Versuch einer erweiterten Anwendung des Fechnerschen Gesetzes im Farbensystem.

Von

H. v. Helmholtz.

Die Gesammtheit der von unserem Auge empfundenen Farben ist nach Riemann's Ausdruck eine dreifache Mannigfaltigkeit, d. h. jede einzelne Farbe kann durch drei unabhängig veränderliche Gröfsen bestimmt werden, und nicht durch weniger. Die Möglichkeit, das System der Farben durch räumliche oder flächenhafte Anordnungen übersehbar zu machen, beruht auf diesem Verhältnifs, da auch ein Ort im Raume drei Variable zu seiner Festlegung verlangt. Bekannt ist, wie leicht und verständlich sich Newton's Mischungsgesetz der Farben in solcher Weise darstellen läfst. Wir übertragen dabei die der Anschauung weniger zugänglichen Verhältnisse der Farben, auf die uns viel geläufigeren der Zusammenfügung von geometrischen Strecken, beziehlich auf Schwerpunktsconstructionen.

Wie man nun im Raume als Mittel zur Bestimmung eines Ortes die allerverschiedenartigsten mefsbaren Raumgröfsen benutzen kann, bald Linienlängen, bald Winkel, oder auch gelegentlich Flächeninhalte und Volumina, so kann man auch sehr verschiedenartige Gröfsen benutzen, um eine Farbe zu definiren. Die bisher am meisten ausgebildete Methode, welche sich auf Newton's Mischungsgesetz stützt, bezweckt eigentlich nur die Herstellung eines Lichtgemisches physikalisch zu definiren, welches dem Auge den verlangten Eindruck geben würde. Daneben wäre es eine vollständig berechtigte Aufgabe dahin zu streben, dafs man nach Maafsen, die aus der Art der Empfindung gewonnen sind, die Beziehungen der Farben zu einander zu bezeichnen sucht. Die Aufgabe in dieser Richtung zu lösen, hat bekanntlich Herr E. HERING versucht.

Für eine directe Ausmessung des Gebietes der Empfindungen haben wir bisher nur eine einzige auf Thatsachen gegründete Methode, nämlich die Untersuchung der eben noch wahrnehmbaren Unterschiede, beziehlich die der gleich deutlichen kleinen Unterschiede. Die bisher von E. H. WEBER, FECHNER und ihren Nachfolgern angestellten Messungen beziehen sich, so viel ich weifs, alle nur auf Veränderungen, die ausschliefslich in einer einzigen Richtung vorgingen. Das Gebiet der Farbenempfindungen bietet die Gelegenheit solche Studien auch für eine nach drei Dimensionen sich erstreckende Mannigfaltigkeit zu machen. Während FECHNER sich auf die Änderungen der Lichtstärke allein bei ungeänderter Mischung des Lichtes beschränkt hat, so würden noch Untersuchungen hinzukommen können über die Gröfse der unterscheidbaren Abstufungen in den Farbentönen und in der Sättigung der Farben ohne oder auch mit gleichzeitiger Änderung der Helligkeit, und über die Abhängigkeit dieser Abstufungen von den physikalisch definirbaren Veränderungen des erregenden Lichtes.

Das empirische Material für die Aufstellung der Gesetze dieses Gebiets ist allerdings noch sehr unvollständig. Die älteren Versuche, wie die von AUBERT am Farbenkreisel angestellten, beziehen sich auf unvollständig definirte Farben und Helligkeiten. Erst durch die neueren, namentlich von den Herren ARTHUR KOENIG, C. DIETERICI und E. BRODHUN ausgeführten Systeme von Messungen an Spectralfarben von wohlbestimmter Wellenlänge sind quantitative Data gewonnen worden, welche für den bezeichneten Zweck benutzt werden können, und schon einige beachtenswerthe Ergebnisse zu liefern im Stande sind. Diese will ich mir erlauben hier auseinander zu setzen, so weit sie eben reichen.

Da ich zu dieser Untersuchung durch die Umarbeitung meines *Handbuches der physiologischen Optik* geführt wurde, lag mir bei dieser Gelegenheit die Aufgabe ob, so weit möglich zu versuchen, Zusammenhang herzustellen zwischen allerlei vereinzelten Thatsachen, die sich auf die Lehre von der Deutlichkeit der Abstufungen und der Helligkeit beziehen. Dies konnte natürlich zur Zeit nur durch Einführung einzelner hypothetischer Annahmen erreicht werden, die noch nach vielen

Richtungen hin geprüft werden können und geprüft werden müssen, ehe man ihnen volles Zutrauen schenken kann. Da indessen ein solcher Versuch doch einmal gemacht werden muſs, um die erste Orientirung in einem neuen Gebiete zu gewinnen und namentlich um diejenigen Puncte zu erkennen und zu bezeichnen, deren genaue Untersuchung zur Entscheidung der wesentlichsten Fragen nothwendig ist: so will ich diese meine Hypothesen nicht zurückhalten, selbst auf die Gefahr hin, sie vielleicht bald wiederlegt zu sehen.

