

# Ueber räumliche Abbildungen des Continuum der Farbenempfindungen und seine mathematische Behandlung.

Von  
KONRAD ZINDLER in Wien.

(Mit 6 Fig.)

## Vorbemerkung.

Die mehrfachen Versuche, die Aehnlichkeitsbeziehungen im Farbencontinuum durch Farbentafeln oder „Farbenkörper“ räumlich zu versinnlichen, forderten dazu heraus, einmal im Zusammenhange die verschiedenen Principien auseinanderzusetzen, nach denen dies geschehen kann. Es mußte naturgemäfs, soll der Leser wissen, um was es sich handelt, eine kurze kritische Darstellung jener Versuche und namentlich der Ergebnisse von MAXWELL, HERING und HELMHOLTZ eingeflochten werden.

Die steigende Verwendung mathematischer Ueberlegungen bei den genannten Autoren führt von selbst auf einen anderen Theil der Arbeit: Schon RIEMANN hat in seinem berühmten Habilitationsvortrag („Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“) darauf aufmerksam gemacht, dafs ausser den räumlichen Oertern die Farben im gewöhnlichen Leben den einzigen Anlaß zur Anordnung nach mehrfach ausgedehnten continuirlichen Mannigfaltigkeiten bieten. Während nun über die Grundlagen der Geometrie schon eine reiche Literatur erwachsen ist, hat sich Niemand die Mühe genommen, auch fürs Farbencontinuum etwas näher auszuführen, wie weit sich geometrische Begriffe auf dasselbe übertragen lassen, wieweit überhaupt die angedeutete Analogie reicht; blos HELMHOLTZ hat in seiner Abhandlung „Kürzeste Linien im Farbensystem“ diese Angelegenheit gestreift, sich aber bei den principiellen Fragen nicht aufgehalten. Indem ich von der Wohlthat der heute

üblichen Arbeitstheilung Gebrauch machte und mich auf die theoretischen Fragen beschränkte, konnte freilich das Hauptproblem dieses Gebietes „zu entscheiden, ob ein psychologischer Farbenkörper möglich ist und im bejahenden Falle ihn zu finden, im verneinenden Falle wenigstens ein arithmetisches Farbenschema zu finden“ zwar nach verschiedenen Seiten hin klargestellt, aber nicht wirklich gelöst werden, weil eben noch nicht alle hierzu nöthigen Erfahrungen vorzuliegen scheinen.<sup>1</sup>

**Inhalt.**

Seite

§ 1.	Die Definition des psychologischen Farbenkörpers . . . . .	226
§ 2.	Die nach älteren Methoden aufgestellten Farbenkörper . . . . .	230
§ 3.	MAXWELL's Farbentafel . . . . .	234
§ 4.	Die Bedeutung der Farbentafel MAXWELL's und die Arten von Farbenkörpern . . . . .	238
§ 5.	Ersatz des mathematischen Theils von HERING's Beweis des NEWTON'schen Farbenmischungsgesetzes . . . . .	244
§ 6.	Weiteres über Farbenkörper . . . . .	249
§ 7.	Ueber die Abbildung eindimensionaler Farbencontinua; ausgezeichnete eindimensionale Continua . . . . .	254
§ 8.	Ueber surrogative Messung von Farbendistanzen . . . . .	261
§ 9.	Das arithmetische Farbenschema . . . . .	263
§ 10.	HELMHOLTZ' Untersuchungen über kürzeste Farbenlinien . . . . .	271
§ 11.	Methoden zur Aufstellung des psychologischen Farbenkörpers . . . . .	280
§ 12.	Schlusswort . . . . .	289

§ 1. Definition des psychologischen Farbenkörpers.

In vielen Gebieten bedient man sich heutzutage der räumlichen Abbildung oder (wie man mit etwas eingeschränkter Bedeutung sagt) graphischen Darstellung, um Beziehungen, die an und für sich unanschaulich wären, anschaulich zu machen. Die wichtigsten geometrischen Grundvorstellungen, die an dieser Anschaulichkeit Antheil haben, sind: Distanz und Richtung. Ausserdem besitzt der Raum die Eigenschaft, daß von jedem Orte

<sup>1</sup> Ueber einige Theile dieser Arbeit habe ich im Nov. 1897 in der Philosophischen Gesellschaft an der Universität zu Wien einen Vortrag gehalten.



zu jedem anderen in mannigfacher Weise ein continuirlicher Uebergang möglich ist. Wenn sich also in einer continuirlichen Mannigfaltigkeit von Dingen oder psychischen Inhalten die Analoga der Distanz und der Richtung wiederfinden, können wir mit einiger Aussicht auf Erfolg versuchen, eine Abbildung dieser Mannigfaltigkeit (oder von Theilen derselben, falls ihre Dimension zu groß ist) auf den Raum vorzunehmen.

Die Mannigfaltigkeit unserer Farbenempfindungen erfüllt nun diese allerersten Voraussetzungen:

a) Es lassen sich in ihr von jeder Farbe zu jeder anderen continuirliche Uebergänge bilden.

b) Es findet sich das Analogon der Distanz: Es kann Aehnlichkeit zweier Farben  $a$ ,  $b$  nicht nur constatirt, sondern auch mit der Aehnlichkeit der Farben eines anderen Paares  $c$ ,  $d$  verglichen werden, wobei z. B. auch  $b$  mit  $c$  identisch sein kann. Der einfachste hierher gehörige Versuch ist die Herstellung einer Farbe auf dem Farbenkreisel, die zwischen zwei gegebenen Farben „in der Mitte“ liegt (Methode der übermerklichen Unterschiede). Bei allen Versuchen über Farbendistanzen wird mit dem Analogon der Punktdistanz (nicht der ausgefüllten Strecke) operirt<sup>1</sup>, und wir werden auch nur annehmen, es könne beurtheilt werden, ob die Distanz der Farben eines Paares größer, gleich oder kleiner sei, als die der Farben eines anderen Paares, nicht aber, daß die eine Distanz als ein Vielfaches der anderen geschätzt werden könne; es wäre dies aus denselben Gründen gewagt, die bei den vielbesprochenen Empfindungscontinuen constanter Qualität gegen die Messung der Empfindungsintensität geltend gemacht werden (s. MEINONG: Ueber die Bedeutung des WEBER'schen Gesetzes, § 27; *diese Zeitschr.* Bd. XI). Dies schließt nicht aus, daß ein indirecter Weg, Farbendistanzen zu messen, möglich wäre. Ja, eine gelungene räumliche Abbildung des Farbencontinuum enthielte von selbst die Lösung dieser Aufgabe (§ 8).

c) Wenn wir drei Nuancen Grau vor uns haben, die etwa auf dem Farbenkreisel aus denselben Pigmenten Schwarz und Weiß in verschiedenen Verhältnissen gemischt sind, sagen wir, der Uebergang vom dunkelsten zum mittleren Grau geschehe in

---

<sup>1</sup> In der Geometrie ist es umgekehrt; s. meine „Beitr. zur Theorie d. math. Erkenntnis“, § 2 (*Wiener Sitzungsab. Phil.-Hist. Cl.* Bd. CXVIII, 1889).

derselben Richtung, wie der vom mittleren zum hellsten.<sup>1</sup> Wir constatiren hiermit unmittelbar, daß wir zwischen zwei solchen Farbendistanzen (außer ihrer Ungleichheit und Gleichheit) noch eine andere Relation entdecken können, die wir sofort (der Gleichheit oder Verschiedenheit) der räumlichen Richtung analog finden. Daß im Farbencontinuum die betreffenden Schätzungen unsicherer sind als im Raume, thut in principiellen Fragen keinen Eintrag. Auch können wir, wenn wir von einer Farbe zu einer ähnlichen übergehen, uns diese Aenderung „in derselben Richtung“ fortgesetzt denken.

Die Aufgabe der möglichst getreuen Abbildung des Farbencontinuum auf den Raum wird nun darin bestehen, die Farbeempfindungen so in einem räumlichen Schema<sup>2</sup> symbolisch darzustellen, daß jeder Farbe ein Punkt (ihr „Bild“) entspricht, und daß:

a) einer stetigen Reihe von Farben auch eine stetige Reihe von Oertern entspricht;

b) daß, wenn zwischen zwei Farbenpaaren die Distanzen als gleich beurtheilt werden, auch die Distanzen zwischen den entsprechenden Bildpaaren gleich sind;

c) daß solche Reihen von Farben, bei denen wir finden, daß der Uebergang in derselben Richtung stattfindet, durch Punkte derselben Geraden abgebildet werden.

Damit ist nicht behauptet, daß ein solches Schema möglich ist; wenn es aber möglich ist, so zeigen diese Forderungen, daß es bloß die Beziehungen zwischen den Empfindungen selbst zur Anschauung bringen soll, nicht etwa die Beziehungen zwischen den physikalischen Reizen oder zwischen diesen und

---

<sup>1</sup> Diese Constanz der Richtung findet aber nicht immer gerade dann statt, wenn die constituirenden Pigmente dieselben sind. Mischt man z. B. einem hellen Gelb immer mehr Schwarz zu, so wird man bei den ersten Gliedern dieser Farbenreihe nur den Eindruck haben, als ob das Gelb immer in derselben Richtung abgeschwächt würde. Aber später werden braune Töne auftreten, was man als Qualitäts- und Richtungs-Aenderung empfindet. Solche Erscheinungen erschweren die Aufstellung eines psychologischen Farbenkörpers.

<sup>2</sup> räumlich deswegen, weil die Mannigfaltigkeit der Farbeempfindungen dreifach ausgedehnt ist (§ 4).



den Empfindungen, wie sie das WEBER-FECHNER'sche Gesetz zu geben unternimmt. Deswegen wollen wir ein solches Schema einen psychologischen Farbenkörper nennen (eventuell Farbenfläche, Farbentafel, wenn bloß eine zweifache Mannigfaltigkeit aus den gesamten Farbenempfindungen dargestellt werden soll), während wir es immer noch einen Farbenkörper schlechtweg nennen, wenn bloß die Forderung a) erfüllt ist.<sup>1</sup>

Zum weiteren Aufbau des psychologischen Farbenkörpers müßte, sobald einmal 4 Farben ihre Bilder erhalten haben, die Forderung b) principiell ausreichen. Wenn z. B. die Distanzen einer Farbe  $F$  von 4 Farben, die ihre Bilder schon haben, als gleich befunden werden, so muß das Bild von  $F$  in jenen Punkt verlegt werden, der von den 4 Bildern gleich weit absteht (in den Mittelpunkt der Kugel, die dem Tetraeder der Bilder umschrieben werden kann). Die Richtungsrelationen, zu denen etwa  $F$  Anlaß giebt, können also nicht mehr berücksichtigt werden, wenn sie nicht schon von selbst richtig abgebildet sind. Daraus sieht man, daß man einen psychologischen Farbenkörper nicht erzwingen können (mehr hierüber in §§ 7 u. 9).

Da die Gleichheit oder Ungleichheit von Farbendistanzen innerhalb ziemlich weiter Grenzen schärfer und entschiedener beurtheilt werden kann (namentlich wenn es sich um Herstellung der „Mitte“ zweier nicht gar zu unähnlichen Farben handelt), als die Gleichheit oder Ungleichheit von Richtungen im Farbencontinuum, werden die Distanzurtheile bei experimentellen Untersuchungen die erste Rolle spielen. Auch aus einem anderen Grunde (S. 270) werden wir nachsehen müssen, welche Methoden die Distanzurtheile allein zur Prüfung eines Farbenkörpers an die Hand geben (§ 9).

Nun sind Farbenkörper und Farbentafeln schon öfter aufgestellt worden, und wir werden zunächst die Principien, nach denen sie construiert sind, kritisch untersuchen.

---

<sup>1</sup> Der psychologische Farbenkörper ist keineswegs der einzige, mit dem wir uns zu beschäftigen haben, aber er würde offenbar den Zweck, die Beziehungen der Farbenempfindungen zu einander räumlich anschaulich zu machen, am vollkommensten erfüllen. Deshalb habe ich die Forderung des psychologischen Farbenkörpers als des Ideals eines Farbenkörpers an die Spitze gestellt und genau präcisirt, obgleich wahrscheinlich keiner der wirklich aufgestellten Farbenkörper diesen Anforderungen ganz entspricht.

## § 2. Die nach älteren Methoden aufgestellten Farbkörper.

Die älteste Farbentafel, die auf die wissenschaftliche Literatur unseres Jahrhunderts noch Einfluß genommen hat, ist die NEWTON'sche. Zwar ist NEWTON's Ziel hierbei nur, aus der Art und dem Verhältniß mehrerer zu mischenden Farben die Mischfarbe vorauszusagen; aber die Vorschrift, die hierzu gegeben wird, bringt es mit sich, daß von selbst eine Farbentafel entsteht. Diese Vorschrift ist (gekürzt) folgende (Optice, Lib. I, Pars II, propos. VI): Man theile einen Kreisumfang in 7 Bögen, welche gewissen musikalischen Intervallen proportional sind und den Spectralfarben, wie aus Fig. 1 ersichtlich, zugewiesen werden.

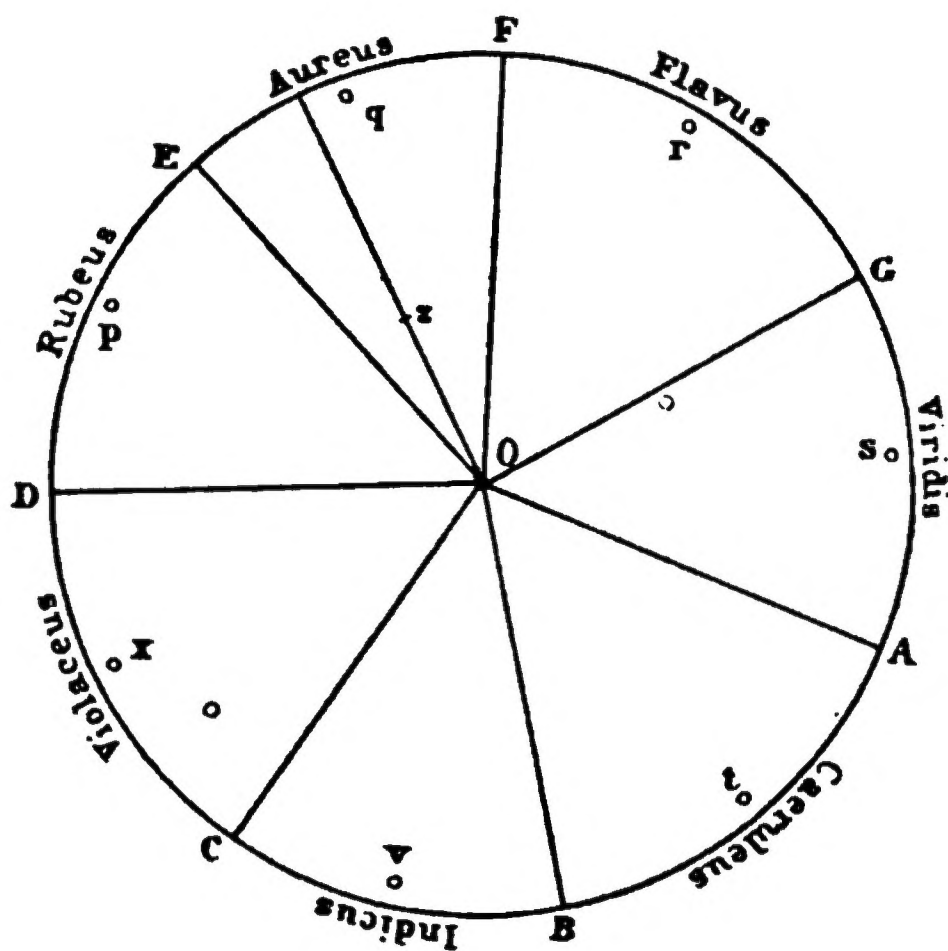


Fig. 1.

Zu jedem Kreisbogen suche man den Schwerpunkt ( $p, q, \dots x$ ). In diesen Schwerpunkten denke man sich Gewichte angebracht, proportional den Mengen (numero radiorum) der betreffenden Farben; der Schwerpunkt aller dieser Gewichte sei  $z$ . Dann giebt der Punkt  $y$ , wo  $Oz$  den Kreisumfang trifft, die Farbe der Mischung an, die Strecke  $Oz$  wird jedoch der Sättigung (saturitati) proportional sein.

NEWTON beruft sich dabei auf das Experiment, von einem Sonnenspectrum, bevor man es durch eine Linse wieder vereinigt, einzelne Farben aufzufangen. Die übrigen geben dann „vel



accurate vel quam proxime“ eine solche Mischfarbe, wie es seiner Regel entspricht. Nun wird auch verständlich, was unter „*numerus radiorum*“ zu denken ist: die flächenhafte Ausdehnung der betreffenden zur Mischung zugelassenen Spectralfarbe. Schon die benützte akustische Analogie zeigt, daß diese Farbentafel keinen Anspruch auf Exactheit machen kann, wenn sie auch das primitivste Bedürfnis, ähnliche Farben räumlich nahe abgebildet zu sehen, befriedigt. Die geschilderte Schwerpunktsconstruction heisst noch immer die „*NEWTON'sche Regel*“ oder „*NEWTON's Gesetz der Farbenmischung*“, wenn auch erst die Ausdehnung derselben auf Mischfarben, die späteren Autoren angehört, sich fruchtbar für die Farbentheorie erwiesen hat.

MAYER scheint der erste gewesen zu sein, der (Göttinger Anzeigen 1758) eine dreieckige Farbentafel construiert hat, ausgehend von der Beobachtung, daß sich aus roth, gelb und blau alle Farben mischen liessen. (Nach dem Bericht LAMBERT's in dessen „*Beschreibung einer Farbenpyramide*“, Berlin 1772, 126 S.)

Durch die Andeutungen MAYER's, der auch schon von der Mischung der Farben seines Dreiecks mit weisß redet, ist LAMBERT offenbar zur Aufstellung seiner Farbenpyramide angeregt worden, die er (neben weitläufigen anderen Erörterungen) a. a. O. nach folgenden Principien construiert: Er gruppirt kleine Quadrate in Form eines rechtwinkligen Dreiecks (Fig. 2), füllt

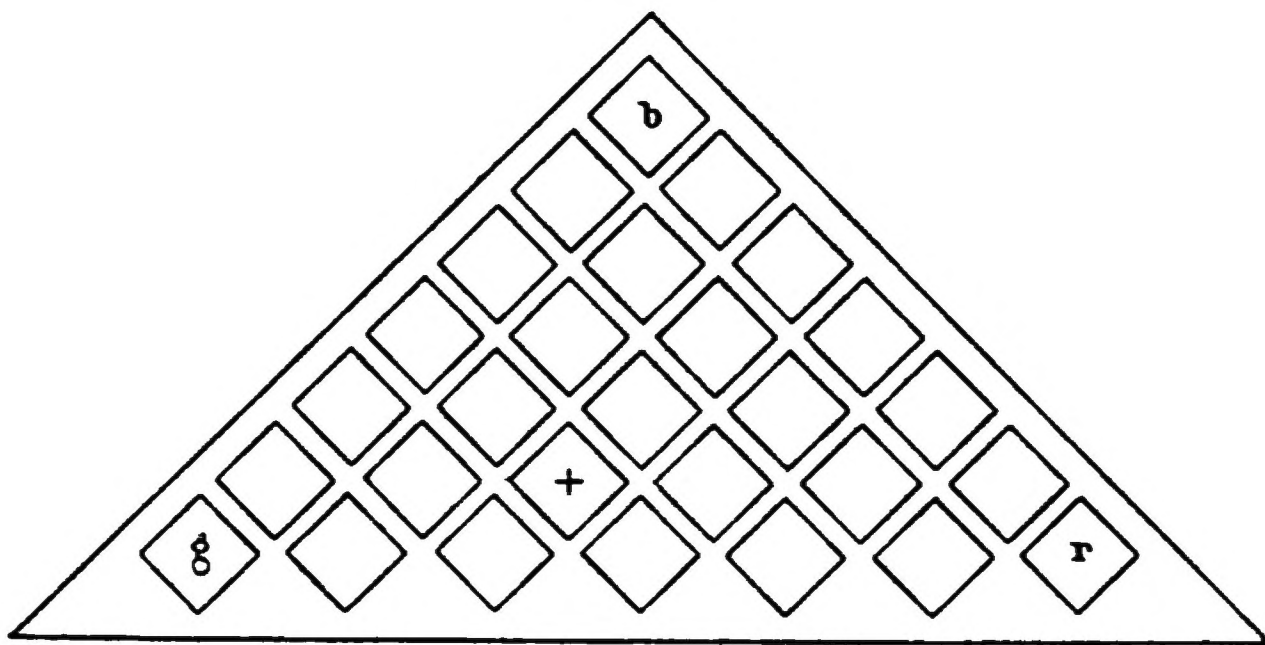


Fig. 2.

die Eckquadrate mit den Pigmenten gelb, roth, blau, die zwischenliegenden mit den Zwischenfarben. Solcher Tafeln schichtet er 7 übereinander, von denen jede folgende nach oben weniger Quadrate enthält und immer hellere durch Mischung

mit Weiß hervorgegangene Farben. Die oberste Schichte enthält nur ein Quadrat: weiß. Die beigegebene (sehr mangelhaft colorirte) Tafel läßt in eine Hohlpyramide hineinblicken, von der die eine Seitenfläche weggenommen ist, und in der die Farbenquadrate wie auf den Brettern eines Kastens liegen.

Die Zwischenfarben werden nach folgender Methode erhalten: LAMBERT geht von bestimmten Pigmenten aus, z. B. § 60: Zu solchem Grün, welches eigentliches, weder ins Gelbe noch ins Blaue zielendes Grün ist, werden 2 Gran Berlinerblau und 7 schwache Gran Gummigutt erfordert. Er drückt sich aus, Gummigutt habe die Schwäche 7, und zwar Schwäche (nicht Stärke), weil ein Pigment um so schwächer ist, je mehr man davon nehmen muß, um gleiche Wirkung zu erzielen. Hierauf findet er nach derselben Methode für andere Pigmentsorten, daß „in den Mischungen 2 Gran Carmin, 3 Gran Berlinerblau und 12 Gran Gummigutt gleichweit reichen“ und nimmt 2, 3, 12 endgültig als Grade der Schwäche der drei Grundfarben an, mit denen er die Farbentafel construirt (§ 69): „Man setze nun z. E. es soll die nach MAYER'scher Art bezeichnete Mischung  $r^3 b^2 g^3$  mittels erstbemeldeter dreier Grundfarben getroffen werden, so will dies sagen, die Stärke .... des Rothen müsse 3, des Blauen 2, des Gelben 3 sein. Nun werden dem Gewichte nach für ein Grad Stärke 2 Th. Carmin, 3 Th. Berlinerblau, 12 Th. Gummigutt gerechnet“; demnach ....

$$3 \times 2 = 6 \text{ Th. Roth,}$$

$$2 \times 3 = 6 \text{ Th. Blau,}$$

$$3 \times 12 = 36 \text{ Th. Gummigutt.}$$

Diese „nach MAYER'scher Art bezeichnete Mischung“ (MAYER sagt jedoch nicht, wie er „die zu den Mischungen gehörigen Portionen“ bestimmt habe) ist offenbar für ein Farbendreieck berechnet, in welchem an jeder Seite 9 Quadrate liegen, um eins mehr als die Summe der „Partienten“ 3, 2, 3 („um sie von den Exponenten der Algebraisten zu unterscheiden“) ausmacht. In den Ecken stünden die Farben  $r^3$ ,  $g^3$ ,  $b^3$ ; die 7 Zwischenstufen zwischen  $r^3$  und  $b^3$  wären:  $r^2b$ ,  $r^6b^2$ , ....  $rb^7$ ; u. s. w. Alle Quadrate auf einer Parallelen zu einer Dreiecksseite enthalten Farben, für welche der Partient der an der gegenüberliegenden Ecke liegenden Grundfarbe constant ist. Das Verfahren, die Farben in der Grundfläche der Pyramide anzuordnen, ist also präcis definirt; z. B. würde das in der Fig. 2 (Summe der Partienten hier nur 6)



mit einem Kreuzlein bezeichnete Quadrat die Farbe  $r^2 b^1 g^8$  tragen, die nach obiger Regel in bestimmter Weise aus den Pigmenten erhalten wird.

