

(Aus dem psychologischen Laboratorium der Universität Graz.)

Versuche über das Vergleichen von Winkelverschiedenheiten.

Mitgeteilt von Dr. ST. WITASEK.

Angeregt durch die „experimental-psychologischen Übungen“ des Sommersemesters 1895 haben die Herren A. KEITER (Physiker) und C. FRANZ (Chemiker) Versuche über das Vergleichen von Winkelgrößen ausgeführt, die, ohne den Anforderungen einer exakten Methode zu genügen oder gar abschließende Ergebnisse bieten zu wollen, als vorläufige Beleuchtung dieser bis jetzt noch ununtersuchten Thatsachengruppe immerhin einiges Interesse besitzen. Obwohl nun die genannten Herren aus äußeren Gründen die Arbeit nicht zu dem gewünschten Abschluss bringen konnten, so ist es vielleicht doch nicht ungerechtfertigt, wenn ich die bis nun gefundenen Ergebnisse in Kürze mitteile.

Die Methode der Versuche war dem Grundgedanken nach die der mittleren Abstufungen; die feineren Ausgestaltungen, welche diese von WUNDT, LEHMANN, MERKEL u. A. erfahren hat, blieben natürlich unberücksichtigt, und zwar, wie ich glaube, nicht so sehr zum Schaden des Zweckes, der ja doch nur darin bestand, auf dem bisher noch unbetretenen Gebiete zu vorläufiger Orientierung über Wege und Ziele ein wenig zu rekognoszieren. Näheres über den bei den einzelnen Versuchsreihen eingehaltenen Vorgang wird bei den zugehörigen Tabellen mitgeteilt. Vor dem Registrieren der Urteile wurden Übungsversuche in reichlichem Maße vorgenommen.

Der benutzte Apparat besteht aus einer metallenen Kreisscheibe von ungefähr 20 cm Radius, die parallel zur Frontalebene der Versuchsperson so fixiert ist, daß immer derselbe

Durchmesser horizontal steht. Ihre Vorderseite¹ zeigt die zu beurteilenden Winkel, hergestellt durch Fäden, die einerseits durch eine möglichst kleine, im Zentrum der Scheibe befindliche Öse, andererseits über den Rand derselben nach rückwärts gezogen sind, hier von einem eingefügten Gummiband gespannt und durch Schlinge und Häkchen zusammengehalten werden. Um das Verschieben der Radian zu erleichtern, ist es zweckmäßig, zwischen Scheibenrand und Faden einen kleinen Papierschlitten einzufügen. Die Rückseite der Scheibe trägt ferner einen vom Rande etwas abstehenden Teilkreis, an dem sich die Größe der eingestellten Winkel ablesen läßt.

Bei den Versuchen war es also immer darauf abgesehen, drei Winkel (α , β , γ) in ein solches Größenverhältnis zu bringen, daß nach dem Urteile der Versuchsperson der kleinste (α) vom mittleren (β) in gleichem Grade verschieden ist, wie dieser vom größten (γ). Nun läßt sich das entweder so ausführen, daß der Experimentator, geleitet durch die von der Versuchsperson abgegebenen Urteile über Größer oder Kleiner der Verschiedenheiten, die Winkel variiert und endlich den Gleichheitspunkt erreicht (Passivversuche); oder die Versuchsperson stellt selbst jenen Winkel direkt ein, bei dem sie auf Gleichheit der Verschiedenheiten urteilt (Aktivversuche). Danach teilen sich auch die folgenden Tabellen in zwei Hauptgruppen *A* und *B*.

A.

(Passivversuche.)

Die Gleichheitsregion der Winkelverschiedenheiten wurde von beiden Seiten her erreicht und überschritten und aus den so gewonnenen Grenzwerten das arithmetische Mittel gezogen; dieses ist in den folgenden Tabellen mitgeteilt (durch den Druck hervorgehoben). Dieser Wert muß, wenn das WEBERSche Gesetz dabei maßgebend ist, mit den zwei anderen Winkelgrößen eine geometrische Progression geben. Zur raschen Prüfung ist daher im Folgenden überall der der geometrischen und ebenso

¹ Bei Wiederholung der Versuche dürfte es sich empfehlen, mit schwarzer Scheibe und weißen Fäden zu arbeiten, um den einigermaßen störenden Einfluß der Fadenschatten zu vermeiden.

der der arithmetischen Progression entspringende Wert beigefügt.

