Ersteres würde z. B. von der Bestimmung des Flächeninhaltes etwa eines Dreieckes aus Grundlinie und Höhe gelten, die beide als Linien von der Flächengröfse, die sie messen helfen, toto genere verschieden sind. Letzterer Fall dagegen würde vorliegen, wo die Länge einer Dreiecksseite durch Messung der beiden anderen Seiten, sowie des von diesen eingeschlossenen Winkels bestimmt wird. Solche Messung müfste, sofern man dabei von Seitengröfsen ausgeht und auch zu Seitengröfsen gelangt, als mittelbare Messung im obigen Sinne bezeichnet werden, dagegen unseren drei Beispielen zuzugesellen sein, sofern die Messung doch auch von einer Winkelgröfse ihren Ausgang genommen hat. Man wird solchen Gegeninstanzen gegenüber sich auch nicht wohl auf den Sprachgebrauch berufen dürfen, der freilich Messen und Berechnen auseinanderhält: es wäre ja sehr fraglich, ob nicht auch schon manches von dem, was oben als mittelbare Messung behandelt wurde, sprachgebräuchlich zwangloser als Berechnung zu bezeichnen wäre.

In der That, gilt es, den durch die drei Beispiele illustrierten Thatbestand gegenüber dem der mittelbaren Messung zu kennzeichnen, so ist es ziemlich nebensächlich, ob der Stellvertreter oder Quasi-Stellvertreter dem zu Messenden auch wirklich wesensgleich ist.[1] Entscheidend dürfte dagegen überall sein, ob durch das Ergebnis der betreffenden Operation das zu Messende auch

[1] Thatsächlich wird auch kaum jemand Anstofs daran genommen haben, dafs bereits oben (vgl. S. 238 f.) die Messung der Zeit an räumlichen Bestimmungen ohne weiteres als ein Fall mittelbarer Messung in Erwägung gezogen worden ist, und zwar, wie im Hinblick auf eine am

wirklich für eigentlich gemessen gelten kann oder nicht, — anders ausgedrückt, ob die Natur des zu messenden Gegenstandes eine Messung in dem oben festgestellten eigentlichen Sinne gestattet, und der aus was immer für Gründen eingeschlagene Umweg am Ende doch genau das ergiebt, was der gerade Weg, die unmittelbare Messung nämlich, unter günstigen Umständen ergeben müſste. Wo immer dies zutrifft, fehlt jeder Grund, von anderem als eben wieder von mittelbarer Messung zu reden; und die Anwendung auf die Messung des Flächeninhaltes oder der Dreiecksseite bietet nun weiter keine Schwierigkeiten mehr. Zwar wird freilich niemand daran denken, etwa mit Hülfe ausreichend kleiner Quadrate eine, natürlich besten Falles approximative unmittelbare Messung einer Dreiecksfläche zu versuchen; dennoch führt die Messung von Grundlinie und Höhe zu einer Messung dieser Fläche im eigentlichsten Sinne. Denn Flächeninhalte sind teilbare Gröſsen; und könnte man eine geeignete Einheit auftragen, so müſste das Ergebnis mit dem durch Grundlinien- und Höhenmessung erlangten übereinstimmen. Vollends aber kann die Bestimmung der Seitenlänge, wie immer gewonnen, nur den Fall einer eigentlichen mittelbaren Messung repräsentieren.

Ganz anders, wenn man gleichsam vor die Aufgabe einer Messung bei Gröſsen gestellt ist, die eine Messung im bisher bezeichneten Sinne ihrer Natur nach deshalb gar nicht zulassen, weil sie gar nicht teilbare Gröſsen sind. Auch hier handelt es sich freilich, wie bei der mittelbaren Messung, um eine Art Stellvertretung, aber um eine ungleich weitergehende. Betrifft sie nämlich bei der mittelbaren Messung sozusagen nur den Weg, auf dem vorgegangen wird, so berührt sie in den zuletzt betrachteten Fällen das Ergebnis des Vorganges. Wird ein A mit Hülfe eines B mittelbar gemessen, so ist am Ende doch A das Gemessene, ganz ebenso, als wenn die Messung unmittelbar am A in Angriff genommen worden wäre. Dagegen ist, was aus Vorgängen von der letztbetrachteten Art hervorgeht, streng genommen gar nicht die Messung des A; vielmehr wird hier als Messung des A etwas bezeichnet, was eigentlich nur Messung eines B ist. Bei Messung der Distanz wird eigentlich nicht

Schlusse des gegenwärtigen Paragraphen zu machende Bemerkung hinzugefügt sein mag, ohne Erweiterung der oben für mittelbare Messung getroffenen Begriffsbestimmung.

diese gemessen, sondern die zugeordnete Strecke, bei Messung der Temperatur nicht diese, sondern der Quecksilberstand, bei Messung der Geschwindigkeit nicht diese, sondern eine aus Weg und Zeit gebildete neue Komplexion. An Stelle des eigentlich zu messenden Gegenstandes, des Meſsobjektes, wie man kurz sagen kann, ist ein Surrogat getreten, das eigentlich gemessen wird; ich stelle daher Messungen dieser Art als surrogative Messungen den früher betrachteten als eigentlichen Messungen gegenüber.

Es verdient ausdrücklich hervorgehoben zu werden, daſs hier mit „Surrogat“ nicht dasjenige bezeichnet wird, woran der Messungsakt unmittelbar angreift. Es kann mit letzterem zusammenfallen, wie das Beispiel von der Distanz und das von der Temperatur beweist; dort ist die Strecke, hier die Quecksilbersäule das Surrogat und zugleich das unmittelbar Gemessene. Dagegen werden im Beispiel von der Geschwindigkeit vielleicht Weg, eventuell auch Zeit unmittelbar gemessen; Surrogat ist hier aber jene Zahlengröſse, welche zu Weg und Zeit in der durch die bekannte Formel ausgedrückten funktionellen Beziehung steht. Hier wird also das Surrogat selbst mittelbar gemessen. Es mag dieser Hinweis noch ein Übriges thun, die prinzipielle Verschiedenheit der surrogativen von der mittelbaren, aber eigentlichen Messung ins Licht zu setzen.

Was das logische Verhältnis der so gewonnenen vier Klassenbegriffe anlangt, so ist aus dem Bisherigen wohl ausreichend klar geworden, daſs der Gegensatz des Unmittelbaren und Mittelbaren zunächst nur für die eigentliche Messung ins Auge gefaſst worden ist. Läſst man aber einmal die surrogative Messung ebenfalls als Messung gelten, dann ist sofort ersichtlich, daſs das Surrogat als solches jederzeit den Thatbestand der Vermitteltheit gewährleistet. Man kann dann auch zusammenfassend sagen: nur eigentliche Messung kann unmittelbar, nur mittelbare Messung kann surrogativ sein; zerfällt sonach eigentliche Messung in unmittelbare und mittelbare, so zugleich mittelbare in eigentliche und surrogative.

§ 16. Bedeutung und Bedingungen der surrogativen Messung.

Nun drängt sich aber doch vor allem die Frage auf, wie man denn eigentlich dazu komme, *A* in Fällen als gemessen zu bezeichnen, wo in Wahrheit doch B das Gemessene ist, — die Frage also, worin die vorliegende Erweiterung des Messungsbegriffes ihre Legitimation finde. Soweit ich sehe, liegt diese Legitimation einfach darin, dafs mit Hülfe des Surrogates die Vorteile, um deren willen Teilvergleichung und Messung bei teilbaren Gröfsen vorgenommen werden, sich unter günstigen Umständen zum gröfsten Teile auch unteilbaren Gröfsen zuwenden lassen.

Drei Dinge sind es ja doch wohl, welche der Messung teilbarer Gröfsen vor allem Wert verleihen, einmal der Ersatz eines aus einem Gröfsencontinuum herausgegriffenen, der ganzen Unbeständigkeit eines kontinuirlich variablen Vorstellungsinhaltes ausgesetzten Datums durch ein Discretum, eine Zahlengröfse nämlich, welche die Unzukömmlichkeiten des kontinuirlich Variablen nur noch in der „Benennung", in der Einheit also gleichsam zurückgedrängt und für die meisten Zwecke unschädlich gemacht aufweist. Hinzu kommt zweitens, dafs diese Zahlengröfse zu anderen in derselben Weise, d. h. auf Grund derselben Einheit gewonnenen Zahlengröfsen, in den nämlichen Gröfsenrelationen (das Wort im üblichen, vielleicht etwas zu engen Sinn verstanden) steht, wie die gegebene Mefsgröfse zu den betreffenden anderen Mefsgröfsen des nämlichen Continuums, — endlich drittens, dafs die absoluten Limitenwerte 0 und ∞, die für unteilbare Gröfsen so gut Geltung haben als für teilbare, für Mefsgröfse und Mafszahl zusammenfallen, sobald diese als Variable behandelt werden können. Man kann natürlich nicht sagen, dafs die benannte Mafszahl der Mefsgröfse gleich ist; man übersieht aber leicht, weshalb man sich bei den allermeisten Gelegenheiten mit besserem Erfolg an jene als an diese halten wird.

Nun ist aber aus den obigen Beispielen ersichtlich, dafs unter ausreichend günstigen Umständen mit Hülfe surrogativer Messung ganz Analoges zu erzielen ist; die Distanz partizipiert an allen Vorteilen der Streckenmessung, die Geschwindigkeit an allen Vorteilen der Messung des Quotienten aus Weg und Zeit. Bei weitem weniger leistet das Thermometer für die Kenntnis der Temperatur; der zweite und dritte der oben namhaft gemachten Erfolge des Messens fehlt hier gänzlich. Man ersieht daraus zugleich, dafs es bei der surrogativen Messung Vollkommenheitsgrade giebt und die Temperaturmessung einen

Fall unvollkommener, man könnte sagen rudimentärer Messung repräsentiert.

Aus dem Gesagten mufs sich nun auch noch eine zweite Grundfrage beantworten lassen: sie betrifft die Bedingungen, denen ein Messungssurrogat als solches Genüge zu leisten hat. Vor allem ist hier mit Rücksicht auf das Beispiel von der Geschwindigkeit wohl nicht überflüssig, ausdrücklich zu bemerken, dafs es jedesmal nur ein Messungssurrogat giebt und nicht etwa deren mehrere. Zeit und Weg sind in dem eben erwähnten Falle nicht etwa selbst Surrogate; Anspruch auf diesen Namen hat hier vielmehr nur die aus Weg und Zeit als Bestandstücken im Sinne der Quotientenformel gebildete Komplexion. Nur kann diese selbst natürlich nicht anders als mittelbar gemessen werden, und die Objekte, an denen die Messungsoperation eventuell unmittelbar angreift, sind eben die Bestandstücke Weg und Zeit.

Selbstverständlich ist ferner, dafs das Messungssurrogat eine Gröfse sein mufs und zwar, falls es nicht etwa auch seinerseits nur surrogativer Messung zugänglich ist, eine teilbare Gröfse. In betreff der qualitativen Beschaffenheit zeigen die thatsächlich als Surrogate verwendeten Gröfsen eine aufserordentlich weitgehende, durch vorgängige Bestimmungen kaum einzuschränkende Mannigfaltigkeit; nur dürfen, wie eben schon berührt, im Falle mittelbarer Messungen die Mittel nicht etwa auch in den Kreis dieser Mannigfaltigkeit aufgenommen werden.

Vor allem wichtig sind natürlich jene Relationen zwischen Surrogat und Mefsobjekt, auf Grund deren die surrogative Messung in betreff der drei oben erwähnten Hauptleistungen es der eigentlichen Messung gleich zu thun oder sich ihr anzunähern bestrebt ist. Unter allen Umständen unerläfslich ist die ausreichend bestimmte und eindeutige Zuordnung der Punkte des Surrogatcontinuums zu denen des Mefsobjektcontinuums; ob die Koexistenz durch Einsicht in deren Notwendigkeit oder nur durch die Empirie gewährleistet ist, dürfte dabei mehr theoretisch als praktisch von Belang sein, falls die etwaige Empirie nur zuverlässig genug ist. Ausreichen aber möchte diese Zuordnung für sich allein kaum in irgend einem Falle auch noch so unvollkommener Messung; sonst wären am Ende auch die Töne durch die Notenschrift gemessen, der es noch dazu keineswegs an allen Analogien zu dem, was sie bezeichnen soll, fehlt.

Man kommt damit zum Erfordernis der Gleichheit der zusammengehörigen Gröſsenrelationen, von dem mindestens so viel unerläſslich sein dürfte, daſs die Steigerung oder Herabsetzung des einen stets mit Steigerung resp. Herabsetzung des anderen Hand in Hand gehen muſs. Soviel gilt ja im ganzen wohl auch von der Temperaturmessung; ist diese Geltung nicht von allem Bedenken frei, so wäre daraus nur zu entnehmen, daſs auch das Gebiet der Messung gegen bloſse Fixierung ohne Messung nur flieſsend abgegrenzt ist. Andererseits ist selbstverständlich, daſs, wenn man eine Gröſse surrogativ zu messen unternimmt, man darauf bedacht sein wird, ein Surrogat zu wählen, das in betreff der zusammengehörigen Relationen und Grenzwerte dem, was die eigentliche Messung bietet, möglichst nahe kommt. Die Wahl wird dabei weniger die letzten, unmittelbaren Angriffspunkte für den Messungsvorgang zu betreffen haben, da diese in der Regel ziemlich eindeutig vorgegeben sind; um so weiteres Feld für theoretische Arbeit bietet die Funktion, durch welche die der Messung unmittelbar vorliegenden Gröſsen zu jener Komplexion vereinigt werden, die als Messungssurrogat dienen soll. Ein Blick auf die von Kries so genannten „kombinierten Einheiten“ unserer modernen Physik [1] läſst erkennen, was eine entwickelte Wissenschaft in dieser Richtung leisten kann.

