

Die unbeweisbaren Axiome.

Von
W. VON ZEHENDER.

Es giebt bekanntlich eine Anzahl unbeweisbarer mathematischer Sätze, an deren absoluter Richtigkeit kein Mensch zweifelt, die aber — wenn auch nur ein einziger derselben unrichtig wäre — den Zusammensturz des ganzen stolzen Baues der Mathematik mit Nothwendigkeit herbeiführen müßten.

Dahin gehören die *κοινὰ ἔννοια*, die Axiome des EUKLIDES. Diese und eine große Anzahl anderer Sätze, von deren Richtigkeit Jedermann überzeugt ist, sind unserem Intellect nicht angeboren, wie, aus Mangel an besserer Erklärung, zuweilen wohl angenommen worden ist. Wahrscheinlich entstehen sie — anfänglich noch unsicher und unvollkommen — nach und nach erst, durch das Zusammenwirken von kindlichem Nachdenken und kindlicher Beobachtung, beim Spielen und bei allen sonstigen kindlichen Beschäftigungen, wobei die guten Lehren der Eltern und Lehrer wohl auch noch ein wenig mithelfen. Man könnte sogar behaupten wollen, daß solche Sätze, fast immer, zuerst eingelernt sind, und erst später, durch eigene Erfahrung und eigenes Nachdenken, in selbsteigene Erkenntniß sich umwandeln. Jeden Falles aber wird die Ueberzeugung der Glaubwürdigkeit und der vollen Richtigkeit solcher Sätze bis zu höchstmöglicher Höhe gesteigert, wenn man, im weiteren Verlaufe des Lebens, trotz aller Beobachtung und trotz alles Nachdenkens, nicht einen einzigen Fall auffinden kann, der den geringsten Zweifel dagegen aufkommen läßt. — Die Apodikticität stützt sich — ebenso wie z. B. auch in dem Satze: alle Menschen sind sterblich — einzig und allein auf das nie vorgekommene Anderssein.

Ein hartnäckiger Zweifler mag wohl noch einwenden, daß das, was seit Menschengedenken nie vorgekommen ist, in Zukunft doch vielleicht noch vorkommen kann. — Dieser allerdings nicht unberechtigte Einwand muß aber doch zurückgewiesen werden mit dem Hinweis auf die Endlichkeit unserer menschlichen Natur, der es nicht vergönnt ist in die Zukunft zu schauen. Wir müssen darauf verzichten, wissen zu wollen was

möglicherweise in Zukunft auf Erden erlebt werden kann; wir müssen uns begnügen mit dem was wir auf Erden erleben und seit Menschengedenken erlebt haben. Der Phantasie jedes einzelnen Menschen bleibt es indessen unbenommen, sich in weitestem Umfange mit Zukunftsideen zu beschäftigen, oder sich — als ein neuer Saul — unter die Propheten zu begeben und zu wahrsagen!

Dafs solche apodiktisch gewisse, aber unbeweisbare Urtheile aus reiner Vernunft hervorgebracht werden, ist schon deswegen ausgeschlossen, weil die reine Vernunft gar nicht wissen kann, wie ein Winkel oder eine Linie oder ein Triangel aussieht, wenn sie dies nicht zuvor schon durch äufere sinnliche Erfahrung gelernt hat. Andererseits würde aber auch die reine sinnliche Wahrnehmung, Winkel und Linien und Triangel und alle anderen Dinge, hundert und hundert Mal ansehen und betrachten können, ohne je im Stande zu sein die Bedeutung solcher Worte zu finden, oder — anders ausgedrückt — ohne für sich allein im Stande zu sein, das, was allen Winkeln, Linien, Triangeln und anderen Dingen gemeinsam ist, in einen Begriff zusammen zu fassen.