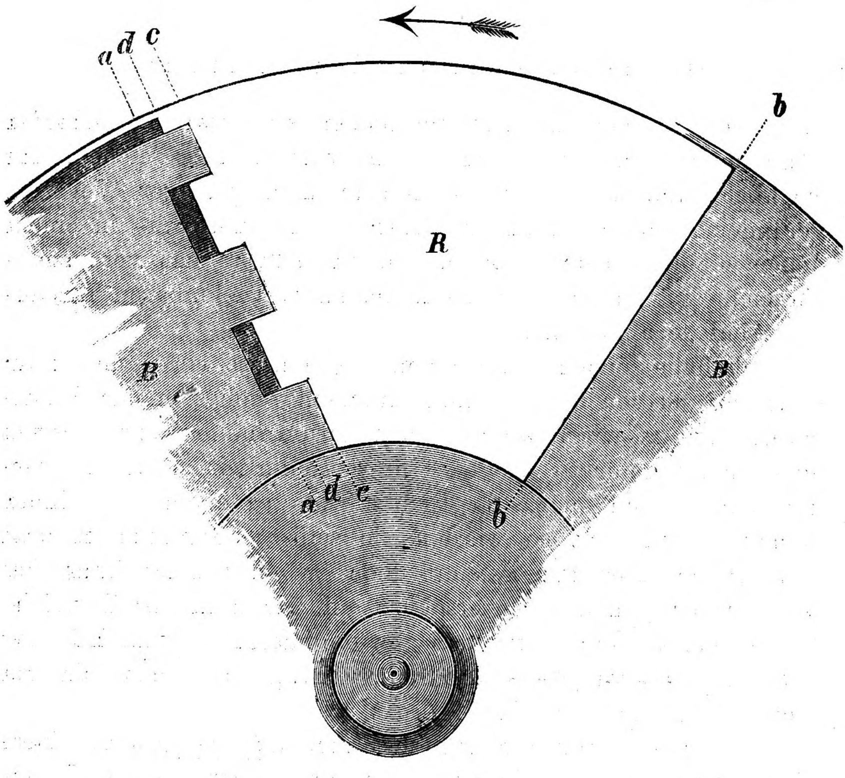
Eigene Versuche mit Farbenscheiben.

Die Versuche mit Farbenscheiben sind zwar zu scharfen Messungen nicht gut brauchbar. So weit sie aber reichen, sind sie leicht anzustellen, leicht in sehr mannigfaltiger Weise zu verändern, und jedenfalls zu einer ersten Orientirung in einem neuen Gebiete sehr nützlich. Schon Aubert hat vereinzelte Versuche mit ihnen über die kleinsten wahrnehmbaren Farbenunterschiede angestellt.

Ich habe zunächst denselben Weg eingeschlagen, und zwar ging ich aus von dem Grundphänomen, welches in der Photometrie benutzt wird, wenn es sich darum handelt zwei etwas verschieden gefärbte Lichter ihrer Helligkeit nach zu vergleichen. Wenn man die Lichtstärke des einen von ihnen allmälig verändert, so werden sie selbstverständlich niemals ganz gleich, aber man gelangt doch zu einer Einstellung, bei welcher der genannte Unterschied ein Minimum der Deutlichkeit erreicht. Man betrachtet gewöhnlich das Verhältniſs der Lichtstärken, welches dieser Einstellung entspricht, als das Verhältniſs gleicher Helligkeit.

Ich habe es mir nun zunächst zur Aufgabe gestellt, diese Einstellung auf das Minimum der Erkennbarkeit des Unterschiedes bei einer Reihe von Mischfarben, die aus denselben Farbenelementen durch Mischung auf der Farbenscheibe erhalten wurden, durchzuführen. Die eine Mischfarbe, und zwar die etwas dunklere, blieb dabei unverändert, die andre erlitt kleine Veränderungen in ihrer Helligkeit und Mischung, indem man sehr schmale schwarze Sectoren sich einschieben lieſs, um sie ein wenig dunkler zu machen, bis man die Grenzen der Ringe, in denen sich diese Farben zeigten, möglichst schwer erkennbar gemacht hatte, wobei sie dann auch in der That gleich hell erschienen. Die dazu erforderlichen Verhältnisse wurden dann notirt.

Die Farbenmischungen füllten abwechselnd fünf concentrische Ringe auf der Scheibe. Die Kreisscheiben waren aus farbigen Papieren von möglichst gesättigter Farbe, aber nicht glänzender Oberfläche geschnitten; sie waren längs eines Radius



gespalten nach der Methode von MAXWELL, um die Winkel beliebig ändern zu können. In obenstehender Figur sind die hervorstehenden Ränder der gespaltenen Scheiben abgebildet, wie sie auf deren vorderer Fläche sichtbar waren. Am oberen Umfange der Figur ist jeder vorliegenden Scheibe ein etwas kleinerer Radius gegeben, um sichtbar zu machen, wie sie zwischeneinanderliegen. In Wirklichkeit waren die Scheiben hier durch congruente Kreislinien von gleichem Radius begrenzt.

Die Scheibe von etwas hellerer Farbe *R* und die schwarze haben einen einfachen radialen Einschnitt, erstre bei *bb*, letztre bei *dd*. Dagegen hat die Scheibe von dunklerer Farbe *B* eine mit zinnenförmigen Vorsprüngen versehene Grenzlinie zwischen *aa* und *cc*. Ersteres ist ein Radius, letzteres aber ist eine Parallele zu diesem Radius, so dafs die Winkelwerthe der Bögen zwischen *aa* und *cc* für die inneren Kreise gröfser werden, als für die äufseren. Die schwarze Scheibe wurde ebenfalls so eingelegt, dafs ihre Grenzlinie *dd* nicht genau die Lage eines Radius hatte, sondern parallel dem dicht daneben liegenden Radius *aa* lag, und somit der schwarze Streifen, der im Grunde der zinnenartigen Ausschnitte hervorsah, überall dieselbe Breite hatte, und überall die Höhe der Zinnen um den gleichen Bruchtheil verkleinerte. Die Lage des Radius *b* konnte beliebig um fast den ganzen Umfang verschoben werden, mit Ausschlufs des von den Zinnen eingenommenen Streifens, so dafs man jede der beiden Farben *R* und *B* fast rein erscheinen lassen konnte, oder fast alle möglichen Abstufungen ihrer Mischung. Zu der durch die beiden zwischen den Radien *bb* und *aa* liegenden Sectoren bestimmten Farbenmischung kam dann in den bis *cc* reichenden Vorsprüngen des Feldes *B* ein kleiner Bogen von dieser Farbe hinzu, dafür wurde ein gleicher Bogen von *R* weggenommen. In dem Ausschnitten der Zinnen dagegen wurde nur ein schmaler Streifen *aa dd* von der Farbe *R* durch Schwarz weggenommen. Wenn die Farbe *B* etwas dunkler war, war da, wo sie zwischen *aa* und *cc* statt *R* auftrat, etwas Helligkeit verloren; um diesen Verlust für die andre Mischung zu compensiren, mufste auch hier etwas von der Farbe *R* fortgenommen werden. Die Breite dieses schwarzen Streifens konnte verändert werden. Die Grenzen zwischen den äufseren Ringen, wo die Winkelwerthe der Zinnen am kleinsten sind, sind natürlich am undeutlichsten. Ich fand es vortheilhaft, gleichzeitig mehrere Grenzen von verschiedenen kleinen Abstufungen der Deutlichkeit vor Augen zu haben, um bei den Vergleichungen diejenige herauszusuchen, die eben der Grenze des Wahrnehmbaren am nächsten stand.