Schlieſslich sei der Vollständigkeit halber auch des selbstverständlichen Umstandes gedacht, daſs, weil das Messen, gleichviel, ob eigentliches oder surrogatives, am Ende doch jederzeit eine praktische Verrichtung ist, das Surrogat allemal einer solchen Operation auch zugänglich sein muſs. Ein Surrogat, das seinen Relationen nach die weitestgehenden Anforderungen zu befriedigen vermöchte, wird eventuell einem in dieser Hinsicht unvollkommeneren Surrogate hintanzusetzen sein, wenn dieses einer unmittelbaren oder mittelbaren, eigentlichen, eventuell auch surrogativen Messung leicht, jenes schwer oder gar nicht erreichbar ist.

Es wurde bereits berührt, daſs das Ergebnis einer surrogativen, wie das jeder anderen Messung sich als Zahl darstellt und zwar als benannte Zahl. Es ist beachtenswert, daſs die Sprache auch in betreff dieser Benennungen zwischen eigent-

---

[1] Vgl. *Vierteljahrsschrift f. wiss. Philos.* 1882. S. 263 f.

licher und surrogativer Messung keinen Unterschied macht. Unbedenklich redet man demgemäſs von einer Distanz oder Geschwindigkeit $= 1$, von einer Distanz, die das 10fache, von einer Geschwindigkeit, die das 100fache der ersteren ist, trotz der Unteilbarkeit von Distanz und Geschwindigkeit. Es kann gelegentlich wichtig werden, des Umstandes eingedenk zu sein, daſs derlei in voller Strenge nicht von den betreffenden Meſsobjekten, sondern nur von deren Surrogaten zutrifft.

Im Anschlusse hieran sei hier noch der Möglichkeit einer Art zahlenmäſsiger Bestimmung ohne Messung gedacht, die insofern besteht, als die Vergleichung von Verschiedenheiten sog. „disparater" Gebiete[1] zu Erfolgen führt. Kann ich die Verschiedenheiten zwischen den Gliedern einer Gröſsenreihe (resp. Punkten eines Gröſsencontinuums) a, b, c ...... gleich, gröſser oder kleiner finden als die Verschiedenheiten zwischen den Gliedern einer anderen Reihe a^1, b^1, c^1 ......, so kann es prinzipiell wenigstens nicht unstatthaft sein, an Stelle der a^1, b^1, c^1 ...... die Reihe der natürlichen Zahlen zu setzen und die Punkte a, b, c ...... irgend eines Gröſsencontinuums derart auszuwählen, daſs etwa a von b gleich verschieden ist wie 1 von 2, b von c gleich verschieden wie 2 von 3 u. s. f. Es wäre dann natürlich ganz einerlei, ob die betreffenden Gröſsen teilbar sind oder nicht; ja, streng genommen, könnte nicht einmal verlangt werden, daſs das Continuum jedesmal ein Gröſsencontinuum sei. Von den so gewonnenen Punkten hätte es dann einen bestimmten Sinn, zu sagen, a verhalte sich zu b wie 1 zu 2 u. s. f. Proportionalität könnte man das natürlich nicht nennen, aber es wäre immerhin etwas der Proportionalität Verwandtes.[2] Ob ein solches Verfahren irgend einmal zu praktischen Ergebnissen führen mag, bleibe hier dahingestellt; vielleicht hat aber die Möglichkeit eines solchen Verfahrens das Ihre dazu beigetragen, Objekte als eigentlich meſsbar erscheinen zu lassen, deren Natur einen Zweifel darüber, daſs sie in das Gebiet der teilbaren Gröſsen nicht gehören,[3] nicht wohl aufkommen lieſs.

---

[1] Vergl. oben S. 119 f.

[2] Vergl. unten § 28.

[3] Vergl. unten § 27.

Vierter Abschnitt.

Über Messung von Gröſsenverschiedenheiten.

§ 17. Allgemeines über Verschiedenheitsmessung. Aufgabe der folgenden Untersuchungen.

Was im vorhergehenden über Messung im allgemeinen festgestellt worden ist, soll nun dazu dienen, einem Spezialfalle von gröſster Wichtigkeit näher zu treten, als oben möglich war, wo derselbe nur als ein Beispiel neben anderen gleichgeordneten in Betracht gezogen werden konnte. So grundlegend bedeutungsvoll die Relation der Verschiedenheit für das Erkennen ist, so wichtig muſs es sein, Voraussetzungen und Bedingungen genauer kennen zu lernen, unter denen diese Relation messender Behandlung zugänglich ist.

Wir wissen bereits, daſs Verschiedenheit eine Gröſse ist, wir wissen aber auch, daſs sie zu den unteilbaren Gröſsen gehört, sonach keine eigentliche, sondern nur eine surrogative Messung gestattet. Zwar wurde dies oben zunächst nur in betreff räumlicher und zeitlicher Verschiedenheit behauptet; aber es darf wohl ohne weiteres für selbstverständlich gelten, daſs es mit anderen Verschiedenheiten auch nicht anders bewandt ist.

Nicht mit eben so viel Selbstverständlichkeit wird man verallgemeinern können, was sich oben in betreff der Natur des geeigneten Surrogates ergeben hat. Bei Raum und Zeit freilich ist der Schritt von der Distanz zur Strecke, wie wir gesehen haben, das Natürlichste, das sich denken läſst. Ist aber auch jeder anderen Verschiedenheit als solcher eine Strecke zugeordnet, und wenn sie es ist, bietet sie ein auch praktisch ähnlich brauchbares Messungssurrogat dar, wie Raum- oder Zeitstrecke?

Es ist nicht gerade gebräuchlich, von Ton- oder Farbenstrecken zu reden; sollte man aber, wenn man sich auf das Ton- oder Farbencontinuum beruft, wirklich etwas wesentlich anderes im Sinne haben? Allerdings bietet, was die Verwirklichung eines solchen Continuums in einem bestimmten Individuum anlangt, das Schwellengesetz Gelegenheit zu begründeten Zweifeln: in der That garantiert dieses Gesetz, wie schon berührt, dafs eine völlig diskrete Reihe, wenn ihre Glieder nur wohl geordnet sind und deren Distanz ausreichend unter der Schwelle gelegen ist, für das betreffende Subjekt von einem Continuum im strengen Sinne für immer ununterscheidbar bleiben mufs.[1] Aber freilich giebt es auch eine Raum- und Zeitschwelle, und darauf, dafs etwa durch die Verwirklichung zweier Orts- oder Zeitbestimmungen auch die Wirklichkeit alles Zwischenliegenden gewährleistet sei, wird man sich nicht ohne weiteres berufen können. Nun kommt es aber für den Streckengedanken weit mehr auf dieses Dazwischenliegen als auf die Verwirklichung an; zwischen zwei Raum- oder Zeitpunkten „giebt es“ eine Strecke zunächst in dem Sinne, in dem es im regelmäfsigen Sechseck sechs kongruente gleichseitige Dreiecke giebt, die es ausmachen. Darf ich mich vorübergehend eines Ausdruckes bedienen, dessen grundlegende Bedeutung zu exponieren ich mir für eine andere Gelegenheit vorbehalten mufs, so kann ich einfach sagen: die Strecke zwischen zwei Raum- oder Zeitpunkten besteht, mag sie übrigens existieren oder nicht. Und in ganz demselben Sinne besteht auch das Continuum der Übergänge zwischen zwei distanten, d. h. eben nur zwischen zwei verschiedenen Farben, so gewifs jeder Farbe als Inhalt die Möglichkeit kontinuierlicher Veränderung zuzuschreiben ist. Die Farben- oder Tonstrecke ist also ebenso gesichert als die Farben- oder Tondistanz, und etwaige empirische Schranken in betreff des thatsächlichen Vorkommens dieses oder jenes Punktes können an dem Bestande dieser Strecken nichts ändern. Nur ist das anschauliche Erfassen solcher unräumlicher oder unzeitlicher Strecken, soweit überhaupt ausführbar, nichts weniger als leicht;[2] noch schwerer dürfte es sein, derlei Vorstellungen

---

[1] Nur dürfte man das Wesen der Schwelle nicht in sprungweisen Empfindungsänderungen suchen und daraufhin letztere aus ersterer erweisen wollen, ohne dem neuestens, auch von G. E. Müller (Bd. X. *dieser Zeitschrift* S. 79 f.) erhobenen Einwande zu verfallen. Andererseits kann ich aber auch nicht finden, dafs dieser Einwand mehr vermöchte, als die Möglichkeit der Diskontinuität in ausreichend enge, jedoch immer noch endliche Grenzen einzuschliefsen.

[2] Immerhin leistet die Bewegung in der Strecke, das Durchlaufen derselben gute Dienste. Vergl. die Aufstellung G. E. Müllers a. a. O. S. 35: „Sind α, β, γ, δ einfache Empfindungen von verschiedener Qualität, aber gleicher Intensität, so verhält sich der qualitative Unterschied

zur Grundlage eines praktischen Messungsverfahrens zu machen, das vor der direkten Vergleichung der Distanzen irgend etwas voraus hätte. So hat das Bestehen der betreffenden Strecken zwar jedenfalls den Wert, dem Gedanken der halben oder doppelten Distanz einen festen Sinn unterzulegen: als Messungssurrogate leisten aber Strecken, soweit sie nicht Raum- oder Zeitstrecken sind, weiter keine Dienste.

Nun giebt es aber auch Verschiedenheiten, deren Glieder eine Annäherung durch Variation ihrer Natur nach ausschliefsen, z. B. Farbe und Ton u. dergl., Fälle, die der Sprachgebrauch in das Geltungsgebiet des Ausdruckes „Distanz“ nicht leicht einzubeziehen scheint. Hier kann natürlich von Strecken überhaupt gar nicht die Rede sein, so dafs auch abgesehen von den erwähnten praktischen Schwierigkeiten dem Streckengedanken die Eignung, ein Messungssurrogat für Verschiedenheit ganz im allgemeinen darzubieten, abgesprochen werden mufs.

Man hätte, soweit ich sehen kann, keinen besseren Erfolg, wollte man sich um ein solches Messungssurrogat für alle Verschiedenheit anderswo umsehen. Aussichten auf eine günstigere, vielleicht auch ziemlich folgenreiche Beantwortung bietet dagegen die nämliche Fragestellung für den allerdings recht speziellen Fall, dafs die Glieder, für welche die Gröfse ihrer Verschiedenheit zu bestimmen ist, selbst Gröfsen eines und desselben Gebietes, und zwar noch näher, dafs sie mefsbare Gröfsen dieses Gebietes sind. Hier bieten nämlich die vorgegebenen benannten, selbstverständlich gleich benannten Mafszahlen eine natürliche Grundlage für die Bildung eines angemessenen Surrogates, da die Gröfse der Gröfsenverschiedenheit notwendig mit der Gröfse des Verschiedenen zusammenhängt. Die Hauptaufgabe besteht hier aber im Sinne der früheren Ausführungen darin, die Funktion ausfindig zu machen, mit deren Hülfe aus den in Betracht gezogenen Gröfsen das Surrogat zur Messung ihrer Verschiedenheit zu gewinnen ist. Darf einmal diese Funktion als festgestellt gelten, dann ist

---

zwischen α und β zu dem qualitativen Unterschiede zwischen γ und δ, wie sich die Zahl der Empfindungen, welche bei der auf dem kürzesten Wege stattfindenden stetigen Überführung von α in β durchlaufen werden, zu der Zahl von Empfindungen verhält, welche durchlaufen werden, wenn man γ auf dem kürzesten Wege stetig in δ überführt.“

nur noch Rechnung erforderlich, um nach eigentlicher Messung der betreffenden Gröfsen ihre Verschiedenheit zahlenmäfsig zu bestimmen.

Da Gröfsenverschiedenheiten ohne Zweifel in jenes oben besprochene engere Gebiet von Verschiedenheiten gehören, wo diesen notwendig Strecken zugeordnet sind, so bezieht sich die eben formulierte Aufgabe auf eine Messung, für welche, wenigstens der Theorie nach, in den zugeordneten Strecken Surrogate bereits vorliegen. Obwohl, wie wir sahen, ihrer praktischen Unzugänglichkeit halber nicht eigentlich für Messungen zu gebrauchen, haben sie unserer gegenwärtigen Aufgabe gegenüber doch den Wert eines Genauigkeitsideals, wenn man so sagen darf: wir werden uns der Lösung dieser Aufgabe um so näher erachten dürfen, je näher wir derjenigen Funktion kommen, vermöge welcher aus den vorgegebenen Gröfsen eine Komplexion entsteht, deren Gröfse der betreffenden Verschiedenheitsgröfse in Bezug auf die drei für die Messung wesentlichen Erfordernisse ebenso gegenübersteht, wie die zugeordnete Streckengröfse. Unter einer ganz unbedenklichen, fürs erste vielleicht noch gar nicht auffälligen Vorwegnahme erst unten ausdrücklich vorzunehmender Feststellungen könnte man auch sagen: denken wir uns die Streckengröfsen als Abscissen aufgetragen, so geht unsere Aufgabe dahin, eine derartige Funktion der distanten Gröfsen ausfindig zu machen, dafs die Kurve der den Streckengröfsen zugeordneten Werte dieser Funktion eine vom Ursprung des Koordinatensystems ausgehende gerade Linie ausmacht. Von den unendlich vielen in diesem Sinne in Frage kommenden Geraden hätte dann natürlich die der Ordinatenaxe nähere, d. h. mit der Abscissenaxe den gröfseren Winkel einschliefsende, jederzeit den Genauigkeitsvorzug, der stets zur Geltung kommt, wenn eine nicht unmittelbare Messung ceteris paribus an einem Gröfseren statt an einem Kleineren vorgenommen werden kann. Übrigens ist vorauszusehen, dafs sich einstweilen nicht wohl Gelegenheit finden wird, auf Genauigkeitsnuancen dieser Art einzugehen; wir dürfen zufrieden sein, wenn wir eine Funktion finden können, der die oben gekennzeichnete Stellung zwischen Abscissen- und Ordinatenaxe zusammen mit ihrer Geradlinigkeit mit einiger Zuversicht nachgesagt werden kann, mag der Winkel mit der Abscissenaxe übrigens welchen Wert immer zwischen 0^0 und 90^0, natürlich mit Ausschlufs dieser Grenzwerte selbst, aufweisen. Dient doch selbst das Koordinatensystem nur der Formulierung der Aufgabe, nicht aber ihrer Lösung, da uns nirgends Zahlenwerte für die Abscissen zu Gebote stehen. Zwar giebt es bekanntlich zahlenmäfsig bestimmbare Streckengröfsen, bei Raum und Zeit nämlich; gerade da aber sind die distanten Objekte, die Orts-, resp. Zeitpunkte, nicht mefsbar, ja nicht einmal Gröfsen. Strecken aber, zu denen sich Gröfsen verhalten wie Ortsbestimmungen zu Raumstrecken, man könnte kurz sagen: Strecken zwischen Gröfsen sind nirgends der Messung zugänglich. Wir sind also, indem wir nun auf eine nähere Bestimmung der gesuchten Funktion unser Absehen richten, darauf angewiesen, uns auf anderem Wege über die jeweilige Erfülltheit der drei Erfordernisse: Zuordnung, Übereinstimmung in betreff der Relationen und in betreff der Grenzwerte, zu orientieren.