Blos der Ausgangspunkt dieses Verfahrens ist psychologisch, nämlich die Bestimmung der zwischen den Grundfarben in der Mitte liegenden Farben grün, orange und violett. Dagegen stört es LAMBERT nicht, daß im Uebrigen die Farbenabstände zwischen benachbarten Quadraten nicht gleich erscheinen, ob schon ihm dieser Umstand nicht entgangen ist (§ 90). Selbst bei Bestimmung jener 3 Mittelfarben läßt sich die Methode nur 2 Mal anwenden, weil dann das dritte Verhältniß der Pigmentwerthigkeiten schon von selbst bestimmt ist. LAMBERT, der dies auch bemerkt hat, behauptet zwar: die Erfahrung trifft hiermit so genau überein, als es verlangt werden kann. LAMBERT war wohl der erste, der ein räumliches Farbenschema aufgestellt hat. Auch giebt sich in den quantitativen Bestimmungen ein anerkennenswerthes Streben nach Exactheit kund, wenn man auch später für wissenschaftliche Zwecke von Farbendefinitionen durch Mischung von Pigmentquantitäten ganz abgekommen ist, aus Gründen, die HELMHOLTZ (in POGGENDORFF's Ann. 1852: „Ueber die Theorie der zusammenges. Farben“) angegeben hat.

RUNGE („Farbenkugel“, Hamburg 1810, 27 S. u. eine Tafel, in welcher zwei Ansichten der Farbenkugel von aussen und zwei Durchschnitte colorirt gegeben werden) hat das Farbendreieck wieder durch einen Kreis und die Pyramide durch eine Kugel ersetzt. Er beruft sich dabei darauf, daß alle 6 Punkte für blau, gelb, roth, grün, orange, violett (auf dem Aequator) von weiß und schwarz (an den Polen) gleich weit abstehen müßten, obgleich schon LAMBERT (§ 77) bemerkt hatte, „das Gelb braucht wenig Stufen sich ins Weiße zu verlieren, und diese Stufen kann man sich ohne Mühe vorstellen, beim Roth und Blau giebt's mehrere Stufen.“ Ein Fortschritt kann also im Ersatz der Pyramide durch eine Kugel nicht erblickt werden, aber darin, daß RUNGE für Schwarz und seine Uebergänge zu den Grundfarben durch eine zweite Halbkugel einen passenderen Platz geschaffen hat, während sich LAMBERT's Pyramide von ihrer Basis aus nur nach einer Seite erstreckt, sodaß Schwarz schon in der Basis untergebracht werden mußte, wohin besser das Grau gehört. Genaue Definitionen der Farben, überhaupt quantitative Bestimmungen fehlen bei RUNGE völlig.

Unter den Farbenkörpern, die nach directer Schätzung entworfen wurden, ist noch HÖFLER's Farbenoctaeder (Psychologie, S. 113) dadurch merkwürdig, daß hier nicht die Aehnlichkeit im engeren Sinne, sondern der conträre Gegensatz (weiß-schwarz, roth-grün, gelb-blau) zum Ausgangspunkt genommen wurde, zugleich in der Absicht, HERING's Theorie der Grundfarben Rechnung zu tragen. EBBINGHAUS hat (Psychologie, 1. Halbbd. S. 184f.) das Farbenoctaeder verbessert, indem er die Ecken abrundete und die Mittelebene, welche die Spectralfarben mittlerer Helligkeit enthält, schief gegen die Axe schwarz-weiß stellte, so daß das Gelb dem Weiß, das Blau dem Schwarz näher rückt.

### § 3. MAXWELL's Farbentafel.

Die neueren Bemühungen, die Farben nach einem messenden Princip in eine räumliche Anordnung zu bringen, haben von MAXWELL's und HELMHOLTZ' fast gleichzeitigen Untersuchungen ihren Ausgangspunkt genommen. Namentlich ist für die Theorie der Farbenkörper MAXWELL's „Experiments on Colours . . .“ (*Scientif. papers*, Vol. I, 1854) wichtig.<sup>1</sup> Die fundamentale experimentelle Thatsache, auf welcher die Möglichkeit von MAXWELL's Farbentafel beruht, ist folgende: Zwischen je vier beliebigen Farben besteht eine Farbengleichung. D. h. man kann entweder: 1. drei von den Farben in solchen Verhältnissen mischen, daß die vierte herauskommt; oder: 2. einer beliebigen Mischung von zwei Farben eine passend zu bestimmende Mischung der zwei anderen gleichmachen.

Die Mischungen wurden zuerst am Farbenkreisel bei gewöhnlichem Tageslicht vorgenommen. Hierbei können allerdings die Intensitäten beiderseits noch verschieden sein, und um sie gleich zu machen, wurde zu der einen Mischung Schwarz hinzugefügt, das MAXWELL für Mischungszwecke nicht als Farbe betrachtet. Vielmehr faßt er die Sache so auf, als ob es nur zur Ausfüllung eines Theils des Kreisels verwendet würde, der eigentlich (wenn dies möglich wäre) leer bleiben müßte, wenn

---

<sup>1</sup> MAXWELL beruft sich blos auf YOUNG, der zuerst ein Dreieck an Stelle des NEWTON'schen Farbenkreises gesetzt habe; es scheinen ihm also die Untersuchungen MAYER's und LAMBERT's unbekannt geblieben zu sein. YOUNG spricht in seiner „Natural philosophy“ an einer einzigen kurzen und schwer verständlichen Stelle (Vol. I, S. 440) von dieser Angelegenheit. Eine dreieckige colorirte Farbentafel ist beigegeben.



die übrigen Farben bloß in der Ausdehnung herangezogen werden, die auch der Intensität nach die Mischung gleich der gegebenen machen.

Die Construction der Farbentafel wird nun so vorgenommen: Es werden drei Grundfarben gewählt, die (aus praktischen Gründen) weit auseinander liegen; ihre Intensitäten werden, wie sie durch bestimmte farbige Papiere bei bestimmter Beleuchtung vertreten werden, gleich eins gesetzt. MAXWELL nimmt als diese Grundfarben ein gewisses Roth (Vermilion)  $V_m$ , Ultramarinblau  $U$  und „Emerald Green“  $EG$ ; sie werden durch irgend drei Punkte der Zeichenebene versinnlicht. Um nun für eine vierte Farbe, z. B. Weiß  $W$ , den Ort auf der Farbentafel zu finden, stellt man vor Allem die Farbengleichung her, welche diese Farbe mit den Grundfarben verbindet. Sie ist, wenn  $S$  schwarz bedeutet:

$$28 W + 72 S = 37 V_m + 27 U + 36 EG.$$

Die Zahlen geben an, wieviel Procent des Farbenkreisels von der betreffenden Farbe erfüllt waren. Bringt man nun in den Bildern von  $V_m$ ,  $U$ ,  $EG$  beziehungsweise die Gewichte 37, 27, 36 an, so soll der Schwerpunkt dieser drei Gewichte das Bild von  $W$  sein. Die Gesammtintensität einer durch Mischung aus den drei Grundfarben allein (wobei diese den ganzen Kreis ausfüllen) gewonnenen Farbe wird immer eins gesetzt. Da aber schon 28 %  $W$  genügen, um das rechts herauskommende Grau zu liefern, ist die Intensität des verwendeten weißen Papiers  $= 100 : 28 = 3,57$  zu setzen; und jedesmal, wenn dieses weiße Papier im Kreis verwendet wird, ist die Zahl der Theile, die es ausfüllt, mit 3,57 zu multipliciren, bevor man es in Rechnung bringt. Jeder Farbe entspricht so ein bestimmter numerischer Coefficient, der die Intensität bezeichnet, in welcher die Farbe durch das vorliegende Papier vertreten ist.

Ist die Farbengleichung von der 2. Art, d. h. stehen auf jeder Seite derselben (Schwarz ungezählt) zwei Farben, so muß der Schwerpunkt der beiden Bilder links zusammenfallen mit dem Schwerpunkt der beiden Bilder rechts. Sind also die Bilder dreier Farben bekannt, so kann man das Bild der vierten finden, wenn man noch berücksichtigt, daß beiderseits einer Farbengleichung immer die gleiche Intensität stehen muß. Z. B. ein gewisses blasses Gelb  $Gb$  tritt in folgende Gleichung ein:

$$39 Gb + 21 U + 40 S = 59 V_m + 41 EG.$$

Bevor man den Ort für  $Gb$  construiren kann, muß man den Coefficienten von  $Gb$  kennen. Links müssen die farbigen Theile dieselbe Intensität liefern, wie rechts. Die 39 Theile  $Gb$  sind also (da  $S$  zur Intensität nichts beiträgt und  $U$ ,  $Vm$ ,  $EG$  den

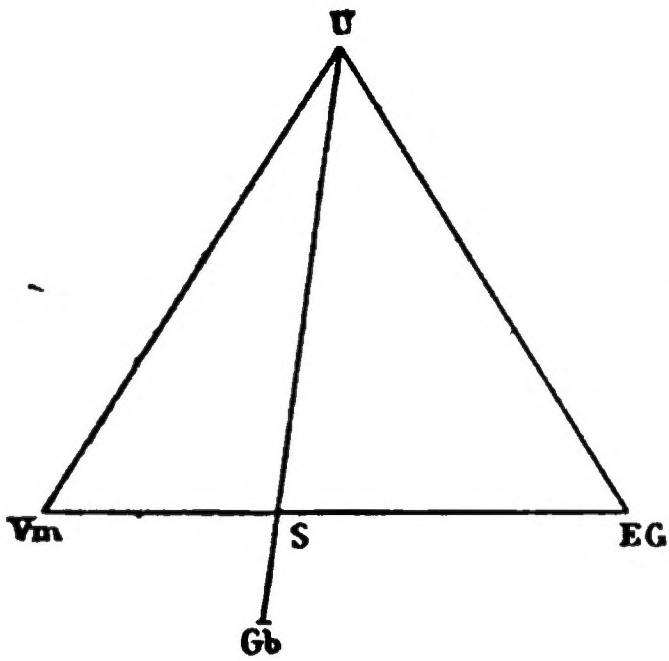


Fig. 3.

Coefficienten eins haben) thatsächlich 79 % (nämlich  $100 - 21$ ) äquivalent, und der Coefficient des Papiers  $Gb$  ist daher  $79 : 39$ . Nun construirt man den Schwerpunkt  $s$  von 59  $Vm$  und 41  $EG$  und verbindet  $U$  mit  $s$ ; auf der Verlängerung muß  $Gb$  so liegen (Fig. 3), daß der Schwerpunkt von 79  $Gb$  und 21  $U$  auf  $s$  fällt. Je nachdem die Farbengleichung von der 1. oder 2. Art ist, wird das Bild der neuen vierten Farbe innerhalb oder außerhalb des Dreiecks der drei alten Farben liegen.

Die Bedeutung dieser Farbentafel besteht zunächst darin, daß irgend 3 Farben derselben (die nicht in gerader Linie liegen) die Rolle der Grundfarben spielen können, d. h.: nimmt man irgend drei andere Farben heraus, so kann man zwischen diesen und jeder vierten Farbe  $F$  eine Gleichung herstellen. Dieser Farbengleichung entspricht eine Schwerpunktsconstruction, und der Ort, der nach dieser Construction  $F$  angewiesen werden müßte, ist identisch mit demjenigen, den  $F$  durch Verwendung der ursprünglichen Farben  $Vm$ ,  $U$ ,  $EG$  erhielt. Oder: von 3 Farben  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ausgehend (deren Bilder man willkürlich wählt) kann man einer vierten  $D$  nur auf eine Art durch eine Farbengleichung zwischen  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  einen Platz anweisen; aber schon bei der fünften Farbe  $E$  hat man die Wahl zwischen mehreren Bestimmungen: Man kann die Gleichung zwischen  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $E$  oder zwischen  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $E$  oder ... (4 Arten) benützen. Die Controlen mehren sich sehr rasch, wenn man zu weiteren Farben fortschreitet, und alle Arten liefern dasselbe Ergebniss. Diese Thatsache hat MAXWELL durch viele Versuche bestätigt; wir wollen sie kurz die Haupteigenschaft der MAXWELL'schen Farbentafel nennen. Sie besteht also in der Eindeutigkeit des Resultats trotz der Vieldeutigkeit des Verfahrens, zum Bilde einer Farbe zu gelangen.



MAXWELL hat später die Mischungsversuche mit Spectralfarben wieder aufgenommen, wobei er einen sehr sinnreichen Apparat (colour-box) verwendet (On the theory of compound colours . . ., Scient. papers, Vol. I., 1860); namentlich hat er dort die Curve der Spectralfarben genauer bestimmt, die zuerst in einer Abhandlung von HELMHOLTZ (Ueber die Zusammensetzung von Spectralfarben, Pogg. Ann., 1855) schätzungsweise angegeben worden war. Aus neuerer Zeit liegen hierüber von KÖNIG und DIETERICI Bestimmungen vor (HELMHOLTZ, Handb. d. physiol. Optik, 2. Aufl., S. 340). Alle diese Curven haben das Gemeinsame, daß sie bei Grün einen starken Bug besitzen, an den sich zwei fast geradlinige Theile für die beiden Enden des Spectrums anschließen. (Vgl. auch hier Fig. 4, S. 241.)

Reine Spectralfarben sind zu Mischungsversuchen wohl zuerst von HELMHOLTZ (Ueber die Theorie der zusammengesetzten Farben, Pogg. Ann. 1852) benützt worden; ihre Verwendung ist aus mehreren Gründen den anderen Mischungsmethoden vorzuziehen: Die Spectralfarben selbstleuchtender Körper sind durch ihre Wellenlänge sehr genau definirbare, an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten in gleicher Weise herstellbare physikalische Reize, während die farbigen Papiere auch von der Beleuchtung abhängige Reize sind. Ferner können bei Versuchen mit Spectralfarben Intensitätsänderungen unmittelbar durch Aenderungen von Spaltbreiten hervorgebracht werden, sodaß die Beimischung von Schwarz, die beim Farbenkreisel anstößig scheinen könnte, wegfällt und nun wirklich zwischen bloß je vier Qualitäten eine Farbengleichung hergestellt werden kann. Außerdem sind beim Farbenkreisel die beiden gleichbefundenen Mischungen häufig in derselben Weise spectral zusammengesetzt, sodaß die Gleichung (worauf HERING aufmerksam gemacht hat, Lotos, 1887, S. 259) vom physikalischen Standpunkt eine identische ist und daher nicht viel beweist. Nur die zeitliche Verteilung der Reize an einem Punkte der Netzhaut ist auch hier noch in beiden Fällen verschieden. Also ganz trivial sind solche Farbengleichungen doch nicht; sie beweisen immerhin, daß wenn gewisse Lichtreize zugleich oder nacheinander in beliebiger regelmäßiger zeitlicher Anordnung eine Netzhautstelle treffen, nur so rasch, daß eine einheitliche Farbenempfindung entsteht, diese Empfindung von der Art der zeitlichen Anordnung unabhängig ist.

#### § 4. Die Bedeutung der Farbentafel MAXWELL's und die Arten von Farbenkörpern.

Kann diese Farbentafel eine psychologische sein? Man sieht, es bleibt bei ihrer Construction vieles willkürlich: Dieselben drei Grundfarben können durch drei beliebige Punkte der Ebene abgebildet werden (die nur nicht in gerader Linie liegen dürfen) und könnten noch mit drei beliebigen Intensitätscoefficienten (statt eins) ausgestattet werden, ohne das Wesen der MAXWELL'schen Farbentafel zu beeinträchtigen. Dabei haben jedoch nur die Verhältnisse dieser drei Coefficienten auf die Anordnung der Farben in der Tafel Einfluss. Zwei dieser Verhältnisse können als unabhängige Parameter betrachtet werden, ebenso zwei Winkel, welche die Form des Grunddreiecks bestimmen (wir zählen natürlich geometrisch ähnliche Farbentafeln wie eine einzige). Dann hängt also die Gestalt der MAXWELL'schen Farbentafel von vier Parametern ab. HERING hat bei seiner ausführlichen Untersuchung der Schwerpunktsconstruction erkannt, daß alle diese Farbentafeln durch Centralprojection auseinander erhalten werden können (a. a. O. S. 221). Dies ist fast unmittelbar ersichtlich, wenn man sich auf den Standpunkt des barycentrischen Calculs (MÖBIUS, Ges. W. Bd. I) stellt oder überhaupt die homogenen Coordinaten der neueren analytischen Geometrie und die damit zusammenhängende Theorie der collinearen Verwandtschaft kennt. Wenn also die beiden Farbenpaare gleicher Distanz  $AB$  und  $CD$  in einer dieser Farbentafeln durch Punktepaaire gleicher Distanz abgebildet sind, so werden sie es in einer andern im Allgemeinen nicht mehr sein. Diese Farbentafeln können also nicht als psychologische betrachtet werden.

Uebrigens giebt es höchstens einen psychologischen Farbenkörper, wenn man geometrisch ähnliche und symmetrische Modelle nicht als verschieden zählt. Denn nehmen wir an,  $K'$  wäre ein von  $K$  verschiedener psychologischer Farbenkörper, und es seien  $AB, CD, EF, \dots$  Farbenpaare gleicher Distanz,  $a, b, c, \dots$  die Bilder der Farben in  $K$ , endlich  $a', b', c', \dots$  die Bilder in  $K'$ . Dann müssen die Streckengleichheiten bestehen:



$$\begin{aligned} a b &= c d = e f = \dots, \\ a' b' &= c' d' = e' f' = \dots, \text{ also} \\ \frac{a' b'}{a b} &= \frac{c' d'}{c d} = \frac{e' f'}{e f} = \dots; \end{aligned}$$

d. h. jede von beliebig vielen gleich langen Strecken in  $K$  hat zur entsprechenden in  $K'$  ein constantes Verhältniß; also sind  $K$  und  $K'$  geometrisch ähnlich oder werden es, wenn man entweder  $K$  oder  $K'$  bezüglich einer Ebene spiegelt. Schon aus diesem Grunde sieht man, daß bestenfalls höchstens eine von den MAXWELL'schen Farbentafeln psychologisch sein könnte. Aber trotzdem ist klar, daß durch ihre Haupteigenschaft etwas Wichtiges geleistet ist:

Daraus daß solche Farbentafeln überhaupt möglich sind, folgt zunächst, daß das Continuum der Farbenempfindungen bloß dreidimensional ist. Die Tafeln selbst sind nämlich zweidimensional, berücksichtigen aber zufolge ihrer Construction von jeder Combination objectiver Reize (z. B. reiner Spectralfarben in gewissen Intensitätsverhältnissen und Anzahlen) eine und nur eine absolute Intensität. Berücksichtigt man also noch, daß jeder objective Reiz, dem ein Punkt der Farbentafel entspricht, noch in unendlich vielen Intensitäten auftreten kann, denen ein Empfindungscontinuum entspricht, das aus der Farbentafel herausführt (es ist damit nicht behauptet, daß dieses auch nach Intensität abgestuft sein muß), so sieht man, daß das Continuum aller Farbenempfindungen um eine Dimension mehr haben muß, als die Farbentafel, d. h.: Das Continuum der Farbenempfindungen ist dreifach ausgedehnt. Dies ist jedenfalls eine nothwendige Bedingung (aber keine hinreichende, § 9) für die Möglichkeit eines psychologischen Farbenkörpers.

Obigen Satz stützt man meist nur durch den Hinweis darauf, daß uns an der Farbenempfindung dreierlei Aenderungsweisen, nämlich nach Farbenton, Intensität und Sättigung wahrnehmbar seien. Wenn auch dieses Argument den Vorzug unmittelbarer Berufung auf psychische Thatsachen hat, so sind diese Thatsachen selbst doch nicht unbestritten, namentlich die „Intensitätsänderung“ (HERING, Zur Lehre vom Lichtsinn, § 21). Aber wenn man auch anerkennen wollte, daß die „Intensitätsänderung“ eine Aenderung besonderer Art, wenn auch nicht gerade nach Inten-

sität, sei, so ist doch sicher, daß uns die verschiedenen Aenderungsweisen bei weitem nicht so reinlich geschieden zum Bewußtsein kommen, wie es im Gebiete der Tonempfindungen (Aenderung nach Höhe, Stärke, Klangfarbe) wenigstens innerhalb gewisser Grenzen der Fall ist. Daher konnten beim Farbengebiete Zweifel entstehen, ob mit jener Dreiheit die Aenderungsweisen wirklich erschöpft sind: Helligkeit der Farben wird sowohl von der Sättigung als von der Intensität unterschieden.<sup>1</sup> MÜLLER redet außerdem von ihrer Eindringlichkeit (Zur Psychophys. d. Gesichtsempf., § 6); vielleicht denkt MAXWELL, wenn er gelegentlich von brilliancy redet, an etwas ähnliches. Also wird obige Ableitung des Satzes willkommen sein.

Aber ein Zweifel könnte noch entstehen, ob nicht durch subjective Bedingungen, die Zahl der Dimensionen des Farbencontinuum vermehrt werden könnte, während wir bisher allen möglichen physikalischen Reizen gegenüber einen unveränderten Zustand des Sehorgans gedacht haben. Es ist ja bekannt, daß das tiefste Schwarz nur im simultanen Contrast gesehen werden kann; auch kann man z. B. durch Abstumpfung für die Complementärfarbe ein Spectrallicht noch gesättigter sehen als sonst. Indessen wird man kaum gezwungen sein, von der Annahme abzugehen, daß sich in solchen Fällen die Farbenmannigfaltigkeit in den schon vorhandenen Dimensionen ohne Zutritt einer neuen weiter ausdehnt.

Wir kehren zur Bedeutung der MAXWELL'schen Farbentafel zurück und betrachten ihre zweite Hauptleistung: Sie lehrt uns, wie ein Reiz physiologisch äquivalent durch andere Reize ersetzt werden kann. Wenn z. B.  $CC'$  die Curve der Spectralfarben in einer MAXWELL'schen Tafel ist, so kann der aus  $A$  und  $B$  gemischte Reiz  $S$  durch jedes mit passenden Intensitäten gewählte Paar  $A'B'$  ersetzt werden, dessen Bilder mit  $S$  auf einer Geraden liegen, weil man in  $A'$  und  $B'$  Gewichte so anbringen kann, daß ihr Schwerpunkt auch nach  $S$  fällt. Kurz, alle (physikalisch oft sehr verschiedenen) Combinationen von Reizen, die in der Farbentafel denselben Schwerpunkt mit demselben

---

<sup>1</sup> HILLEBRAND („Ueber die specifische Helligkeit der Farben“, *Wiener Sitzungsab. Math.-Natw. Cl.* Bd. XCVIII, Abth. III; 1889) glaubt alle Aenderungen, die eine Farbe außer der Aenderung nach Farbenton und Sättigung noch erfahren kann, auf Aenderung der „Helligkeit“ zurückführen zu können, die er a. a. O. definirt und einer Messung zugänglich macht.