I.

Die drei Winkel α , β und γ stoßen aneinander; α ist konstant vorgegeben, β und γ durch Verschieben des gemeinsamen Radius zum Zweck des Aufsuchens des Gleichheitspunktes variabel.

1. $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel	Variation ¹
20°	113.5°	226.5°	73°	120°	3°
40°	115.0°	205.0°	95°	„	—
60°	128.0°	172.0°	107°	„	4°
80°	120.5°	159.5°	155°	„	7°

2. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel	Variation
9°	64.0°	107.0°	34.5°	60°	4°
12°	65.0°	103.0°	39.0°	„	2°
20°	61.0°	99.0°	47.0°	„	2°
30°	66.5°	83.5°	54.0°	„	1°
40°	64.0°	76.0°	58.0°	„	2°
45°	61.5°	73.5°	58.5°	„	3°
50°	60.0°	70.0°	59.0°	„	4°
55°	61.0°	64.0°	59.5°	„	2°
60°	59.5°	60.5°	60.0°	„	3°
70°	59.0°	51.0°	59.0°	„	2°

3. $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel	Variation
10°	29.0°	51.0°	23.7°	30°	2°
20°	30.5°	49.5°	28.7°	„	1°
30°	30.0°	30.0°	30.0°	„	—
40°	30.0°	20.0°	28.9°	„	—
50°	30.0°	10.0°	26.2°	„	—

¹ In diese Rubrik setze ich die Differenz des größten vom kleinsten der Werte, von welchen der durch den Druck hervorgehobene das Mittel ist.

II.

Die drei Winkel α , β und γ grenzen aneinander, α und β sind konstant vorgegeben und γ zum Zweck des Aufsuchens des Gleichheitspunktes variabel.

1. $\alpha = 10^\circ$.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel	Variation
10°	15°	25.0°	22.5°	20°	2°
"	20°	29.5°	40°	30°	3°
"	25°	43.0°	62.5°	40°	3°
"	30°	54.0°	90°	50°	2°
"	35°	63.0°	122.5°	60°	2°
"	40°	71.0°	160°	70°	2°
"	45°	80.5°	202.5°	80°	2°
"	50°	90.0°	250°	90°	2°
"	55°	101.5°	302.5°	100°	2°
"	60°	112.0°	360°	110°	2°

2. $\alpha = 20^\circ$.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel	Variation
20°	25°	30.0°	31.3°	30°	—
"	30°	39.0°	45.0°	40°	1°
"	35°	49.0°	61.3°	50°	1°
"	40°	60.0°	80.0°	60°	1°
"	45°	71.0°	101.3°	70°	2°
"	50°	81.5°	125.0°	80°	3°
"	55°	92.0°	151.3°	90°	2°
"	60°	103.0°	180.0°	100°	2°

3. Versuchsreihe mit kleinen Winkeln.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel	Variation
5°	10°	16.0°	20.0°	15°	3°
8°	16°	25.0°	32.0°	24°	2°
10°	15°	21.0°	22.5°	20°	2°
12°	14°	17.0°	16.3°	16°	2°
14°	18°	21.0°	23.1°	22°	1°
15°	18°	21.0°	21.6°	21°	2°
15°	20°	25.0°	26.6°	25°	1°
15°	22°	29.0°	32.3°	29°	1°
20°	20°	20.5°	20.0°	20°	1°

III.

Die Winkel sind getrennt voneinander angebracht (α links unten, β oben, γ rechts unten); α und β sind konstant, γ zu bestimmen.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel	Variation
10°	15°	23°	22.5°	20°	3°
"	20°	32°	40.0°	30°	3°
"	25°	46°	62.5°	40°	5°
"	30°	53°	90.0°	50°	2°
"	35°	62°	122.5°	60°	2°
"	40°	72°	160.0°	70°	2°
"	45°	83°	202.5°	80°	3°
"	50°	92°	250.0°	90°	2°
"	55°	102°	302.5°	100°	2°
"	60°	111°	360.0°	110°	4°

IV.

In dieser Reihe war ungefähr die Hälfte der Radien vom Zentrum durch eine in dieses eingesteckte Kreisscheibe von ca. 20 cm Durchmesser verdeckt, im übrigen die Versuchsanordnung, wie in II. (Winkel aneinandergrenzend, α und β konstant, γ zu bestimmen.)