§ 18. Das arithmetische Verhältnis.

Es sollen im Folgenden die Gröfsen, um deren Verschiedenheit es sich handelt, durch das Symbol G bezeichnet werden, jedesmal determiniert durch ein Indexzeichen, als welches sich die für die betreffende Gröfse geltende Mafszahl am natürlichsten darbietet. Als solche, selbstverständlich auf die nämliche Einheit bezogene, also gleichbenannte Mafszahlen mögen a und b gelten unter der allgemeinen Voraussetzung, dafs

$$G_a \leqq G_b, \text{ daher auch } a \leqq b$$

ist. Als Zeichen für die auf dem Wege surrogativer Messung zu gewinnende Mafszahl für die Verschiedenheit zwischen G_a und G_b diene der Buchstabe V, zu dessen beiden Seiten als Indices die Mafszahlen der distanten Gröfsen angefügt seien. Wir erhalten so für die Verschiedenheit (unter Einschlufs der Gleichheit als Grenzfall) das Symbol:

$${}_aV_b$$

und unsere Aufgabe besteht darin, die in dieser Weise symbolisierte Gröfse als Funktion der Variablen a und b darzustellen, genauer: die Funktion festzustellen, der gemäſs die Maſszahl ${}_aV_b$ von den Maſszahlen a und b abhängt.

Ohne Zweifel liegt es nun am nächsten, als solche Funktion die Differenz zwischen a und b in Erwägung zu ziehen; dafür spricht wohl schon die Bedeutung des Wortes „Differenz", das auſserhalb der Mathematik doch nichts Anderes als Verschiedenheit ausdrückt, nicht minder das Wort „Unterschied", das innerhalb des mathematischen Sprachgebrauches das Wort „Differenz" ersetzt, auſserhalb desselben aber ebenfalls für Verschiedenheit steht, wenn z. B. von dem „groſsen Unterschiede" die Rede ist, der zwischen der Kunstauffassung des Berufsmusikers und der des musikalisch ausreichend leistungsfähigen Dilettanten, zwischen einer Gebirgsfernsicht bei trübem und der bei heiterem Wetter besteht, u. dergl. „Wenn wir drei Empfindungen a, b und c", meint W. Wundt,[1] „so abstufen, daſs b genau die Mitte zwischen a und c hält,[2] so müssen wir selbstverständlich die absolute Gröſse des Unterschiedes zwischen a und b gleichsetzen der absoluten Gröſse des Unterschiedes zwischen b und c. Wir würden alle Prinzipien der Gröſsenvergleichung auf den Kopf stellen, wenn wir anders verführen."

Demgemäſs wäre also:

$$\text{entweder } {}_aV_b = C\,(a-b), \text{ oder } {}_aV_b = C\,(b-a),$$

wo C eine für das Folgende weiter gar nicht charakteristische, durch geeignete Wahl der Einheit eventuell auch zu beseitigende Proportionalitätskonstante bedeutet. Auch die nur das Vorzeichen betreffende Verschiedenheit der zwei möglichen Differenzen ist für uns belanglos, da es sich nur darum handelt, durch die Operation des Subtrahierens eine Gröſse zu bestimmen, überdies, wenn man sich einmal für die eine der beiden Eventualitäten entschieden hätte, ein Wechsel im Vorzeichen durch die eben gemachte Annahme, daſs a niemals gröſser als b gesetzt wird, ausgeschlossen ist.

Es kommt nun natürlich auf eine genauere Prüfung unserer Annahme an, und diese fällt im ersten Überschlage durchaus nicht ungünstig aus. Man kann ja allgemein sagen: je kleiner

---

[1] *Philos. Stud.* Bd. II. S. 25; die Stelle wird zustimmend zitiert, z. B. von J. Merkel, ibid. Bd. V. S. 251.

[2] Damit kann doch nur gemeint sein, daſs a von b ebenso verschieden ist, als b von c.

die kleinere, je gröſser die gröſsere der beiden in Betracht gezogenen Gröſsen ist, desto gröſser die Verschiedenheit, desto gröſser aber auch die Differenz. Ebenso für den entgegengesetzten Fall: je gröſser die kleinere, je kleiner die gröſsere der beiden Gröſsen, desto kleiner die Verschiedenheit und desto kleiner die Differenz. Mit der Gleichheit, also mit der Verschiedenheit von der Gröſse 0 wird auch die Differenz $= 0$; wird dagegen die eine der beiden Gröſsen unendlich, so wird auch die Differenz unendlich, und man wird nichts dagegen einzuwenden haben, daſs in gleicher Weise der Verschiedenheit des Unendlichen vom Endlichen unendliche Gröſse zuerkannt wird.

Wie nun aber, wenn die kleinere der beiden Gröſsen den Grenzwert Null erreicht? Die Differenz fällt dann zusammen mit der gröſseren der in Betracht gezogenen Gröſsen[1]; läſst sich das Nämliche von der Verschiedenheit behaupten? Wäre wirklich eine Strecke von 2 cm von einer Strecke von 1 cm ebenso verschieden, als letztere von 0 cm, von etwas also, das schon gar keine Strecke mehr, sondern nur noch ein Punkt ist? Das kann evidenter Weise niemand behaupten; jedermann sieht ein, daſs die Verschiedenheit zwischen 1 und 0 eine unverhältnismäſsig gröſsere ist, so daſs ihr auch die Verschiedenheit zwischen 1 und 3 oder zwischen 1 und 4 in keiner Weise nahe zu kommen vermag. Man hätte keinen besseren Erfolg, wollte man 5, 6 oder 10, 100 oder 1000 zum Vergleiche heranziehen. Die Verschiedenheit zwischen 1 und 0 ist gröſser, als irgend eine Verschiedenheit zwischen endlichen Gröſsen, oder auch: sie ist gröſser, als irgend eine endlich groſse Verschiedenheit, sie ist unendlich groſs; und nur solange man die eben erst zu prüfende Annahme, daſs Differenz und Verschiedenheit das Nämliche sei, bereits zur Voraussetzung macht, mag man Anstand nehmen, dies einzuräumen. Oder sollte jemand nach vorurteilsfreier Überlegung der Sachlage wirklich noch Neigung haben, etwa 2 cm von 0 cm doppelt so verschieden zu finden als 1 cm von 0 cm und andererseits auch wieder wie 1 cm von 2 cm? Wir stehen hier vor dem ersten Falle, in dem die

---

[1] „Die Unterschiede gegebener Werte von Null fallen mit den betreffenden Werten selbst zusammen", sagt Fechner (*Philos. Stud.* Bd. IV. S. 196) an der Spitze seiner Ausführungen über Empfindungsmessung.

Differenz den von ihr erwarteten Dienst zur Lösung unserer Aufgabe augenscheinlich versagt.

§ 19.
Gleiche Differenz bei ungleicher Verschiedenheit.

Von weit umfassenderer Geltung ist nun aber noch ein zweiter Fall; er betrifft die Zuordnung zunächst der entsprechenden relativen, dann aber auch die der absoluten Daten (der für Relationen etwas wunderliche Ausdruck „absolut“ mag hier der Kürze halber gestattet sein) auf dem Gebiete der Differenzen einerseits, der Verschiedenheiten andererseits. Wir betreten hier zum ersten Male im Zusammenhange dieser Untersuchungen den Bereich der vielbesprochenen Thatsachen, die man unter dem Namen des Weberschen Gesetzes zusammenzufassen pflegt. Aber nicht, insofern es sich dabei um das Verhältnis von „Reiz und Empfindung“ handelt: auf dieses kann erst später eingegangen werden, indes wir jetzt darauf angewiesen sind, die Thatsachen, in denen uns die Gröſsen als physische, deren Verschiedenheiten aber als psychische Thatbestände entgegentreten, mit Rücksicht auf auſser unserer gegenwärtigen Untersuchung stehende Komplikationen, die sie in sich schlieſsen, fernzuhalten. Dazu scheint mir freilich etwa Wundts Vorgang, an Stelle der Reize die „zentralen Sinneserregungen“ zu substituieren,[1] schon mit Rücksicht auf unsere so sehr hypothetische Bekanntschaft mit den letzteren ebensowenig empfehlenswert als desselben Autors bereits an anderer Stelle[2] berührter Versuch, die Empfindungsstärken durch deren Merklichkeitsgrade zu ersetzen.[3] Dagegen bieten die anschaulichen Vorstellungen teilbarer Gröſsen vermöge ihrer Inhalte direkt gegebene psychische[4] Gröſsendaten dar, die einerseits eine eigentliche Messung an gleichfalls direkt gegebenen psychischen Einheiten gestatten, andererseits natürlich auch Objekte direkter Vergleichung untereinander abgeben können. Sehe ich etwa eine Linie, so setzt sich ja auch mein Wahrnehmungsinhalt aus Teilinhalten zusammen, die als Inhalte von Linienwahrnehmungen zu betrachten sind; ein „Aufeinanderlegen“ ohne physische

---

[1] *Physiol. Psychol.* 4. Aufl. Bd. I. S. 400.

[2] Vergl. oben S. 124 f.

[3] Vergl. hierzu auch Grotenfelt, a. a. O. S. 63 ff.

[4] Vergl. unten § 27.

Hülfsmittel giebt es dann freilich nicht, aber die Heranziehung solcher Hülfsmittel wird den von der näheren Beschaffenheit der Beziehungen zwischen Physischem und Psychischem, zwischen Reiz und Empfindung, wie man gewöhnlich sagt, unabhängigen Sinn der Ergebnisse schwerlich in Frage stellen. Ähnliches möchte von Zeitstrecken- und, mutatis mutandis natürlich, auch von Zahlengröfsen, auch diese selbstverständlich nur innerhalb der Grenzen des anschaulich Vorstellbaren betrachtet, gelten. Von ihnen — übrigens nicht nur von ihnen, wie sogleich zu berühren — lehrt nun die Erfahrung einmal, dafs gleiche Differenzen derselben sehr wohl mit ungleichen Verschiedenheiten, dann auch, dafs gleiche Verschiedenheiten sehr wohl mit ungleichen Differenzen zusammengehen können.

Ersteres ist eigentlich schon Sache alltäglichster Erfahrung. Wer wüfste nicht, dafs, wenn man zu einem Centimeter noch einen hinzufügt, dieser „Zuwuchs“ ganz beträchtlich mehr zu bedeuten hat, als wenn der eine Centimeter zu 6 cm hinzugefügt worden wäre. Nun ist allerdings ein Centimeter keine psychische, sondern eine physische Gröfse; darf man aber annehmen, dafs innerhalb gehöriger Grenzen den gleichen physischen Centimetern auch gleiche psychische, man gestatte vorübergehend den Ausdruck, entsprechen, so belehrt uns das in Rede stehende „Bedeuten“ zugleich über den Anteil der nächsten Vergleichungssubstrate am Vergleichungsergebnis. Immerhin ist diese Bedeutung gelegentlich als ein Mehr an „Merklichkeit“ aufgefafst worden,[1] aber doch kaum in der Meinung, dadurch jedes Mehr an Verschiedenheit für diesen Fall in Abrede zu stellen;[2] überdies ist auf die Unzukömmlichkeiten bei einseitiger Bevorzugung des Merklichkeitsgedankens oben[3] bereits hingewiesen worden. Zudem spricht die direkte Erfahrung hier deutlich genug: 1 ist von 2, man kann dies auch ganz wohl von den Zahlengröfsen aussagen, erheblich verschiedener als 6 von 7; dennoch ist der Unterschied oder die Differenz in beiden Fällen von gleicher Gröfse.

---

[1] Vergl. Brentano, *Psychol.* I. S. 88.

[2] Dies erhellt wohl aus den Worten a. a. O. S. 89: „Nun ist offenbar der um eine Linie verlängerte Fufs dem Fufs ähnlicher, als der um eine Linie verlängerte Zoll dem Zoll.“ Gröfsere Ähnlichkeit wird doch nicht wohl ohne kleinere Verschiedenheit in Anspruch zu nehmen sein.

[3] Vergl. oben § 10 f.

Ich habe, um ungelöste oder halb gelöste Schwierigkeiten eines ganz anderen Thatsachengebietes hier möglichst wenig hereinzuziehen, die obigen Aufstellungen zunächst ausdrücklich auf anschaulich Vorgestelltes bezogen. Es soll aber wenigstens nicht unerwähnt bleiben, dafs unanschaulich Vorgestelltes das Gesagte gelegentlich sogar noch mit gröfserer Evidenz zu bestätigen scheint. Dafs 1 und 2, gleichviel ob unbenannt oder gleichbenannt, weit mehr voneinander verschieden sind, als 100 und 101 oder gar 1000 und 1001, dafs der Übergang vom einen zum anderen im ersten Fall ungleich mehr zu bedeuten hat als in einem der übrigen Fälle, diese Einsicht drängt sich, gleichviel wie die Unanschaulichkeit der beträchtlichen Gröfsen daran mitbeteiligt ist, einem jeden ganz unwiderstehlich auf. Vielleicht fehlt uns auch bei gröfseren Zahlen oder Strecken nicht alle Anschaulichkeit; genauer: vielleicht liegen auch da noch anschauliche Vorstellungen im Bereiche des Möglichen, denen nur die vielfach erforderliche Bestimmtheit fehlt, ohne darum ihrer Verwendbarkeit zu Erkenntnissen Eintrag zu thun, bei denen diese Bestimmtheit entbehrlich ist.[1]

§ 20. Ungleiche Differenz bei gleicher Verschiedenheit.