Wenn ein festes Verhältnifs der Helligkeit zwischen den beiden Farben *B* und *R* auch unter diesen Umständen bestände, so müfste sich auch ein festes Verhältnifs zwischen den beiden kleinen Bögen *ac* und *ad* finden lassen, welches in den Ringen von verschiedenem Farbenton immer wieder gleiche Helligkeit herstellte, unabhängig von dem Verhältnifs der beiden grofsen Sectoren R und B.

Nähme man also z. B. an, dafs Lichter gleicher Helligkeit. aber verschiedenen Farbentons durch Mischung von zwei Grundfarben nach der Formel

$$H = A \,.\, x + B \,.\, y$$

gegeben werden könnten, wo A, B Constanten sind, H eine Function der Helligkeit h, und x, y Quanta zweier beliebig gewählter Elementarfarben: so würde für eine benachbarte Farbe in der Reihe gleich heller Mischungen

$$0 = A \,.\, dx + B \,.\, dy$$

werden, und das Verhältnifs von $dx : dy$ würde, unabhängig von den Werthen x und y, wie der Helligkeit h immer dasselbe sein; dasselbe würde von dem Verhältnifs der Breite der beiden schmalen Farbenstreifen auf und zwischen den Zinnen unsrer Scheibe gelten.

Diese Vermuthung bestätigt sich nun aber nicht bei Ausführung des Versuchs. Es zeigt sich vielmehr, dafs der zum Theil mit Schwarz gedeckte Vorsprung der helleren Farbe um so breiter gemacht werden mufs, je mehr von seiner Farbe schon der Farbe des Grundes eingemischt ist. Es wird also bei der von mir beschriebenen Methode der Vergleichung zweier Helligkeiten, — wir wollen sie die photometrische Methode nennen — die Wirkung eines Zusatzes einer Farbe auf die Helligkeit wesentlich durch den schon vorhandenen Vorrath dieser selben Farbe in der Mischung geschwächt.

Ich führe zunächst einige Beispiele solcher Versuche an:

1. **Grün** und **Roth**, Breite $ac = 4{,}5$ mm. Gleiche Helligkeit und das Minimum des Unterschieds erhielt ich
   a) für rothen Grund bei 2,5 mm Breite des Grün;
   b) für halb roth, halb grünen Grund bei 2,75 mm Grün;
   c) für grünen Grund bei 3,75 mm Grün.

Der Kreis von 50 mm Radius war eben noch wahrnehmbar, jedoch etwas deutlicher bei halb grünem, halb rothem Grunde.

2. **Blau** und **Roth**, Breite $ac = 4$ mm. Gleich helle Ringe
   a) auf blauem Grunde für 1,25 mm Roth gegen 4 mm Blau;
   b) auf halb rothem, halb blauem Grunde 1,75 mm Roth;
   c) auf rothem Grunde 3 mm Roth.

Bei *a* und *b* war der Kreis von 60 mm Radius schwach zu erkennen, bei *c* nur der von 50 mm.

3. **Blau** und **Grün**, Breite der Ausschnitte 5,5 mm. Gleich helle Ringe
   a) auf blauem Grunde, bei 1,5 mm Grün gegen 5,5 mm Blau;
   b) auf halb blauem, halb grünem Grunde 1,75 mm Grün;
   c) auf grünem Grunde 2,25 mm Grün.

Sichtbar war der Kreis von 50 mm Radius, aber sehr schwach, am schwächsten bei *c*.

Es zeigt sich ohne Ausnahme, dafs der Streifen von veränderlicher Breite auf gleichfarbigem Grund breiter genommen werden mufs als auf gemischtem Grunde, und auf diesem breiter als auf dem Grunde der ungemischten andern Farbe.

Die Reihe der Helligkeiten der drei gewählten Farben ist offenbar:

$$\text{Grün} > \text{Roth} > \text{Blau}.$$

Bei den stärkeren Helligkeitsdifferenzen mit Blau sind die Ringe auf dem helleren Grunde weniger sichtbar; bei der schwächeren Differenz Roth Grün sind die Ringe auf den reineren Farben weniger sichtbar, als auf dem Gemisch.

Da aber die gebrauchten Pigmentfarben überhaupt gemischtes Licht aus fast allen Gegenden des Spectrums geben, ist es nicht auffallend, dafs sie sich theilweise immer gegenseitig schwächen, und dafs die zackige Figur jeder Farbe auf dem farbigen Felde der andern Farbe nicht ganz so deutliche Ringe giebt, wie sie auf schwarzem Grunde geben würde. Aber sehr grofs ist der Unterschied in der Empfindlichkeit nicht. Bei halb hell, halb schwarz getheiltem Grunde würden helle Streifen die Breite von etwa 2 mm für den Radius 60 mm haben müssen, um sicher erkannt zu werden. Dafs die erforderlichen Farbenstreifen bei unsren Versuchen 2 bis 3 mal so breit waren, giebt also noch keineswegs einen sicheren Beweis dafür, dafs die Empfindlichkeit gegen Farbenabstufungen erheblich geringer ist, als die für Helligkeitsstufen.