1. $\alpha = 10^\circ$.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel	Variation
10°	15°	22°	22.5°	20°	2°
"	20°	32.5°	40°	30°	1°
"	25°	43°	62.5°	40°	2°
"	30°	53.5°	90°	50°	3°
"	35°	63.5°	122.5°	60°	4°
"	40°	71.5°	160°	70°	4°
"	45°	81.5°	202.5°	80°	4°
"	50°	91°	250°	90°	6°
"	55°	103°	302.5°	100°	6°
"	60°	117°	360°	110°	2° (?)

2. $\alpha = 20^\circ$.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel	Variation
20°	25°	30°	31.3°	30°	2°
"	30°	40.5°	45°	40°	1°
"	35°	51°	61.3°	50°	2°
"	40°	62°	80°	60°	2°
"	45°	71°	101.3°	70°	1°
"	50°	82°	125°	80°	2°
"	55°	93°	151.3°	90°	2°
"	60°	103.5°	180°	100°	3°

B.

(Aktivversuche.)

Die Winkel liegen nebeneinander, und zwar so, daß der zu bestimmende variable, natürlich immer nur mit einem Schenkel, an einen vorgegebenen grenzt. Das Zentrum ist wieder frei.

I.

Der kleinste (α) und der größte Winkel (γ) sind vorgegeben, der mittlere (β) ist einzustellen.

1. $\alpha = 5^\circ$

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel
5°	10.3°	14.7°	8.6°	9.8°
"	11.0°	20.0°	10.0°	12.5°
"	12.6°	27.4°	11.7°	16.2°
"	14.3°	34.7°	13.2°	19.8°
"	16.5°	38.5°	13.8°	21.7°
"	18.5°	42.5°	14.6°	23.7°
"	19.0°	51.0°	15.9°	28.0°
"	25.3°	53.7°	16.4°	29.3°
"	28.5°	56.5°	16.8°	30.7°
"	31.0°	69.0°	18.6°	37.0°

2. $\alpha = 8^\circ$.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel
8°	10.0°	12.0°	9.6°	10.0°
"	11.5°	16.5°	11.5°	12.2°
"	13.6°	20.8°	12.9°	14.4°
"	15.4°	24.6°	14.0°	16.3°
"	16.5°	29.5°	15.4°	18.7°
"	19.5°	32.5°	16.1°	20.2°
"	21.3°	36.7°	17.1°	22.3°
"	23.0°	41.0°	18.1°	24.5°
"	24.0°	46.0°	19.2°	27.0°

3. $\alpha = 12^\circ$.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel
12°	15.9°	20.1°	15.5°	16.0°
"	19.2°	28.8°	18.6°	20.4°
"	22.2°	37.8°	21.3°	24.9°
"	27.0°	45.0°	23.2°	28.5°
"	32.0°	52.0°	24.9°	32.0°
"	34.3°	61.7°	27.2°	36.8°
"	41.0°	67.0°	28.3°	39.5°
"	43.5°	76.5°	30.3°	44.2°
"	46.8°	85.2°	31.9°	48.6°

4. $\alpha = 20^\circ$.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel
20°	26.5°	28.5°	23.9°	24.2°
"	30.2°	39.8°	28.2°	29.9°
"	36.3°	48.7°	31.2°	34.3°
"	41.3°	58.7°	34.2°	39.3°
"	45.8°	69.2°	37.2°	44.6°
"	48.8°	81.2°	40.3°	50.6°
"	54.5°	90.5°	42.5°	55.2°
"	61.0°	99.0°	44.5°	59.5°

II.

Der kleinste (α) und der mittlere Winkel (β) sind vorgegeben und der größte (γ) ist einzustellen.

1. $\alpha = 5^\circ$.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel
5°	10°	13.6°	20.0°	15°
"	12°	22.6°	28.8°	19°
"	15°	34.1°	45.0°	25°
"	18°	38.3°	65.8°	31°
"	20°	55.0°	80.0°	35°
"	22°	58.1°	96.8°	39°
"	25°	69.4°	125.0°	45°
"	28°	71.2°	156.8°	51°
"	30°	77.5°	180.0°	55°
"	35°	80.4°	245.0°	65°

2. $\alpha = 8^\circ$.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel
8°	10°	12.0°	12.5°	12°
"	12°	15.5°	18.0°	16°
"	14°	22.6°	24.5°	20°
"	16°	23.3°	32.0°	24°
"	18°	32.0°	40.5°	28°
"	20°	34.4°	50.0°	32°
"	22°	38.5°	60.5°	36°
"	24°	44.8°	72.0°	40°
"	26°	50.4°	84.5°	44°