Die zweite von den beiden angeführten Thatsachen, Gleichheit der Verschiedenheit trotz Ungleichheit der Differenz, findet sich eigentlich ganz direkt im Weberschen Gesetze ausgesprochen, unter letzterem hier und in der Folge nichts als das Gesetz von der Konstanz der relativen Unterschiedsempfindlichkeit verstanden, also ohne Rücksicht auf die Verwertung, welche Webers Beobachtungen etwa bei Aufstellung eines „psychophysischen Gesetzes“ im Sinne Fechners finden könnten. Unser Gesetz befafst ebenmerkliche Verschiedenheit so gut in sich, wie übermerkliche; die beiden Fälle sind auf ihre Bedeutung für die uns beschäftigende Thatsache besonders zu erwägen.

Zunächst ist im allgemeinen aufser jedem Zweifel, dafs das Gesetz vermöge der Empirie, auf die es sich gründet, auf die Unterschiedsempfindlichkeit im weiteren Wortsinne[2] be-

[1] Vergl. übrigens B. Kerry, „Über Anschauung und ihre psychische Verarbeitung“. VI. Artikel. *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1889. S. 398 ff.

[2] Vergl. oben S. 131.

zogen werden mufs, indem der relative Unterschied, dem die Konstanz des Vergleichungsergebnisses gegenübersteht, ein Reizunterschied ist. Nun wird aber für das Gebiet, auf das die gegenwärtigen Erwägungen sich beschränken, dem, was oben Reizunterschiedsempfindlichkeit genannt wurde, eine charakteristische Bedeutung kaum beizumessen sein. Es liegt dies ohne Zweifel an dem Parallelismus, der, wie berührt,[1] hier zwischen dem Quasi-Reiz, der objektiven Ausdehnung und der Quasi-Empfindung, der subjektiven Ausdehnung (vom Falle der Zahl ganz zu geschweigen) besteht, — sollte derselbe auch damit zusammenhängen, dafs bei der Vorstellung der sog. objektiven Ausdehnung die Subjektivität eher eine besonders grofse als eine besonders kleine Rolle spielt. Eine Reizunterschiedsschwelle ist dadurch nun freilich nicht ausgeschlossen, und man hat Grund genug, überzeugt zu sein, dafs eine solche bei Raum- wie Zeitsinn allemal besteht. Aber gerade was wir z. B. von der Sehschärfe wissen, verbietet uns, sie für das Steigen der absoluten Schwellenwerte bei Zunahme der zu vergleichenden Strecken verantwortlich zu machen. Wir sind sonach berechtigt, das Gesetz innerhalb der hier gesteckten Grenzen auf die Inhaltsunterschiedsempfindlichkeit zu beziehen,[2] also, da die vorgestellten Gegenstände eben die direkt verglichenen psychischen Gröfsen sind, das diese Vergleichung betreffende Gesetz zur Beantwortung unserer Frage nach der Eignung der Differenz als Messungssurrogat zu verwerten. So bestimmt es nun Konstanz der relativen Unterschiedsempfindlichkeit behauptet, so bestimmt behauptet es Inkonstanz der absoluten; es ist ja der Gesetzmäfsigkeit wesentlich, dafs sehr verschiedene (absolute) Differenzen denselben Vergleichungseffekt mit sich führen, und höchstens darüber könnte nun noch Unsicherheit bestehen, ob die Gleichheit des Vergleichungseffektes auch Gleichheit der Verschiedenheit zu bedeuten hat. So wenig Gewicht mir diese Unsicherheit gemäfs früheren Ausführungen[3] zu haben scheint, soll sie auch hier nicht ganz unerwogen bleiben. Es empfiehlt sich dabei, die beiden Fälle

---

[1] Vergl. S. 256 f.

[2] Inwieweit hiermit zu Gunsten der sog. Verhältnishypothese Stellung genommen ist, kann erst in späterem Zusammenhange zur Sprache kommen, vergl. unten § 32.

[3] Vergl. § 10 f.

des ebenmerklichen und übermerklichen Unterschiedes ausdrücklich auseinanderzuhalten.

I. Der erste Fall, der der Konstanz der relativen Unterschiedsschwelle, ist, wie für die ganze Psychophysik, so insbesondere auch für die Merklichkeitstheorie der Ausgangspunkt gewesen, indem der Annahme, bei wachsenden Vergleichsgröfsen kämen bei mitwachsenden Differenzen gleiche Verschiedenheiten zu stande, die Auffassung gegenübertrat, bei gröfseren Vergleichsgröfsen würde die Verschiedenheit erst „bemerkt", wenn auch sie entsprechend gröfser geworden sei. Gestützt wird diese Auffassung „durch alle die so höchst gewöhnlichen Erfahrungen, dafs es eine Menge von Umständen giebt, welche uns das Vergleichen, überhaupt das In-Relation-setzen bald erleichtern, bald erschweren; und es wäre gar nicht unnatürlich, anzunehmen, dafs es uns um so schwerer fällt (verhältnismäfsig mehr psychische Arbeit kostet), Vergleichungen anzustellen, je stärker das Organ, genauer: das empfindende Bewufstsein schon in Anspruch genommen ist".[1] Aber so ansprechend dieser Gedanke ohne Zweifel sich darstellt, am Ende gilt auch ihm gegenüber die Bemerkung Fechners,[2] dafs man doch selbstverständlich werde voraussetzen müssen, die scheinbare Verschiedenheit hänge einerseits von der wirklichen Verschiedenheit, andererseits immerhin auch von Nebenumständen ab, zu denen aber die zu vergleichenden Gröfsen selbst nicht wohl gezählt werden können. Wenn ich von zwei Verschiedenheiten die gröfsere „merke", die kleinere nicht, so liegt doch immer am nächsten, dafür die betreffende Verschiedenheitsgröfse verantwortlich zu machen, und nicht eine erst nahezu ad hoc aufzustellende Hypothese. Zudem ist, wie bereits früher vorübergehend berührt,[3] eine evident erkannte Verschiedenheit als mit den Vergleichsgröfsen notwendig verbunden so „wirklich", als eine Verschiedenheit eben wirklich sein kann, und zwar auch ihrer Gröfse nach. Nähme also, wie die in Rede stehende Auffassung verlangt, die ebenmerkliche Verschiedenheit mit den Vergleichsgröfsen zu, so müfste zugleich das Überschreiten der Unterschiedsschwelle einen immer gröfser

---

[1] Höfler in der *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1887. S. 369; vergl. auch *Psychische Arbeit.* Bd. VIII *dieser Zeitschr.* S. 98 (S. 55 des Sonderabdruckes).

[2] *In Sachen.* S. 46 ff.

[3] Vergl. oben S. 132.

werdenden Sprung bedeuten. Nun ist aber dergleichen bei unveränderter Unterschiedsempfindlichkeit, so viel mir bekannt, nirgends beobachtet worden; vielmehr ist es die Regel, daſs ebenmerkliche Verschiedenheiten als sehr kleine und eben der Kleinheit wegen eine weitere Verkleinerung nicht mehr gestattende Verschiedenheiten sich darstellen, wie immer die Vergleichsgröſsen beschaffen seien. Schlieſslich müſste direkte Vergleichung der ebenmerklichen Verschiedenheiten, die FECHNER selbst wenigstens vorgenommen hat,[1] doch irgend einmal auf Verschiedenheit geführt haben; Berufung auf die Schwelle bleibt freilich auch hier jederzeit statthaft, wird aber eben deshalb nur wenig für sich einnehmen. So möchte es doch das Natürlichste sein, die eben merklichen Verschiedenheiten als gleiche Verschiedenheiten gelten zu lassen; die Hoffnungen aber, die an die hier bekämpfte Auffassung in betreff einer Klärung der „Kernfrage des ganzen Psychophysikstreites“ geknüpft worden sind,[2] werden vielleicht weniger ins Gewicht fallen, falls die gegenwärtigen Untersuchungen, wenn auch auf anderem Wege, diesen Streit einer erwünschten Lösung näher bringen sollten.

II. Eine direkte Stütze findet das eben Dargelegte nun überdies an jenen Erfahrungen und Versuchen, welche die Konstanz der relativen Unterschiedsempfindlichkeit auch für übermerkliche Verschiedenheiten erwiesen haben. Daſs hier nicht ohne ganz augenfällige Gewaltsamkeit Gleichmerklichkeit an Stelle von Gleichheit zu setzen wäre, bedarf nach Früherem[3] keiner Begründung mehr. Nur sind den in Rede stehenden Bestätigungen neuerlich auch Versuchsergebnisse von entgegengesetzter Tendenz gegenübergetreten, Mittenschätzungen nämlich, bei denen nicht die relativen, sondern die absoluten Unterschiede konstant blieben, indem die Schätzung weit mehr zu Gunsten des arithmetischen als des geometrischen Mittels ausfiel. Ich muſs nun freilich aus äuſseren wie aus inneren Gründen darauf verzichten, hier eine ins einzelne gehende Stellungnahme zu den diesbezüglichen, ebenso umfassenden als sorgfältigen Untersuchungen J. MERKELS[4] zu versuchen. Aber soweit man

---

[1] *In Sachen.* S. 42 f.; auch *Philos. Stud.* Bd. IV. S. 185.

[2] Vergl. HÖFLER, *Psychische Arbeit.* S. 98. (S. 55 des Sonderabdruckes).

[3] Vergl. oben § 10.

[4] Vergl. dessen Abhandlungen über „Die Abhängigkeit zwischen Reiz und Empfindung“ in *Wundts Philos. Stud.* Bd. IV., V u. X.

die Zurückhaltung in dieser Sache auch treiben mag, darüber scheint mir ein Zweifel nicht mehr aufkommen zu können, dafs Merkel in höchst beachtenswerter Weise auf Thatsachen[1] aufmerksam gemacht hat, die allen Umdeutungsversuchen stand halten werden. Angesichts solcher Thatsachen, wie grofs oder klein ihr Umkreis auch sei, mufs hier die Frage aufgeworfen werden, ob ihnen gegenüber der im obigen eingenommene Standpunkt in betreff des Auseinandergehens von („absolutem“) Unterschied und Verschiedenheit noch aufrecht erhalten werden kann.

Gesetzt vor allem, zur Beurteilung des Verhältnisses zwischen Unterschied und Verschiedenheit käme überhaupt nichts Anderes als die Merkelschen Erfahrungen über das arithmetische Mittel in Betracht, was dürfte aus diesen über das fragliche Verhältnis geschlossen werden? Jedenfalls nicht, — dies ausdrücklich zu bemerken, möchte vielleicht doch nicht ganz überflüssig sein, — Identität von Unterschied und Verschiedenheit. Das ergiebt sich einfach daraus, dafs Verschiedenheit ihrem Wesen nach mit Teilung und Teilbarkeit nichts zu thun hat, die Differenz aber, wie wir sahen, erst aus der Teilvergleichung hervorgeht. Merkel selbst hat ja gleiche Verschiedenheiten (bei arithmetischem Mittel des Reizes) auch in Bezug auf „intensive“, d. h., wie noch zu berühren, unteilbare psychische Gröfsen konstatiert. Soweit es sich aber, wie dies ja unsere gegenwärtige Aufgabe ist, nur um ein Messungssurrogat handelt, näher um ein Surrogat für die Messung von Verschiedenheiten teilbarer Gröfsen, könnte aus den Merkelschen Versuchen heraus gegen die Annahme: „wo gleiche Verschiedenheiten, da gleiche Unterschiede und umgekehrt“ und auf Grund dessen gegen die Vermutung einer Proportionalität zwischen Unterschieds- und Verschiedenheitsgröfsen nichts Triftiges eingewendet werden.

Nun haben wir aber gesehen, dafs die Fälle des arithmetischen Mittels bei weitem nicht das Gesamtmaterial dessen

---

[1] Dafs Versuche im Grazer psychologischen Laboratorium gelegentlich zu ganz frappierenden Bestätigungen geführt haben, darf bei der Veranstaltungsweise der betreffenden Versuche kaum mehr als subjektive Bedeutung beanspruchen. Wertvoller sind vielleicht ein paar ebenda zusammengestellte erste Versuchsreihen auf einem bisher noch nicht betretenen Gebiete, dem der Richtungsverschiedenheit, über die S. Witasek im laufenden Bande *dieser Zeitschrift* berichten wird.

ausmachen, aus dem wir über den Ausfall von Vergleichungen positiven oder negativen Aufschlufs gewinnen können. MERKEL selbst redet von Versuchen, von denen er annimmt, „dafs sowohl mit der Vergröfserung der Distanz der Grenzreize, als auch, wenn es gilt, zwei sich immer mehr entfernende Distanzen zu beurteilen, statt der Beurteilung nach gleichen Unterschieden zum Teil die Beurteilung nach gleichen Verhältnissen mit zur Verwendung kommt".[1] Es kommen auf dem Gebiete des Übermerklichen die Vulgärerfahrungen über ungleiche Verschiedenheiten bei gleichen Unterschieden, aufserdem die oft als eigentlicher Kern des WEBERschen Gesetzes bevorzugten Thatsachen der konstanten relativen Unterschiedsschwelle hinzu. Sie alle sprechen in einer Weise deutlich gegen den Satz „Gleicher Unterschied, gleiche Verschiedenheit", dafs ich nicht absehe, wie er solchen Instanzen gegenüber zwanglos aufrecht erhalten werden könnte.