Es folgt nun aus diesen Versuchen, dafs, wenn wir auf diesem Wege von einer sehr gesättigten Farbe ausgehend eine Reihe gleich heller gemischter Farben suchen, indem wir immer nur zwei sehr nahe Glieder der Reihe mit einander vergleichen, das gesammte Quantum des gemischten Lichts in der Reihe solcher Farben nicht unverändert bleiben kann. Wählen wir die Einheiten für die Lichtquanta der beiden Endfarben so, dafs sie in gleicher Helligkeit erscheinen, so werden wir von möglichst gesättigtem Roth anfangend, durch Wegnahme eines kleinen Quantum Roth die Helligkeit viel weniger schwächen, als wir durch den Zusatz eines gleichen Quantum Blau sie verstärken, da letztres noch auf kein merkliches Quantum schon vorhandenen Blaus stöfst. Wir müfsten also weniger Blau zusetzen, als wir Roth wegnehmen. Dadurch wird die Summe der Lichtquanta kleiner werden. Dies wird beim Fortschritt zu Mischungen mit immer mehr Blau so weiter gehen müssen, bis endlich die beiden Farben nahe gleiche Quantität in der Mischung haben; dann wird man anfangen müssen, Blau in gröfserer Menge hinzuzusetzen, als man Roth wegnimmt. Das Gesammtquantum wird wieder steigen, bis wir beim reinen Blau angekommen sind.

Wir haben es hier offenbar mit einem ähnlichen Einflufs zu thun, wie er sich bei Abstufungen der Intensität ohne gleichzeitige Anwesenheit einer andern Farbe auf demselben Felde geltend macht. Gleiche kleine Zuwachse der Lichtmenge machen um so weniger Eindruck, je gröfser die schon auf dem Felde vorhandene Lichtmenge gleicher Art ist. In jenen Fällen messen wir den Eindruck ab an der Deutlichkeit der Wahrnehmung des Schattens, hier vergleichen wir zwei die Helligkeit steigernde Abstufungen zweier Farben auf demselben Grunde mit einander.

Vergleichung der Helligkeit sehr verschiedener Farben.

Bei der hier vollzogenen Vergleichung zweier nahehin gleicher, sehr gesättigter Farben wird das Auge, auch wenn es abwechselnd beide Felder anblickt, fortdauernd unter dem Eindruck der hervortretenden Farbe sein, und die Empfindlichkeit für diese wird also in beiden zu vergleichenden Feldern dauernd geschwächt. Dadurch unterscheidet sich dieser Fall von dem andern, wo die Helligkeit zweier sehr verschieden gefärbter Felder verglichen wird. Diese letztre Vergleichung ist allerdings sehr unsicher. Ich selbst fühle mich wenigstens fast ganz unfähig dazu; aber es giebt andre Beobachter, die für solche Vergleichungen einen ziemlichen Grad von Bestimmtheit erreichen, und dies ist, wie es scheint, besonders bei den Dichromaten der Fall.

Um das Gesetz auch an gröſseren Farbendifferenzen zu prüfen, ersuchte ich Herrn E. Brodhun, der durch sein dichromatisches Farbensystem in dieser Hinsicht begünstigt ist, und groſse Übung und Erfahrung in dergleichen Versuchen erworben hat, directe Helligkeitsvergleichungen am Farbenkreisel zu machen. Er verglich zunächst die Helligkeit von zwei rothen und zwei blauen Papieren mit Grau, welches auf dem Farbenkreisel aus einem hellen Grau und Schwarz gemischt wurde. Dann stellte er Farbengleichungen her zwischen einem Roth und einem Blau einerseits, Grau und Schwarz andrerseits, und verglich den durch diesen Versuch gefundenen Werth des Grau mit dem aus den ersten Bestimmungen berechneten. Es fand sich

1) Helles Roth $R_h = \frac{160}{360}$ Grau,

2) dunkles Roth $R_d = \frac{110}{360}$ „

3) helles Blau $B_h = \frac{60}{360}$ „

4) dunkles Blau $B_d = \frac{25}{360}$ „

Farbengleichungen, beobachtet:

I.	121 Gr. $= 127\ B_h + 233\ R_h$,	berechnet	$= 125$ Gr.
II.	118 Gr. $= 95\ B_d + 265\ R_h$,	„	$= 125$ Gr.
III.	98 Gr. $= 94\ B_h + 266\ R_d$,	„	$= 97$ Gr.
IV.	97 Gr. $= 70\ B_d + 290\ R_d$,	„	$= 94$ Gr.

Die ersten beiden Beispiele sind freilich im Sinne des angeführten Gesetzes ausgefallen, die letztern aber entgegengesetzt. Der Mittelwerth der Abweichungen fällt allerdings noch auf die Seite der ersteren. Sein Betrag ist 1,75, mit einem wahrscheinlichen Fehler von 1,24. Aber dieser Betrag ist, wie schon unsre oben angeführten Versuche zeigen, und wir nachher noch deutlicher sehen werden, viel kleiner, als er nach dem Fechnerr'schen Gesetze zu erwarten wäre.