Gewicht liefern, erzeugen, gemischt, gleiche Empfindungen. Dies liegt in der Haupteigenschaft der Farbentafel und läßt eine un-

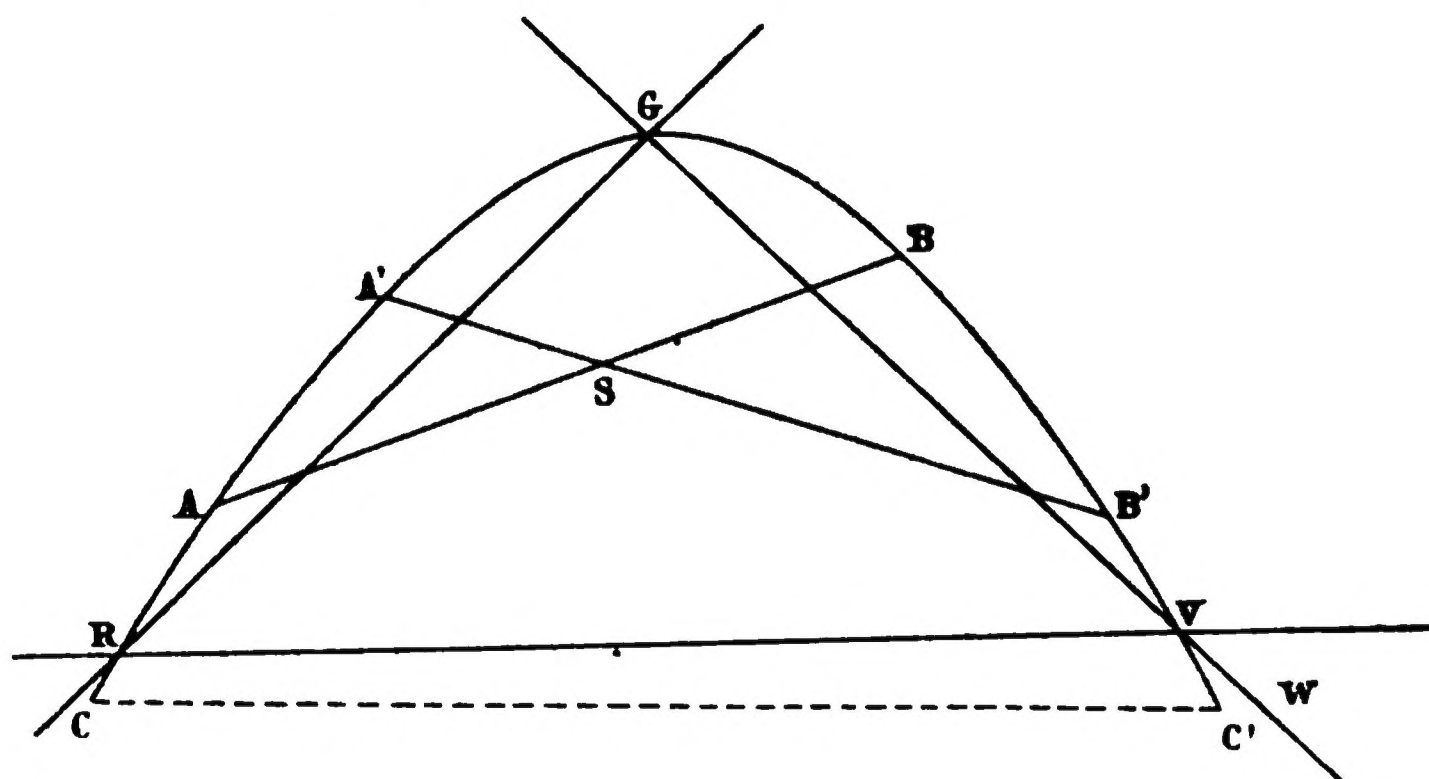


Fig. 4.

begrenzte Mannigfaltigkeit von Beziehungen zwischen den physiologischen Werthigkeiten der Reize erkennen. Denn man kann nicht nur discrete, sondern auch continuirliche Reize mischen (z. B. Theile des Spectrums), und dem entsprechend kann man in der Farbentafel nicht nur von Punkten, sondern auch von Curven und Flächenstücken (eventuell mit veränderlicher Dichte) den Schwerpunkt suchen. Geht man auf die spectrale Zusammensetzung der Reize zurück, so genügt es allerdings, Theile der Spectralcurve zu combiniren.

Sofern wir nun nicht nur auf eine Abbildung der Elemente selbst einer Mannigfaltigkeit achten, sondern (was die Hauptsache ist) auf die Abbildung von Beziehungen zwischen diesen Elementen, ist auch klar, was durch die MAXWELL'sche Farbentafel eigentlich abgebildet wird: nicht die inneren Beziehungen zwischen den Farbenempfindungen selbst (wie schon früher bemerkt), auch nicht die physikalischen Reize (denn da müßten spectral in verschiedener Weise zusammengesetzte immer als verschieden gelten), sondern nur die physiologischen Werthigkeiten der Reize und die Beziehungen zwischen diesen Werthigkeiten. Wir wollen deshalb diese Farbentafel eine physiologische nennen; es entspricht jedem ihrer Punkte zwar eine unendliche Mannigfaltigkeit physikalischer Reize, aber nur eine gemeinsame physiologische Werthigkeit derselben und, wie wir uns denken, auch nur ein physiologischer

(allerdings unbekannter) Vorgang, der durch diesen Punkt sammt den in den Schwerpunktsconstructionen liegenden Beziehungen zu anderen Werthigkeiten abgebildet wird. Diese Leistung der MAXWELL'schen Farbentafel hat wohl zuerst HERING klar ausgesprochen, der jedem Licht eine „optische Valenz“ (Lotos, 1887, § 25 ff.) zuweist. Indem wir sagen, die Farbentafel lehre, wie die (auch abgesehen von der objectiven Intensität) noch viel größere Mannigfaltigkeit der physikalischen Reize auf ein (abgesehen von der Intensität) zweidimensionales Continuum physiologischer Werthigkeiten reducirt werde, setzen wir allerdings voraus, daß diese Reduction schon beim Uebergang von den physikalischen zu den physiologischen Vorgängen stattfindet, und nicht erst beim Uebergang von den physiologischen zu den psychischen. Aber diese Annahme wird allgemein gemacht; auch HERING schließt (a. a. O. § 25) ausdrücklich „aus der Gleichheit der Empfindungen, welche von zwei objectiv verschiedenen Lichtern erzeugt sind, auf die physiologische Gleichwerthigkeit der letzteren“. Wir wollen also alle Farbentafeln oder Farbenkörper physiologisch nennen, die eine Abbildung der physiologischen Reize und ihrer Beziehungen zu geben unternehmen.

Es mag gleich bemerkt werden, daß es einen etwa analogen physikalischen Farbenkörper im eigentlichen Sinne, d. h. die stetige Abbildung aller physikalischen Farbenreize auf ein Stück des Raums, nicht geben kann; denn wenn wir  $n$  discrete Spectralfarben mischen, so hängt der Reiz von  $n$  unabhängigen Veränderlichen (den  $n$  Intensitäten) ab, die durch Coordinaten nur versinnlicht werden können, wenn  $n \leq 3$ ; außerdem können wir aber Continua zur Mischung heranziehen; die so erhaltenen Reize können um so weniger in einem räumlichen Schema untergebracht werden. Wir können aber auf mannigfache Weise künstlich aus der Mannigfaltigkeit der physikalischen Reize eine bloß dreifache so herausheben, daß ihr auch eine dreifache Empfindungsmannigfaltigkeit entspricht, und jene dreifache Reizmannigfaltigkeit auf den Raum abbilden. Würde man z. B. drei Spectralfarben, etwa je ein Roth  $R$ , Grün  $G$ , Violett  $V$ , in beliebigen Intensitäten zur Mischung zur Verfügung haben, so könnte man den größten Theil der überhaupt möglichen Farbenempfindungen damit hervorrufen. Bildet man nun eine solche durch denjenigen Punkt des Raumes ab, dessen Coordinaten  $u, v, w$  die Intensitäten der drei Componenten  $R, G, V$  sind, so



erhält man einen Farbenkörper, bei dem die Abbildungsmethode nach rein physikalischen Principien gewählt ist; wir wollen deshalb einen solchen Farbenkörper einen physikalischen nennen, obgleich er im Verhältniß zur Gesamtheit der möglichen Reize nur einen verschwindend kleinen Ausschnitt darstellt.

Dieser Farbenkörper umfaßt zunächst nur die aus  $R, G, V$  mischbaren Farben; jeder solchen Farbe  $F$  entspricht eine Farbengleichung,

$$1. \quad (u + v + w) F = u R + v G + w V,$$

wobei die Intensitäten von  $R, G, V$  jede nach einem beliebigen Maafs gemessen werden können, die Intensitätseinheit von  $F$  jedoch dadurch definirt ist, daß die Mischfarbe aus  $u R, v G, w V$  die Intensität  $u + v + w$  besitzt (vgl. auch § 3). Alle aus  $R, G, V$  mischbaren Farben liegen in einer entsprechenden MAXWELL'schen Tafel auf dem Dreieck  $R, G, V$ . Die überall convexe Spectralcurve  $CC'$  (Fig. 4) ragt jedoch über jedes Dreieck hinaus, dessen Eckpunkte auf ihr liegen. Es giebt also Farben, die aus  $R, G, V$  nicht mischbar sind; aber auch eine solche hängt doch mit  $R, G, V$  durch eine Farbengleichung zusammen. Z. B. hätte für eine bläuliche Spectralfarbe  $B$  diese Gleichung den Typus:

$$c B + u' R = v' G + w' V.$$

Legt man nun einem negativen Coefficienten in einer Farbengleichung die Bedeutung bei, daß die betreffende Farbe auf der anderen Seite beizumischen ist, so läßt sich die letzte Gleichung so schreiben:

$$c B = -u' R + v' G + w' V,$$

wobei, analog wie früher, die Intensitätseinheit von  $B$  durch

$$c = -u' + v' + w'$$

zu definiren ist.  $B$  könnte also durch die Coordinaten  $-u', v', w'$  abgebildet werden, und so alle aus  $R, G, V$  nicht mischbaren Farben durch Punkte mit zum Theil negativen Coordinaten. Der obige physikalische Farbenkörper ist hiermit so erweitert, daß er jedes Gebiet umfaßt, das durch eine MAXWELL'sche Tafel umfaßt wird, und überdies jeden Reiz in allen möglichen Intensitäten abbildet, also überhaupt zu jeder Farbenempfindung einen hervorrufenden Reiz enthält. Will man von einem Reiz bloß die Intensität ändern, so hat man die Intensitätscomponenten

$u, v, w$  im selben Verhältniß zu ändern. Reize derselben Qualität sind also durch eine Gerade abgebildet, die durch den Ursprung geht. Obiges Verfahren kann zwei negative Coordinaten tatsächlich niemals liefern. Denn wären für irgend eine specielle Farbe  $F$  in der Gl. 1. etwa  $u$  und  $v$  negativ, so hiesse das:  $V$  läßt sich aus  $R, G, F$  mischen, müßte also in einer MAXWELL'schen Tafel innerhalb des Dreiecks  $R, G, F$  liegen; d. h.  $F$  müßte im Winkelblatt  $W$  liegen (Fig. 4). Dort liegen aber keine Farben mehr, weil sämtliche Farben der Tafel durch die Spectralcurve und die ihre Enden verbindende Gerade eingeschlossen werden. Für Spectralfarben ist in der Gl. 1. ein und nur ein Coefficient negativ. Der physikalische Farbenkörper erstreckt sich nur in 4 von den 8 Octanten des Raumes; die übrigen Octanten wären noch frei, um jene Farben unterzubringen, die nur durch subjective Bedingungen erhalten werden können. Z. B. würde tiefes Schwarz in jenen Octanten kommen, wo alle drei Coordinaten negativ sind (Augenschwarz entspricht dem Ursprung des Coordinatensystems, Grau und Weiß liegen gegenüber im ersten Octanten). Freilich würde diese Erweiterung des Farbenkörpers nicht mehr nach physikalischen Principien vor sich gehen.

HELMHOLTZ macht eingangs seiner Abhandlung „Kürzeste Linien im Farbensystem“ (*diese Zeitschr.* Bd. III) von einem physikalischen Farbenkörper Gebrauch; derselbe wird alsbald physiologisch, indem er später (a. a. O. S. 111) unter  $x, y, z$  (die unseren  $u, v, w$  entsprechen) die Intensitäten der hypothetischen physiologischen Urfarben versteht.

### § 5. Ersatz des mathematischen Theils von HERING's Beweis des NEWTON'schen Farben mischungsgesetzes.

HERING hat das NEWTON'sche Farbenmischungsgesetz (so pflegt man die Anwendung der Schwerpunktsregel zu nennen) auf eine viel einfachere empirische Basis gestellt, als die Controle durch Farbengleichungen war (MAXWELL und AUBERT). Es ist zu seiner Ableitung bloß nothwendig, den Satz experimentell zu erhärten, daß wenn man zu den beiden Lichtern einer Farbengleichung je eins der beiden Lichter einer anderen Farbengleichung dazumischt, stets wieder eine Farbengleichung entsteht. Oder kurz, im Gebiete der Farben gilt der Satz:



I. Gleiches mit Gleichem gemischt giebt wieder Gleiches.

Für Spectralfarben folgt hieraus von selbst, daß eine Farbengleichung von der Intensität der Farben unabhängig ist; z. B. kann man doppelte Intensität als Mischung jeder Seite der Farbengleichung mit sich selbst auffassen. HERING hat nun den Satz I durch zahlreiche Versuche bewiesen (Lotos, 1887; Abschn. IV), wobei eine Messung der Componenten der Mischungen gar nicht nothwendig war, worin eben der entscheidende Vorthail besteht. Aus I. hat er dann die NEWTON'sche Regel gefolgert, was durch die etwas umständlichen Erörterungen des ersten Abschnitts seiner Abhandlung vorbereitet worden war. Dieser Nachweis läßt sich durch einfachere und kürzere Ueberlegungen ersetzen. Wir schicken einige Sätze über das Rechnen mit Farbengleichungen voraus:

Dem Satz I. entspricht in der Rechnung:

II. Farbengleichungen darf man algebraisch addiren.

Und zwar gilt das auch, wenn negative Coefficienten vorkommen. Denn um die eigentliche Bedeutung solcher Gleichungen zu erkennen, muß man sie (S. 243) so umschreiben, daß auf beiden Seiten alle Coefficienten positiv sind. Dann darf man sie nach I. addiren, und dann kann man die Glieder mit Vorzeichenänderung wieder auf jene Seite schaffen, auf der sie ursprünglich standen. Das Resultat ist dasselbe, als ob man gleich ursprünglich algebraisch addirt hätte.

III. Man darf Farbengleichungen auch algebraisch subtrahiren.

Denn wenn man in der zu subtrahirenden Gleichung die beiden Seiten vertauscht und dann addirt, so kommt eine Gleichung heraus, die man (bis auf Gliederumstellungen auf die andere Seite) auch erhalten hätte, wenn man in der ursprünglichen Anordnung subtrahirt hätte. Aus dem bisherigen geht hervor:

IV. Man darf eine Farbengleichung mit einer Zahl multipliciren oder durch eine solche dividiren.

Ein Specialfall des Subtrahirens ist das Weglassen gleicher Ausdrücke beiderseits; hierauf läßt sich das Substituiren eines

Ausdrucks durch einen gleichen zurückführen, was also gestattet ist. Es seien z. B. in

$$1. \quad \alpha F + \alpha' F' + \dots = \beta_1 F_1 + \dots + \beta_n F_n$$

vermöge der Gleichung

$$2. \quad \kappa F_n = \mu_1 G_1 + \dots + \mu_k G_k$$

statt der Farbe  $F_n$  die Farben  $G_1, \dots, G_k$  einzuführen, so kann man sich dies so bewerkstelligt denken, daß man 1. mit  $\kappa$ , 2. mit  $\beta_n$  multiplicirt, dann addirt, schließlicb beiderseits  $\kappa \beta_n F_n$  wegläßt. Ueberhaupt gelten dieselben Regeln, wie bei linearen algebraischen Gleichungen, wieviel Farben auch vorkommen mögen und gleichgültig, ob sie Spectralfarben oder zusammengesetzt sind. Wir werden immer voraussetzen, daß in den Farbengleichungen, von denen wir ausgehen, die algebraischen Summen der Coefficienten (die „Gewichte“) beiderseits gleich sind. Dann gilt dasselbe auch für alle nach den bisherigen Regeln daraus abgeleiteten Gleichungen; also:

V. Beiderseits jeder Farbengleichung sind die algebraischen Summen der Coefficienten gleich.

Wenn man andererseits zwei beliebige Paare äquivalenter Kräftesysteme hat:

$$\begin{array}{l} S_1 \text{ äqu. } S'_1, \\ S_2 \quad \text{,,} \quad S'_2, \end{array}$$

so ist aus der Mechanik bekannt:

VI. Das durch Zusammenfassung von  $S_1$  und  $S_2$  entstehende Kräftesystem ist dem aus  $S'_1$  und  $S'_2$  ebenso hervorgehenden äquivalent.

Wir wollen jetzt jeder richtigen Farbengleichung, in der alle Farben ihre Bilder in einer MAXWELL'schen Tafel schon haben, folgende mechanische Analogie zur Seite gestellt denken:

VII. Wir legen eine Schaar paralleler Geraden beliebiger Richtung und zwar durch das Bild  $P_i$  jeder in der Gleichung auftretenden Farbe  $F_i$  je eine Gerade  $\gamma_i$ . Je nachdem der zu  $F_i$  gehörige Coefficient  $m_i$  positiv oder negativ ist, lassen wir längs  $\gamma_i$  eine Kraft in dem einen oder anderen Sinne wirken, deren Gröfse gleich dem absoluten Betrag von  $m_i$  ist.

Aus VI geht nun hervor:

VIII. Wenn es bei einer Anzahl von Farbengleichungen  $g, g', \dots$  zutrifft, daß die Kräftesysteme,



die den beiden Seiten einer Gleichung nach der Regel VII zugeordnet wurden, einander äquivalent sind, so bleibt dieser Umstand erhalten, wenn man die Gleichungen addirt.

Denn wendet man auf die neue Gleichung die Regel VII an, so wird jeder Seite ein Kräftesystem zugeordnet, das man auch erhält, wenn man die in  $g, g', \dots$  derselben Seite zugeordneten Kräftesysteme zusammenfaßt. Da man Subtraction von Farbengleichungen stets als algebraische Addition auffassen kann, so gilt das analoge auch für die Subtraction, überhaupt für alle zulässigen Operationen.

Nun construiren wir eine MAXWELL'sche Tafel in folgender Weise: Drei beliebige Farben  $F_1, F_2, F_3$ , von denen keine aus den beiden anderen mischbar ist, werden durch drei beliebige Punkte  $P_1, P_2, P_3$ , die nicht in gerader Linie liegen, abgebildet. Jedes Symbol  $F$  oder  $f$  bedeute zugleich die Maafseinheit der betreffenden Qualität, die für die drei Grundfarben  $F_1, F_2, F_3$  willkürlich festgesetzt werden kann. Jeder vierten Farbe  $F$  entspricht eine Farbengleichung (§ 3) (eine „Grundgleichung“)

$$3. \quad m F = m_1 F_1 + m_2 F_2 + m_3 F_3,$$

wobei rechts auch negative Coefficienten auftreten können. Indem wir rechts nach der Regel VII ein Kräftesystem zuordnen, wollen wir den Schnittpunkt seiner Resultirenden  $R$  mit der Ebene  $P_1, P_2, P_3$  als das Bild  $P$  von  $F$  und die Maafszahl von  $R$  als Maafszahl der Intensität der neuen Farbe definiren. Da die Resultirende paralleler Kräfte der Größe nach die algebraische Summe der Componenten ist, wird also sein:

$$m = m_1 + m_2 + m_3.$$

Jetzt ist für jede Farbe ihr Bildpunkt und ihre Maafseinheit definirt. Zu zeigen ist, daß der Satz gilt:

IX. Wenn die Farbe  $F$  in einer beliebigen Farbengleichung auftritt, und man construirt ihr Bild  $B$  nach der dieser Gleichung entsprechenden (erweiterten) Schwerpunktsregel, so ist  $B$  identisch mit dem durch 3. definirten Bilde  $P$ .

Es sei

$$4. \quad \mu F = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \dots + \mu_n f_n$$

diese Farbengleichung (wir können  $\mu F$  immer links isoliren).





hängig, in welcher Reihenfolge man die Kräfte zur Construction heranzieht, und wie man sie zu Gruppen zusammenfaßt. Der Punkt *B*, der durch mechanische Deutung von 4. oder 7. erhalten wurde, muß also zusammenfallen mit *P*, der durch mechanische Deutung von 3. oder 6. erhalten wurde. Denn in 6. und 7. unterscheiden sich die rechten Seiten nur durch andere Anordnung und Zusammenfassung der Glieder, wenn auch vielleicht die spectrale Zusammensetzung der in 3. und 4. auftretenden Farben ganz verschieden ist; die wirklichen spectralen Zusammensetzungen der Farben gehen in die Rechnung gar nicht ein.

Etwas anders ausgedrückt: Wie eben gezeigt, kann man jede Farbengleichung aus Grundgleichungen der Form 3. oder 5. durch zulässige Operationen erhalten. Da nun bei diesen Grundgleichungen die Voraussetzungen der Sätze V. und VIII. *ex definitione* zutreffen, so muß dieser Umstand auch bei einer beliebigen Farbengleichung erhalten bleiben. Wenn also insbesondere auf der einen Seite nur eine Farbe steht, muß die ihr entsprechende Kraft die Resultirende des Systems der anderen Seite sein, womit IX neuerdings bewiesen ist.

Man sieht in der That, daß dieser Beweis wesentlich auf dem Satze I. beruht und auf dem Umstand, daß zwischen je 4 Farben eine Farbengleichung besteht. Jedoch braucht man bloß die Existenz dieses Umstands zu kennen (um zu wissen, daß man gerade mit drei unabhängigen Grundfarben auskommt), aber nie die numerischen Werthe der Coefficienten irgend einer Gleichung. Die Rechnungen mit Farbengleichungen stehen in vollständiger Analogie mit der Punktrechnung GRASSMANN'S (Ausdehnungslehre, Ges. W. I<sup>a</sup> und I<sup>b</sup>).<sup>1</sup>

## § 6. Weiteres über Farbenkörper.

Die bisherige Uebersicht zeigt deutlich, daß das Problem des Farbenkörpers aus dem Problem des Mischungsgesetzes ent-

---

<sup>1</sup> Ordnet man also die Farbenmannigfaltigkeit nach dem Mischungsgesetz, so stellt sie sich in der Ausdrucksweise der Mathematiker als linear heraus, während dies bei Anordnung nach Distanzvergleichen, wie sie der psychologische Farbenkörper erfordert, nicht der Fall zu sein braucht. Es ist eben merkwürdig, daß im Farbencontinuum auf zwei wesentlich verschiedene Arten mathematisch ausdrückbare quantitative Beziehungen zwischen den verschiedenen Qualitäten gefunden werden können.

standen ist. Es werden auch alle praktischen Methoden einen Farbenkörper zu finden oder zu prüfen, mit dem Verfahren der Farbmischung verquickt bleiben. Aber trotzdem ist das Problem des psychologischen Farbenkörpers vom Mischungsgesetz theoretisch vollkommen unabhängig. Denn es fordert nur, die irgendwie gegebenen Farbenempfindungsinhalte in eine Anordnung zu bringen, wie sie den Anforderungen des § 1 entspricht. Die idealste Verwirklichung eines Farbenkörpers wäre es also, wenn man an jede Stelle eines passenden Stücks des Raumes unwandelbar die Farbe heften könnte, deren Bild jene Stelle sein soll. Könnten wir uns jede beliebige Farbennuance einschliesslich aller objectiven Intensitäten irgendwie ohne Mischung verschaffen, so könnten wir der Farbmischung ganz entrathen, und das Problem des psychologischen Farbenkörpers behielte immer noch seinen guten Sinn, der bei dieser Fiction erst recht ganz rein zum Vorschein kommt.