Man könnte nun freilich versuchen, diese Gegeninstanzen wegzuinterpretieren; aber soviel ich sehe, bietet sich hierzu nur bei den Schwellenthatsachen ein einigermafsen plausibler Gedanke. Ich habe indes am Ende des zweiten Abschnittes der gegenwärtigen Untersuchungen dargelegt, was mich hindert, zur Sache der Merklichkeit zu machen, was sich meiner Meinung nach nur als Sache der Vergleichung behandeln läfst. Natürlich wäre aber auch günstigsten Falles damit für die übermerklichen Verschiedenheiten noch nichts gewonnen, und ich kenne derzeit keinen Gesichtspunkt, der hier auch nur dem Merklichkeitsgedanken einigermafsen an die Seite gesetzt zu werden verdiente.

Wie das Zusammengehen von Unterschied und Verschiedenheit die in Rede stehenden Erfahrungen, so hat nun freilich die von mir vertretene Auffassung in ganz gleicher Weise die MERKELschen Versuche gegen sich. Aber ist es schon ein Vorteil, dafs diese Gruppe von Gegeninstanzen dann, soviel ich sehen kann, die einzige ist, so fällt noch mehr ins Gewicht, dafs bei dem berührten engen Zusammenhange zwischen Distanzen und Strecken sehr wohl denkbar ist, dafs unter Umständen statt der ersteren die letzteren das Vergleichungsergebnis entscheiden.[2] Handelt es

---

[1] *Philos. Stud.* Bd. X. S. 223.

[2] Vielleicht findet man einen ähnlichen Gedanken bei MÜNSTERBERG (*Beiträge.* Heft 3. S. 114 ff.), wenn man erst einmal von den „Spannungs-

sich namentlich, was ja ohnehin der uns im gegenwärtigen Zusammenhange zunächst betreffende Fall ist, um die Mittenschätzung bei psychischen Strecken, und es kommt dabei aus irgend einem Grunde zu einem Verfahren, das der Superposition physischer Strecken einigermaſsen analog ist, so ist dann sehr natürlich, daſs das zuletzt Verglichene der Unterschied der gröſsten von der mittelgroſsen, und der Unterschied der mittelgroſsen von der kleinsten Strecke ist. Handelt es sich, was übrigens auſser der gegenwärtigen Betrachtungssphäre liegt, um ähnliche Schätzungen bei Schallstärken, so geschieht es, wenn ich an mir gemachten Beobachtungen trauen darf, thatsächlich, daſs man beim Übergang von der einen Schallstärke zur anderen, wie sie dem Abgeben des Urteils voranzugehen, dem Wahrnehmen der Schalle aber nachzufolgen pflegt, statt Sprünge zu machen, den Weg zwischen den betreffenden Schallstärken wenigstens manchmal in der Einbildung ausfüllt; von hier aus könnte dann wieder ein Quasi-Superpositionsverfahren zu Differenzen statt Verschiedenheiten führen. Befriedigend kann ich dergleichen noch sehr unfertige Gedanken freilich nicht finden, zumal dann immer noch ganz offen gelassen ist, warum Einflüsse der oben bezeichneten Art nur zur Geltung kommen, wenn die zu vergleichenden Distanzen einander nahe, und nicht, wenn sie einander fern stehen. „Die gröſsere Verschiedenheit der Reize“, meint Merkel in Bezug auf den letzteren Fall, „bedingt eben, daſs neben einer direkten Vergleichung der Distanzen der zweite Reiz an dem verwandteren ersten, und der vierte Reiz an dem verwandteren dritten gemessen wird, und das führt notwendig zu einem Wettstreit zwischen der Beurteilung nach gleichen Unterschieden und gleichen Verhältnissen“;[1] aber hier liegt zum allermindesten in dem doch wohl nicht im wörtlichen Sinne zu verstehenden „Messen“ das Problem.[2] Kurz, ich verkenne weder, noch

empfindungen“ absieht. Übrigens will damit anderweitigen Einflüssen wie sekundären Kriterien in betreff der Reizschätzung, ihre Bedeutung keineswegs abgesprochen sein.

[1] *Philos. Stud.* Bd. X. S. 224.

[2] Falls ich nämlich die Gegenüberstellung einer Beurteilung „nach gleichen Unterschieden und gleichen Verhältnissen“ meiner Auffassung zu nutze machen darf. Wichtig schiene mir vor allem, ob die Gegenüberstellung auch im engsten Sinne psychologisch verstanden, d. h. das Urteil über Unterschiede und Verhältnisse wenigstens mit ins Auge

wünsche ich zu verbergen, dafs hier der schwächste Punkt der von mir vertretenen Auffassung liegt. Sie scheint mir aber ihrem Wesen wie ihren in der Folge darzulegenden Konsequenzen nach fest genug begründet zu sein, um ihr sonst möglichen Aufstellungen gegenüber den Vorzug zu sichern.

§ 21. Unterschied und Verschiedenheit.

Überblicke ich die vorstehenden Untersuchungen, so scheinen sie mir mehr als ausreichend, die Überzeugung zu begründen, dafs die Differenz nicht die von uns gesuchte[1] Funktion ist, die uns zum zahlenmäfsigen Ausdrucke der Gröfsenverschiedenheit führt. Ich schliefse hieran die Beantwortung einer allgemeineren Frage, welche bei streng methodischem Vorgehen vielleicht den Darlegungen der letzten Paragraphen hätte vorausgehen sollen. Sie ihnen erst folgen zu lassen, hat den Vorteil, dafs über die Weise ihrer Erledigung nun kein Zweifel mehr aufkommen kann und sie gleichwoh niemandem im Lichte einer doktrinären Überflüssigkeit erscheinen dürfte.

Sind Differenz und Verschiedenheit, so lautet die Frage, nicht im Grunde eines und dasselbe? Dafs die Antwort negativ ausfallen mufs, liegt nach Obigem auf der Hand; kann die Differenz nicht einmal ein Messungssurrogat für Verschiedenheit abgeben, so kann sie noch weniger mit dieser identisch sein. Es ist nun aber, namentlich mit Rücksicht auf die Merkelschen Beobachtungen, von Wert, festzuhalten, dafs diese Nicht-Identität nicht etwa nur aus der Unverwendbar-

gefafst ist. Wenn ja, dann liegt wohl sehr nahe, noch einen Schritt weiter zu gehen: Verhältnisse („geometrische" nämlich), wenn man damit die mathematische Relation dieses Namens meint, ergeben sich doch nicht aus Vergleichungen als deren unmittelbares Resultat; worüber könnte in solchen Fällen also geurteilt werden, wenn nicht über Verschiedenheit? Übrigens hat J. Merkel selbst eine nähere Untersuchung der psychologischen Seite der Sache versprochen („Die Aufgaben und Methoden der Psychologie in der Gegenwart". *Wiss. Beil. z. Jahresber. d. kgl. Realgymnasiums in Zittau.* 1895. S. 24) und die Wichtigkeit der Angelegenheit läfst baldige Erfüllung dieser Zusage hoffen. — Auf das Unzureichende der von Wundt speziell mit Bezug auf die „Methode der mittleren Abstufungen" versuchten Erklärung weist W. Dittenberger hin („Über das psychophysische Gesetz" im *Arch. f. system. Philos.* Bd. II. S. 101).

[1] Vergl. oben § 17 am Ende.

keit als Messungssurrogat erhellt. Die Frage kann ja auch direkt an die psychologische Empirie gerichtet werden, etwa in der Form: wenn ich vergleiche, genauer, wenn ich auf Grund einer Vergleichung Verschiedenheit affirmiere oder negiere, urteile ich da über Differenz? Und aus dieser direkten Empirie heraus, ohne Vor- oder Nachgedanken, mufs ich darauf mit entschiedenem „Nein“ antworten. Dieses Nein läfst sich dann aber noch durch eine nachträgliche Erwägung erhärten. Gröfsen sind, wie wir wissen, nicht das einzige, dem Verschiedenheit zukommen kann; Differenzen oder Unterschiede aber können überhaupt nur zwischen Gröfsen vorkommen und auch zwischen ihnen nicht, wenn sie nicht teilbar sind. Es tritt dies auch in der bereits oben[1] erwähnten Thatsache hervor, dafs der Unterschiedsgedanke vermöge seiner Provenienz aus der Teilvergleichung auf den um vieles weiter anwendbaren Verschiedenheitsgedanken aufgebaut ist. Auch hier tritt die von Manchen so gern umgangene und doch nie ohne Schaden zu umgehende Betrachtung des vor den theoretischen Zuthaten psychologisch Vorliegenden in ihre Rechte. Fragt man sich, was man mit dem Worte „Differenz“ und was man mit dem Worte „Verschiedenheit“ für einen Sinn verknüpft, was man bei dem einen und dem anderen Worte thatsächlich denkt, so lautet die Antwort wieder mit aller Bestimmtheit, dafs es dort ein Anderes ist, als hier.

Eine Unsicherheit kann hierüber, soviel ich sehe, nur insoweit aufkommen, als der Wortgebrauch ein unsicherer ist. Solche Unsicherheit liegt nun ohne Zweifel bis zu gewissem Grade vor, nicht, soweit es sich um die Worte „Verschiedenheit“ und „Differenz“, wohl aber, soweit es sich um das Wort „Unterschied“ handelt. Es wurde oben der gebräuchlichen Wendungen gedacht, die „Unterschied“ für „Verschiedenheit“ zu setzen keinen Anstand nehmen, — aufserdem aber des mathematisch-technischen Gebrauches des Wortes „Unterschied“ für „Differenz“. Dieser Sachlage gegenüber empfiehlt sich eine terminologische Feststellung, die uns in der Folge noch gute Dienste leisten wird.

Es ist ja selbstverständlich, dafs man Grund haben wird, den mathematischen und aufsermathematischen Wortgebrauch

---

[1] Vergl. S. 262 f.

in Bezug auf den Terminus „Unterschied" wohl auseinanderzuhalten; weil solches Auseinanderhalten aber Unzukömmlichkeiten doch nicht auszuschliefsen vermöchte, so greift man noch besser zu dem radikaleren Auskunftsmittel, die eine der beiden Anwendungsweisen ganz zu vermeiden. Überdies hat man auch sonst kein Interesse daran, das, was durch das Wort „Verschiedenheit" in natürlicher Weise ausgedrückt ist, auch noch durch ein anderes deutsches Wort auszudrücken, das es in der Mathematik bereits zu einem ebenso fest bestimmten als wichtigen Sinn gebracht hat. Dabei haben wir es hier nicht mit einer Bedeutung zu thun, welche die Mathematik dem Worte „Unterschied" im Gegensatze zum Sprachgefühl erst aufgezwungen hätte: die Wendung „die beiden Wegstrecken unterscheiden sich um ein beträchtliches Stück" hat nichts wissenschaftlich Technisches an sich, beweist vielmehr, dafs das Wort „Unterscheiden" bereits in seiner aufserwissenschaftlichen Anwendung den Bedürfnissen der Teilvergleichung in besonderer Weise Rechnung trägt.

Unter solchen Umständen drängt sich wohl von selbst die Konsequenz auf, dafs es ratsam sein werde, sich des Wortes „Unterschied" nur in Einem Sinne, und zwar in demjenigen zu bedienen, in dem wissenschaftlicher und aufserwissenschaftlicher Sprachgebrauch zusammentreffen, d. h., mehr kurz als genau gesagt, im Sinne der Mathematik. In diesem Sinne ist etwa der Unterschied zwischen zwei Linien wieder eine Linie, indes die Verschiedenheit zwischen zwei Linien so gut wie sonst irgend eine Verschiedenheit eine Relation und nichts weniger als eine Strecke ist;[1] es kann nur zu Verwirrungen führen und hat thatsächlich, wie wir sehen werden, zu solchen geführt, wenn auch diese Relation mit dem Namen „Unterschied" belegt wird.[2] Es wird sich also empfehlen, eine solche, völlig

[1] Vergl. auch Ehrenfels in der *Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos.* 1892 S. 301 f. Anm.

[2] Es scheint mir übrigens mindestens sehr zweifelhaft, ob man dabei auch nur die oben herangezogenen Fälle anscheinend gleicher Anwendung von „Unterschied" und „Verschiedenheit" genau genommen gegen sich hat. Sehr auffallend ist zum mindesten, dafs, wo man einen „Unterschied" statuiert, die Frage, worin er besteht, was ihn ausmacht, stets guten Sinn hat. Und worauf hat es Derjenige abgesehen, der eine solche Frage stellt? Er wünscht, wenn es sich etwa um die Objekte A und B handelt,

Heterogenes konfundierende Ausdrucksweise dort, wo es einigermafsen auf Genauigkeit ankommt, möglichst zu vermeiden.[1]

Ungünstig für solchen Vorsatz ist freilich die Thatsache, dafs Ausdrücke wie „Unterschiedsschwelle“, „Unterschiedsempfindlichkeit“, bei denen es sich zweifellos nicht um Unterschied im eben angegebenen Sinne, sondern um Verschiedenheit handelt, dem psychologischen Sprachgebrauche so geläufig geworden sind, dafs niemand auf dieselben wird verzichten wollen. Inzwischen sind von diesen Zusammensetzungen erhebliche Mifsvertändnisse heute schwerlich mehr zu besorgen, wenigstens nicht ernstlicher als von dem Bestandteil „Empfindlichkeit“ des zweiten der eben angeführten Ausdrücke, bei dessen Anwendung[2] man doch auch schon recht selten verkennen wird, wie wenig „Unterschied“ oder eigentlich „Verschiedenheit“ Sache des Empfindens sein könne. Es hat noch niemals eine völlig konsequente Terminologie gegeben, so wenig in wie aufser der Wissenschaft; man kann also getrost der Unterschiedsschwelle und der Unterschiedsempfindlichkeit den gebräuchlichen Namen belassen und sich übrigens doch nach Kräften hüten, den Unterschied mit der Verschiedenheit zu verwechseln.

§ 22. Das geometrische Verhältnis.