Übrigens hat Herr Brodhun[1] in seiner *Dissertation* (S. 35) eine Vergleichung der direct geschätzten Helligkeit der verschiedenen Farben eines Spectrum mit den früher von ihm[2] bestimmten Farbenwerthen der einzelnen Spectralfarben angestellt, welche sich ergeben, wenn man sie aus den Endfarben des Spectrum für sein dichromatisches Auge durch Mischung herstellt. Dabei hat er die so bestimmte Helligkeit J ziemlich gut durch eine lineare Formel:

$$J = 1{,}018 \,.\, W + 0{,}03915 \,.\, K$$

darstellen können, allerdings mit Abweichungen, die bis zu 6% steigen; aber keinen regelmäßsigen Gang zeigen. Darin sind W und K die Quanta der weniger brechbaren und brechbareren Farben, berechnet nach einer Einheit, welche die beiden im Weiſs vereinigten Quanta dieser Endfarben gleich groſs setzt. Brodhun's Formel zeigt, daſs die beiden zu Weiſs zu verbindenden Farbenquanta sehr ungleiche Helligkeit haben, indem das Einheitsquantum von W etwa 26 mal heller ist, als das von K. Ich nenne solche Einheiten verschiedenfarbigen Lichts Einheiten von gleichem Farbenwerth.

Wenn wir dagegen mit w und k Einheiten bezeichnen, die bei gleicher Anzahl gröſseren Lichtstärken gleiche Helligkeit geben, wie sie nach den in Brodhun's *Dissertation* beschriebenen Versuchen sich finden lassen; so ergiebt sich, daſs das Violett k 26 mal gröſsere Farbenintensität, als die wahrscheinlich gelbliche Farbe w besitzt.

---

[1] E. Brodhun: *Beiträge zur Farbenlehre.* Inaug.-Dissert. Berlin, 1887.

[2] A. Koenig und C. Dieterici: *Die Grundempfindungen und ihre Intensitätsvertheilung im Spectrum. Sitzungsber. d. Akademie zu Berlin,* 29. Juli 1886.

Aus den Untersuchungen der Herren A. KOENIG und E. BRODHUN[1] geht ferner hervor, dafs nach den letztren Einheiten gleicher Helligkeit gemessen, gleiche Quanta w und k auch für alle Intensitäten, welche eine gewisse Grenze (die des PURKINJE'schen Phänomens) übersteigen, übereinstimmenden Gang in den Abstufungen ihrer Unterschiedsempfindlichkeit zeigen, worauf bei unsern hier vorliegenden Untersuchungen noch gröfseres Gewicht fällt, als auf die gleiche Helligkeit.

Farbenunterschiede der Spectralfarben.

Für die Verwerthung der Beobachtungen über die kleinsten erkennbaren Unterschiede der Farbentöne des Spectrum liegen bisher ausreichende Beobachtungen nur für das dichromatische Auge des Herrn BRODHUN vor. Darin liegt allerdings ein gewisser Vortheil für die principiellen Fragen. Denn die Erweiterung des FECHNERschen Gesetzes auf ein Gebiet von mehreren Dimensionen wird sich für zwei Dimensionen ja leichter vollziehen lassen, als für drei, abgesehen von dem schon erwähnten Umstande, dafs sowohl die Farbengleichungen als auch namentlich die Vergleiche der Helligkeit von Dichromaten sicherer und schärfer vollzogen werden, als von Trichromaten. Die für die Ersteren dabei vorliegende Aufgabe ist eben einfacher.

Die Beobachtungen von Herrn E. BRODHUN über die Empfindlichkeit des Auges für Unterschiede der Wellenlänge des Lichtes sind in den *Verhandlungen der physiologischen Gesellschaft zu Berlin*, 1885—86, No. 17 u. 18 veröffentlicht. Die nebeneinander stehenden Felder, in denen die beiden zu vergleichenden Farben sich zeigten, wurden auch auf Gleichheit der Helligkeit eingestellt, so dafs sie sich nur durch den Farbenton unterschieden. Hierin ist also das Verfahren von E. BRODHUN ganz ähnlich dem meiner oben beschriebenen Versuche an Farbenscheiben. Der Beobachter suchte auf vollkommene Gleichheit einzustellen. Der Fehler jeder Einstellung wurde am Apparat abgelesen und aus den gewonnenen Zahlen schliefslich der mittlere Fehler der Einstellungen als Maafs für die Unsicherheit der Vergleichung berechnet.

Ich lasse hier die von BRODHUN gegebenen Zahlen für eine Reihe von Wellenlängen folgen, für die er das Mischungsver-

[1] *Sitzungsber. d. Akademie zu Berlin*, 26. Juli 1888 und 27. Juni 1889.

hältnifs aus der warmen und kalten Farbe (W und K) nach Einheiten von gleicher färbender Kraft angegeben hat, und füge den Werth von dem Verhältnifs

$$p = \frac{W}{W+K}$$

hinzu.

Tabelle I.

λ	W	K	p
560	8,594	0,104	0,98805
545	7,932	0,178	0,97805
535	6,971	(0,291)	0,95997
530	(6,4276)	0,409	0,94018
515	4,608	1,228	0,78957
500	2,562	2,809	0,47700
487	1,319	5,988	0,18051
475	0,656	10,920	0,05669
465	0,250	13,775	0,01815

Die beiden eingeklammerten Zahlen sind durch Interpolation gefunden.

Die Bestimmungen des mittleren Fehlers $\delta\lambda$ für Einstellungen desselben Beobachters auf gleiche Farbe beziehen sich gröfstentheils auf andre dazwischen liegende Wellenlängen. Es wurden deshalb durch Interpolationen zweiten Grades sowohl die Werthe von p, als auch die für $\frac{dp}{d\lambda}$ für diese zwischenliegenden Werthe berechnet. Unter $\delta\lambda$ sind in Tabelle II die von B. gefundenen mittleren Fehler angegeben, unter

$$\delta p = \frac{dp}{d\lambda} \cdot \delta\lambda$$

die entsprechenden Fehler im Werthe von p.

Dies gab folgende Tabelle, die so weit hergesetzt ist, als gleichzeitig Werthe von p und $\delta\lambda$ zu ermitteln waren:

Tabelle II.