Da zur praktischen Ausführung eines Farbenkörpers thatsächlich nur eine beschränkte Anzahl von Pigmenten vorliegt, und auch diese erst durch Angabe ihrer Beleuchtung eindeutig als Reize definirt sind, werden die Versuche, eine Farbentafel wirklich zu malen, einen zweifelhaften Werth haben. Es wird also am präcisesten sein, den Reiz physikalisch durch Angabe der Art (Wellenlänge) und Intensität der Spectralfarben zu definiren, die in ihm vorkommen, und alle Reize, die man benöthigt (wobei von physiologisch äquivalenten nur einer vertreten zu sein braucht), aus möglichst wenigen Spectralfarben zu mischen. Indem man nun zu jedem Punkt des Raumes, der noch im Farbenkörper liegt, sich den Reiz hingeschrieben denkt<sup>1</sup>, wird man von der Voraussetzung abhängig, dass derselbe Reiz (wenigstens in der Person, für welche der Farbenkörper gelten soll) immer gleiche Empfindungen hervorruft, weil man sonst nicht mehr wüßte, welche Empfindung durch Angabe des Reizes

---

<sup>1</sup> Wenn wir uns jetzt jeden Farbenkörper als eine Anordnung physikalischer Reize denken, so braucht deshalb ein solcher Farbenkörper selbst noch nicht physikalisch zu sein, sondern er kann physiologisch oder psychologisch sein, je nachdem die Anordnung der Reize nach physiologischen Grundsätzen oder nach den psychologischen Merkmalen der entsprechenden Empfindungen vorgenommen wurde. Es werden eben die Reize nur als Zeichen der Empfindungen verwendet, weil man die Empfindungsinhalte selbst nicht an die betreffende Stelle des Raumes hinzaubern kann.



bezeichnet werden soll. Aber auch diese Voraussetzung ist nur deshalb nothwendig, weil wir die Empfindungen praktisch von ihren Reizen nicht loslösen können. Principiell wäre es gar nicht nothwendig, bei der Frage des psychologischen Farbkörpers von den Reizen und dem Zustand der Netzhaut überhaupt zu reden, wenn wir uns ohne den Umweg über die Reize über unsere Empfindungen verständigen könnten, und wenn wir die Empfindungen willkürlich ohne Reize hervorrufen könnten. Denn der psychologische Farbkörper soll eben nur innere Beziehungen zwischen den Empfindungen zum Ausdruck bringen, die sich nicht ändern, solange sich die Empfindungen selbst nicht ändern. Ja sogar, wenn z. B. wegen Ermüdung der Netzhaut demselben Reiz allmählich andere Empfindungen entsprechen, ändert sich dadurch am psychologischen Farbkörper nichts Wesentliches, sondern nur an der Zuordnung der Empfindungen (und deshalb der Punkte des Farbkörpers) zu den Reizen. Man wird zu den Punkten des Farbkörpers für das ermüdete oder sonst alterirte Auge andere definirende Reize hinschreiben müssen, aber die Punkte des Farbkörpers selbst wird man in ihrer gegenseitigen Lage nicht ändern dürfen, die eben das Wesen des psychologischen Farbkörpers ausmacht.

Sind außerdem physikalische oder physiologische Farbkörper in derselben Weise gegeben, sodaß an jedem Punkt des Körpers der zugehörige physikalische Reiz steht, so sind alle diese Farbkörper von selbst auf einander und auf den psychologischen abgebildet, wenn man alle Punkte als zugeordnet betrachtet, bei denen gleiche physikalische Reize stehen.

Eine solche Abbildung des psychologischen auf einen physikalischen Farbkörper schließt zugleich alle denkbaren Erweiterungen des WEBER-FECHNER'schen Gesetzes in sich. D. h. sie enthält alle Beziehungen zwischen den Reizdistanzen und den Empfindungsdistanzen und läßt namentlich die Abhängigkeit der letzteren von den ersteren ablesen, wenn auch die Art der graphischen Darstellung durchaus verschieden ist von der Art, wie das FECHNER'sche Gesetz, das für das Gebiet des Lichtsinns nur einen sehr speciellen Fall der Beziehungen zwischen Reiz und Empfindung behandelt, veranschaulicht zu werden pflegt. Nehmen wir z. B., um dies zu erläutern, an, daß im physikalischen Farbkörper Reize gleicher Qualität durch Punkte auf einer

Geraden abgebildet werden, deren Abstand von einem festen Punkte der physikalischen Intensität proportional ist, und fassen wir eine Reihe von Reizen  $r_1, r_2 \dots r_n$  ins Auge, die eine geometrische Reihe bilden; wir setzen ferner voraus, daß im ganzen Gebiete, dem diese Reihe entnommen ist, für die betreffende Qualität das WEBER'sche Gesetz gelte. Dann müssen wir nach der Forderung b) für den psychologischen Farbenkörper die entsprechende Empfindungsreihe  $E_1, E_2, \dots E_n$  durch eine Punktreihe abbilden, deren benachbarte Individuen von einander constante Abstände haben. Wenn die Reihe der  $E$  überdies geradläufig ist, und wenn mit  $e_\mu - e_\nu$  die Strecke zwischen den Bildern  $P_\mu$  und  $P_\nu$  der Empfindungen  $E_\mu$  und  $E_\nu$  bezeichnet wird<sup>1</sup>, mit  $r_1, r_2, \dots$  nicht nur die Reize selbst, sondern auch die Abstände ihrer Bilder vom Bild des Nullpunkts; so folgt jetzt rein mathematisch durch genau dieselbe Rechnung, die in MEINONG's „Ueber die Bedeutung des WEBER'schen Gesetzes“, § 29 (*diese Zeitschr.* Bd. XI) mitgeteilt ist, daß

$$1. \quad e_\mu - e_\nu = C. \log \frac{r_\mu}{r_\nu},$$

wobei  $C$  eine Constante,  $\mu, \nu$  beliebige Zahlen aus der Reihe 1, 2,  $\dots n$  sind. Die Einwände, die der Verfasser selbst gegen die Ableitung macht, bestehen diesfalls nicht, weil  $e_2 - e_1, e_3 - e_2 \dots$  Strecken sind und also addirt werden können. Die rechte Seite von 1. ist nur von Strecken des physikalischen Farbenkörpers abhängig, die linke ist eine Strecke des psychologischen. Die Beziehung zwischen diesen Strecken, die durch 1. ausgedrückt ist, giebt den eigentlichen Inhalt des FECHNER'schen Gesetzes wieder und läßt erkennen, wie bei einer Reizreihe constanten Abstands die Bilder der Empfindungen nach dem logarithmischen Gesetz immer näher zusammenrücken. Aber eine logarithmische Curve, wie bei den gewöhnlichen graphischen Versinnlichungen, tritt hier nicht auf, weil wir Reize und Empfindungen nicht in einer und derselben Figur abbilden, sondern durch zwei ganz getrennte räumliche Schemata darstellen; auch werden die Empfindungen nicht durch Strecken, sondern durch Punkte abge-

<sup>1</sup> Ein einzelnes Symbol  $e_\nu$  bedeutet sonach die Entfernung des Punktes  $P_\nu$  von einem beliebigen festen Punkte  $P$  der Geraden, auf der alle  $P_\nu$  liegen. Denn bei Aenderung von  $P$  ändern sich die Differenzen der Entfernungen der  $P_\nu$  nicht.



bildet, und erst den Empfindungsdistanzen sind vermöge der Punktdistanzen auch Strecken zugeordnet. Sind beide Schemata, d. h. der physikalische und der psychologische Farbenkörper, einzeln richtig construiert, so wird nun aus obigem Beispiel ersichtlich sein, wieso die erwähnte Abbildung beider aufeinander alle Beziehungen zwischen Reiz und Empfindung darstellen muß. Dabei ist von einer Empfindungsintensität oder gar der Messung einer solchen gar nicht die Rede. Es braucht überhaupt bei Aufstellung des psychologischen Farbenkörpers gar nicht erörtert zu werden, wonach die Farbenempfindungen abgestuft sein können, ob etwa bloß nach Qualität, Intensität und Sättigung, ferner ob und in welchem Umfang diese Bestimmungsstücke sich unabhängig von einander ändern können. Sondern alle dreifach unendlich vielen Farbenempfindungen sind als gleichberechtigte Individuen zu betrachten, deren Anordnung in Form eines Farbenkörpers durch Abstandsrelationen allein bestimmt sein muß<sup>1</sup>, wenigstens sobald gewisse Anfänge der Anordnung schon vorliegen (s. auch S. 229), ähnlich wie, wenn die Lage mindestens dreier Punkte eines festen Körpers bekannt ist, die Lage jedes weiteren Punktes bloß durch Abstände von bekannten Punkten bestimmt werden kann. Deshalb ist zur Aufstellung des psychologischen Farbenkörpers die Kenntniß der Abhängigkeit der Empfindungen von den Reizen principiell gar nicht nothwendig, sondern umgekehrt wäre jene Aufstellung das beste Mittel, diese Abhängigkeit zu finden.

Bei Aufstellung eines psychologischen Farbenkörpers ist zunächst soviel willkürlich, als bei der Orientirung eines starren Körpers im Raum. Denn die Orientirung des Farbenkörpers im Raum ist für die inneren Beziehungen seiner Punkte gleichgültig. Aber auch geometrisch ähnliche (und symmetrische) Farbenkörper sind äquivalent, sodaß 7 willkürliche Parameter vorhanden sind.

---

<sup>1</sup> Nachträglich wird es allerdings eine wichtige Frage sein, welche Linien im psychologischen Farbenkörper etwa den physikalisch bloß nach Intensität abgestuften Reizen entsprechen, überhaupt welche Linien irgendwie ausgezeichneten Linien des einen Farbenkörpers im anderen entsprechen.

## § 7. Ueber die Abbildung eindimensionaler Farbencontinua; ausgezeichnete eindimensionale Continua.

Nach alledem wird man fragen, wie man den psychologischen Farbenkörper finden, beziehungsweise entscheiden kann, ob einer existirt. Im bejahenden Falle wird die Auffindung wohl immer nur so geschehen können, daß man hypothetisch einen Farbenkörper oder gewisse Eigenschaften desselben annimmt und dann prüft, ob er die Bedingungen des psychologischen Farbenkörpers erfüllt.<sup>1</sup> Es ist ja auch sonst in den Naturwissenschaften nicht möglich, eine Gruppe von Naturerscheinungen auf directem Wege in ein Maafsgesetz zu fassen, sondern es können nur bestimmte Hypothesen geprüft werden. Hat man z. B. zu einer großen Zahl von Einfallswinkeln  $\epsilon$  die entsprechenden Brechungswinkel  $\beta$  für den Uebergang des Lichtes von einem Medium in ein anderes gemessen, so giebt es keine Universalformel, in die man die Werthe der Winkel nur einzusetzen brauchte, damit das Brechungsgesetz  $\frac{\sin \epsilon}{\sin \beta} = \text{const.}$  herausspringt; sondern man kann nur dieses versuchsweise angenommene Gesetz durch Experimente bestätigen. Ein classisches Beispiel für diese methodologische Thatsache bildet auch die Auffindung der KEPLER'schen Gesetze. Man wird also keinen directen Weg zur Auffindung des etwaigen psychologischen Farbenkörpers verlangen können, wohl aber läßt sich einiges darüber sagen, wie man einen Farbenkörper daraufhin prüfen kann, ob er psychologisch ist, und der Plan zu einigen nützlichen Voruntersuchungen läßt sich entwerfen:

Aus dem Gesamtgebiet der Farbenempfindungen kann man in mannigfacher Weise eindimensionale Continua herausgreifen, die entweder durch ihre Entstehungsweise oder begrifflich definirt sein können. Unter den ersteren sind jene besonders leicht herzustellen und spielen bei den experimentellen Untersuchungen eine große Rolle, die sich durch Mischung zweier Farben (auf dem Farbenkreisel oder aus Spectralfarben) ergeben. Wir wollen sie der Einfachheit halber Mischcontinua nennen.

---

<sup>1</sup> Im Fall der Nichtexistenz könnte die Entscheidung vielleicht einfacher erfolgen; s. z. B. den Satz am Schluss dieses §.



Damit durch zwei Spectralfarben nur ein eindimensionales Mischcontinuum definirt sei, muß man jede aus ihnen erhaltbare Qualität noch ihrer Intensität nach passend individualisiren, am besten dadurch, daß man verlangt, die Summe der physikalischen Intensitäten soll constant sein, wobei jede einzelne Intensität mit einem willkürlichen (aber immer mit demselben) Maas gemessen werden kann. Wenn man die Spectralfarben durch spaltförmige Oeffnungen sendet, bevor man sie vereinigt, so kann man (was auf dasselbe hinauskommt) vorschreiben, daß die Summe der Spaltbreiten constant sein soll.<sup>1</sup>

Unter den begrifflich definirten Continuen sind zunächst die kürzesten Linien hervorzuheben. Man kann ihre Definition nicht unmittelbar aus der Geometrie ins Farbencontinuum übertragen, weil man hier keinen Streckenbegriff und daher auch keinen Längenbegriff für eine Linie hat, sondern man muß die Definition so fassen, daß nur Vergleichung von Distanzen in Farbenpaaren ausgeführt wird (§ 1). Aber die Modification liegt nahe: Wenn wir zwischen zwei Farben  $F_0$  und  $F_n$  die Reihe  $F_1, F_2, \dots F_{n-1}$  so einschalten, daß die Distanzen  $F_0 F_1, F_1 F_2, \dots F_{n-1} F_n$  als gleich beurtheilt werden, so liegen die Farben  $F_0, F_1, \dots F_n$  auf einer kürzesten Farbenlinie, wenn bei gleicher Schrittzahl ( $n$ ) in jeder anderen  $F_0$  und  $F_n$  verbindenden Reihe  $F'_1, F'_2, \dots F'_{n-1}$  die (wieder einander gleichen) Distanzen  $F_0 F'_1, F'_1 F'_2, \dots F'_{n-1} F_n$  größer sind, als in der ersten Reihe. Es könnte nun scheinen, daß hier ebensowenig eine Einschränkung auf kleine Schritte<sup>2</sup> nothwendig ist, als überhaupt die Methode

---

<sup>1</sup> Man könnte auch Mischcontinua betrachten, bei denen die Intensität der einen Componente constant bleibt, die der anderen alle möglichen Werthe annimmt; wir bleiben aber immer bei den Annahmen des Textes. Analog kann man durch drei Spectralfarben ein zweidimensionales Mischcontinuum definiren, wenn man die Bedingung hinzufügt, daß die Summe der Intensitäten constant sein soll. (Vgl. das Verfahren bei der Aufstellung einer MAXWELL'schen Farbentafel.) Auch eine einzelne Farbe in allen möglichen Intensitäten kann als eindimensionales Mischcontinuum aufgefaßt werden. Denn wenn man durch zwei Spalten dieselbe Spectralfarbe  $S$ , aber mit verschiedenen Intensitäten pro Flächeneinheit des Spaltes schickt, so erhält man nach Vereinigung der beiden Componenten wieder die Farbe  $S$ , und zwar in allen zwischenliegenden Intensitäten, wenn man die Spaltbreiten so ändert, daß ihre Summe constant bleibt.

<sup>2</sup> Man hat in der Psychophysik häufig die „eben merklichen“ Unterschiede bevorzugt und es als selbstverständlich betrachtet, daß sie ein

der übermerklichen Distanzen auf kleine Distanzen beschränkt ist. Allein man ist nicht sicher, ob die Lage der kürzesten Linie zwischen zwei festen Farben bei dieser Allgemeinheit der Definition nicht noch von der Anzahl der Zwischenglieder abhängt. In der That würde die Voraussetzung der Unabhängigkeit eine specielle Voraussetzung über die Natur der Farbenmannigfaltigkeit involviren.<sup>1</sup> Wir beschränken daher die Distanzen, von denen in der Definition die Rede ist, auf hinreichend kleine, mit dem Bewußtsein, auch so bloß ein Compromiß zwischen den Anforderungen der Strenge und der Verwendbarkeit der Definition geschlossen zu haben. Die der Geometrie analogen kürzesten Linien würde man in einer beliebigen (nicht ebenen) Mannigfaltigkeit erst erhalten, wenn man die verwendete Distanz gegen Null limitiren läßt.

Man begegnet nun in der Literatur der Annahme, daß kürzeste Farbenlinien durch Gerade abgebildet werden müßten, und daß dann selbstverständlich auch alle Analogien, die aus dieser Annahme folgen, stichhaltig seien. Jedoch ist zunächst die allgemeinere Frage, ob für ein beliebig vorgegebenes eindimensionales Farbencontinuum die Abbildung durch eine Gerade den Anforderungen eines psychologischen Farbenkörpers nicht widerspricht, auf folgende Weise einer experimentellen Prüfung fähig: Man hebe aus dem Continuum eine Reihe von Farben heraus, von denen jede von der folgenden gleich weit absteht (man bilde eine „Reihe constanten Abstands“). Die Farben seien mit den Nummern

$$1, 2, 3, \dots n$$

---

Specialfall der „gleich merklichen“ seien. S. jedoch MEINONG, Ueber die Bedeutung des WEBER'schen Ges. (*diese Zeitschr.* Bd. XI), § 11. Wir vermeiden daher die Verwendung ebenmerklicher Distanzen.

<sup>1</sup> Die geometrische Analogie, welche dies klar macht, ist folgende: Wenn man auf einer krummen Fläche von einem Punkte  $P_0$  zu einem anderen  $P_n$  mittels der Zwischenpunkte  $P_1, P_2, \dots P_{n-1}$  so hindurchgehen will, daß die einander gleichen Distanzen  $P_0 P_1, P_1 P_2, \dots P_{n-1} P_n$  (im Raume, nicht auf der Fläche gemessen) möglichst klein sind, so werden diese Zwischenpunkte i. A. nicht auf der kürzesten (geodätischen) Linie der Fläche zwischen den zwei gegebenen Endpunkten liegen. Erst wenn man die Distanz zweier benachbarten Zwischenpunkte (bei gleichzeitiger Vermehrung derselben) gegen Null limitiren läßt, rücken ihre Grenzlagen in die kürzeste Linie ein.



bezeichnet. Nimmt man nun von dieser Reihe nur jedes zweite Glied, also die Farben

1, 3, 5, . . . . .

oder jedes dritte Glied, also

1, 4, 7, . . . . , u. s. w.

(wobei man mit einer beliebigen Farbe beginnen kann), so ist es (selbst für die Reihe Weiß-Grau-Schwarz) durchaus nicht a priori evident, daß auch diese neuen Reihen, die „Theilreihen“, Reihen constanten Abstands sein müssen.<sup>1</sup> Wäre es nicht der Fall, so wäre eine Gerade zur Abbildung des betreffenden Continuum ungeeignet (§ 1), weil die Gerade eben die analoge Eigenschaft besitzt. Aber auch die Kreislinie besitzt sie; dies liegt daran, daß ihr (ebenso wie der Geraden, welche die Krümmung Null hat) ein constantes Krümmungsmaafs zukommt. Endlich hat noch die Schraubenlinie dieselbe Eigenschaft.<sup>2</sup>

Wenn dagegen z. B. in der Theilreihe 1, 3, 5, . . . die Abstände der Empfindungen abnehmen würden, während 1, 2, 3, 4, . . . selbst eine Reihe constanten Abstands ist, so wäre eine Curve (Fig. 5), deren Krümmung in der Richtung 1, 2, 3, . . .

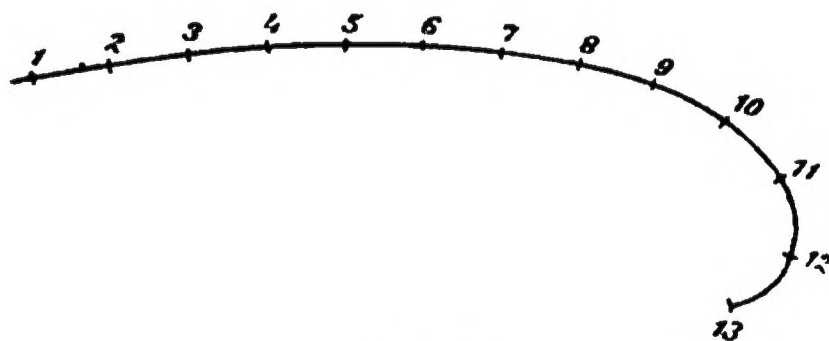


Fig. 5.

<sup>1</sup> Meines Wissens hat zuerst LUDWIG LANGE (Ueber das Maafsprincip der Psychophysik und den Algorithmus der Empfindungsgrößen, Wundt's *Philos. Studien*, Bd. X) ein ähnliches Bedenken geäußert: Ist das für die Gröfse „des Quotienten  $\frac{e_3 - e_2}{e_2 - e_1}$  zu gewinnende Resultat unabhängig davon, was für eine fundamentale Sprossenweite man anwendet?“ Die 1894 veröffentlichte Abhandlung ist (wie der Verfasser angiebt) 1886 verfaßt. Ich habe (unabhängig von LANGE) Nov. 1887 in der unter Leitung Prof. MEINONG's stehenden philos. Societät der Universität Graz die hier gegebene Methode zur Prüfung eindimensionaler Continua skizzirt, die noch allgemeineren Fragestellungen als dem Einwand LANGE's gerecht wird.

<sup>2</sup> Bei Raumcurven unterscheidet man eine „erste“ und eine „zweite“ Krümmung (Torsion); die Schraubenlinie ist die einzige Raumcurve, deren beide Krümmungen constant sind.

in passender Weise zunimmt, und auf der die Punkte 1, 2, 3, 4, . . . ebenfalls mit constanter Zirkelöffnung abgetragen sind, zur Abbildung des Empfindungscontinums vielleicht geeignet. Wir können also den Satz aussprechen: Im psychologischen Farbenkörper kann ein eindimensionales Continuum  $C$  durch eine Curve constanter Krümmung (Gerade, Kreis, Schraubenlinie) nur abgebildet werden, wenn von jeder Reihe constanten Abstands, die aus  $C$  entnommen ist, auch alle Theilreihen Reihen gleichen Abstands sind. Es ist, was für die Frage des psychologischen Farbenkörpers wichtig wäre, noch nicht untersucht worden, welche ausgezeichneten Continua diese Bedingung erfüllen; alle die es thun, wollen wir Farbencontinua constanter Krümmung nennen.