Es ist der Natur unserer Untersuchungen gemäfs, nachdem so das „arithmetische“ Verhältnis sich als zur Lösung der am Anfange von § 18 gestellten Aufgabe unzureichend erwiesen hat, nunmehr das „geometrische“ Verhältnis in Erwägung zu ziehen. Es handelt sich jetzt also darum, ob eine Gleichsetzung von der Form

---

zu wissen, was für Eigenschaften *A* vor dem *B*, eventuell auch *B* vor dem *A* voraushat. Der „Unterschied“ ist also im Grunde auch hier keine Relation, sondern eine Komplexion, was von der Verschiedenheit in keinem noch so ungenauen Wortsinne zutrifft. Ist dem so, dann fehlt eigentlich der Identifikation von Verschiedenheit und Unterschied jede sprachgebräuchliche Stütze.

[1] Vielleicht ist dem Leser früherer Ausführungen, namenlich deren gegen die Merklichkeitstheorie, bereits aufgefallen, dafs dabei das Wort „Verschiedenheit“ an Stellen gebraucht wurde, wo man sonst an das Wort „Unterschied“ gewöhnt war. Hoffentlich findet dies im eben Gesagten seine nachträgliche Rechtfertigung.

[2] Vergl. oben S. 133. Anm. 1.

$$_aV_b = C\frac{a}{b} \text{ oder eventuell } _aV_b = C\frac{b}{a}$$

den Thatsachen entspricht.

Vor allem interessiert uns hier natürlich die Frage, ob durch eine solche Funktion die Mängel der zuerst versuchten Aufstellung behoben sind. Es ist nun nicht zu leugnen, dafs eine hierauf gerichtete nähere Erwägung der abgeänderten Sachlage in der That zu einigen befriedigenden Ergebnissen führt.

Fragen wir zunächst, ob der Gleichheit des Quotienten nun auch wirklich jene Gleichheit der Verschiedenheitsgröfse entspreche, die wir bei gleicher Differenz vergebens gesucht haben, so drängt sofort ein zwar etwas komplizierterer, gleichwohl aufserordentlich populärer Relationsgedanke zur Bejahung, der Gedanke der (geometrischen) Proportionalität. Die Mathematik definiert sie als Gleichheit der Quotienten und mag ihre guten Gründe haben, bei dieser Bestimmung stehen zu bleiben. Der übliche Ausdruck der Proportionalität durch Wendungen wie: „n verhält sich zu o, wie sich p zu q verhält“ behauptet die Gleichheit zweier Relationen, ohne die Natur dieser Relationen näher anzugeben; und im Werte des Quotienten, den zwei Zahlen ergeben, tritt ja sicherlich eine Relation dieser Gröfsen, in der Übereinstimmung zweier Quotienten also eine Übereinstimmung in betreff dieser Relation hervor. Wenn aber einer sagt: „je länger der in der gegebenen Zeit zurückgelegte Weg war, desto gröfser mufste die Geschwindigkeit gewesen sein“, oder „je gröfser die Mühe, desto höher der Preis“ und dergl., da hat er sicherlich keine Quotienten im Auge, sondern Steigerungen, die trotz der Verschiedenheit des Gesteigerten als gleich grofse Steigerungen angesehen werden. Woher nähme auch der Proportionalitätsgedanke seine Volkstümlichkeit, wenn er nichts anderes als eine mathematische Operation zur Grundlage hätte? Und wenn dies einmal ausgeschlossen ist, worauf könnte er natürlicher bezogen werden als auf die Verschiedenheit, genauer: auf die Gleichheit von Verschiedenheiten?

Exakter ist natürlich der Nachweis, der in jener Formulierung des Weberschen Gesetzes vorliegt, die mit Recht als die einwurfsfreieste bezeichnet worden ist. Dieselbe behauptet ja Konstanz der relativen Unterschiedsempfindlichkeit;

nun ist der sogenannte relative Unterschied zwar nicht selbst der Quotient, aber gleiche relative Unterschiede gehen bekanntlich mit gleichen Quotienten zusammen. Was also an ebenmerklichen und übermerklichen Verschiedenheiten diesem Gesetze gemäſs ist, verifiziert zugleich die Annahme des Zusammengehens gleicher Quotienten mit gleichen Verschiedenheiten; gleiche Verschiedenheiten bei ungleichen Quotienten sind hierdurch nicht minder ausgeschlossen, als ungleiche Verschiedenheiten bei gleichen Quotienten.

Indem wir so von der beiderseitigen Koincidenz der Gleichheiten auf die der Ungleichheiten übergehen, gelangen wir zugleich zu der noch ausstehenden Entscheidung zwischen den beiden oben nebeneinandergestellten Quotienten von a und b. Gilt der schon oben einmal herangezogene Grundsatz: die Verschiedenheit ist um so gröſser, je gröſser das gröſsere, je kleiner das kleinere der distanten Objekte ist, so ist sofort ersichtlich, daſs nur b als das Gröſsere in den Zähler, nur a als das Kleinere in den Nenner des präsumtiven Bruches gesetzt werden kann. Nur die Annahme:

$$ {}_aV_b = C\frac{b}{a} $$

braucht also unsere weiteren Erwägungen zu beschäftigen.

Es handelt sich nun nur noch um die Grenzfälle, und auch hier tritt die Überlegenheit des Quotienten gegenüber der Differenz zu Tage, insofern nicht nur die Verschiedenheit des Endlichen vom Unendlichen, sondern auch die des Endlichen von der Null einen unendlich groſsen Wert für den in Aussicht genommenen Bruch ergiebt. Dagegen führt der noch übrige Grenzfall der Gleichheit von a und b, dem die Differenzformel mit Leichtigkeit Rechnung tragen konnte, bei der Quotientenformel zu einem ganz unannehmbaren Resultate. Für

$$ a = b \text{ ist } {}_aV_b = C, $$

indes natürlich die Verschiedenheit zwischen zwei gleichen Gröſsen keinen anderen als Nullwert haben kann.

Die Unfähigkeit auch des geometrischen Verhältnisses, das gewünschte Surrogat zur Verschiedenheitsmessung zu liefern, tritt hiermit klar zu Tage. Das, worauf uns die Untersuchung geführt hat, ist nicht etwa ein vereinzelt auftretender Widerspruch, über den sich freilich auch schwerlich hinwegsehen liefse; vielmehr verrät sich darin ein fundamentaler Mangel des in Betracht gezogenen Gröfsensystems. Ist dieses so beschaffen, dafs es unter den oben dargethanen und durchaus unerläfslichen Voraussetzungen über die Stellung des a und b im Bruche günstigsten Falles nur ein Limitieren gegen 1 gestattet, so kann es unmöglich als Messungssurrogat für ein System eintreten, dessen Fähigkeit, gegen Null zu limitieren, aufser jedem Zweifel ist.

§ 23. Der relative Unterschied.

Es ist nicht eben schwer, eine Funktion zu finden, welche unsere Mafszahlen a und b derart miteinander verbindet, dafs im Resultate die Vorzüge sowohl der Differenz als des Quotienten erhalten bleiben, die oben namhaft gemachten Mängel sonach beseitigt sind. Man findet diese Funktion in dem der Psychologie heute so geläufigen Begriffe des „relativen Unterschiedes", der, wenn wir von einer etwaigen Verschiedenheit des Vorzeichens auch hier ihrer augenscheinlichen Unwesentlichkeit halber absehen, uns doch jedenfslls die zwei Eventualitäten zur Wahl bietet:

$$ {}_aV_b = C\,\frac{b-a}{a} \quad \text{und} \quad {}_aV_b = C\,\frac{b-a}{b}. $$

Ehe wir nach Gesichtspunkten für eine solche Wahl suchen, empfiehlt es sich, ausdrücklich zu konstatieren, was durch Einführung dieser Funktion für unsere Zwecke gewonnen ist. Dreierlei darf, wie ohne weiteres ersichtlich, im Hinblick auf die bei Differenz und Quotient geführten Untersuchungen der in der neuen Weise gewonnenen Mafszahl nachgesagt werden:

1. Gleichen Verschiedenheiten entsprechen gleiche, ungleichen Verschiedenheiten ungleiche, und zwar im nämlichen Sinne ungleiche Werte dieser Mafszahl. Die Gewähr dafür liegt in dem schon oben berührten Umstande, dafs zu gleichen relativen Unterschieden allemal gleiche Quotienten gehören, für letztere aber, wie wir sahen, der in Rede stehende Parallelismus mit den zugehörigen Verschiedenheiten zu Recht besteht.

2. Der Gleichheit von a und b entspricht stets der Zahlenwert 0.

3. Erreicht a den ihm voraussetzungsgemäfs allein zugänglichen Grenzwert 0, oder b den ihm aus gleichem Grunde allein zugänglichen Grenzwert ∞, so ergiebt dies für die beiden oben nebeneinandergestellten Gestalten des relativen Unterschiedes, bezw.:

$$_aV_b = \infty \quad \text{oder} \quad _aV_b = C.$$

Dafs die Resultate 1 und 2 für die Brauchbarkeit der in Rede stehenden Funktion entschieden günstig sind, bedarf keiner weiteren Darlegung. Auch Resultat 3 empfiehlt sich, soweit es die erste Form des relativen Unterschiedes angeht, von selbst: die Verschiedenheit zwischen Null und einer endlichen, oder die zwischen einer endlichen und einer unendlichen Gröfse unendlich grofs anzusetzen, hat sich uns oben wiederholt als völlig natürlich herausgestellt. Bedenklicher ist die für diese Fälle aus der zweiten Gestalt des relativen Unterschiedes hervorgehende endliche Zahl C, also etwa wieder die Einheit; und die Konsequenz, dafs etwa 1 und 2 nur eine halb so grofse Verschiedenheit aufzuweisen hätten, als 1 und ∞, klingt mindestens recht gezwungen. Doch wäre dem keineswegs so viel Gewicht beizumessen, wie dem sonst in gewissem Sinne nicht unähnlich scheinenden Rechnungsergebnisse C oder 1 beim geometrischen Verhältnisse zwischen gleichem a und b. Es ist doch ein ganz Anderes, einer grofsen Verschiedenheit einen blofs endlichen Maximalwert, als einer gänzlich mangelnden Verschiedenheit einen immer noch endlichen Minimalwert beizumessen. Dafs alle Verschiedenheit gegen ein endliches und unüberschreitbares Maximum limitiere, ist eine mindestens diskutierbare Annahme; dafs eine voraussetzungsgemäfs bereits verschwundene Verschiedenheit immer noch einen endlichen Wert habe, ist einfach widersprechend.

Es hat also doch alles in allem den Anschein, als hätten wir im relativen Unterschiede das gefunden, was wir suchen; die Bevorzugung, die diesem Begriffe in der modernen Psychologie allenthalben zu teil wird, wäre damit in befriedigendster Weise begründet. Nun obliegt uns aber doch zum mindesten noch, zwischen den zwei bisher parallel behandelten Gestalten des relativen Unterschiedes eine definitive Wahl zu treffen; eine solche müfste dann wohl auch anderen Aufgaben der Psychologie zu statten kommen, denen gegenüber es doch beim

Hin- und Herschwanken zwischen den beiden Formen oder einer willkürlichen Bevorzugung der einen derselben auf die Länge nicht wohl sein Bewenden haben könnte.

§ 24. Die beiden Gestalten des relativen Unterschiedes.

Es ist hierzu erforderlich, aufser den bisher allein berücksichtigten Gröfsen G_a und G_b noch eine dritte Gröfse G_c desselben Gebietes heranzuziehen. Es geschehe dies unter der Voraussetzung, dafs die für diese charakteristische Mafszahl c gröfser als b, daher um so mehr auch gröfser als a sei. Zu dem bisher allein erwogenen Verschiedenheitsfalle ${}_aV_b$ kommen jetzt noch die weiteren Fälle ${}_bV_c$ und ${}_aV_c$, deren Gröfse im Sinne der in Rede stehenden Annahme durch den relativen Unterschied der betreffenden Mafszahlen bestimmt ist. Sehen wir im Folgenden der Einfachheit halber von der Konstanten C ab, indem wir ihr den Einheitswert erteilen, eine Annahme, die im Bedarfsfalle ja jederzeit auch wieder aufgegeben werden könnte, so erhalten wir unter Zugrundelegung der ersten Gestalt des relativen Unterschiedes:

$$\text{analog zu } {}_aV_b = \frac{b-a}{a} \quad \text{nun noch: } {}_bV_c = \frac{c-b}{b}, \quad {}_aV_c = \frac{c-a}{a},$$

unter Zugrundelegung der zweiten Gestalt

$$\text{analog zu } {}_aV_b = \frac{b-a}{b} \quad \text{nun noch: } {}_bV_c = \frac{c-b}{c}, \quad {}_aV_c = \frac{c-a}{c}.$$

Der Zweck, dem die Einführung der Gröfse G_c dient, ist leicht zu erkennen. Hat man drei Gröfsen in geordneter, also etwa aufsteigender Reihe vor sich, so scheint es eine ganz selbstverständliche Annahme, dafs die drei mit ihnen gegebenen Verschiedenheiten ihrer Gröfse nach nicht voneinander unabhängig sein können, vielmehr die Verschiedenheit der ersten von der zweiten Gröfse, vermehrt um die Verschiedenheit der zweiten von der dritten, die Verschiedenheit der ersten von der dritten ergeben mufs. Können wir nun die Gröfsen dieser drei Verschiedenheiten auch als Funktionen der drei Mafszahlen a, b und c ausdrücken, so liegt die Frage nahe, ob die so gewonnenen Werte auch die Relation

$${}_aV_c = {}_aV_b + V_c$$

mit sich führen oder wenigstens zulassen, — zugleich die Erwartung, dafs das Ergebnis einer diesbezüglichen Feststellung auf die Eignung unserer Funktion und ihrer beiden Gestalten ein Licht zu werfen im stande sein werde.