λ	Mittlerer Fehler $\delta\lambda$	p	$\frac{dp}{d\lambda}$	δp
550 $\mu\mu$	3,65	0,98367	0,000895	0,00327
540 „	2,17	0,97134	0,001808	0,00392
530 „	1,03	0,94018	0,005075	0,00523
520 „	0,47	0,85688	0,01170	0,00550
510 „	0,35	0,69616	0,01976	0,00692
500 „	0,15	0,47700	0,02407	0,00361 Weiſs
490 „	0,15	0,24236	0,02134	0,00320
480 „	0,28	0,09438	0,009526	0,00267
470 „	0,59	0,02993	0,003884	0,00229

Die Zahlenverhältnisse p beziehen sich auf Lichteinheiten gleicher färbender Kraft; um sie für die Vergleichung der Unterschiedsempfindlichkeit brauchbar zu machen, welche bei gleicher Helligkeit der verglichenen Farben ausgeführt ist, müssen wir die genannten Zahlen noch umrechnen auf Einheiten gleicher Helligkeit. Wenn wir dem W seinen Werth lassen, wird statt K zu setzen sein

$$\frac{1}{n} \cdot K, \text{ wo } n = \frac{a}{b} = 26 \text{ ist.}$$

Wie wir vorher setzten

$$\frac{W}{W+K} = p$$

oder

$$\frac{W}{K} = \frac{p}{1-p},$$

so wird das mit P zu bezeichnende Verhältniſs in den andern Einheiten:

$$\frac{W}{W+\frac{1}{n}K} = P$$

oder

$$\frac{nW}{K} = \frac{P}{1-P} = \frac{np}{1-p}$$

und also

$$P = \frac{np}{np + (1 - p)}$$

$$1 - P = \frac{1 - p}{np + (1 - p)}$$

$$\frac{dP}{d\lambda} = \frac{n \, . \, \frac{dp}{d\lambda}}{[np + (1 - p)]^2}$$

Tabelle III.

λ	P	$\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{d\lambda} \cdot \delta\lambda$	$\frac{1}{1-P} \cdot \frac{dP}{d\lambda} \cdot \delta\lambda$	δP
550	0,99935	0,000130	0,20332	0,000130
540	0,99862	0,000166	0,15795	0,000160
530	0,99756	0,000227	0,09272	0,000226
520	0,99250	0,000286	0,04424	0,000284
510	0,98350	0,000540	0,02968	0,000422
500	0,95954	0,000586	0,01392	0,000562
490	0,89266	0,001871	0,01556	0,001670
480	0,73033	0,008412	0,02280	0,006144
470	0,44512	0,043921	0,03513	0,01955

Bei den hier besprochenen Messungen wurde immer gesucht eine Lichtstärke zu erreichen, welche oberhalb der Grenze liegt, bei der sich PURKINJE's Phänomen einstellt. Dies ist nach den in der Arbeit der Herren A. KOENIG und E. BRODHUN über das *Psychophysische Gesetz* angegebenen Zahlen bei der dort mit 100 bezeichneten Lichtstärke der Fall. Die Bruchtheile der Lichtstärke, die bei dieser Helligkeit noch wahrgenommen werden konnten, waren bei unserem Beobachter B. für

$$\lambda = 670\,\mu\mu \quad 605 \quad 575 \quad 505 \quad 470 \quad 430$$

$$\frac{dr}{r} = 0{,}0271 \quad 0{,}0239 \quad 0{,}0226 \quad 0{,}0195 \quad 0{,}0203 \quad 0{,}0268.$$

Diese Zahlen der unteren Reihe bezeichnen aber nicht mittlere Fehler der Einstellung, sondern die kleinsten Werthe, bei welchen man in 10 auf einander folgenden Versuchen den Unterschied noch erkennen konnte. Nach der Theorie der Fehlervertheilung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung mufs die Abweichung vom Mittel mehr als 2,72 mal so grofs als der wahrscheinliche Fehler, oder 1,82 mal gröfser als der mittlere Fehler der Beobachtungen sein, damit es wahrscheinlicher werde, dafs in 10 Beobachtungen hinter einander die vorhandene Abweichung immer erkannt wird als dafs sie einmal nicht erkannt wird. Danach würde sich der mittlere Fehler $\frac{dr}{r}$ bei den Vergleichungen der genannten Helligkeitsstufen annähernd im Werthe von 0,012 ergeben haben.

Die letzte Columne unserer Tabelle ergiebt die Werthe von δP, d. h. den mittleren Fehler in der Bestimmung der beiden Farbenquanta, welcher im Verhältnifs zur gesammten Lichtmenge beider Farben

$$P + (1-P) = 1$$

gemacht worden wäre. Dieser ergiebt sich, wie wir sehen, durchgehends mit Ausnahme etwa der letzten Zahl viel kleiner, als der Fehler $\frac{dr}{r}$ bei einer Intensitätsvergleichung, wenn $r = 1$. Ja die ersten dieser Zahlen würden eine Empfindlichkeit des Auges gegen Farbenabstufungen nachweisen, die fast hundert Mal gröfser ist, als die bei Intensitätsvergleichungen, wenn man die Differenz als Bruchtheil der ganzen vorhandenen Lichtsumme berechnen wollte. Dies gilt in erhöhtem Grade für die Reihe der Werthe von δp in der Tabelle II, wo aber allerdings die gesammte Helligkeit für die kleineren Wellenlängen eine geringere ist. Daraus folgt zunächst: Durch das gleichzeitige Vorhandensein einer zweiten stark abweichenden Farbe im Felde, wird die Erkennbarkeit kleiner Abstufungen von Intensitätsstufen farbigen Lichtes viel weniger beeinträchtigt, als durch das Vorhandensein eines gleich hellen Quantum derselben Farbe.