Wir haben nun schon viererlei durch irgend eine Eigenschaft ausgezeichnete eindimensionale Farbencontinua kennen gelernt:

1. Die kürzesten Linien.
2. Die Linien constanter Krümmung.
3. Die Linien constanter Richtung.
4. Die Mischcontinua.

Die Eigenschaft, durch welche diese vier Arten von Linien definirt wurden, sind begrifflich von einander vollkommen unabhängig. Die Möglichkeit ihrer thatsächlichen Verschiedenheit wollen wir zunächst an einer geometrischen Analogie erläutern (bei der freilich ein Analogon der Mischcontinua nicht auftritt). Wir besitzen nämlich auch in unserem Raume (allerdings nur zweidimensionale) Continua, bei denen diese Linien nicht nur der Definition nach, sondern auch thatsächlich auseinander treten: Die kürzesten Linien auf einer beliebigen krummen Fläche haben (von Specialfällen abgesehen) keine constante Krümmung, sind noch weniger gerade. Auf jeder krummen Fläche giebt es kürzeste Linien, aber nicht auf jeder solche constanter Krümmung.

Denken wir uns einen Farbenblinden, z. B. einen total Roth-Grün-Blinden, so ist dessen Farbenmannigfaltigkeit nur zweidimensional. Nehmen wir an, es sei für ihn nur möglich, durch Anordnung der Farben auf einer krummen Fläche die Bedingungen des psychologischen Farbenkörpers zu erfüllen. Weil nun der Farbenblinde bei der Construction seiner kürzesten



Farbenlinien nicht aus dieser Fläche herauskann, so kommt als Kürzeste zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  seiner Farbentafel nur die kürzeste Linie auf der krummen Fläche zwischen  $A$  und  $B$  in Betracht, wenn auch (nach der Voraussetzung über die Grundeigenschaften eines zutreffenden psychologischen Farbkörpers, § 1, Forderung b)) die gerade Verbindungsstrecke  $AB$  als Maass für die Verschiedenheit der Farbenempfindungen  $A$  und  $B$  zu betrachten ist. Auch sieht man, daß hier die Farbentafeln, die durch Abwicklung oder Biegung aus einander hervorgehen, nicht äquivalent sind.

So wenig nun diese krumme Farbentafel in einer Ebene untergebracht werden kann, obwohl beide zweidimensional sind, ebensowenig kann die Farbenmannigfaltigkeit eines Farbtüchtigen, obgleich sie wie unser Raum dreidimensional ist, in diesem untergebracht oder auf ihn nach den Grundsätzen für den psychologischen Farbkörper abgebildet werden, falls sie nicht selbst schon „eben“ ist, welcher Ausdruck für Farbenmannigfaltigkeiten in Anlehnung an die den Mathematikern geläufigen Begriffe im § 9 definirt werden wird. Wir verweilen noch einen Augenblick bei den ausgezeichneten Linien:

1. und 2. (S. 258) lassen sich in jedem Continuum, in welchem wir Distanzvergleiche vornehmen können, 3. in jedem Continuum, in dem wir Richtungsvergleiche vornehmen können, so wie hier definiren; aber 2. und 3. brauchen nicht in jedem solchen Continuum wirklich vorhanden zu sein. Fürs Farbencontinuum steht nur die Existenz von 1. und 4. von vornherein fest. Aber auch angenommen, daß alle vier Arten hier wirklich vorhanden sind, ist nicht evident, daß 1., 3. und 4. identisch und unter den 2. enthalten sind. Bevor dies nicht empirisch festgestellt ist, sind sie sorgfältig auseinander zu halten, was aber in der Literatur nicht geschieht.<sup>1</sup> Ob eine Linie zu 2.

---

<sup>1</sup> So definirt MÜLLER (Zur Psychophysik d. Gesichtsempf. 34) die „psychische Qualitätenreihe“ durch die „geradläufige und stetige Aenderung.“ Er versteht also darunter der Definition nach die Linien 3., sagt aber S. 35: „Die Unterschiede, welche zwischen den aufeinanderfolgenden Gliedern einer Empfindungsreihe bestehen, sind sämtlich von gleicher Richtung, wenn alle Glieder der Reihe in derselben Reihenfolge in einer Empfindungsreihe vorkommen, die man erhalten würde, wenn man das Anfangsglied der Reihe auf einem kürzesten Wege in stetiger Weise in das Endglied überführte.“ Auch HERRING meint (Zur Lehre vom Lichtsinne, S. 59), es sei

oder 3. gehört, kann ohne aus ihr heraus zu gehen entschieden werden, bei 3. freilich nur durch die Berufung auf die unmittelbare Schätzung (die Richtung habe sich nicht geändert), die in höherem Maasse unsicher sein wird, als die Prüfungsmethode bei 2., was aber für die begriffliche Seite der Sache, die wir hier im Auge haben, keinen principiellen Unterschied macht. Dagegen erfordert die Entscheidung, ob eine Linie zu 1. gehört, einen Vergleich mit Nachbarlinien.

Bezüglich des Continuum's Schwarz-Grau-Weiß kann übrigens die Grundeigenschaft, daß Theilreihen einer Reihe constanten Abstandes wieder Reihen constanten Abstandes sind, in dem Umfange als empirisch nachgewiesen gelten, als das WEBER'sche Gesetz gilt. Denn die voraussetzungsloseste Form desselben sagt, daß die Empfindungsdistanzen, die zu den Reizpaaren  $r_1, r_2$  und  $r_3, r_4$  gehören, als gleich geschätzt werden, wenn die Beziehung

$$\frac{r_2 - r_1}{r_1} = \frac{r_4 - r_3}{r_3}$$

besteht, aus der auch folgt

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_4}{r_3}.$$

Nennen wir  $q$  den gemeinsamen Werth der letzten beiden Verhältnisse, so entsteht, wenn man von einer geometrischen Progression mit dem Exponenten  $q$  jedes zweite, oder jedes dritte, . . . Glied heraushebt, wieder eine geometrische Progression (mit dem Exponenten  $q^2$ , oder  $q^3$ , . . .). Auch in jeder Theilreihe der geometrischen Progression wird also das Verhältniß benachbarter Glieder constant sein, was wieder die Constanz der Empfindungsdistanz zur Folge hat. Aber dieser Beweis aus dem WEBER'schen Gesetz ist ein Umweg, weil er eine Beziehung zwischen Reiz und Empfindung heranzieht, während die Frage nach der Constanz der Krümmung eines Empfindungscontinuum's eine Angelegenheit ist, die sich nur mit den inneren Beziehungen der Empfindungen selbst befaßt.

Aus dem WEBER'schen Gesetz folgt bloß die Constanz des Krümmungsmaasses der betreffenden Reihe, aber nicht, daß sich

---

einleuchtend, „daß zwischen dem mittleren Grau und dem reinsten Weiß genau ebensoviel verschiedene Empfindungsqualitäten liegen müssen, wie zwischen eben demselben Grau und dem reinsten Schwarz.“



die Paare benachbarter Empfindungen „in gleicher Richtung“ aneinanderschließen. Hierin besteht ein neues Bedenken gegen die Ableitung der logarithmischen Maafsformel aus dem WEBER'schen Gesetz (abgesehen von den sonstigen Bedenken älterer und jüngster Zeit<sup>1</sup>). Der Einwand, man wisse nicht, ob die einer physikalischen Intensitätsänderung entsprechende Empfindungsänderung auch als Intensitätsänderung der Empfindung zu betrachten sei, ist zwar diesem verwandt, trifft aber die Sachlage nicht so präcis. Denn eine sog. „reine Intensitätsänderung“ wäre, soviel unseren Einwand betrifft, gar nicht nothwendig, sondern nur eine geradläufige Aenderung, nach einer beliebigen Richtung, die nicht irgendwie ausgezeichnet zu sein braucht.

Schliesslich möge ein Satz noch ausdrücklich ausgesprochen werden, der nach dem Vorhergehenden selbstverständlich ist: Findet man eine kürzeste Farbenlinie, die keine constante Krümmung hat, so ist ein psychologischer Farbenkörper unmöglich.

#### § 8. Ueber surrogative Messung von Farbedistanzen.

Wir haben immer festgehalten, daß im psychologischen Farbenkörper zwei Empfindungsdistanzen, die gleich erscheinen, durch zwei Punktpaare gleicher Distanz abzubilden sind, aus dem einfachen Grunde, weil bei dieser Art der Abbildung dafür gesorgt ist, daß den Relationsgliedern (Fundamenten), die ursprünglich verglichen werden (den Inhalten der Farbenempfindungen) Raumpunkte so substituirt werden, daß etwaige Urtheile über Distanzgleichheiten oder -verschiedenheiten bei Substitution der neuen Fundamente unverändert erhalten bleiben, und so die Farbedistanzen durch die anschaulicheren Raumdistanzen ersetzt werden. Mit Berufung auf diese Absicht bei der Abbildung könnte man die Frage, ob Farbedistanzen, die als gleich beurtheilt werden, auch wirklich gleich sind, und ob Farbedistanzen überhaupt gemessen werden können, von vornherein als für unser Thema gegenstandslos ablehnen. Wir wollen trotzdem dieser Angelegenheit noch etwas näher treten:

---

<sup>1</sup> S. hierüber MEINONG, „Ueber d. Bedeutung des WEBER'schen Gesetzes“, (*diese Zeitschr.* Bd. XI), 5. Abschn.

Anfangs setzte sich die Psychophysik das Ziel, die Intensität einer einzelnen Empfindung zu messen, indem man sie vom Nullpunkt aus durch eine bestimmte Zahl gleicher Schritte erreichbar dachte (die wirklichen Formulirungen waren noch viel unvorsichtiger). Wir übergehen die vielen Discussionen der letzten Jahrzehnte über die Frage psychischer Messungen und berufen uns gleich auf eine der jüngsten und tiefgehendsten Untersuchungen hierüber, nämlich MEINONG's „Ueber die Bedeutung des WEBER'schen Gesetzes“ (*diese Zeitschr.* Bd. XI), der als eigentlichen Sinn der logarithmischen Maafsformel nach eingehender Kritik ihrer Grundlagen erkannt hat, daß sie als Maass der Verschiedenheit zweier Empfindungen zu betrachten sei. Im Gebiete des Farbensinnes wird man ohnehin weniger in Versuchung kommen, nach einem Maass einer einzelnen Empfindung zu fragen, da es hier einen Nullpunkt der Empfindungen nicht giebt<sup>1</sup> (vgl. HERING, Zur Lehre vom Lichtsinn, bes. § 21). Auch der psychologische Farbenkörper giebt zu einer solchen Frage keinen Anlaß, ebensowenig wie man nach einem Maass für einen einzelnen Raumpunkt fragen kann (MEINONG, a. a. O. S. 118 des Sonderabdrucks). Erst bei Farbendistanzen beginnt das Problem. Wir haben uns bisher bei zwei solchen Distanzen nur das Urtheil zugemuthet, die eine sei „gleich, gröfser oder kleiner“ als die andere; es fragt sich, ob man in irgend einem exacten Sinn die eine Distanz auch als ein Vielfaches der anderen betrachten und etwa so die erste durch die zweite messen kann. Da die Farbendistanzen zu den nicht theilbaren Gröfsen gehören, so kann eine solche Messung von vornherein nur surrogativ sein (a. a. O. § 15). Nun ist im psychologischen Farbenkörper jeder Farbe ein Punkt, also jeder Farbedistanz eine Punktdistanz, somit auch eine Strecke zugeordnet. Ich sehe nun kein Hinderniß, diese Strecken als Messungssurrogate zu betrachten, also Farbendistanzen dadurch zu messen, daß man die im psychologischen Farbenkörper zugeordneten Punktdistanzen durch Strecken mißt. Dabei kann die einem beliebigen Farbenpaar zugeordnete Strecke als Einheit genommen werden. Obwohl bei Aufstellung des psychologischen Farbenkörpers nur Distanz-

---

<sup>1</sup> Deshalb scheint mir MÜLLER's Definition der Intensität der Empfindungen (Zur Psychophysik der Gesichtsempf. S. 25) gerade für den Lichtsinn, für den sie zunächst verwerthet werden sollte, illusorisch.



gleichheiten verwendet wurden, kommen also doch die reicheren geometrischen Beziehungen des Raumes nachträglich auch dem Farbencontinuum zugute, wie das überhaupt bei surrogativen Messungen der Fall ist (a. a. O. § 16).

Es mag noch hervorgehoben werden, daß bei dieser Messung der Farbendistanzen, wie aus der Definition des psychologischen Farbenkörpers hervorgeht, weder von der „Zahl der ebenmerklichen Unterschiede“, noch von „Helligkeit, Intensität oder Qualität der Farbenempfindungen“, noch von einem Nullpunkt der Empfindungen die Rede ist; ebensowenig wurde das WEBER'sche Gesetz (oder sonst eine Beziehung zwischen Reiz und Empfindung) verwendet; es könnte auch höchstens in ganz speciellen Richtungen im Farbencontinuum (den reinen Intensitätsänderungen im physikalischen Sinn) in Betracht kommen. Vielmehr haben wir in diesem Messungsverfahren wirklich eine „Bestimmung der VerschiedenheitsgröÙe auf Grund der distanten Objecte selbst“ (a. a. O. § 31, S. 141 des Sonderabdrucks) vor uns, während dies in dem von MEINONG untersuchten Gebiete nicht möglich war; das Charakteristische dieser Bestimmung kann eben bei eindimensionalen Continuen noch nicht hervortreten.

Wir haben die Messung der Farbendistanzen der Anschaulichkeit halber an den psychologischen Farbenkörper geknüpft; sie hängt aber nicht an der Existenz eines solchen, sondern, wie der nächste Paragraph lehren wird, bloß an der Existenz eines „arithmetischen Farbenschemas“, wäre freilich erst mit der wirklichen Aufstellung eines solchen vollzogen. Aber auch sonst ist ja mit der Definition eines Maafses das Verfahren der Messung nicht immer mitgegeben.

### § 9. Das arithmetische Farbenschema.

Wir wollen, um von geometrischen Betrachtungen, namentlich von der Beschränktheit der Dimensionen unseres Raumes, unabhängig zu werden, den analytischen Ausdruck der etwaigen krummen Fläche, welche die psychologische Farbentafel eines Farbenblinden (S. 258), oder einen partiellen Farbenkörper eines Farbentüchtigen bildet, aufgesucht denken; dann können wir die Fläche selbst zu den weiteren Begriffsbildungen entbehren und uns nur an die analytischen Eigenschaften des Ausdrucks halten.

Als hinreichend allgemeine Darstellung einer Fläche  $F$  kann ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1. \quad x &= f(u, v) \\ y &= g(u, v) \\ z &= h(u, v) \end{aligned}$$

gelten, wobei  $x, y, z$  die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes  $P$ ,  $u$  und  $v$  zwei unabhängige Veränderliche sind. Ändert sich z. B.  $u$  allein, so beschreibt  $P$  eine Raumcurve, die ihrer Lage und Form nach vom Parameter  $v$  abhängt und sich continuirlich deformiren wird, wenn sich  $v$  stetig ändert; hierbei beschreibt sie die Fläche  $F$ .<sup>1</sup> Durch Elimination von  $u, v$  aus den 3 Gleichungen 1. entsteht eine Gleichung

$$2. \quad F(x, y, z) = 0,$$

die gewöhnlich „die Gleichung der Fläche“ schlechtweg heisst.

Wir denken uns nun  $u$  und  $v$  als Maasszahlen quantitativ bestimmbarer physikalischer Vorgänge, durch deren Aenderung ein Reizcontinuum entsteht, welches das abzubildende Farbencontinuum hervorruft. Indem so jedem Werthepaar  $u, v$  (innerhalb gewisser Grenzen) eine Farbenempfindung, aber auch vermöge 1. ein Punkt des Raumes entspricht, sind auch den aus  $u, v$  erhaltbaren Farbenempfindungen Punkte des Raumes zugeordnet, die auf einer i. A. krummen Fläche liegen werden. Soll nun diese eine psychologische Farbentafel sein, so muß sie vor Allem folgende Eigenschaft haben: Wenn wir zwei Farbenpaare  $F_1, F_2$  und  $F_3, F_4$  so auswählen, daß die Distanzen  $F_1 F_2$  und  $F_3 F_4$  gleich befunden werden, so müssen auch die Distanzen  $P_1 P_2$  und  $P_3 P_4$  zwischen den entsprechenden Punktepaaren gleich sein, d. h. arithmetisch ausgedrückt: wenn  $P_m$  (das Bild von  $F_m$ ) die Coordinaten  $x_m, y_m, z_m$  hat, muß sein:

$$\begin{aligned} 3. \quad & \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + (z_4 - z_3)^2}. \end{aligned}$$

Indem wir die Wurzelzeichen beiderseits weglassen dürfen, können wir sagen: Sollen die Gleichungen 1. eine psycho-

<sup>1</sup> S. irgend ein Lehrbuch der Flächentheorie, z. B. BIANCHI-LUKAT, Vorl. über Differentialgeom., § 1 und 32; oder die ausführlichere Darstellung von JOACHIMSTHAL, Anwendg. d. Differential- u. Integr.-Rechng. etc., § 22 ff.; oder KNOBLAUCH, Einl. in d. allg. Th. d. krummen Fl. § 1.



logische Farbentafel darstellen, so müssen die Functionen  $f, g, h$  jedenfalls so gewählt sein, daß für alle Farbenpaare  $F_i, F_k$ , für welche die Distanz constant ist, auch die Function

$$(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2 = D$$

einen constanten Werth hat.

Soll die durch 1. dargestellte Fläche  $F$  eine psychologische Farbentafel sein, so verlangen wir ausserdem die Erfüllung der Bedingung c) (S. 228). Wir wollen jedoch ohne Rücksicht darauf, ob diese Bedingung erfüllt ist, alle Werthetripel  $x, y, z$ , die durch 1. den Farben zugeordnet sind, in ihrer Gesammtheit ein arithmetisches Farbenschema nennen, wenn nur die andere ebenerwähnte Bedingung, die der Bedingung b) auf S. 228 entspricht, erfüllt ist. Das Wesentliche des arithmetischen Farbenschemas besteht nur darin, daß jeder Farbe ein Werthetripel  $x, y, z$  so zugeordnet wird, daß die Function  $D$  je zweier solcher Werthetripel zugleich mit den Farbendistanzen constant ist, aber nicht darin, daß diese Zuordnung durch die Werthe  $u, v$  vermittelt wird. Hätte man irgend woher eine Tabelle, worin jeder Farbe unmittelbar ein Werthetripel  $x, y, z$  zugeordnet ist (auch die zugehörige Fläche kann jetzt entbehrt werden), so könnte man auch unmittelbar prüfen, ob diese Tabelle die Definition des arithmetischen Farbenschemas erfüllt, wobei von Reizen und Werthen  $u, v$  gar nicht die Rede wäre. Die Gleichungen 1. sind nur eine mögliche Form der Zuordnung zwischen den Werthetripeln und den Farben, die aus zweierlei Gründen gewählt wurde: Erstens wird aus praktischen Gründen die Vermittelung durch die Reize nicht zu vermeiden sein (§ 6), zweitens lassen sich bei dieser Form der Zuordnung die arithmetischen Beziehungen zwischen den Werthetripeln, überhaupt die Eigenschaften des arithmetischen Farbenschemas aus 1. ebenso herleiten, wie das analoge für die Beziehungen zwischen den Flächenpunkten der Fall ist, falls 1. eine Fläche bedeuten. Namentlich sieht man aus 1. auf den ersten Blick, von wieviel unabhängigen Veränderlichen das untersuchte Farbencontinuum abhängt. Die Functionen  $f, g, h$  sind für eine gegebene Fläche (BIANCHI-LUKAT, § 32) durchaus nicht eindeutig bestimmt (man kann statt  $u$  und  $v$  je eine beliebige Function dieser Gröfsen einsetzen; ausserdem ist die Lage der Fläche gegen das Coordinaten-

system unwesentlich); endlich kann das Reizcontinuum  $u, v$  eventuell noch sehr verschieden<sup>1</sup>, jedoch optisch äquivalent, gewählt werden. Aus allen diesen mannigfachen Gründen ist auch für ein arithmetisches Farbenschema die Form der Functionen  $f, g, h$  nicht als wesentlich zu betrachten; analoges gilt für die folgenden Verallgemeinerungen.

Die Fläche  $F$  wird nur dann eine Ebene  $E$  sein, wenn die Elimination von  $u$  und  $v$  aus 1. auf eine lineare Gleichung führt. In diesem Fall hätte man aber das Coordinatensystem so wählen können, daß  $E$  parallel zu einer Coordinatenebene oder selbst eine solche wäre; dann wären nurmehr zwei Zahlen jedes Werthetripels für dasselbe charakteristisch, denn die dritte wäre constant und fiel auch aus 3. heraus. D. h. es wäre von vornherein einfacher gewesen, bloß Werthepaare statt Werthetripel den Farben zuzuordnen, um ein arithmetisches Farbenschema zu bilden. Dies ist, da die entsprechende Farbentafel eben ist, fast selbstverständlich, aber es wurde ausführlicher erörtert, um die Analogie mit dem folgenden (S. 269) deutlich zu machen.

Die Definition des arithmetischen Farbenschemas kann, wenn man von der geometrischen Deutung der Werthetripel  $x, y, z$  als Coordinaten absieht, rein arithmetisch gefaßt werden, wodurch der Name gerechtfertigt ist. Dies ist auch der Grund dafür, daß sie nach zwei Richtungen erweitert werden kann: Erstens kann die Zahl der unabhängigen Veränderlichen  $u, v$ , zweitens die der abhängigen  $x, y, z$  vermehrt werden. In ersterer Beziehung brauchen wir nicht über die Zahl 3 hinauszugehen, da wir schon wissen, daß die Farben eine dreifache Mannigfaltigkeit bilden, die auch durch eine bloß dreifache Reizmannigfaltigkeit hervorgerufen werden kann.<sup>2</sup> In letzterer Beziehung ist, wenigstens a priori, keine Beschränkung auferlegt. Hat doch MEINONG beim Versuche, die Verschiedenheitsrelationen schon eines eindimensionalen Continuum graphisch darzustellen, in einer ähnlichen Angelegenheit gefunden, daß die Dimension des Raumes, in welchem die betreffende Curve unterzubringen wäre, mit der

---

<sup>1</sup> Besonders gilt dies für den Fall dreier unabhängiger Veränderlichen  $u, v, w$ , zu dem wir sogleich übergehen werden. (S. hierüber auch § 4.)

<sup>2</sup> D. h. der einzelne Reiz kann darin durch 3 Zahlen  $u, v, w$ , bestimmt werden (wobei auch negative Werthe von  $u, v, w$  zuzulassen sind, s. die Erörterungen über den physikalischen Farbenkörper in § 4).



Zahl der herangezogenen Relationsglieder wächst (a. a. O. S. 113 des Sonderabdr.).