3. $\alpha = 12^\circ$.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel
12°	16°	20.8°	21.3°	20°
"	20°	28.0°	33.3°	28°
"	24°	39.0°	48.0°	36°
"	28°	45.3°	65.3°	44°
"	32°	50.4°	85.3°	52°
"	36°	57.5°	96.3°	56°
"	40°	70.0°	133.3°	68°
"	44°	79.2°	161.3°	76°
"	48°	88.5°	192.0°	84°

4. $\alpha = 20^\circ$.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel
20°	25°	31.0°	31.2°	30°
"	30°	40.5°	45.0°	40°
"	35°	52.2°	61.2°	50°
"	40°	61.3°	80.0°	60°
"	45°	71.5°	101.2°	70°
"	50°	82.0°	125.0°	80°
"	55°	89.3°	151.2°	90°
"	60°	97.8°	180.0°	100°

III.

Der mittlere (β) und der größte Winkel (γ) vorgegeben und der kleinste (α) zu bestimmen.

1. $2\beta - \gamma = 5^\circ$.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel
7.0°	10°	15°	6.7°	5°
7.6°	12°	19°	7.6°	"
8.9°	15°	25°	9.0°	"
9.3°	18°	31°	10.4°	"
11.8°	20°	35°	11.4°	"
12.2°	22°	39°	12.4°	"
13.0°	25°	45°	13.9°	"
14.8°	28°	51°	15.3°	"
16.5°	30°	55°	16.3°	"
16.7°	35°	65°	18.8°	"

2. $2\beta - \gamma = 8^\circ$.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel
8.4°	10°	12°	8.3°	8°
8.7°	12°	16°	9.0°	"
9.5°	14°	20°	9.8°	"
12.0°	16°	24°	10.6°	"
11.4°	18°	28°	11.5°	"
12.0°	20°	32°	12.5°	"
12.3°	22°	36°	13.4°	"
12.5°	24°	40°	14.4°	"
11.6°	26°	44°	15.3°	"

3. $2\beta - \gamma = 12^\circ$.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel
12.5°	16°	20°	12.8°	12°
12.2°	20°	28°	14.3°	„
12.6°	24°	36°	16.0°	„
12.9°	28°	44°	17.8°	„
13.3°	32°	52°	19.7°	„
13.0°	36°	60°	21.6°	„
12.6°	40°	68°	23.5°	„
13.8°	44°	76°	25.4°	„
14.0°	48°	84°	27.4°	„

4. $2\beta - \gamma = 20^\circ$.

α	β	γ	Geometr. Mittel	Arithmet. Mittel
17.5°	25°	30°	20.8°	20°
16.8°	30°	40°	22.5°	„
19.0°	35°	50°	24.5°	„
19.3°	40°	60°	26.7°	„
18.5°	45°	70°	28.9°	„
18.0°	50°	80°	31.2°	„
20.3°	55°	90°	33.6°	„
19.2°	60°	100°	36.0°	„

Die Diskussion dieser Tabellen muß sich der ganzen Anlage der Versuche wegen in bescheidenen Grenzen halten und auf das Konstatieren von Einzelheiten verzichten. Was sich im großen aus ihnen ergibt, ist übrigens bemerkenswert genug: nicht die geometrische Progression ist es, der sich drei nach dem verlangten Verschiedenheitsverhältnis abgeschätzte Winkel nähern, sondern die arithmetische. Die Tabellen *A* zeigen das — von ganz wenigen, wohl zufälligen Ausnahmen¹ (5.4 %) abgesehen — mit genügender Übereinstimmung und Deutlichkeit. In den Tabellen *B* machen diese Ausnahmefälle allerdings weit mehr aus, nämlich 21.5 %, zudem tragen sie hier nicht mehr so sehr den Charakter

¹ Nämlich II, 1 erste, II, 3 vierte, III erste, IV, 1 erste Zeile.

des Zufälligen: zwei Tabellen (III 1, 2) sind ihnen ganz verfallen. Was die Ursache davon sein mag, läßt sich aus dem vorliegenden Material nicht erkennen. Die Gesamtsumme der Ausnahmefälle beträgt 16.0%. Ein Winkel also, der von zwei anderen gleich weit verschieden erscheint, nähert sich dem arithmetischen Mittel aus den beiden, ganz analog dem Thatbestand, den MERKEL bei Distanzvergleichen konstatiert hat.¹