Ein der Hering'schen Farbentheorie entsprechender Gang der Unterschiedsempfindlichkeit zeigt sich hierbei gar nicht. Denn die Weifsempfindung müfste nach ihm in allen Farben der berechneten Reihe in Tabelle III gleich grofs sein, der Unterschied also ausschliefslich abhängen von den Abstufungen der Reihe Gelb bis Blau, deren Nullpunct zwischen 500 und 490, näher beim ersteren, läge. Auf einer Seite dieses Punctes wäre die Gelbempfindung schwach, auf der andern die Blauempfindung. An beiden Enden der Reihe würden die letztgenannten beiden Empfindungen nahehin ihr Maximum erreichen. Gleiche Abstufungen dP würden gleichen Abstufungen der gelbblauen Elementarwirkung der Farbenreihe entsprechen. Die mittleren Fehler δP der Tabelle III würden dabei eine grofse Empfindlichkeit für die Abstufungen einer intensiv gelben Elementarwirkung, eine geringe für die intensiv blaue zeigen. Dagegen zeigt sich nichts dem Fechner'schen Gesetze Ähnliches, für diese angebliche Gelb-Blau-Empfindungen, weder in Tabelle II noch in Tabelle III, keine Verkleinerung der wahrnehmbaren Stufen am Nullpunct der Reihe, keine Steigerung nach den beiden Enden hin. Wenn es solche Elementarempfindungen giebt, die auch negative Werthe annehmen können, müfste also offenbar ein ganz andres psychophysisches Gesetz für die Wahrnehmbarkeit ihrer Stufen existiren, als das in den Hauptzügen von E. H. Weber und Fechner angegebene.

Wenn man dagegen die Empfindungen der dichromatischen Farbenreihe als zusammengesetzt aus den Empfindungen zweier Grundfarben ansieht, die den Endfarben des Spectrum entsprechen, so würden zur Vergleichung mit Fechner's Gestze die Verhältnisse

$$\frac{dP}{P} \text{ und } \frac{dP}{1 - P}$$

zu bilden sein, von denen mindestens eines gröfser sein müfste als 0,012, wenn die Wahrnehmung des Farbenunterschiedes auf einen Intensitätsunterschied zurückgeführt werden sollte. Diese Verhältnisse sind in der vorletzten und drittletzten Spalte der Tabelle III angegeben. Die Abstufungen des Violett sind in der That alle grofs genug, um wahrgenommen zu werden, oder kommen der wahrscheinlichen Grenze wenigstens ganz nahe, während die Abstufungen des Roth, soweit die Beobachtungen reichen, zu kleine Verhältnisse des $\frac{\delta P}{P}$ bieten, mit Ausnahme der letzten Zahl. Leider ist diese die einzige, wobei

$P < {}^1/_2$, d. h. der violette Antheil der Farbe heller ist als der gelbe (beziehlich rothe). Für den Rest des Spectrum fehlen die Beobachtungen der Mischungsverhältnisse der beiden Farben, da die Mengen des eingemischten Roth hier wohl zu schwach für eine sichere Bestimmung waren. Nach färbender Kraft gemessen ist nämlich schon in der letzten Beobachtung für $\lambda = 470$, die Stärke des Roth nur 1,3 % von der des Violett. Daſs dort aber noch wahrnehmbare Farbenunterschiede vorkommen, ist bekannt; auch gehen Brodhun's Bestimmungen der mittleren Fehler $\delta\lambda$ noch bis zur Wellenlänge 440, indem sie an Gröſse auch hier wieder zunehmen, wie am rothen Ende. Aber die Data zur Berechnung des P und dP fehlen hier, weil quantitative Bestimmungen dieser kleinen Einmischungen der andern Grundfarbe in das Violett nicht mehr ausgeführt sind.

Allerdings sind die Werthe $\frac{dP}{1-P}$ des mittleren Fehlers für die Abstufungen des Violett durchaus nicht constant, wie sie es wenigstens annähernd nach Fechner's Gesetz für die Intensitätsabstufungen einer isolirten Farbe sein sollten. Aber schon die bisherigen Untersuchungen haben Anhaltspuncte ergeben, welche es sehr wahrscheinlich machen, daſs die Endfarben des Spectrum nicht ungemischte Elementarempfindungen hervorrufen. Am violetten Ende gesellt sich in der That zu dem direct einfallenden violetten Licht noch weiſsliches Fluorescenzlicht der Netzhaut, und davon unabhängig haben die durch A. Koenig und C. Dieterici angestellten Vergleichungen der Farbenwerthe der verschiedenen Spectralfarben in trichromatischen und dichromatischen Augen zu einer Schätzung der Gröſse dieser Einmischung geführt, welche das Violett des Spectrum von Seiten der andern Grundfarbe erleidet. Diese würde 0,1 vom Farbenwerth des Violett betragen.

Dazu kämen noch die Beträge, welche die innere Erregung der Netzhaut nach Fechner's Ansicht zu der Erregung durch das äuſsere Licht hinzufügt, und welche für die Berechnung der Empfindungsstufen bei sehr kleinen äuſseren Lichtmengen berücksichtigt werden müssen. In den gesättigteren Farben des Spectrum sind in der That die Spuren andrer eingemischter Farben klein genug, daſs ihre Wahrnehmbarkeit durch das Eigenlicht merklich beeinfluſst werden kann. Dadurch wird es sich erklären lassen, daſs wo die Einmischungen des Violett in die warme Grundfarbe sehr klein sind, die Empfindlichkeit für die Änderungen des Farbentons nicht ganz so grofs sich findet, wie sie nach der ursprünglichen Form des Fechner'schen Gesetzes zu erwarten wäre.