Wenn z. B. für den partiell Farbenblinden keine psychologische Farbentafel (auch keine krumme) existirt, so wäre es immer noch denkbar, daß durch vier Gleichungen

$$\begin{aligned} 4. \quad x_1 &= f_1(u, v), & x_3 &= f_3(u, v), \\ x_2 &= f_2(u, v), & x_4 &= f_4(u, v) \end{aligned}$$

jeder Farbenempfindung mit dem Reiz  $u, v$  ein Zahlenquadrupel  $x_1, x_2, x_3, x_4$  derart zugeordnet würde, daß jedesmal wenn die Farbendistanz  $FF'$  (verglichen mit einer anderen festen) eine constante GröÙe hat, auch die Zahl

$$(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + (x'_3 - x_3)^2 + (x'_4 - x_4)^2$$

einen constanten Werth  $D$  hat, wobei das Quadrupel der  $x$  der Farbe  $F$ , das der  $x'$  der Farbe  $F'$  zugeordnet ist. Man würde in diesem Falle sagen, das (noch immer zweidimensionale) Farbencontinuum sei in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit ausgebreitet.<sup>1</sup> Läßt man nämlich  $u, v$  alle möglichen Werthe durchlaufen, so werden die Veränderlichen  $x_1, \dots, x_4$  nicht unabhängig voneinander alle möglichen Werthecominationen annehmen,

---

<sup>1</sup> Die sämtlichen Werthequadrupel  $x_1, x_2, x_3, x_4$  (diese Größen als unabhängige Veränderliche betrachtet) bilden eine „vierfach unendliche“ oder „vierdimensionale“ oder kurz „vierfache“ Mannigfaltigkeit  $M'$ , die aus 4. erhaltbaren Quadrupel jedoch nur eine zweifache  $M$ . Weil nun jedes Quadrupel von  $M$  auch zu  $M'$  gehört (aber nicht umgekehrt), sagt man,  $M$  sei in  $M'$  enthalten oder ausgebreitet (analog wie eine Curve auf einer Fläche ausgebreitet oder in derselben enthalten sein kann). Diese Redeweise wird von den arithmetischen Mannigfaltigkeiten (nach Analogie der bei den Mathematikern üblichen Terminologie) auf die Farbenmannigfaltigkeiten übertragen, obwohl hier nur der Mannigfaltigkeit  $M$ , nicht aber  $M'$ , etwas Reales entspricht. Man darf also dabei nicht an eine Erweiterung der thatsächlichen Farbenmannigfaltigkeit denken, was gar keinen Sinn hätte, sondern die Behauptung, eine Farbenmannigfaltigkeit sei in einer vierdimensionalen ausgebreitet, ist nur eine kurze Ausdrucksweise für die Distanzbeziehungen zwischen ihren Individuen. Diese Beziehungen können eben derartig sein, daß sie durch keine Abbildung auf irgend einen Theil eines vorgegebenen dreidimensionalen Continuum wiedergegeben werden können; und weil unser Raum bloß dreidimensional ist, reichen die arithmetischen Farbenschemata, bei denen der Dimensionszahl keine Grenze gesetzt ist, weiter als die psychologischen Farbentafeln, aber auch deshalb, weil die Bedingung c) des psychologischen Farbenkörpers (§ 1) fallen gelassen wurde.





faltigkeit  $M$  bilden, ein „arithmetisches Farbenschema“, und wir sagen das Farbencontinuum sei mit Erhaltung der Distanzgleichheiten auf die in einer  $n$ -fachen liegende 3-fache Mannigfaltigkeit  $M$  abgebildet.  $\sqrt{D}$  kann als surrogatives Maafs der Farbendistanzen betrachtet werden.

Die Gleichungen von  $M$  erhält man in anderer Form, wenn man  $u, v, w$  aus je 4 der Gl. 6. eliminirt, wodurch man Gleichungen der Form

$$8. \quad F\lambda (x_1, x_2, \dots x_n) = 0$$

erhält.  $n - 3$  dieser  $\binom{n}{4}$  Gleichungen sind von einander unabhängig und können, wenn sie  $M$  „rein“ darstellen, geradeso wie die Gl. 6. als die Gleichungen von  $M$  betrachtet werden. Jedenfalls definiren  $n - 3$  unabhängige Gleichungen der Form 8. eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit, die im  $n$ -fach ausgedehnten Bereich der unbeschränkt gedachten Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots x_n$  liegt.

Eben nennt man  $M$  nur dann, wenn alle  $n - 3$  Gleichungen linear sind, also die Form haben

$$9. \quad \sum_{\kappa=1}^n c_{\kappa\lambda} x_{\kappa} = a_{\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots n - 3).$$

Alsdann kann man durch eine lineare Transformation (Analogon der Coordinatentransformation) Gruppen von  $n$  anderen Zahlen  $y$  an Stelle der  $x$  so einführen, daß  $n - 3$  von den neuen Zahlen („Coordinaten“) constant werden, und blos 3 sich bei Aenderung der  $u, v, w$  ändern. Dies erreicht man, indem man die  $n - 3$  Gleichungen 9. oder lineare Combinationen aus ihnen unter die Transformationsgleichungen aufnimmt. Das letztere wird zugleich ermöglichen, die Substitution „orthogonal“ (s. BALTZER, Determinanten, § 14) zu machen, was nothwendig ist, damit der Ausdruck 7., auf den es uns ankommt, invariant bleibt. Dann wird man die inneren Beziehungen der Mannigfaltigkeit  $M$  einfacher studiren können, wenn man an Stelle der Gl. 6. setzt:

$$\begin{aligned} 10. \quad y_1 &= g_1 (u, v, w) \\ y_2 &= g_2 (u, v, w) \\ y_3 &= g_3 (u, v, w) \\ y_4 &= \text{const.} \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= \text{const.} \end{aligned}$$

Wo es sich um Entfernungen zwischen zwei Stellen von  $M$ , d. h. um den Ausdruck 7. handelt, fallen die Coordinaten  $y_4, y_5, \dots, y_n$  fort, und es ist gerade so, als ob  $M$  von vornherein nur in einer dreifach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit  $(y_1, y_2, y_3)$  liegen würde. M. a. W. es hat keinen Zweck, dreifach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeiten als in höheren Mannigfaltigkeiten liegend aufzufassen.<sup>1</sup> Zugleich können in diesem Fall  $y_1, y_2, y_3$  ebenso wie  $u, v, w$  als unabhängig veränderlich betrachtet werden, woraus zugleich erhellt, warum eine beliebige Mannigfaltigkeit  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , wenn den Veränderlichen keine Beschränkung auferlegt ist (wenn also die Gl. 8. anstatt linear zu sein gänzlich fehlen), eo ipso als linear oder eben anzusehen ist. Man sieht zugleich, daß die Mannigfaltigkeit  $M$ , wenn sie eben ist, von selbst, indem man  $y_1, y_2, y_3$  als räumliche Coordinaten deutet, auf ein Stück unseres Raumes abbildbar ist und so den psychologischen Farbenkörper liefert, womit die § 7, S. 259 versprochene Einsicht nachgetragen ist. Man sieht aber auch, daß die Ebenheit nur ein ganz specieller Fall ist.

Der Begriff des arithmetischen Farbenschemas beruht wesentlich darauf, daß der analytische Ausdruck für die Distanzen unseres Raumes einer naheliegenden arithmetischen Verallgemeinerung fähig ist (Ausdruck 7.), und dies war der schon S. 229 angedeutete zweite Grund, warum wir die Urtheile über Distanzen im Farbengebiet gegenüber denen über Richtungen bevorzugten.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Durch eine analoge Ueberlegung findet man, daß man, wenn von den Gl. 8. bloß  $m$  linear sind ( $m < n-3$ ), mit einem Farbenschema der Dimension  $n-m$  dasselbe wie mit dem vorgegebenen leisten kann.

<sup>2</sup> Zwar läßt sich auch der Richtungsbegriff durch die aus der analytischen Geometrie geschöpften Analogien auf höhere Mannigfaltigkeiten übertragen, aber doch nicht ganz so einfach. Wollte man nämlich das Analogon der Forderung c) des psychologischen Farbenkörpers auch beim arithmetischen Farbenschema aufstellen, so müßte man folgendes verlangen: Wir heben aus den Zahlengruppen („Stellen“) eines Farbenschemas solche heraus, die zugleich  $n-1$  linearen Gleichungen genügen. Durch diese Gleichungen wird nämlich aus dem Bereich  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  eine eindimensionale lineare Mannigfaltigkeit  $G$  (das Analogon einer Geraden) ausgesondert. Nicht alle Stellen von  $G$  müssen auch zu  $M$  gehören; wenn aber solche dazu gehören, so muß die entsprechende (eventuell discrete) Farbenreihe den Eindruck der Geradläufigkeit machen; ob diese Forderung wirklich erfüllt ist, kann nur die Empirie entscheiden. Auch



## § 10. HELMHOLTZ' Untersuchungen über kürzeste Farbenlinien.

HELMHOLTZ hat in *dieser Zeitschrift* folgende Abhandlungen über Farbenempfindungen veröffentlicht, die größtentheils auch im 2. Abschn. der 2. Aufl. seiner Physiologischen Optik abgedruckt sind:

1. Versuch einer erweiterten Anwendung des FECHNER'schen Gesetzes im Farbensystem (*Zeitschr.* Bd. II).

2. Versuch, das psychophysische Gesetz auf die Farbenunterschiede trichromatischer Augen anzuwenden (Bd. III).

3. Kürzeste Linien im Farbensystem (Bd. III).

In den Abhandlungen 1. und 2. verfolgt er hauptsächlich zwei Ziele: Erstens das FECHNER'sche Gesetz aufs Farbencontinuum auszudehnen, oder vielmehr dessen Analogon zu finden, zweitens seine hypothetischen Grundfarben zu finden, genauer gesagt, jene Spectralfarben zu finden, die den Grundempfindungen (falls seine Theorie richtig wäre) am nächsten liegen, und den Antheil des weißen Lichtes in ihnen anzugeben. Diese beiden Aufgaben sind vom Problem des psychologischen Farbenkörpers principiell vollständig getrennt; erst der Gegenstand von 3. hängt damit innig zusammen. Wir werden aber doch auch auf die (nicht ganz leicht verständlichen, indem die theoretischen und die experimentellen Theile nicht deutlich gesondert sind) Abhandlungen 1. und 2. insoferne zurückgreifen müssen, als ihre Ergebnisse in 3. eine wesentliche Rolle spielen.<sup>1</sup> Aber alle drei Arbeiten sind, abgesehen von sonstigen hypothetischen Elementen, mit seiner Theorie der drei Grundempfindungen verquickt. Wir werden im nächsten Paragraphen darzulegen versuchen, inwie-

---

ist zu bemerken, daß diese Uebertragung des Richtungsbegriffes ein arithmetisches Farbenschema, somit den Distanzbegriff, schon voraussetzt. Es kann also der Distanzbegriff unabhängig vom Richtungsbegriff arithmetisch gefaßt werden, nicht aber umgekehrt. Die Grundbegriffe der analytischen Theorie der linearen Mannigfaltigkeiten findet man (zum Theil in Anlehnung an KRONECKER) in KÜHNE's Dissertation „Beitr. zur Lehre von der  $n$ -fachen Mannigf.“ (Berlin, 1892).

<sup>1</sup> HELMHOLTZ war sich des Ziels des psychologischen Farbenkörpers (wenn er auch dieses Problem nicht ausdrücklich formulirt) in 3. deutlich bewußt, denn er sagt daselbst S. 110: „Auf dem hier einzuschlagenden neuen Wege würden wir zu einer Ausmessung des Systems der Farbenempfindungen gelangen, die nur auf die Unterschiede der Empfindungen gebaut ist“.

weit der Grundgedanke seiner Methode „die kürzesten Linien zu finden“ von den hypothetischen Elementen unabhängig gemacht werden kann. Jetzt gilt es vor Allem diesen Gedanken- gang selbst blozulegen:

Unter  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  versteht HELMHOLTZ die drei Grundempfindungen, d. h. jene Empfindungen, welche wir hätten, wenn je einer der drei physiologischen Processe, auf welchen nach ihm alle Lichtempfindung beruht, getrennt auftreten könnte und würde. Diese Grundempfindungen sind allerdings empirisch auch nicht annähernd erhaltbar, wie am besten ein Blick auf seine Fig. 2 in 2., S. 12 (oder physiol. Opt. S. 457) zeigt, wo die Curve der Spectralfarben, die nahezu auch die reinsten erhaltbaren Farben vorstellen (nur durch Contrast läßt sich noch eine kleine Steigerung der Sättigung erzielen), überall weit von den Ecken des Dreiecks, in welchen die Grundempfindungen ihr Bild haben, entfernt ist. Unter  $x$ ,  $y$ ,  $z$  versteht er die Quanta der Urfarben (s. 3. S. 111), aus denen ein bestimmter Reiz zusammengesetzt ist.<sup>1</sup> Die Urfarben hängen mit irgend drei Spectralfarben ( $R$ ,  $G$ ,  $V$ ) durch homogene lineare Gleichungen zusammen. Z. B. schreibt er in 2., S. 8 (Opt. S. 454):

$$\begin{aligned} \text{I. } x &= 0,7964 R - 0,3515 G + 0,555 V \\ y &= 0,2612 R + 0,3483 G + 0,3930 V \\ z &= 0,250 R + 0,125 G + 0,625 V \end{aligned}$$

Indem er später diese Gleichungen nach  $R$ ,  $G$ ,  $V$  auflöst, erhält er (S. 19 oder Opt. S. 461):

$$\begin{aligned} \text{II. } R &= 1,328 x + 2,278 y - 2,611 z \\ G &= -0,5122 x + 2,8294 y - 1,3249 z \\ V &= -0,4288 x - 1,4771 y + 2,9094 z \end{aligned}$$

Die Gl. I und II haben dieselbe Bedeutung, wie Mischungs-

---

<sup>1</sup> Die Bedeutung der Symbole  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ist bei HELMHOLTZ nicht immer dieselbe; so bedeuten sie in den gleichfolgenden Gl. I. und II. offenbar Qualitäten von der Intensität eins (denn die Summe der Coefficienten in jeder Zeile ist nahezu eins, vgl. hier § 3), und die Quanta der Urfarben werden vielmehr durch die Coefficienten von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  dargestellt. Ueberall sonst bedeuten jedoch  $x$ ,  $y$ ,  $z$  selbst diese Quanta, namentlich in den späteren Gleichungen dieses Paragraphen; ich wollte jedoch die Bezeichnungen von HELMHOLTZ nicht ändern.



gleichungen für eine MAXWELL'sche Farbentafel. HELMHOLTZ beruft sich auch in 2., S. 7 (Opt. S. 453) auf „NEWTON's Gesetz“. Daraus würde folgen<sup>1</sup>, daß die Grundfarben  $y$  und  $z$ , weil in den beiden letzteren Gl. I. rechts alle Coefficienten positiv sind, sich aus den Spectralfarben  $R, G, V$  mischen lassen, was der Fig. 2 in 2. S. 12 und überhaupt seiner ganzen Theorie widerspricht. Aehnlich würde aus II, weil rechts negative Coefficienten vorkommen, folgen, daß die Spectralfarben  $R, G, V$  außerhalb des Dreiecks der Urfarben  $x, y, z$  liegen, während sich aus den letzteren doch alle Farben zusammensetzen sollen. Trotzdem macht HELMHOLTZ für gewisse „fehlende Farben der Dichromaten“ in 2. S. 19 thatsächlich diesen Schluss, und auch in der Berichtigung S. 517 (am Schlusse des Bd. III *dieser Zeitschr.*) kommt er wieder vor.

Könnte man sich über diese Bedenken hinwegsetzen, so wären durch I., da rechts die Coefficienten numerisch bekannt sind (über deren Bestimmung später) die Urfarben gefunden. Umgekehrt könnte durch II jede Farbe durch die Urfarben ausgedrückt werden, da jede Farbe mit  $R, G, V$  durch eine Farbgleichung zusammenhängt. Durch Abbildung der Größen  $x, y, z$  (als Quanta der Urfarben) in einem rechtwinkligen Coordinatensystem entsteht ein physiologischer Farbenkörper. Aendert man nun in einem Farbenreiz bloß eine der drei Componenten, z. B.  $x$  (was praktisch so zu bewerkstelligen wäre, daß man  $R, G, V$  im Verhältniß 0,796:—0,351:0,555 zusetzt)<sup>2</sup>, so ändert sich in der zugehörigen Empfindung auch nur eine der drei Componenten, z. B.  $E_1$ . Und zwar nimmt HELMHOLTZ für die Abhängigkeit zwischen diesen beiden Aenderungen die Gültigkeit des ver-

<sup>1</sup> Vgl. hier, S. 236.

<sup>2</sup> Bezeichnen nämlich  $x, y, z$  die Qualitäten von der Intensität eins, und kürzen wir auf zwei Decimalen ab, so wird eine beliebige Farbe  $F$  durch

$$\begin{aligned} cx + c'y + c''z &= (0,80 c + 0,26 c' + 0,25 c'') R \\ &\quad + (-0,35 c + 0,35 c' + 0,12 c'') G \\ &\quad + (0,55 c + 0,40 c' + 0,62 c'') V \end{aligned}$$

dargestellt, wobei  $c, c', c''$  numerische Coefficienten sind. Will man in  $F$  die Qualität  $x$  allein ändern, so hat man ihren Coefficienten  $c$  zu ändern. Dadurch ändern sich, wie aus der zweiten Darstellungsform von  $F$  hervorgeht,  $R, G, V$  in der angegebenen Weise.

allgemeinerten FECHNER'schen Gesetzes an, d. h. für die drei Componenten einzeln soll gelten:

$$1. \quad \begin{aligned} dE_1 &= k \frac{dx}{a+x}, \\ dE_2 &= k \frac{dy}{b+y}, \\ dE_3 &= k \frac{dz}{c+z}. \end{aligned}$$

Für manche Zwecke benutzt er auch die einfacheren Formeln

$$1.' \quad \begin{aligned} dE_1 &= k \frac{dx}{x}, \\ dE_2 &= k \frac{dy}{y}, \\ dE_3 &= k \frac{dz}{z}, \end{aligned}$$

wobei im allgemeinen Theil seiner Betrachtungen  $x, y, z$  gerade nicht immer die Quanta der Urfarben, sondern auch beliebiger Farben bedeuten. Für den totalen „Empfindungsunterschied“ (Abh. 1., S. 18) zweier benachbarten Empfindungen nimmt ferner HELMHOLTZ an, daß er durch die Gleichung

$$2. \quad dE^2 = dE_1^2 + dE_2^2 + dE_3^2$$

von den Aenderungen der drei Componenten abhängt. Aus 1. oder 1.' und 2. ergibt sich dann von selbst:

$$3. \quad dE = k \sqrt{\left(\frac{dx}{a+x}\right)^2 + \left(\frac{dy}{b+y}\right)^2 + \left(\frac{dz}{c+z}\right)^2},$$

beziehungsweise

$$3.' \quad dE = k \sqrt{\left(\frac{dx}{x}\right)^2 + \left(\frac{dy}{y}\right)^2 + \left(\frac{dz}{z}\right)^2}$$

als Analogon des FECHNER'schen Gesetzes fürs dreidimensionale Farbengebiet. Die Gl. 2. involvirt, wie wir es jetzt nach der im vorigen Paragraphen auseinandergesetzten (den Mathematikern geläufigen) Terminologie ausdrücken können, die Voraussetzung,



dafs die Farbenmannigfaltigkeit eine ebene, oder mindestens eine abwickelbare Mannigfaltigkeit ist.<sup>1</sup> Die Form 2. fürs Linienelement der Farbenmannigfaltigkeit findet HELMHOLTZ wahrscheinlich aus Gründen, die er (Abh. 1, S. 19) selbst nicht für zwingend hält. Aber jedenfalls ist es gerechtfertigt, diese einfachste Annahme zunächst zu versuchen, schon darum, weil sonst auf einen psychologischen Farbenkörper von vornherein verzichtet würde.

Die Annahme des FECHNER'schen Gesetzes ist durch gewisse Beobachtungen über Farbenmischungen, namentlich aber durch folgenden Umstand gestützt: Fürs dichromatische Auge BRODHUN's, wo also die Componententheorie einfachere Verhältnisse vorfindet, wurde die Erkennbarkeit der Farbenunterschiede der Spectralfarben gemessen; andererseits läfst sie sich unter der Annahme, dafs die beiden Urfarben den Enden des Spectrums nahe liegen (mit obiger Hypothese über die Anwendbarkeit des FECHNER'schen Gesetzes auf die Componenten) berechnen; und die Resultate stimmen leidlich mit der Erfahrung, wobei jedoch zu bemerken ist, dafs man hierzu die Grundfarben schon kennen mufs, d. h. die linearen Gleichungen, durch welche sie mit den Spectralfarben zusammenhängen. Der Grundgedanke scheint nun der zu sein<sup>2</sup>, dafs man eben jene Farben als Urfarben zu

---

<sup>1</sup> Analog ist ja, wie aus der analytischen Geometrie bekannt, das „Linienelement“ einer beliebigen Curve unseres ebenen Raumes dargestellt durch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

wenn  $ds$  das Bogenelement,  $x, y, z$  die Coordinaten eines Curvenpunktes sind. Dagegen läfst sich das Linienelement einer nicht ebenen Mannigfaltigkeit i. A. nicht auf diese einfache Form bringen, was wir geometrisch nur für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten veranschaulichen können: Eine krumme Fläche läfst sich in vielfacher Weise durch Gleichungen der Form 1. (§ 9) darstellen, weil man beliebige Linien auf ihr als die Curven  $u = \text{const.}$  und  $v = \text{const.}$  wählen kann. Aber nur wenn sie abwickelbar ist, kann man Darstellungsformen so finden, dafs ihr Linienelement die Form

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

annimmt (vgl. z. B. DARBOUX, Theorie des surfaces, Bd. I., Art. 69f.)

<sup>2</sup> HELMHOLTZ selbst spricht sich darüber nicht deutlich aus und sagt nur (Abh. 1., S. 29): „In den uns vorliegenden Beobachtungen von BRODHUN kommen wir nur der einen (warmen) Grundempfindung des dichromatischen Auges sehr nahe“, warum, sagt er nicht, schliesst es aber wohl daraus,

wählen hat, für welche sich die unter obigen Voraussetzungen (FECHNER's Gesetz für die Componenten) berechneten Werthe der Farbindifferenzen gleicher Erkennbarkeit mit der Erfahrung in Uebereinstimmung bringen lassen. Hierdurch ist also zugleich das Mittel gegeben, die Urfarben zu bestimmen und die Zulässigkeit des FECHNER'schen Gesetzes verificirt, während man sonst (bei anderer Annahme der Urfarben) genöthigt wäre, die Grundformeln an Stelle von 1. oder 1.' so zu erweitern, daß noch gewisse Functionen  $X$  und  $Y$  von  $x$ , beziehungsweise  $y$  darin auftreten, nämlich (Abh. 1, S. 24):

$$4. \quad dE_x = \frac{dx}{x} \cdot X, \quad dE_y = \frac{dy}{y} \cdot Y.$$

Was nun den eben hervorgehobenen Gedankengang selbst (und den analogen für den Fall trichromatischer Augen) betrifft, so ist zu bemerken, daß zwei von einander unabhängige Hypothesen, nämlich die Annahme bestimmter Urfarben und die Geltung des FECHNER'schen Gesetzes für die Componenten (ja wenn man die vorausgesetzte Ebenheit der Farbenmannigfaltigkeit hinzuzählt, sogar drei Hypothesen), durch eine einzige Beobachtungsreihe wohl nicht hinreichend verificirt werden können. Es ist ja einleuchtend, daß wenn man irgend drei andere beliebige Farben als Urfarben wählt, jedenfalls die drei entsprechenden Aenderungen  $dE_1$ ,  $dE_2$ ,  $dE_3$  von den Aenderungen  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  dieser Urfarben nach irgend einem Gesetze abhängen werden, welches dann sammt den gewählten drei Urfarben mit demselben Recht als verificirt gelten könnte, wie das FECHNER'sche Gesetz zusammen mit den drei bestimmten Urfarben HELMHOLTZ'. In der That wurden auch solche allgemeinere Gesetze in Betracht gezogen (s. hier Gl. 4). Allerdings zeichnet sich das FECHNER'sche Gesetz durch seine Einfachheit aus und empfiehlt dadurch auch die zugehörigen Urfarben. Aber es ist doch zu betonen, daß es hier nicht im selben Sinne als

daß in der Tabelle IV., S. 28 bloß der Werth von  $X$ , aber nicht der von  $Y$  nahezu constant ist. Auf den analogen Gedankengang in der Untersuchung für trichromatische Augen (Abh. 2., S. 8) deutet die Bemerkung hin, es komme darauf an, 6 Verhältnisse der Constanten in den Gl. I. so zu bestimmen, daß die aus der Unterschiedsmaafsformel berechneten Werthe von  $dE$  alle einander möglichst gleich werden.