Wenn das Wort „rein“ in allerstrengstem Sinne genommen wird, dann giebt es in Wirklichkeit überhaupt gar keine reine Vernunft und auch keine reine sinnlich-äufere Erfahrung. Vernunft und Erfahrung sind so eng mit einander verknüpft, dafs keine von Beiden, für sich allein, vollkommen rein einer Betrachtung unterzogen werden kann; an der Einen wird immer ein kleines Stück der Anderen hängen bleiben, man mag sie betrachten wie man will. Wenn Beide wirklich vollständig von einander getrennt werden, dann werden Beide zugleich vollständig unwirksam.

Dies läfst sich an dem Verhalten unseres Gesichtssinnes sehr gut veranschaulichen. Vom Auge bis in das Gehirn hinein führt bekanntlich ein von einer derben Scheide umgebener Nervenstrang (der Sehnerv), welcher fast eine halbe Million feiner Nervenfasern enthält.¹ Dieser Sehnerv bildet die Verbindung zwischen Auge und Gehirn. Wenn die im Sehnerv verlaufenden Nervenfasern — gleichviel aus welcher Ursache —

¹ Nach FRITZ SALZER's Zählung: 438000. Siehe dessen Arbeit: Ueber die Anzahl der Sehnervenfasern und der Retinazapfen im Auge des Menschen. *Sitzungsber. der Wiener Akad.* Bd. 81, Abth. 2. Januar 1880.

zu Grunde gehen oder zerstört werden, dann wird die Nervenleitung zwischen Auge und Gehirn unterbrochen. Es können dann zwar die sinnlichen Eindrücke der Außenwelt auf der Netzhaut des — übrigens als gesund vorausgesetzten — Auges sich abbilden, aber der verödete und functionsunfähig gewordene Sehnerv kann diese Eindrücke nicht weiterleiten bis zum Sitz der Vernunft im Centralorgan. Die sinnlichen Eindrücke sind in diesem Falle rein auf das Auge beschränkt und die im Centralorgan sitzende Vernunft bleibt ihrerseits in vollster Unkenntniß von dem was im Auge vorgeht. Das thatsächliche Resultat dieses Zustandes ist: absolute Blindheit! — Solche Blindheit ist aber gleichbedeutend mit völligem Nichtdasein, oder doch mit völligem Nichtwirksamsein der Vernunft hinsichtlich aller Dinge, die mit dem Auge wahrgenommen werden könnten. — Eine anatomische Trennung des Gesichtsorganes von dem Sitze der Vernunft macht also beide Theile vollständig unwirksam. Zum Sehen ist die gemeinsame Wirksamkeit beider Theile erforderlich; jeder der beiden Theile für sich allein genommen ist leistungsunfähig. Die Erkenntnißquelle liegt weder in der Vernunft allein, noch auch in dem Gesichtssinne allein, sondern in der unzertrennbaren Gemeinsamkeit beider.

Wäre es denkbar, daß, bei gesunder Vernunft, alle Sinnesorgane — ebenso vollständig wie der Gesichtssinn durch eine Sehnervenatrophie — vom Centralorgan des Nervensystems losgetrennt sein könnten, dann wäre die Vernunft einem Festungscommandanten vergleichbar, der, von jeder Verbindung mit der Außenwelt vollständig abgeschnitten ist. Sein Dasein ist factisch ein Nichtsein geworden: es ist ganz ebenso als ob er gar nicht da wäre!

In dieser strengsten Bedeutung des Wortes ist also die reine — von aller Mithülfe der Sinnesorgane verlassene — Vernunft thatsächlich eben auch nicht da. Da aber KANT — wenn wir ihn recht verstehen — das Wort „rein“ nicht in dieser äußersten Strenge der Bedeutung gebraucht, so konnte, resp. mußte er noch ein verbindendes Zwischenglied: „die Principien der Möglichkeit der Erfahrung“ einschalten; anderenfalls würde seine „Kritik der reinen Vernunft“, die Kritik eines nicht existirenden Dinges geworden sein.

Wir haben wahrscheinlich zu machen versucht, daß die sogen.

„unbeweisbaren Axiome“ — ganz analog dem körperlichen Wachsthum des Menschen — nach und nach im menschlichen Intellect erst entstehen und sich im Verlaufe des Lebens mehr und mehr festigen; es bleibt uns noch übrig auch die Bedeutung des Wortes „beweisen“ etwas genauer zu analysiren.