Die Untersuchung mufs für jede der beiden Gestalten des relativen Unterschiedes besonders geführt werden. Ihr nächstes Objekt ist die Berechtigung des in der eben formulierten Gleichung auftretenden Gleichheitszeichens unter Voraussetzung der einen oder der anderen der beiden als relativer Unterschied bezeichneten Funktionen. Die Korrektheit desselben soll jedesmal zunächst hypothetisch angenommen und so weit in ihren Konsequenzen verfolgt werden, bis diese selbst die erforderlichen Aufschlüsse über die Beschaffenheit der Voraussetzung gewähren. Um allen Mifsverständnissen aus dem Wege zu gehen, soll das blofs hypothetisch verstandene, in Wahrheit eben zu prüfende Gleichheitszeichen allemal durch ein darüber gesetztes Fragezeichen kenntlich gemacht werden.

Beginnen wir mit der ersten Gestalt des relativen Unterschiedes. Ihr gemäfs ist anzusetzen:

$$\frac{c-a}{a} \overset{?}{=} \frac{b-a}{a} + \frac{c-b}{b}$$

oder:

$$\frac{bc-ab}{ab} \overset{?}{=} \frac{b^2-ab+ac-ab}{ab}.$$

Die Entscheidung über Gleichheit oder Ungleichheit liegt hier offenbar im Zähler, näher in der Gegenüberstellung:

$$bc \overset{?}{=} b^2 + a(c-b)$$

oder:

$$b(c-b) \overset{?}{=} a(c-b).$$

Weil aber der Voraussetzung nach $b > a$ und $c > b$ ist, so ist nun nicht nur unverkennbar, dafs das Gleichheitszeichen hier überall unstatthaft, sondern auch, dafs es überall durch ein Gröfserzeichen zu ersetzen ist, was zum Ergebnis führt:

$$\frac{c-a}{a} > \frac{b-a}{a} + \frac{c-b}{b}.$$

Um den Sachverhalt an einem speziellen Beispiele zu beleuchten, nehme man etwa 1, 2 und 4 als die in Betracht kommenden Maſszahlen an. Dann hat die Verschiedenheit von 1 und 2 im Sinne unserer Funktion den Betrag 1, ebenso die Verschiedenheit von 2 und 4; die Verschiedenheit von 1 und 4 dagegen beträgt 3, indes die Summe der beiden kleineren Verschiedenheiten sich bloſs auf 1 + 1, also auf 2 beläuft.

Wenden wir uns zur zweiten Gestalt des relativen Unterschiedes. Dieselbe ergiebt:

$$\frac{c-a}{c} \overset{?}{=} \frac{b-a}{b} + \frac{c-b}{c}$$

oder:

$$\frac{bc-ab}{bc} \overset{?}{=} \frac{bc-ac+bc-b^2}{bc}.$$

Auch hier liegt die Entscheidung im Zähler, und zwar in dem was beiderseits von dem Produkte bc abgezogen wird. Also

$$ab \overset{?}{=} ac + b^2 - bc,$$

oder:

$$a(b-c) \overset{?}{=} b(b-c).$$

Auch hier widerspricht also das Gleichheitszeichen der vorausgesetzten Gröſsenrelation zwischen b und c. Um nun aber auch über den Sinn der sonach jedenfalls vorliegenden Ungleichheit ins Klare zu kommen, ist zu beachten, daſs die zu beiden Seiten des beseitigten Gleichheitszeichens übereinstimmend auftretende Differenz vermöge der Voraussetzung über die Gröſsenrelation zwischen b und c hier ebenso gewiſs negativen wie im erstuntersuchten Falle positiven Wert hat. Mit Rücksicht hierauf ist zu setzen:

$$a(b-c) > b(b-c).$$

Da aber hiermit nur zwei Subtrahenden verglichen sind, die von Haus aus einem und demselben Minuenden gegenüberstehen, so muſs die Ausgangsungleichung in Wahrheit wieder das entgegengesetzte Ungleichheitszeichen aufweisen, so daſs wir erhalten:

$$\frac{c-a}{c} < \frac{b-a}{b} + \frac{c-b}{c}.$$

Auch dies ist am obigen Spezialfall deutlich zu machen. Nach der zweiten Form des relativen Unterschiedes hat die Verschiedenheit zwischen 1 und 2 den Wert $\frac{1}{2}$, ebenso die zwischen 2 und 4, die zwischen 1 und 4 aber den Wert $\frac{3}{4}$, während die Summe 1 betrüge.

Übrigens gestatten die beiden Ergebnisse auch eine direkte, zugleich elegantere Ableitung, deren Kenntnis ich meinem verehrten Kollegen, Professor von Dantscher, verdanke. Für die erste Gestalt des relativen Unterschiedes folgt aus der Voraussetzung:

$$o < a < b < c$$

unmittelbar:

$$b(c-b) > a(c-b),$$

oder, wenn auf beiden Seiten der Ungleichung durch ab dividiert wird:

$$\frac{c}{a} - \frac{b}{a} > \frac{c}{b} - 1.$$

Wird nun beiderseits eine Einheit abgezogen, so erhält man:

$$-1 + \frac{c}{a} > -1 + \frac{b}{a} - 1 + \frac{c}{b}$$

oder:

$$\frac{c-a}{a} > \frac{b-a}{a} + \frac{c-b}{b}.$$

In gleicher Weise folgt für die zweite Gestalt des relativen Unterschiedes aus der eben namhaft gemachten Ausgangsvoraussetzung:

$$b(b-a) < c(b-a),$$

oder, wenn man innerhalb der Parenthese links vom Ungleichheitszeichen c addiert und wieder subtrahiert:

$$b[c-a-(c-b)] < c(b-a)$$

oder:

$$b(c-a) < c(b-a) + b(c-b).$$

Wird hier beiderseits durch bc dividiert, so ergiebt dies:

$$\frac{c-a}{c} < \frac{b-a}{b} + \frac{c-b}{c}.$$

Man ersieht aus diesen Darlegungen vor allem, dafs die Voraussetzung, die man kurz als die der Summierbarkeit der Distanzgröfsen bezeichnen könnte, durch keine der beiden Gestalten des relativen Unterschiedes verifiziert wird, vielmehr die erste Gestalt die Gesamtdistanz gröfser, die zweite Gestalt kleiner ergiebt als die Teildistanzen, wenn diese ungenaue Bezeichnungsweise der Kürze halber gestattet ist. Es fragt sich dem gegenüber einmal, ob, was eben als Nicht-Summierbarkeit bezeichnet wurde, etwa schon ausreicht, um den relativen Unterschied in der hier versuchten Anwendung ganz im allgemeinen ad absurdum zu führen, — ferner eventuell, ob im besonderen das Gröfser oder Kleiner, das den beiden Gestalten des relativen Unterschiedes entspricht, eine Entscheidung zu Gunsten einer dieser Gestalten gewinnen hilft.

In betreff des ersteren Fragepunktes wird man sich darauf, dafs von Summierung bei Distanzen überhaupt streng genommen gar nie die Rede sein könne, nach Früherem nicht mehr berufen wollen. Distanzen sind nicht leichter, aber auch nicht schwerer zu addieren, als sie zu substrahieren, und somit auch, als sie zu messen sind. Kann man also Distanzen surrogativ messen, so wird man sie auch, wenn man so sagen darf, surrogativ addieren können. Sind x, y, z drei kontinuierlich miteinander verbundene oder verbindbare Objekte, im Falle, dafs es sich um Gröfsen handelt, etwa auch deren Mafszahlen, so ist die Frage, ob

$$ {}_xV_z = {}_xV_y + {}_yV_z $$

ist, jederzeit statthaft, wenn man dabei die zugeordneten Strecken im Auge behält, so dafs es zunächst darauf ankommt, ob auch

$$ \overline{xz} = \overline{xy} + \overline{yz} $$

ist, wo der über je zwei Symbole gesetzte Querstrich eben die der betreffenden Distanz zugeordnete Strecke bedeutet.

Dafs nun aber weiter die negative Beantwortung einer solchen Frage keineswegs schlechthin eine Unverträglichkeit in den Annahmen verrät, wie Fechner wohl gemeint haben wird,[1] davon überzeugt man sich leicht, wenn man sich etwa

[1] „Über die psychischen Mafsprinzipien und das Webersche Gesetz“ in *Wundts Philos. Stud.* Bd. IV. S. 183 f. Seine Berufung auf die Nominal-

x, y und z als Punkte im Raume vorstellt. Nur wenn alle drei Punkte in derselben Geraden liegen, besteht das eben formulierte Summengesetz zu Recht. Liegen sie dagegen nicht in derselben Geraden, dann gilt das Summengesetz nicht,[1] und dann hat es auch einen ganz guten Sinn, das analoge Gesetz in betreff der zugeordneten Distanzen in Abrede zu stellen.

Einen Grund, den relativen Unterschied hier a priori abzulehnen, haben wir also nicht vor uns; dagegen führt uns das Raumgleichnis, wenn wir auf dasselbe einigermaſsen vertrauen dürfen, sofort zu der gesuchten Entscheidung zwischen den beiden Gestalten unserer Funktion. Wir können unsere drei Punkte im Raume, genauer in einer Ebene so anordnen, daſs die Summe zweier Verbindungslinien gröſser ist als die dritte, nie aber so, daſs sie kleiner ist, und es ist schwerlich anzunehmen, daſs diese Unmöglichkeit etwa den Besonderheiten des räumlichen Continuums beizumessen wäre. Ist dem so, so erscheint durch die obigen Rechnungsergebnisse die Unbrauchbarkeit jener Gestalt des relativen Unterschiedes, bei welcher die kleinere der distanten Gröſsen den Divisor abgiebt, endgültig dargethan, und die von der experimental-psychologischen Praxis meist vernachlässigte zweite Form bleibt als einzig diskutierbarer Fall noch übrig. Man hätte sich dann die Sachlage so vorzustellen, daſs die Punkte des Gröſsencontinuums zwar in einer Linie, aber nicht in einer geraden, sondern einer irgendwie gekrümmten Linie angeordnet wären, so daſs die den einzelnen Punktdistanzen zugeordneten Strecken auſserhalb dieser Linie, etwa in ein unrealisiertes Gebiet des sonach mindestens zweidimensionalen Continuums zu liegen kämen.

Den Eindruck des Ungezwungenen wird diese Auffassung

---

definition des „doppelten Unterschiedes" verliert alle Stringenz, sobald „Verschiedenheit" für „Unterschied" gesetzt wird, — zugleich der erste Beleg für die Wichtigkeit der oben § 21 getroffenen terminologischen Feststellung, dem noch weitere folgen werden.

[1] Die Scheinausnahme, welche die Hamiltonsche Vektorenmethode in der Addierbarkeit der Vektoren aufweist (vergl. Maxwell, „*Substanz und Bewegung*", übersetzt von Fleischl, S. 7) hat ihren Grund doch nur in der eigentümlichen Symbolik dieser Methode, vergl. A. Höfler, „Zur vergleichenden Analyse der Ableitungen für Begriff und Gröſse der zentripetalen Beschleunigung" in der *Zeitschr. f. d. physik. u. chem. Unterr.* Jahrg. II. S. 280f.

freilich kaum machen; um so mehr wird man durch die Thatsache überrascht, daſs die experimentelle Psychologie Erfahrungen aufgewiesen hat, die für Verifikationen dieser Auffassung gehalten werden könnten. Daſs geteilte Linien und Winkel gröſser scheinen als ungeteilte, fällt doch genau mit dem über die Gesamtheit der Teildistanzen in ihrem Verhältnis zur Gesamtdistanz Gesagten zusammen. Dies und namentlich die oben dargelegten Vorzüge des relativen Unterschiedes rechtfertigen das Unternehmen, der Natur der durch das eben ausgesprochene Distanzgesetz geforderten Kurve noch ein wenig nachzugehen.

§ 25. Das Distanzgesetz gemäſs der zweiten Gestalt des relativen Unterschiedes.

Es sei zu diesem Ende noch einmal ein Verfahren eingeschlagen, das uns bereits oben zur Entscheidung zwischen den beiden Formen des relativen Unterschiedes geführt hat. Denken wir uns das im Sinne der zweiten Gestalt des relativen Unterschiedes formulierte Distanzgesetz statt als von Gröſsen als von Raumpunkten gültig, und fragen wir nach der inneren Statthaftigkeit einer solchen Annahme. Natürlich geht bei dieser Übertragung auf den Raum die Haupteigenschaft unseres Gesetzes, die Distanzgröſse als Funktion der distanten Gröſsen darzustellen, verloren, weil Ortsbestimmungen keine Gröſsen sind. Dagegen darf man wohl erwarten, daſs, wenn unser Gesetz innerlich einwurfsfrei ist, an Stelle der Gröſsen solche Raumpunkte gesetzt werden können, daſs die aus der Lage dieser Punkte resultierenden Distanzen sich ihrer Gröſse nach ebenso zu einander verhalten wie die aus dem Gesetze sich ergebenden Distanzen der bezüglichen distanten Gröſsen. Daſs für ein im Sinne der ersten Gestalt des relativen Unterschiedes formuliertes Gesetz solche Punkte nicht aufzubringen seien, war der Nerv der oben gegen diese Gestalt gerichteten Beweisführung; es war für diese nichts weiter erforderlich, als das fragliche Gesetz nur für d r e i Punkte im Raume gültig anzunehmen, um auf eine Unverträglichkeit geführt zu werden. Dagegen gestattete, wie wir sahen, die zweite Gestalt des relativen Unterschiedes die Übertragung auf den Raum innerhalb der eben berührten Grenzen, d. h. solange nur drei Vergleichsobjekte in Betracht kamen, ohne Schwierigkeit. Es soll nun die Frage aufgeworfen werden, ob die Übertragung statthaft bleibt auch ohne die Einschränkung auf drei Gröfsen und drei Punkte, ob ihr also nichts im Wege steht, wenn sie für mehr als drei Objekte in voller Allgemeinheit vollzogen gedacht wird.