Ausdruck von etwas Thatsächlichem gelten kann, wie bei ein-dimensionalen Continuen (gleichviel wie dieses Thatsächliche dann noch „gedeutet“ werden mag), sondern daß eine analoge Willkürlichkeit, wie die Wahl des Coordinatensystems in der Geometrie, in der ganzen Betrachtungsweise steckt. Noch weniger kann natürlich die Existenz der Urfarben durch jene Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung als erwiesen gelten.

Die 3. für uns wichtigste Abhandlung stellt sich schon auf den Standpunkt, daß die drei physiologischen Urfarben bekannt seien. Von hier aus hat mit Zuhülfenahme der beiden anderen schon mehrfach erwähnten Hypothesen die Auffindung der kürzesten Linien im Farbensystem, d. h. die Angabe der physikalischen Zusammensetzung aller Lichter, deren zugehörige Empfindungsreihe eine Kürzeste bilden, keine Schwierigkeit mehr: Aus der Voraussetzung, daß die Farbenmannigfaltigkeit eben ist, sich also in unseren Raum als psychologischer Farbenkörper abbilden läßt, folgt, daß ihre kürzesten Linien Gerade sind. Um die Farben kennen zu lernen, die auf diesen Geraden liegen, ist es nur nothwendig, dieselben in den physiologischen Farbenkörper, den HELMHOLTZ zu Grunde legt, rück abzubilden. Da der Zusammenhang der Urfarben mit den Spectralfarben bekannt ist (Gl. I und II), ist dann das Verlangte geleistet. Nennt man die drei Empfindungscomponenten jetzt  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , so ist der Zusammenhang zwischen den Veränderlichen  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , oder den Coordinaten des physiologischen Farbenkörpers und den  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  oder den Coordinaten des psychologischen Farbenkörpers durch die Gleichungen gegeben (Abh. 3, S. 111 oder Opt. S. 463).

$$\begin{aligned} 5. \quad \log \text{ nat } (a + x) &= \xi, \\ \log \text{ nat } (b + y) &= \eta, \\ \log \text{ nat } (c + z) &= \zeta, \end{aligned}$$

die nichts Anderes als die Integrale von 1. sind, wobei  $k$  wegen der Willkürlichkeit der Maasseinheiten eins gesetzt werden konnte. Aus demselben Grunde ist es für die Theorie gleichgültig, ob man die natürlichen oder die gemeinen Logarithmen nimmt, weil beide einander proportional gehen. Man kann also, wie es HELMHOLTZ von vornherein thut, schreiben:

$$\begin{aligned} 6. \quad \log (a + x) &= \xi, \\ \log (b + y) &= \eta, \\ \log (c + z) &= \zeta. \end{aligned}$$

Die zwischen den Punkten  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  und  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  verlaufende Gerade

$$7. \quad \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\eta - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} = \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1}$$

wird also auf eine Linie des physiologischen Farbenkörpers abgebildet, deren Gleichung man findet, indem man in 7. vermöge 6. die  $x, y, z$  einführt. Es wird:

$$\begin{aligned} \xi - \xi_1 &= \log \frac{a + x}{a + x_1}, \\ \xi_2 - \xi_1 &= \log \frac{a + x_2}{a + x_1} \text{ zur Abkürzung } = \lambda \\ \eta_2 - \eta_1 &= \log \frac{b + y_2}{b + y_1} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad = \mu \\ \zeta_2 - \zeta_1 &= \log \frac{c + z_2}{c + z_1} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad = \nu \end{aligned}$$

Folglich wird aus 7.:

$$\frac{1}{\lambda} \log \frac{a + x}{a + x_1} = \frac{1}{\mu} \log \frac{b + y}{b + y_1} = \frac{1}{\nu} \log \frac{c + z}{c + z_1},$$

oder

$$8. \quad \left( \frac{a + x}{a + x_1} \right)^{\frac{1}{\lambda}} = \left( \frac{b + y}{b + y_1} \right)^{\frac{1}{\mu}} = \left( \frac{c + z}{c + z_1} \right)^{\frac{1}{\nu}}.$$

Dies sind die Gleichungen<sup>1</sup> der „kürzesten Linien im Farben-

<sup>1</sup> In Abh. 3., S. 112 (und in Opt. S. 464) stehen diese Gleichungen in Folge eines Rechen- oder Druckfehlers in der Form

$$\left( \frac{a + x}{a + x_1} \right)^{\lambda} = \left( \frac{b + y}{b + y_1} \right)^{\mu} = \left( \frac{c + z}{c + z_1} \right)^{\nu},$$

was für die mathem. Discussion der Curven, die hierauf vorgenommen wird, allerdings keinen Unterschied macht, da zu jedem Werthesystem der Constanten  $\lambda, \mu, \nu$  auch das Reciproke denkbar ist, und die Bedeutung von  $\lambda, \mu, \nu$  nicht weiter in Betracht gezogen wird. Nimmt man von den drei durch Gleichheitszeichen verbundenen Ausdrücken 8. zwei zusammen, so hat man die Projection einer solchen Curve auf eine Coordinatenebene. Z. B. kann die Projection auf die  $x, y$  — Ebene durch Coordinatentransformation auf die Form

$$y = c \cdot x^n$$

gebracht werden, wobei  $c$  und  $n$  constant sind. Die Formen dieser Curven



system“, wie sich HELMHOLTZ ausdrückt, genauer gesagt, derjenigen Linien in seinem physiologischen Farbenkörper, denen im psychologischen Farbenkörper Kürzeste, d. h. Gerade entsprechen.

Schon in 1. findet sich in dem mit „ähnlichste Farben“ überschriebenen Abschnitte (S. 22) eine Bestimmung specieller kürzester Linien für Dichromaten, oder wie es dort heisst, der Curven kleinsten Farbenunterschieds. Die dortige Methode ist in engerem Zusammenhang mit den experimentell durchführbaren Messungen über „ähnlichste Farben“. Ihr Grundgedanke (der übrigens nicht ausdrücklich hervorgehoben wird) ist jedoch fehlerhaft, obwohl das Ergebniss schliesslich ein Specialfall von 3. wird.<sup>1</sup>

sind bekannt, auch von HELMHOLTZ hinreichend discutirt. Der eine Haupttypus ist in seiner Fig. 1 (oder Opt. S. 467) veranschaulicht, die Curven des anderen Haupttypus verlaufen hyperbelähnlich.

<sup>1</sup> Wenn die Intensitäten  $x$  und  $y$  der zwei Grundfarben für ein dichromatisches Auge in einem rechtwinkligen Coordinatensystem zur Anschauung gebracht werden (also in einer physiologischen Farbentafel), so stellt eine Linie  $M$  durch den Ursprung, deren Gleichung

$$\frac{x}{y} = c$$

ist, den Ort von Farbenreizen „constanter Mischung“ dar.  $R$  sei ein Punkt auf  $M$ ; die zugehörige Empfindung  $E$  wird verglichen mit den Empfindungen  $E'$ , die zu einer benachbarten Linie  $M'$ , nämlich

$$\frac{x}{y} = c'$$

gehören, und es wird auf die geringste Verschiedenheit zwischen  $E$  und einer passenden Empfindung aus der Reihe  $E'$  eingestellt, was sich experimentell durchführen lässt, auch ohne die Grundfarben zu kennen, da sich Farben constanter physiologischer Mischung auch physikalisch nur durch die Intensität unterscheiden.

Andererseits lässt sich das eben definirte Minimum von  $dE$  rein mathematisch berechnen, sobald man eine Voraussetzung über die Abhängigkeit des  $dE$  von den Reizunterschieden  $dx$ ,  $dy$  macht, d. h. es lässt sich die durchs Verhältniss  $\frac{dy}{dx}$  definirte Richtung  $\tau$  berechnen, nach welcher von  $R$  aus derjenige Reiz  $R'$  auf  $M'$  liegt, der dem Minimum der Empfindungsverschiedenheit zugeordnet ist, und das Resultat lässt sich mit den Berechnungen vergleichen. Von  $R'$  führt zur nächsten Linie des Systems der  $M$ -Linien (gebildet von den Geraden durch den Ursprung) wieder ein Linienelement bekannter Richtung, u. s. w. Diese Elemente schliessen sich zu einer Curve  $N$  zusammen, die das System der  $M$ -Linien so schneidet, dass sie auf je zwei benachbarten Linien dieses Systems die Bilder ähnlichster Farben herauschneidet. Diese „Curve ähnlichster Farben“ wird

## § 11. Methoden zur Aufstellung des psychologischen Farbkörpers.

Wenn auch die Auffindung des etwaigen psychologischen Farbkörpers im Wesentlichen durch Versuche geschehen muß (S. 254), so werden diese doch nicht planlos vorzunehmen sein, und ich möchte zwei Wege, die man einschlagen könnte, kurz besprechen, von denen der erste (vielfacher Variationen fähig) sich unmittelbar darbietet, fast ohne mathematische Hilfsmittel zu erfordern, der andere durch HELMHOLTZ' Abh. 3. (s. § 10) nahegelegt wird.

Wir haben gesehen (S. 260), daß in dem Umfange als das

durch Integration derjenigen Differentialgleichung zwischen  $dx$  und  $dy$  gefunden, welche die Richtung  $\tau$  definiert. HELMHOLTZ findet (S. 23):

$$xy = \text{const.},$$

mithin gleichseitige Hyperbeln.

Die Bilder der Curven  $M$  und  $N$  in der psychologischen Farben-  
tafel mögen  $\mu$  und  $\nu$  heißen. Dann müssen die  $\nu$ -Curven das System der orthogonalen Trajektorien des  $\mu$ -Systems bilden, weil von einem Punkte einer  $\mu$ -Curve der kürzeste Abstand zu einer benachbarten  $\mu$ -Curve auf letzterer senkrecht steht. Nimmt man andere  $M$ -oder  $\mu$ -Curven, so bekommt man auch andere  $N$ -oder  $\nu$ -Curven als „Curven ähnlichster Farben“. Ja man kann die  $N$ -Curven beliebig wählen, zu den entsprechenden  $\nu$ -Curven die orthogonalen Trajektorien suchen und diese wieder rückabbilden, so werden die so gewonnenen Curven, als  $M$ -Curven betrachtet, die ursprünglich angenommenen Curven zu  $N$ -Curven haben. Diese müssen also eben-  
sowenig kürzeste Linien im Farbensystem sein, als ihre Abbildungen  $\nu$  gerade sein müssen. Aber HELMHOLTZ macht jene Annahme, wie aus dem Schluß der Abh. 2 hervorgeht, wo er die „Linien kleinsten Farbenunterschieds“, von denen er schon S. 24 gesprochen hatte, unberechtigerweise mit den „kürzesten Linien im Farbenfelde“ identificirt. Vielmehr kann, wie soeben gezeigt, jede Linie eine Linie kleinsten Farbenunterschiedes sein, wenn man das System der Linien, zwischen denen sie construirt ist, passend wählt.

Daß die so gewonnenen Resultate denen der Abh. 3 sich einfügen, ist nur dem Umstand zu danken, daß gerade von den Linien

$$\frac{y}{x} = \text{const.},$$

(woraus auch folgt:  $\log y - \log x = \text{const.}$ ), als  $M$ -Linien ausgegangen wurde. Ihnen entsprechen als Abbildungen im psychologischen Farbenkörper nach Gl. 6 des Textes (wobei hier  $a = b = 0$ ) die Linien:

$$\eta - \xi = \text{const.}$$

also ein Büschel paralleler Geraden, die freilich wieder Gerade als orthogonale Trajektorien haben.



WEBER'sche Gesetz gilt, die Darstellung des Continuum Weifs-Grau-Schwarz, soweit es auf dieses Continuum an und für sich ankommt, durch eine Gerade zulässig ist und durch die Forderung c) S. 228 auch unmittelbar erheischt wird. Die Spectralfarben, jede in einer gewissen Intensität, z. B. wie sie in einem bestimmten Spectrum auftreten, sind dann in eine sich um die Axe Weifs-Schwarz herumschlingende Linie anzuordnen, wozu natürlich eine Raumcurve zur Verfügung steht, die, wenn es sich um die uns geläufigsten Spectra handelt, beim Gelb dem Weifs näher stehen wird als dem Schwarz, beim Blau umgekehrt. Es wird sich empfehlen, zuerst die zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten zu untersuchen, die durch Mischung dieses Continuum Weifs-Schwarz mit einer Spectralfarbe (z. B. Blau  $B$ ) entstehen können.<sup>1</sup> Die Gesamtheit der Farben einer solchen Mannigfaltigkeit nennt HERING gelegentlich ein „Nuancirungsdreieck“ (in der Fig. 6  $W S B$ ). Nimmt man dieselbe Spectral-

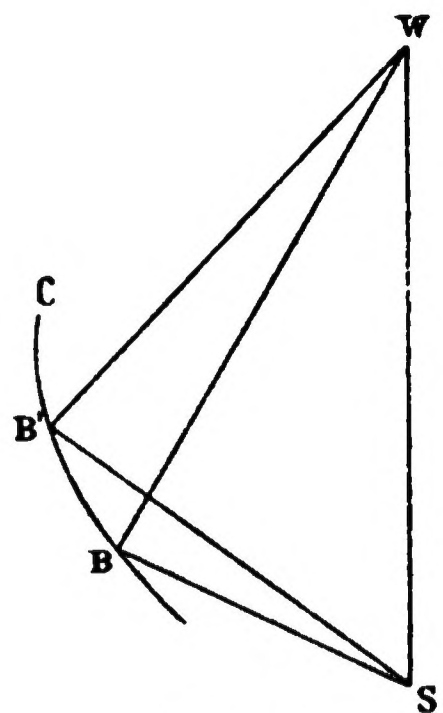


Fig. 6.

farbe in anderer Intensität  $B'$ , so entsteht ein anderes Nuancirungsdreieck, das sich mit dem ersten zum Theil decken wird. Alle diese Dreiecke werden von einer Curve  $C$  eingehüllt werden, auf der die spectralen Blau in ihren verschiedenen Intensitäten liegen. Der ganze von allen (mit derselben Spectralfarbe gebildeten) Nuancirungsdreiecken bedeckte Raum mag Nuancirungsfläche ( $N$ ) heißen. Dieselbe kann, wie eine Farbentafel überhaupt, entweder psychologisch sein oder nach anderen Principien, z. B. als MAXWELL'sche Tafel angefertigt sein. Im ersteren Falle wird sich die Curve  $C$  mit ihren Enden den Punkten  $S$  und  $W$  nähern müssen, weil jede Spectralfarbe bei sehr großer Intensität einen weißlichen Ton annimmt, andererseits bei sehr geringer Intensität sich dem Augenschwarz nähert; in letzterem Fall muß an Stelle von  $C$  eine Gerade treten, weil die verschiedenen Intensitäten derselben Spectralfarbe auch als Mischcontinuum betrachtet werden können (vgl. S. 255). Schon

<sup>1</sup> Ueber zweidimensionale Mischcontinua s. S. 255 Anm.

daraus sieht man, daß die psychologische  $N$  unter den MAXWELLSchen Tafeln nicht zu suchen ist. Jedenfalls wird man auch jene Continua einer  $N$ , die am leichtesten zu erhalten sind, die sich nämlich bei constantem Verhältniß des spectralen und weissen Antheils nur nach physikalischer Intensität abstufen, nach der Methode von S. 256 f. daraufhin prüfen, ob sie constante Krümmung haben, eventuell nach welcher Seite die Krümmung zunimmt. Natürlich wird man zunächst versuchen, jede  $N$  im psychologischen Farbenkörper als Stück einer Ebene zu erhalten.<sup>1</sup>

Sind die psychologischen  $N$  für hinreichend viele Spectralfarben ermittelt, so sind sie nur noch wie die Blätter eines Buches um die Axe Schwarz-Weiß beweglich, und jetzt wird für die Auswahl der Anordnung die Empfindlichkeit für die Farbenunterschiede benachbarter Spectralfarben maafsgebend sein.<sup>2</sup>

Der zweite Weg wird an den Umstand anknüpfen, daß HELMHOLTZ durch die bekannte (in der Hypothese des FECHNERSchen Gesetzes für die Componenten liegende) Beziehung (§ 10, Gl. 6.) seines physiologischen zum psychologischen Farbenkörper die kürzesten Linien des Farbensystems berechnet hat. Nun wurde im vorigen Paragraphen darauf aufmerksam gemacht, daß, abgesehen von den hypothetischen Elementen in seinen

---

<sup>1</sup> Hierzu wäre nothwendig, daß alle kürzesten Linien in  $N$  constante Krümmung haben; im bejahenden Fall hätte man nur mehr die Wahl zwischen Kugel und Ebene; da aber schon eine Gerade (Schwarz-Weiß) auf der Fläche bekannt ist, bliebe nur die Ebene übrig. Freilich können die kürzesten Linien nicht unmittelbar auf experimentellem Wege gefunden werden. Denn eine zwischen zwei Endpunkten eingeschaltete Reihe von Farben ist durch Verschiebung ihrer einzelnen Glieder nach verschiedenen Richtungen (selbst wenn man sich auf zweifache Mannigfaltigkeiten beschränkt) in viel zu mannigfacher Art deformirbar, als daß man alle diese Möglichkeiten experimentell daraufhin prüfen könnte, ob eine benachbarte Reihe etwa kürzer wäre (vgl. S. 255), als die ursprünglich angenommene. Man wird sich deshalb damit begnügen müssen, in einer nach möglichst einfachem Verfahren aufgestellten  $N$  Stichproben vorzunehmen, ob sie die Definition einer psychologischen Farbentafel erfüllt, eventuell nach diesen Proben die Verbesserungen anzubringen (vgl. den Anfang des § 7).

<sup>2</sup> S. BRODHUN in dieser Zeitschr. Bd. III., S. 89. Dagegen sind bei Bestimmung der Curven  $C$  in einer einzelnen  $N$  zu berücksichtigen: „Exp. Unters. über d. psychophys. Fundamentalformel . . .“ v. KÖNIG und BRODHUN, Berliner Sitzungsber. Juli 1888. S. auch HELMHOLTZ, Physiol. Opt. S. 402, ff.



diesbezüglichen Arbeiten, sich auch directe Einwände machen lassen.<sup>1</sup>

Hypothesenfreier kann man den Gedanken der Aufsuchung der Kürzesten zur Geltung bringen, wenn man statt des physiologischen einen physikalischen Farbenkörper zu Grunde legt. Die „Kürzesten“ wären auch hier nach Analogie der HELMHOLTZ'schen Bezeichnung jene Linien im physikalischen Farbenkörper, deren Bilder im psychologischen Körper Gerade werden. Sie selbst brauchen ebensowenig wie die Curven Gl. 8. (§ 10) gerade zu sein. Wir wollen sie deshalb lieber die „Quasi-Kürzesten“ nennen. Die Ausschaltung des physiologischen Farbenkörpers wird sich zunächst deshalb empfehlen, weil wir von den Endgliedern der Reihe „physikalisch, physiologisch, psychologisch“ mehr wissen, als vom Mittelgliede. Die unmittelbare Erforschung der thatsächlichen Beziehungen zwischen den Endgliedern würde auch aufs Mittelglied eher einiges Licht werfen können.

Nach den Anforderungen an den psychologischen Farbenkörper ist nun folgender Satz unmittelbar klar: Hat man in einem physikalischen Farbenkörper die quasi-kürzesten Curven bestimmt, so ist der psychologische Farbenkörper nur noch unter jenen Abbildungen des physikalischen zu suchen, bei denen

---

<sup>1</sup> Es wäre also jedenfalls noch zu prüfen, ob der psychologische Farbenkörper, den er implicite in der Abh. 3 aufgestellt hat, zutrifft, was am einfachsten so geschehen kann: Zu den Geraden des psychologischen Farbenkörpers gehören z. B. auch die Linien

$$1. \quad \eta = \text{const.}, \zeta = \text{const.},$$

(die Parallelen zur  $\xi$ -Axe), die sich zunächst in seinen physiologischen Farbenkörper als Linien abbilden, in denen bloß  $x$  veränderlich ist, weiter in den physikalischen Farbenkörper ( $R, G, V$ ) als Linien, die man nach S. 273 Anm. berechnen kann, indem man  $R, G, V$  stets in der dort angegebenen Weise ändert. Man erhält so Werthetripel ( $R, G, V$ ), d. h. Maasszahlen-Tripel für diese Qualitäten, die von einem Parameter abhängen. Die Farbenlinie, die von den entsprechenden Farben erfüllt wird, müßte im psychologischen Farbenkörper eine Gerade sein, also vor Allem das Kennzeichen der constanten Krümmung (§ 7) besitzen. Natürlich könnte man statt der Linien 1 beliebige andere Gerade im Coordinatensystem ( $\xi, \eta, \zeta$ ) wählen und auf demselben Wege (von Punkten constanten Abstandes auf diesen Geraden ausgehend) berechnen, welche Farbenreihen den Eindruck constanten Abstandes machen müßten, ferner prüfen, ob auch die Theilreihen dieselbe Eigenschaft haben.

den Quasi-Kürzesten Gerade entsprechen; ist eine solche Abbildung unmöglich, so giebt es auch keinen psychologischen Farbenkörper. Wir werden jedoch alsbald sehen, daß die wirkliche Bestimmung der Quasi-Kürzesten fürs erste nicht nothwendig ist, sondern nur die Aufstellung ihrer Differentialgleichungen.

Will man nun den Ausgangspunkt der HELMHOLTZ'schen Untersuchung über kürzeste Farbenlinien auf einen physikalischen (statt einen physiologischen) Farbenkörper übertragen, so wird man auch hier zunächst das „Linienelement“  $dE$  als Function der Coordinaten des physikalischen Farbenkörpers suchen müssen. Bezeichnen wir jetzt die letzteren mit  $x, y, z$  (z. B. die Intensitäten dreier physikalischen Grundfarben, wie sie schon bei Besprechung der MAXWELL'schen Tafeln erwähnt wurden) und mit  $X, Y, \dots Z_1$  sechs Functionen derselben, so handelt es sich zunächst darum, alle Beobachtungen über die Unterschiedsempfindlichkeit im Farbengebiet durch passende Wahl jener Functionen in eine Formel

$$2. \quad dE^2 = Xdx^2 + Ydy^2 + Zdz^2 + X_1 dydz + Y_1 dzdx + Z_1 dxdy$$

zusammenzufassen.<sup>1</sup> Dieser Formel wollen wir nach den Grundsätzen, die wir in dieser Arbeit stets festhielten, natürlich nur den Sinn beilegen: Wenn man nacheinander zwei Werthetripel  $x_1, y_1, z_1$  und  $x_2, y_2, z_2$  sammt zugehörigen kleinen Aenderungen  $dx_1, dy_1, dz_1$  und  $dx_2, dy_2, dz_2$  in 2. einsetzt, und es sind die Zahlen, die rechts herauskommen, beidemal gleich, so müssen auch die entsprechenden Farbendistanzen als gleich beurtheilt werden, wenn die Formel 2. ein adäquater Ausdruck dafür sein soll, wie kleine Empfindungsänderungen von kleinen Reizänderungen abhängen.