Nimmt man das Wort „beweisen“ in seiner allgemeinsten Bedeutung, nämlich so, daß jede Art und Weise eine zweifellose Ueberzeugung herbeizuführen damit zu verstehen ist, dann giebt es zwei verschiedene Arten der Beweisführung.

Der Beweis im engeren Wortsinne (der logische Beweis) bedarf stets einer Voraussetzung, einer Grundlage, auf welcher der beweisende Bau aufgeführt wird. Ohne solchen Untergrund ist diese Art der Beweisführung nicht möglich.

Die andere Art der Beweisführung, welche man zuweilen auch wohl eine „demonstratio ad oculos“ nennt, bedarf einer solchen Voraussetzung nicht; sie stützt sich unmittelbar auf die überzeugende Kraft unserer Sinneswahrnehmung und ruht gleichsam in und auf sich selbst, d. h. auf dem Glauben an die Untrüglichkeit einer richtig verstandenen Sinnesempfindung.

Die auf diese letztere Art gewonnenen Urtheile sind nicht in einer synthetisch vorgebildeten Form in unserer Vernunft schon enthalten, sie sind nicht unserer Vernunft bereits angeboren, sie entstehen nicht aus Vernunft allein, noch auch aus sinnlicher Wahrnehmung allein; sie sind vielmehr — wie wir zu zeigen versucht haben — das Ergebniss gemeinsamen Zusammenwirkens von Vernunft und sinnlicher Wahrnehmung. Das aus dem Griechischen abgeleitete Wort „apodiktisch“, welches wir dem Worte „Beweis“ gleichsam als Verstärkung gerne noch hinzufügen („apodiktischer Beweis“), bedeutet eigentlich nur ein „Hinweisen“ oder ein „Hinzeigen“ auf Etwas. Ein Hinweisen auf das, was unsere Sinnesempfindungen uns lehren, würde demnach recht eigentlich ein „apodiktischer Beweis“ genannt werden müssen, wenn nicht das bei uns eingebürgerte Fremdwort eine etwas andere Bedeutung bereits angenommen hätte.

Auf Grundlage solcher, in dem eben angedeuteten Sinne apodiktisch beweisbarer, logisch aber unbeweisbarer Urtheile beruht jede logische Beweisführung. Alles Beweisen im engeren Wortsinne (logisches Beweisen) kann erst da seinen Anfang nehmen, wo eine „apodiktisch“ (in unserem Sinne) bewiesene Grundlage bereits gewonnen ist.

Die Sicherheit logischer Beweise beruht auf der Sicherheit ihrer apodiktisch bewiesenen Grundlage. — Die größtmögliche Glaubensgewißheit kann nur derjenige Beweis beanspruchen, welcher sich auf die Grundlage eines erfahrungsgemäßen **nie** vorgekommenen Andersseins stützt. — Demnächst schwächt sich die Glaubwürdigkeit mehr und mehr ab, je nachdem man an die Stelle des Wortes „**nie**“ ein schwächeres Prädicat, wie etwa „nur selten“ oder etwas Aehnliches zu setzen sich genöthigt sieht.

Auf diesen — wenn wir das Wort hier in unserem Sinne gebrauchen dürfen — „apodiktisch“ bewiesenen, logisch aber unbeweisbaren Fundamenten läßt sich nun, ohne alle weitere empirische Erfahrung, mit derselben Sicherheit (oder Unsicherheit), die den Fundamenten zukommt, weiter fortbauen.