Nun muß allerdings bedacht werden, daß das Urteil bei der Beantwortung der Frage über Gleich und Ungleich von Verschiedenheiten an ganz auffallend hoher Unsicherheit leidet. Wie ich mich an mir selbst und an Anderen zu überzeugen Gelegenheit hatte, ist sie viel größer, als man aus den in den Tabellen A angegebenen Variationen schließen müßte.² Angesichts dieser Schwierigkeit, zu einem Urteil zu gelangen, bemüht sich die Versuchsperson natürlich, allerlei mehr oder minder indirekte Hülfen zu gewinnen. Denselben vollständig auszuweichen, wird kaum möglich sein; wohl aber muß alle Aufmerksamkeit darauf gerichtet sein, wenigstens solche Stützen zu vermeiden, die die Fragestellung verschieben; und eine solche liegt sehr nahe: die Versuchsperson legt in der Phantasie den kleinsten Winkel auf den mittleren, merkt sich den Unterschied beider, legt dann den mittleren auf den größten und macht nun den Unterschied gleich dem des ersten Paares. Dabei muß natürlich eine arithmetische Progression herauskommen. Aber bei diesem Verfahren ist eigentlich die Fragestellung aus dem Auge gelassen. Denn es ist direkt darauf gerichtet, die Unterschiede der Winkelpaare einander gleich zu machen und nicht, wie verlangt ist, die beiden Verschiedenheiten. Verschiedenheit und Unterschied sind ja nicht dasselbe; der Unterschied zweier Winkel ist wieder ein Winkel, die Verschiedenheit durchaus nicht. Beide nehmen freilich in der Regel gleichzeitig ab und zu, aber wir haben vorgängig gar kein Recht, anzunehmen, daß sie proportional zu einander

¹ MERKEL, Die Methode der mittleren Fehler, experimentell begründet durch Versuche auf dem Gebiete des Raummasses. *Philos. Studien*. IX.

² Bedeutend größere Variationen würden sich meiner Erfahrung nach thatsächlich ergeben, wenn in jeder der einzelnen Serien eine größere Anzahl von voneinander zeitlich weiter getrennten Versuchen angestellt worden wäre.

variieren. Ja, es giebt naheliegende Gedanken, die deutlich genug gegen eine solche Proportionalität sprechen. Der Unterschied von 100 und 101 cm ist gleich dem von 1 und 2 cm, die Verschiedenheiten beider Paare sind durchaus nicht gleich.¹

Eine derartige Verschiebung der Frage zu vermeiden, ist eigentlich ganz und gar subjektive Sache der Versuchsperson. Ein äußeres Mittel dagegen kann es nicht geben. Und so läßt sich auch nicht sagen, ob nicht bei den obigen Versuchen diese Täuschung hie und da, vielleicht auch öfter, Platz gegriffen hat. Man kann es ja der Versuchsperson nicht ansehen, ob sie Unterschiede oder Verschiedenheiten vergleicht. Dafs sie in Fällen, in denen die beiden zu auffallend voneinander abweichen, des eigentlichen Sinnes der Fragestellung eingedenk geblieben ist, beweisen einzelne Daten, wie z. B. *B*, I, 3, 3; *B*, III, 1, 1; *B*, III, 2, 4. u. a. Allerdings finden sich auch einzelne Fälle, in denen die Verhältnisse der vorgegebenen Winkel ganz analog, wie bei den hier zitierten, liegen und dennoch der durch Schätzung bestimmte Wert eine Annäherung an die arithmetische Progression bedeutet. Diese und andere ähnliche Inkonsequenzen der Versuchsergebnisse mögen einerseits ebensosehr die Unsicherheit des Urteils über den behandelten Gegenstand beleuchten, als andererseits auch der Unvollkommenheit der Versuche selbst zur Last fallen, zu deren Entschuldigung ich schließlich nochmals auf den bescheidenen Zweck der Arbeit hinweise.

¹ In diesen Auseinandersetzungen über Unterschied und Verschiedenheit stütze ich mich auf die mir im wesentlichen bekannten Ausführungen der gegenwärtig in *dieser Zeitschrift* erscheinenden Arbeit Prof. MEINONGS: „Über die Bedeutung des WEBERSchen Gesetzes. Beiträge zur Psychologie des Vergleichens und Messens.“