Näher sei die Aufgabe dahin präzisiert, dafs als distante Gröfsen die Reihe 1, 2, 3 .... der natürlichen Zahlen — ob unbenannt oder gleichbenannt, dürfte belanglos sein — in Betracht gezogen werde. Es gilt, die im angegebenen Sinne allgemein vorgenommen gedachte Zuordnung von Raumpunkten in ihre Konsequenzen zu verfolgen. Die Auflösung dieser Aufgabe verdanke ich der freundlichen Bemühung meines verehrten Kollegen Professor von Dantscher, dessen diesbezüglichen, mir in gewohnter Hülfsfreudigkeit zur Verfügung gestellten Aufzeichnungen die folgende Rechnung in allen wesentlichen Punkten entnommen ist.

Es seien die Punkte des Euklidschen Raumes auf ein System rechtwinkliger Parallelkoordinaten bezogen; ferner seien die im Sinne unseres Distanzgesetzes den Zahlen 1, 2, 3..... zugeordnet gedachten Raumpunkte durch die Symbole (1), (2), (3)..... bezeichnet. Legen wir, was ja jedenfalls Sache freier Wahl ist, den Punkt (1) in den Ursprung des Koordinatensystems, den Punkt (2) in die x-Axe, und zwar in deren positive Hälfte, so erhalten wir, wenn wir die Koordinaten jedes der zugeordneten Punkte durch eine entsprechende Indexzahl kennzeichnen, zunächst:

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = 0, \qquad z_1 = 0,$$
$$x_2 = \frac{1}{2}, \qquad y_2 = 0, \qquad z_2 = 0,$$

wobei die Länge von x_2 an sich natürlich ebenfalls noch willkürlich, der Zahlenwert aber im Hinblick auf unser Gesetz gewählt ist, da ja x_2 zugleich die Distanz des Punktes (1) vom Punkt (2) darstellt.

Aus diesen Voraussetzungen ergeben sich nun zuvörderst die Koordinaten des Punktes (3), da ja unserem Distanzgesetz zufolge, wenn wieder, wie oben, ein über die betreffenden Symbole gesetzter Querstrich die zwischen den betreffenden Objekten bestehende Distanz andeutet,

$$x_3^2 + y_3^2 = \overline{31}^2 = \frac{4}{9},$$

$$\left(x_3 - \frac{1}{2}\right)^2 + y_3^2 = \overline{32}^2 = \frac{1}{9}$$

ist. Es folgt hieraus:

$$x_3 = \frac{7}{12},\ y_3 = \frac{\sqrt{15}}{12},\ z_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{I})$$

wo die Willkür nur noch bei der Wahl des Vorzeichens für $\sqrt{15}$ freien Spielraum hat.

Nun lassen sich die Koordinaten x_n, y_n, z_n des Punktes (n) berechnen, da dessen Distanzen von den nunmehr bereits fixierten Punkten (1), (2), (3) einerseits durch unser Gesetz gegeben, nämlich

$$\overline{n\,1} = \frac{n-1}{n}, \qquad \overline{n\,2} = \frac{n-2}{n}, \qquad \overline{n\,3} = \frac{n-3}{n},$$

andererseits aber die Quadrate derselben durch die bekannte Distanzformel für rechtwinklige Koordinaten als Funktionen von x_n, y_n, z_n dargestellt werden. Man erhält so die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\ \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 + y_n^2 + z_n^2 &= \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 \\ \left(x_n - \frac{7}{12}\right)^2 + \left(y_n - \frac{\sqrt{15}}{12}\right)^2 + z_n^2 &= \left(\frac{n-3}{n}\right)^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \mathrm{II}).$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \frac{n^2 + 8n - 12}{4n^2} \\ y_n &= \frac{11n^2 + 120n - 324}{180n^2}\sqrt{15} \\ z_n &= \frac{(n-3)\sqrt{15}\sqrt{119n^2 + 144n - 864}}{45n^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \mathrm{III}).$$

Dieses Resultat kann einiges Befremden hervorrufen, wenn man zum Zwecke der Verifikation nun für n hintereinander die speziellen Werte 1, 2 und 3 einsetzt und auf diesem Wege zwar für den Punkt (3) die oben sub I) berechneten Koordinatenwerte erhält, keineswegs aber ebenso für die Punkte (1) und (2) die oben festgesetzten Ausgangswerte. Es wäre aber voreilig, hieraus auf die Unhaltbarkeit unseres Distanzgesetzes zu schliefsen; und der Grund, weshalb ich einem solchen Irrtum hier ausdrücklich entgegentrete, liegt nur in der an mir selbst gemachten Erfahrung, wie leicht dieser Irrtum sich begehen läfst. Man übersieht dabei einfach, dafs unser Distanzgesetz von Anfang an gerade dadurch charakterisiert war, dafs die zur gröfseren Vergleichsgröfse gehörige Mafszahl in den Nenner zu stehen kommt, also, um vorübergehend wieder die früher gebrauchten Symbole a und b heranzuziehen, dafs

$$b \geqq a.$$

Es hiefse also geradezu eventuell die erste Gestalt des relativen Unterschiedes an Stelle der zweiten unterschieben, wollte man in den obigen Gleichungen III) dem n einen Wert kleiner als 3 erteilen. Setzt man dagegen $n = 3$, dann fällt die Probe, wie wir sahen, sofort völlig befriedigend aus. Immerhin ist also oben das Symbol n nur unter der Beschränkung einzuführen, dafs

$$n \geqq 3$$

ist. Eine Einwendung gegen die Statthaftigkeit unseres Distanzgesetzes ist hieraus in keiner Weise abzuleiten.

Anders stellt sich die Sache, wenn man den Vorzeichen der nach III) berechneten y_n und z_n nachgeht. Zunächst zeigt sich auch hierbei noch keine Schwierigkeit. Das Vorzeichen von $\sqrt{15}$ ist durch I) vorbestimmt; es mufs mit dem dort für y_3 gewählten übereinstimmen. Dagegen bleibt das Vorzeichen von

$$\sqrt{119\,n^2 + 144\,n - 864}$$

für einen Wert von $n > 3$ immer noch willkürlich; die einmal getroffene Wahl entscheidet aber zugleich auch für alle übrigen n. Nimmt man nämlich, was ja ohnehin am natürlichsten sein wird, die Bestimmung des fraglichen Vorzeichens für $n = 4$ vor, also für denjenigen Fall, wo nach III)

$$x_4 = \frac{9}{16},\ y_4 = \frac{83\sqrt{15}}{720},\ z_4 = \frac{\sqrt{15}\,\sqrt{101}}{180} \ldots\ldots \text{IV)}$$

ist, fixiert somit das Vorzeichen von $\sqrt{101}$, so tritt die Abhängigkeit des Vorzeichens von $\sqrt{119n^2 + 144n - 864}$ von der in dieser Weise getroffenen Wahl in der Gleichung

$$(x_n - x_4)^2 + (y_n - y_4)^2 + (z_n - z_4)^2 = \overline{n4}^2 = \left(\frac{n-4}{n}\right)^2 \ldots\ldots\ldots \text{V)}$$

zu Tage. Führt man darin die Ausdrücke III) und IV) ein, so folgt:

$$\left[\frac{n^2 + 8n - 12}{4n^2} - \frac{9}{16}\right]^2 + 15\left[\frac{11n^2 + 120n - 324}{180n^2} - \frac{83}{720}\right]^2$$

$$+ 15\left[\frac{(n-3)\sqrt{119n^2 + 144n - 864}}{45n^2} - \frac{\sqrt{101}}{180}\right]^2 = \left(\frac{n-4}{n}\right)^2$$

oder nach gehöriger Reduktion:

$$18(n-4)^2(103n^2 + 144n - 432) = [4(n-3)\sqrt{119n^2 + 144n - 864} - n^2\sqrt{101}]^2.$$

Führt man hier das Quadrat rechts vom Gleichheitszeichen aus und sondert dann noch den Faktor $-n^2$ ab, so ergiebt sich:

$$151n^2 + 3120n - 11664 = 8(n-3)\sqrt{101}\sqrt{119n^2 + 144n - 864} \quad \text{VI)}$$

Diese Gleichung müfste nun in der That geeignet sein, die eindeutige Verknüpftheit der Vorzeichen von

$$\sqrt{101} \quad \text{und} \quad \sqrt{119n^2 + 144n - 864}$$

erkennen zu lassen, wenn die darin ausgedrückte Relation für beliebige Werte von n überhaupt möglich wäre. Dies ist aber eben nicht der Fall, wie aus dem Umstande erhellt, dafs der Ausdruck $(119n^2 + 144n - 864)$ kein vollständiges Quadrat ist, indes links vom Gleichheitszeichen eine ganze rationale Funktion von n steht. Quadriert man die Gleichung VI), so erhält man nach Absonderung des Faktors $3^4 . 5$:

$$(n-4)^2[1843n^2 + 3320n - 28752] = 0 \ldots\ldots\ldots \text{VII)},$$

woraus unmittelbar zu ersehen ist, dafs die Relation VI) sich für rationale Werte von n nur unter einer einzigen Voraussetzung erfüllen läfst, unter der selbstverständlich realisierbaren nämlich, dafs n den Wert 4 annimmt.

§ 26. Ergebnisse.

Auch dieses Resultat ist nun nicht so beschaffen, daſs man daraus ohne weiteres den Schluſs ziehen könnte, das auf die zweite Gestalt des relativen Unterschiedes gebaute Distanzgesetz sei mit inneren Widersprüchen behaftet. Denn ohne Zweifel hängt die eben aufgewiesene Inkonvenienz zunächst an dem Versuche, die sich sonst allenthalben so wohl bewährende Raumsymbolik auch auf den Fall der Gröſsenverschiedenheiten zu übertragen. Und daſs dieser Fall die Symbolik zulassen müſste, dafür vermöchte ich zur Zeit einen Beweis nicht beizubringen. So viel aber läſst sich behaupten, daſs der relative Unterschied in der einzigen noch diskutierbar gebliebenen Gestalt auf eine Kurve führt, die im Euklidschen Raum nicht mehr unterzubringen ist, und von der mindestens sehr zweifelhaft bleiben muſs, ob sie in einem anders beschaffenen Raume Platz finden könnte, d. h. ob sie nicht in sich unmöglich ist. Unsere Funktion führt also entweder zu Widersprüchen oder doch zu einem so komplizierten Resultat, daſs man in ihr das zur Gröſsenmessung geeignete Surrogat trotz oben gewürdigter Vorzüge nicht wird anerkennen können. Es darf an dieser Stelle daran erinnert werden, daſs wir bereits in einem früheren Stadium dieser Untersuchung in dem endlichen Verschiedenheitsmaximum eine nicht unbedenkliche Konsequenz gerade der in Rede stehenden zweiten Form des relativen Unterschiedes angetroffen haben.

Es empfiehlt sich nun aber, obwohl wir im Hauptfragepunkte über negative Resultate immer noch nicht hinausgekommen sind, den Faden der auf die Gröſsenverschiedenheitsmessung gerichteten Untersuchung fallen zu lassen, bis wir ihn im folgenden Abschnitte, durch anderweitig zu gewinnende Bestimmungen unterstützt, hoffentlich mit Aussicht auch auf positiven Erfolg wieder aufnehmen können. Immerhin darf aber schon an dieser Stelle auf eine Art Nebenerfolg der vorstehenden Untersuchung hingewiesen werden. „Da wir“, bemerkt gelegentlich G. E. Müller,[1] „darüber, wie unser Vermögen der Beurteilung zweier Empfindungen als mehr oder weniger verschiedener zu stande komme, zur Zeit so gut wie nichts wissen, bisher auch nicht einmal

[1] *Zur Grundlegung.* S. 389.

der Versuch einer wirklich exakten Behandlung dieses Problemes vorliegt, so sind wir, wenigstens zur Zeit, nicht im mindesten im stande, auf rein theoretischem Wege etwas Sicheres darüber ausmachen zu können, ob gleiche Merklichkeit gegebener Empfindungsunterschiede auf gleiche absolute oder gleiche relative Gröſse derselben hinweise.“ Nun wird durch die Ausführungen des gegenwärtigen Abschnittes ein erster Schritt in der Richtung der von Müller mit Recht verlangten „exakten Behandlung“ hin wohl gethan sein; und soweit man ein Recht hat, aus „gleicher Merklichkeit“ auf gleiche Verschiedenheit zu schlieſsen,[1] oder eventuell, soweit dort, wo man vielfach lieber von Merklichkeit redet, eigentlich besser von Verschiedenheit und deren Gröſse geredet werden sollte,[2] sind wir nunmehr bereits in der Lage, die in betreff des absoluten und relativen Unterschiedes aufgeworfene Frage zu beantworten. Die Verschiedenheit zweier psychischer Daten fällt ihrer Gröſse nach weder mit dem absoluten noch mit dem relativen Unterschiede dieser Daten zusammen;[3] aber die Beziehung zum relativen Unterschiede ist eine ungleich engere. Zu gleichen Verschiedenheiten gehören, soweit das uns zugängliche Erfahrungsmaterial, insbesondere der Thatsachenkreis des Weberschen Gesetzes sich in dieser Frage verwerten läſst, gleiche relative, nicht aber gleiche absolute Unterschiede und umgekehrt, so daſs sich auch sagen läſst: jeder bestimmten Verschiedenheitsgröſse ist eine und nur eine Gröſse des relativen Unterschiedes, jeder Gröſse des relativen Unterschiedes ist eine und nur eine Verschiedenheitsgröſse zugeordnet.

Zum Zwecke der Fortführung der hiermit angebahnten Untersuchungen empfiehlt es sich nun aber, auch das Problem der „psychischen Messung“, resp. der funktionellen Beziehung zwischen „Reiz und Empfindung“ in den Bereich unserer Erwägungen zu ziehen.

---

[1] Vergl. oben S. 133.

[2] Vergl. oben § 10.

[3] Vorausgesetzt, daſs es einen „Unterschied“ zwischen den beiden Daten überhaupt giebt; in welchem Umfange diese Voraussetzung berechtigt ist, davon wird unten die Rede sein.

(Schluſs folgt.)