Man wird sich die Aufgabe eine passende Formel 2. zu finden durch Zerlegung in mehrere Schritte erleichtern, etwa so: Beschränkt man sich zuerst auf Aenderungen, bei denen

---

<sup>1</sup> Man kann zwar stets nachträglich durch Wahl „orthogonaler Parameterlinien“ analog wie in der Flächentheorie die einfachere Form

$$2a. \quad dE^2 = Xdx^2 + Ydy^2 + Zdz^2$$

erzielen, aber man kann nicht von vornherein wissen, ob man die Wahl der Grundfarben so getroffen hat, daß diese Form genügt. Trotzdem wird man versuchen (wie es auch HELMHOLTZ thut), zunächst mit dieser einfacheren Form auszukommen.



$dy = dz = 0$  ist, also eine Grundfarbe allein in der Mischung geändert wird, so reducirt sich 2. auf

$$3. \quad dE = \sqrt{X} \cdot dx,$$

und  $\sqrt{X}$  ist, solange obige Beschränkung gilt, eine Function von  $x$  allein, die man aus Versuchen bestimmen muß. Dieser Theil der Aufgabe steht auf gleicher Stufe, wie die Auffindung der FECHNER'schen „Elementarformel“, solange man die Function  $X$  nur für ein specielles constantes Werthepaar  $y = c_2, z = c_3$  sucht. Aber für jedes Werthepaar  $c_2, c_3$  erhält man ein solches Gesetz 3. Alle diese wird man in eine einzige Formel fassen müssen, indem man die Constanten in  $X$  als passende Functionen von  $y$  und  $z$  betrachtet. Gelingt dies, so ist  $X$  vollständig bestimmt u. s. w.

Wenn die Darstellung der Thatsachen unter den sehr vereinfachenden Voraussetzungen gelingt, daß  $X, Y, Z$  (analog wie bei HELMHOLTZ) Functionen beziehungsweise von  $x, y, z$  allein sind, und  $X_1, Y_1, Z_1$  verschwinden, so kann man durch die Gleichungen

$$4. \quad \int \sqrt{X} \, dx = u, \quad \int \sqrt{Y} \, dy = v, \quad \int \sqrt{Z} \, dz = w$$

neue Veränderliche einführen, für welche das Linienelement in der Form

$$5. \quad dE^2 = du^2 + dv^2 + dw^2$$

erscheint. Jedenfalls muß es auf diese Form gebracht werden können, soll ein psychologischer Farbenkörper möglich sein. Aber das Umgekehrte läßt sich nicht behaupten. Denn wenn die Farbenmannigfaltigkeit nicht selbst eben, aber auf eine ebene Mannigfaltigkeit abwickelbar wäre, so kann das Linienelement auf die Form 5. gebracht werden. Trotzdem giebt es in diesem Fall keinen psychologischen Farbenkörper; auch eine zweidimensionale psychologische Farbentafel kann ja nicht durch eine ihrer Biegungen ersetzt werden, weil dabei eben Distanzgleichheiten verloren gehen (vgl. auch S. 259). Man sieht aus dieser Betrachtung, daß das arithmetische Farbenschema durch das Linienelement 2. allein ebensowenig bestimmt ist, wie eine krumme Fläche durch ihr Linienelement, das nur wie man zu sagen pflegt, die Verhältnisse im Unendlichkleinen zum Ausdruck bringt. Aber alles den aufeinander abwickelbaren Mannig-

faltigkeiten gemeinsame ist durchs Linienelement bestimmt, z. B. die geodätischen Linien, geradeso wie die Differentialgleichungen der geodätischen Linien auf einer Fläche aufgestellt werden können, wenn auch nur das Linienelement derselben in der Form

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$$

gegeben ist (s. die Gl. 9. auf S. 153 in BIANCHI-LUKAT, Differentialgeom.).

Den nächsten Schritt der nach Auffindung des Linien-elementes 2. zu thun ist, wollen wir der Anschaulichkeit halber zunächst an zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten erläutern und skizziren: Es sei

$$\begin{aligned} 6. \quad \xi &= f(u, v) \\ \eta &= g(u, v) \\ \zeta &= h(u, v) \end{aligned}$$

eine krumme psychologische Farbentafel. Die Gl. 6. seien aber nicht explicite gegeben, sondern nur das Linienelement  $dE^2$  (gleich  $d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$ ) sei wirklich bekannt und habe die Form

$$7. \quad dE^2 = U du^2 + 2 W du dv + V dv^2,$$

wobei jede der Gröſsen  $U, V, W$  eine Function von  $u$  und  $v$  ist, den Coordinaten der physikalischen Farbentafel. Dann kann man, wie eben bemerkt, die Differentialgleichungen der geodätischen Linien der psychologischen Farbentafel aufstellen. Durch Integration derselben würde man zunächst Gleichungen der Form

$$8. \quad u = \varphi(t), \quad v = \psi(t)$$

erhalten, die in 6. eingesetzt die geodätischen Linien in endlicher Form  $\xi = F(t), \dots$  liefern würden, wobei  $t$  eine unabhängige Veränderliche (in den citirten Gleichungen BIANCHI's die Bogenlänge  $s$ ) bedeutet. Nun sind auf der psychologischen Farbentafel die geodätischen Linien die wirklichen Kürzesten. Deutet man also die Gl. 8. in der Ebene, in welcher die physikalische Farbentafel  $u, v$  liegt, so stellen sie die Abbildung der geodätischen Linien auf die physikalische Farbentafel, also die Quasi-Kürzesten dar. Soll die psychologische Farbentafel auch eben sein, so müssen ihre geodätischen Linien gerade sein. Man wird also, indem man durch eine passende Substitution statt  $u, v$  neue Parameter  $u_1, v_1$  einführt, deren Differentialgleichungen auf die Form

$$9. \quad u_1'' = 0, \quad v_1'' = 0$$



bringen können (die Ableitungen nach  $t$  genommen), weil dies eben die Differentialgleichungen der geraden Linien sind. Eine der möglichen Transformationen<sup>1</sup>, welche dies leistet, wird zugleich die physikalische Farbentafel in die etwaige psychologische abbilden, ohne daß man dazu die Integration der Differentialgleichungen der geodätischen Linien von vornherein nöthig gehabt hätte; freilich wäre sie durch die Transformation von selbst geleistet.

Ganz analog ist es mit der dreifachen Farbenmannigfaltigkeit: Man wird aus ihrem Linienelement 2. die Differentialgleichungen ihrer geodätischen Linien ableiten, was nur Differentiationen erfordert. Dann wird man (was nur in speciellen Fällen möglich sein wird) neue Veränderliche so einführen, daß diese Differentialgleichungen die Form

$$u_1'' = 0, v_1'' = 0, w_1'' = 0$$

annehmen. Transformationsgleichungen, welche dies leisten, bilden den physikalischen Farbenkörper  $(x, y, z)$  so ab, daß die Quasi-Kürzesten gerade werden. Ist keine solche Abbildung möglich, so giebt es auch keinen psychologischen Farbenkörper. Ist aber eine möglich, so auch unendlich viele. Man kann ja die gefundene Transformation mit jeder Collineation zusammensetzen. Um nun zu entscheiden, ob eine dieser Abbildungen den psychologischen Farbenkörper darstellt, sind jedenfalls neue Erfahrungen nothwendig, die sich nicht auf kleine (theoretisch: unbegrenzt kleine) Farbendistanzen beschränken. Man kann ja auch ein zweidimensionales Gebilde (eine Fläche) von seinen Biegungen nicht unterscheiden, solange man nur die Ver-

---

<sup>1</sup> Man kann die Gleichungen der geodätischen Linien auch in der Form  $u = \chi(v)$  voraussetzen, entsprechend ihre Differentialgleichung in der Form

$$\Phi(u, v, u', u'') = 0,$$

wobei die gestrichelten Gröößen Ableitungen nach  $v$  sind. Dann tritt das Problem, das für die Existenz einer psychologischen Farbentafel in Frage kommt, in der Form auf, daß man diese Differentialgleichung durch Einführung neuer Veränderlichen auf die Form

$$u_1'' = 0$$

bringen soll. Die Bedingungen unter denen dies möglich ist, hat LIE gefunden (*Archiv for Math. og Naturvidenskab*, Christiania, 1883) und auch den Weg angegeben, auf dem man solche Transformationen findet, falls sie existiren.

hältnisse „im Unendlichkleinen“ kennt, die durchs Linienelement ausgedrückt werden.

Man könnte die beiden skizzirten Methoden combiniren, indem man aus der gesamten Farbenmannigfaltigkeit nach irgend einem Gesetze eine Schaar zweifacher Mannigfaltigkeiten heraushebt, für letztere die Linienelemente, geodätischen Linien u. s. w. bestimmt und dann die so gefundenen Farbentafeln passend zusammenfügt (ähnlich wie früher die Nuancirungstafeln).

Wir haben die Distanzvergleichungen überall gegenüber dem Richtungsgedanken bevorzugt, weil sie sowohl einer exacteren experimentellen Behandlung zugänglich sind, als auch weil die Distanz einen leicht zu verallgemeinernden mathematischen Ausdruck gestattet (vgl. die Anm. S. 270). Dagegen wird man sich etwas den Winkelschätzungen analoges bei Farbencontinuen kaum zutrauen wollen. Dies war auch der Grund, warum wir bei der Angelegenheit der Linien constanter Krümmung dabei stehen bleiben mußten, eine Methode anzugeben, zwischen Constanz und Inconstanz der Krümmung zu entscheiden, während von einem Krümmungsmaafs nicht die Rede war, weil man zu einem solchen (geradeso wie in der Geometrie) ohne den Winkelbegriff nicht oder nur auf Umwegen gelangen kann. Wenn jedoch ein psychologischer Farbenkörper bekannt ist, so kann man die Winkel in demselben nachträglich auch als Winkel zwischen den Richtungen der Farbencontinua (als surrogatives Maafs derselben) betrachten.<sup>1</sup>

Wenn kein psychologischer Farbenkörper existirt, so wird schon wegen der Ungenauigkeit der Versuche zu erwarten sein, daß ein solcher wenigstens mit ziemlicher Annäherung aufgestellt werden kann. Andererseits würde die Annahme, daß unsere dreifache Mannigfaltigkeit der Farbenempfindungen in

---

<sup>1</sup> Analog verhält es sich mit dem Krümmungsmaafs u. s. w. Man kann sich aber auch unmittelbare Versuche in ähnlichen Angelegenheiten ausdenken und so auf dem Umwege über den Distanzbegriff zu einem Winkelbegriff gelangen, z. B.: Wenn man 6 Farben so finden kann, daß ihre Distanzen untereinander und von einer siebenten Farbe *F* gleich beurtheilt werden, so gehören die 7 Farben derselben Ebene an, weil sich nur in einer Ebene 6 gleichseitige Dreiecke so aneinanderlegen lassen, daß sie eine Ecke gemeinsam haben. Auch würde man sagen, die Richtungen von *F* gegen die 6 anderen Farben schliessen gleiche Winkel ein, u. dergl. m. Doch dürfte es kaum einen Zweck haben, ähnliche Gedanken weiter auszuspinnen.



einer höheren Mannigfaltigkeit (die natürlich nicht als etwas Reales, sondern im Sinn des § 9 als ein mathematischer Begriff zu denken ist) ausgebreitet ist, in der wir gewisse ausgezeichnete Richtungen oder Componenten der Aenderung (Intensität, Qualität, Sättigung, Helligkeit) unmittelbar als solche wahrnehmen, den Umstand gut veranschaulichen, daß jene Bestimmungsstücke sich nicht oder nur in geringem Maasse unabhängig von einander ändern können. Wir wollen dies wieder an der psychologischen Farbentafel eines partiell Farbenblinden erläutern: Nehmen wir an dieselbe sei eine krumme Fläche, und die subjective Intensität der Farbe sei davon abhängig, wie weit ihr Bildpunkt  $B$  von einer Coordinatenebene  $E$  entfernt ist, während (um der Anschaulichkeit halber eine bestimmte Voraussetzung zu machen) die Qualität und die Sättigung durch die Entfernungen von den anderen Coordinatenebenen bestimmt sein sollen. Da der Farbenblinde aus seiner Tafel nicht herauskann, wird sich für ihn bei jeder Bewegung im Farbencontinuum außer der Intensität zugleich mindestens noch ein anderes Bestimmungsstück ändern müssen, wenn nicht zufällig die Normale auf  $E$  durch den betrachteten Punkt  $B$  (längs welcher sich nur die Intensität ändern würde) ganz auf der Farbentafel liegt oder wegen schwacher Krümmung derselben sich nur unmerklich von der Tafel entfernt. Die einzelne Farbe könnte ebenso für den Farbentüchtigen theoretisch beliebig viele solcher Bestimmungsstücke (Intensität, Sättigung . . .) aufweisen, ohne daß doch das Farbencontinuum deshalb mehr als dreidimensional ist, ganz analog wie beim arithmetischen Farbenschema neben drei unabhängigen Veränderlichen beliebig viele abhängige a priori zulässig waren.

## § 12. Schlussswort.

Ob das Unternehmen, den etwaigen psychologischen Farbenkörper zu finden, experimentell durchführbar und aussichtsreich genug erscheint, muß geübten Experimentatoren zur Beurtheilung überlassen bleiben. Mir war es hier in den letzten Paragraphen um die principielle und logische Seite der Sache zu thun, und dies möge es entschuldigen, wenn ich vielleicht manchmal in den mathematischen Begriffsbestimmungen weiter ging, als experimentell verwertthbar erscheint; aber es schadet niemals, die Begriffe theoretisch etwas schärfer zuzuspitzen.

Die mathematischen Abstractionen RIEMANN's und seiner Nachfolger, die den Raum nur als Specialfall einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit betrachten, wirken auch für die Beurtheilung des Farbencontinuum sehr aufklärend. Dabei braucht an den uns gewohnten Eigenschaften, die unser Raum aufer den allgemeinen Eigenschaften jeder Mannigfaltigkeit noch besitzt, nicht gerüttelt zu werden, und es haben doch alle Untersuchungen der „nicht-euklidischen“ Geometrie einen präzisen Sinn, indem sich eben die Abstraction auch zu anderen Mannigfaltigkeiten erheben kann, die sogar mindestens als arithmetische Mannigfaltigkeiten (§ 9) immer existiren. RIEMANN hat in seinem Habilitationsvortrag „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ (Ges. W. Abh. XIII) darauf aufmerksam gemacht, daß „außer den Orten der Sinnesgegenstände“ auch die Farben „einfache Begriffe sind, deren Bestimmungsweisen eine mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden“.<sup>1</sup> Von den anschließenden Untersuchungen der neueren Mathematik über mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten haben nun, wie es ja die Schwierigkeit des Gegenstandes mit sich bringt, die Physiologen und die Psychologen, die das Farbencontinuum studirten, (mit Ausnahme von HELMHOLTZ) bisher keine Notiz genommen. Dies wäre eher zu erwarten, wenn die abstracten Begriffe der Mathematiker gleich in Anlehnung an die concreten Anschauungen des Farbencontinuum entwickelt würden; und in diesem Sinne hoffe ich durch die §§ 1, 7, 9, 11 einen Beitrag geliefert zu haben. Z. B. geht aus dieser Darstellung hervor,

<sup>1</sup> Im Continuum der Tonempfindungen ist die Scheidung der Bestimmungsweisen „Intensität, Tonhöhe, Klangfarbe“ (solange man sich auf einfache Töne beschränkt, in denen der Grundton entschieden dominirt) zu reinlich und auffallend, als daß ein Anreiz zu analogen Problemen vorhanden wäre, und als daß namentlich Distanzvergleichen zwischen Fundamenten, die durch Aenderungen mehrerer dieser Bestimmungsstücke hervorgegangen sind, ungezwungen vorgenommen werden könnten. Auch ist, was die Klangfarbe der Töne betrifft (umsomehr wenn man Klänge oder gar Geräusche heranzieht) die Anzahl der Dimensionen des Toncontinuum theoretisch unbegrenzt. Z. B. lassen sich die Schwingungsformen einer Seite nicht als von einer endlichen Zahl von Parametern abhängig auffassen; ebenso war es zwar auch bei den Lichtreizen (S. 242). Aber bei letzteren findet auf dem Wege vom Reiz zur Empfindung eine Reduction auf ein dreidimensionales Continuum statt, was beim Toncontinuum nicht der Fall ist.



dafs die Frage, ob das Farbencontinuum eine „ebene“ oder „gekrümmte“ Mannigfaltigkeit ist, einen präzisen Sinn hat, mag nun die Genauigkeit der Experimente ausreichen, dies wirklich zu entscheiden oder nicht.

So werden auch für den mathematischen Unterricht derartige Erläuterungen durchs Farbencontinuum erwünscht sein, besonders wenn man der Ansicht ist, dafs der Raum selbst als Beispiel hierzu so zu sagen zu gut ist, indem der geometrischen Anschauung etwas zugemuthet wird, was sie nicht leisten kann. Aber das Farbencontinuum, wo uns den geometrischen analoge Evidenzen fast gänzlich mangeln (vielleicht u. A. deshalb, weil es sich hier nicht um Theilbares handelt), ist eben aus diesem Grunde als Beispiel einer „allgemeineren“ oder vielmehr anders gearteten Mannigfaltigkeit besser geeignet, besonders solange man über die thatsächliche mathematische Structur desselben so wenig weifs. Um ein Beispiel im einzelnen anzuführen: HELMHOLTZ hat in seinem Vortrag „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome“ die berühmte Fiction von verstandbegabten Wesen von nur zwei Dimensionen benützt, die auf einer krummen Fläche leben und auch nicht die Fähigkeit haben sollen, etwas aufserhalb dieser Fläche wahrzunehmen. Dieses Bild ist nicht einwandfrei, weil wir es doch nur in unserem Raum auszudenken versuchen können und dabei dessen drei Dimensionen zur Geltung bringen; aber thatsächlich können wir es überhaupt nicht ausdenken, da uns „zweidimensionale Wesen“ völlig unfalsbar sind. Auch wir haben gelegentlich die zweidimensionale Farbentafel eines partiell Farbenblinden in ähnlicher Weise als erläuterndes Bild benützt; aber dies ist ein viel harmloserer Vorgang und schon deshalb einwurfsfrei, weil die partielle Farbenblindheit keine Fiction ist und selbst ein Farbentüchtiger von einem Theil seiner Farbenempfindungen abstrahiren kann, während es unmöglich ist, sich Oerter wegzudenken.

Ja sogar die Conception RIEMANN's, es könnte Mannigfaltigkeiten geben, in welchen sich „das Linienelement durch die 4. Wurzel aus einem Differentialausdruck 4. Grades ausdrücken läfst“, die zuerst wohl Jeden seltsam anmuthet, hätte fürs Farbencontinuum gar nichts Absonderliches an sich. Es ist a priori nicht abzuweisen, dafs an Stelle des Linienelementes 2. (S. 284) eine Formel treten müfste, in welcher  $dE^4$  einer passenden homogenen Function vierten Grades der Gröfsen  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  gleich-

gesetzt ist, um die Erfahrungen über die Beurtheilung kleiner Farbendistanzen in ein Gesetz zusammenzufassen.<sup>1</sup> Es ist staunenswerth, wie RIEMANN, ohne ein concretes Beispiel zu haben, auf diese Verallgemeinerung der Form des Linienelements verfallen konnte, die mir noch viel tiefsinniger erscheint, als die Abstraction von der Ebenheit und anderen Eigenschaften des Raumes.<sup>2</sup>

Wir haben also auſser den arithmetischen Mannigfaltigkeiten nur zwei brauchbare Beispiele für Untersuchungen über (nicht aus anderen abgeleitete) continuirliche Mannigfaltigkeiten. Die Hauptunterschiede, die an ihnen hervortreten, sind: Im Farbencontinuum sind wir bei mathematischer Bearbeitung fast ausschließlich auf das Operiren mit dem Distanzbegriff<sup>3</sup> angewiesen, während der Geometrie viel reichere und mannigfachere Grundvorstellungen zur Verfügung stehen. Jede Farbenempfindung erscheint als eigenartiges selbständiges Individuum, und nöthigt an und für sich nicht zu einem Vergleich mit anderen, während ein Ort aus dem Zusammenhang mit anderen nicht losgerissen werden kann. Damit hängt zusammen, daß wir die Farben in ein Continuum erst ordnen müssen, während der Raum ursprünglich als solches gegeben ist.

---

<sup>1</sup> Es könnten auch noch andere Differentialformen auftreten, aber geraden Grades, wie RIEMANN a. a. O. angedeutet hat. Die Gültigkeit der quadratischen Differentialform für den Raum hängt mit dem pythagoreischen Lehrsatz zusammen.

<sup>2</sup> Es soll nicht verschwiegen werden, daß in diesem Gebiete neben Mißverständnissen und Wortstreitigkeiten auch ein wirklich sachlicher Differenzpunkt heute noch unter den Mathematikern und Philosophen vorhanden ist: Es handelt sich, kurz gesagt, um die Frage, ob wir diejenigen besonderen Eigenschaften, die der Raum auſser den Eigenschaften jeder continuirlichen Mannigfaltigkeit noch besitzt, aus apriorischen Erkenntnisquellen (vermöge der Constitution unseres „Raumsinnes“) kennen, oder aus der äußeren (physikalischen) Erfahrung, wie diejenigen meinen, die glauben, es könne noch einmal durch genauere astronomische Messungen eine geringe Krümmung unseres Raumes nachgewiesen werden. Es ist hier nicht der Ort, auf diese erkenntnistheoretische Frage einzugehen; aber bezüglich des Farbencontinuum ist unzweifelhaft die empiristische Ansicht die richtige.

<sup>3</sup> Auch in der Geometrie hat man die Frage aufgeworfen, wieweit man mit dem Distanzbegriff allein kommen kann, anders ausgedrückt, welche geometrischen Aufgaben sich mit dem Cirkel allein lösen lassen (s. FRISCHAUF, Die geom. Constr. von MASCHERONI und STEINER, Graz, 1869).



Man wird durch Vergleichung der beiden Beispiele leichter erkennen, was jeder dieser Mannigfaltigkeiten specifisch eigenthümlich und was gemeinsam ist, und so, was wieder eine eminent philosophische Angelegenheit ist, einen tieferen Einblick in das Wesen des Continuum überhaupt gewinnen. So sehen wir, daß das Problem des psychologischen Farbenkörpers, das ursprünglich auf dem Boden dreier empirischen Wissenschaften Physik, Physiologie, Psychologie erwachsen ist, auch mit den abstractesten Untersuchungen zusammenhängt, zu denen die Menschheit bisher vorgedrungen ist.

*(Eingegangen am 11. März 1899.)*

---