Die Mathematik giebt hiervon das glänzendste Beispiel! — Auf der empirisch festen, auf nie vorgekommenes Anderssein basirten Grundlage ihrer sog. unbeweisbaren Axiome, führt sie — ohne weitere Beihülfe der Vernunft oder der Empirie — ihr bewundernswerthes Gebäude bis in die höchsten Höhen hinauf, ohne an Festigkeit und Sicherheit ihres Baues das Allergeringste einzubüßen. — Auch das Gedächtniß kann der Mathematiker äußersten Falles fast ganz entbehren; es dient ihm nur zur Erleichterung der Arbeit, weil er — ohne Gedächtniß — bei jeder Aufgabe den ganzen Bau, von seiner untersten Grundlage an, auf Festigkeit und Fehlerlosigkeit jedes Mal von Neuem durchprüfen müßte. Mit Hülfe des Gedächtnisses kann er aber von jedem erinnerlich festgewonnenen Punkt aus ebenso sicher fortbauen, wie er anfänglich auf die sogen. unbeweisbaren Axiome zu bauen angefangen hat. — Der Pythagoräische Lehrsatz z. B. hat für den Mathematiker genau denselben Werth wie ein Axiom. Für ihn — wenn sein Gedächtniß ihn nicht im Stiche läßt — steht dieser Satz so fest, daß es ihm gar nicht in den Sinn kommen kann, dessen Richtigkeit etwa aufs Neue nochmals zu prüfen; er bedient sich desselben ganz ebenso, als ob es ein mathematisches Axiom wäre. Wer durch Erfahrung und Nachdenken zu der Einsicht gekommen ist, daß $1 \times 1 = 1$ und daß $1 + 1 = 2$ ist, d. h. wer die Operation des Zählens bereits erlernt hat, der wird durch reine Verstandesarbeit leicht finden, daß $2 \times 2 = 4$ und daß $1000 \times 1000 =$ einer Million ist. Ob er das Einmaleins auswendig weiß oder nicht ist völlig

irrelevant; er wird jederzeit in der Lage sein, mit Hülfe jener beiden mathematischen Axiome, das ganze Einmaleins zu re-construiren, soweit ihm die Zahlwörter bekannt sind. Auch der Satz $7 + 5 = 12$ ist auf diesem Wege leicht zu finden, ohne daß es — nach unserem Dafürhalten — nöthig wäre zuvor danach zu fragen: „ob der Begriff von zwölf dadurch, daß ich mir blos jene Vereinigung von 7 und 5 denke“ schon gedacht oder noch nicht gedacht sei.¹

Auf jeder weniger festen Grundlage, als diejenige, auf der sich die Mathematik aufbaut, läßt sich in ganz analoger Weise ein logischer Bau zwar auch aufrichten, aber nur mit dem großen Unterschiede, daß dieser dann eben auch, in demselben Verhältniß wie seine Grundlage, an Festigkeit und Zuverlässigkeit mehr oder weniger zu wünschen übrig läßt und gelegentlich wohl ganz zusammenbricht.

Schließlich wollen wir ganz kurz nur noch darauf hinweisen, daß die Bedeutung jedes Wortes unserer Sprache aus einem Urtheil hervorgegangen, oder auf ein Urtheil zurückzuführen ist, welchem das Nieanderssein zu Grunde liegt. Demzufolge ist die Richtigkeit einiger sogen. unbeweisbarer Axiome — wie z. B.: Ganzes $>$ Theil — zuweilen schon durch die Bedeutung der Worte (durch einen Definitionsbeweis) ohne Weiteres und unmittelbar schon bewiesen.

Umgekehrt giebt jede Definition der Bedeutung eines Wortes nichts Anderes als die Auseinanderlegung eines latenten Urtheils, welches der Kürze wegen in ein Wort zusammengefaßt wird. — Jede Definition besteht aber wieder aus Worten, die selbst wieder definirt werden können oder müssen, und so thürmt sich auch hier Wort auf Wort und Urtheil auf Urtheil zu immer höherer Bedeutung und größerer Verwicklung und verlangt — wenn man sich gegenseitig vollkommen richtig verstehen will — zuweilen ein tieferes Zurückgehen in entgegengesetzter Richtung, bis auf die letzte und unterste unbeweisbare Grundlage.

Ausführlicher hierauf einzugehen verbieten uns für heute die Schranken des uns zugemessenen Raumes.

¹ Siehe KANT's Kritik der reinen Vernunft, Suppl. II.

(Eingegangen am 24. September 1898.)