Unter diesen Umständen schien es nicht aussichtslos zu sein, das Fechner'sche Gesetz in diesem Gebiete als Führer zu benutzen und zu versuchen, ob man es den Erscheinungen gegenüber überall durchführen könne in dem Sinne, dafs man, so weit nicht die Empfindlichkeit durch Blendung verringert wird, die Gröfse der Empfindungsstufe für jede Grundfarbe nur von der Menge der vorhandenen gleichartigen Farbe abhängig annimmt, dagegen sie als unabhängig von den Mengen der gleichzeitig das Feld deckenden andern Grundfarben betrachtet.

Da wir aber bei unsern Versuchen an der Grenze der beiden verglichenen Felder immer Abstufungen je zweier Grundfarben haben, und zwar Zunahme in gleichem Sinne bei Bestimmung der Helligkeitsstufen gleichbleibender Farbe, dagegen in entgegengesetztem Sinne bei der der Farbenstufen gleicher Helligkeit: so müssen wir noch eine zweite Voraussetzung machen über die Wahrnehmbarkeit je zweier zusammentreffender Abstufungen verschiedenartiger Grundempfindungen an derselben Grenze.

Wenn man die mögliche Form eines solchen Gesetzes überlegt, so ist klar, dafs der Empfindungsunterschied dE an der Grenze zweier Felder nur dann ganz verschwinden kann, wenn keine von den drei Grundempfindungen daselbst eine Abstufung zeigt. Bezeichnen wir die Empfindungsunterschiede für die letztern einzeln genommen mit dE_1, dE_2 und dE_3, so mufs dE eine solche Function der letztern sein, dafs $dE = 0$ nur dann möglich wird, wenn gleichzeitig:

$$dE_1 = dE_2 = dE_3 = 0.$$

Dies können wir bekanntlich erreichen dadurch, dafs wir $(dE)^2$ gleich einer nothwendig immer positiven Function von dE_1, dE_2 und dE_3 setzen. Da wir übrigens es hier mit verschwindend kleinen Änderungen zu thun haben, ist es von vorn herein wahrscheinlich, dafs diese Function eine homogene Function zweiten Grades sein wird.

Setzen wir also:

$$dE^2 = A\,(dE_1)^2 + B\,(dE_2)^2 + C\,.\,(dE_3)^2 + 2\,.\,a\,.\,dE_2\,.\,dE_3 + 2\,.\,b\,.\,dE_1\,.\,dE_3 + 2\,.\,c\,.\,dE_1\,.\,dE_2.$$

Da im Falle, wo die Quanta zweier Grundempfindungen gleich Null sind, die Abstufung nur von der dritten abhängt, und die ganze Wahrnehmung auf der Wahrnehmung dieser einen beruht, und dieser gleich sein mufs, werden wir die Coefficienten

$$A = B = C = 1$$

setzen müssen. Damit dann der Werth von dE^2 stets positiv, d. h. dE reell bleibe, müssen a, b, c ächte Brüche sein, und

$$1 + 2\,abc > a^2 + b^2 + c^2.$$

Wenn a, b, c von Null verschieden sind, so würde dies anzeigen, dafs es nicht gleichgiltig ist, ob dE_1, dE_2, dE_3 in der gleichen oder entgegengesetzten Richtung steigen. Ersteres ist bei Vergleichungen der Helligkeitsabstufungen der Fall, letztres bei denen der Farben gleicher Helligkeit. Positive Werthe von a, b, c würden die Wahrnehmbarkeit der Helligkeitsabstufungen begünstigen, die der Abstufungen des Farbentons benachtheiligen. Negative Werthe umgekehrt. Die Thatsachen scheinen dafür zu sprechen, dafs keines von beiden der Fall ist. Dann würde die Formel ihre einfachste Gestalt annehmen, nämlich:

$$dE^2 = dE_1{}^2 + dE_2{}^2 + dE_3{}^2 \;\ldots\ldots\ldots\; \} 1$$

Diese letzte Formel würde auch aussagen, da dE_1, dE_2 und dE_3 Wirkungen differenter physiologischer Processe sind, dafs die physiologischen Erregungen ungestört für sich bestehen, ohne eine gegenseitige Einwirkung auf einander auszuüben, ehe sie zum Bewufstsein kommen, und dafs sie erst in diesem die Aufmerksamkeit kräftiger durch ihr Zusammenwirken erregen.

Wir werden zunächst nachweisen müssen, dafs die bisher bekannten Thatsachen sich mit dem aufgestellten Gesetz in Übereinstimmung befinden. Das gilt namentlich für die von den Herren A. Koenig und E. Brodhun aufgefundenen Gesetze der Intensitätsschwellen für die verschiedenen Farben.

Wenn dE die Stärke der Unterschiedsempfindung für die Zunahme dx der Farbe x bedeuten soll, so kann man ihren Werth näher als durch die ursprüngliche Form von Fechner's Gesetz ausdrücken durch die Gleichung

$$dE = \frac{k\,.\,dx}{(a+x)\,F_h}$$

wo F_h eine Function der Helligkeit ist, die der Stärke der Blendung entspricht. Die Constante a macht sich nur bei den kleinsten Lichtstärken geltend, und mufs für Violett am kleinsten genommen werden. Bei grofsen Lichtstärken wird sie einflufslos.

Über die Blendungsfunction F_h lehren die Versuche von A. Koenig und Brodhun, dafs, wenn man zwei Mischungen von höherer Lichtintensität aus den Grundfarben x, y, z hergestellt hat, welche beide gleich hell sind: gleich deutliche Unterschiede der beiden Empfindungsstärken auch gleichen kleinen Bruchtheilen der Lichtmengen entsprechen, und dafs sie sowohl gleich hell bleiben, als auch gleiche Unterschiedsempfindlichkeiten zu zeigen fortfahren, wenn man beide Lichtmengen in gleichen Verhältnissen vergröfsert.

Daraus folgt, dafs das F_h in allen Fällen dieselbe Function einer homogenen Function der x, y, z sein mufs. Für die erste Annäherung genügt eine lineare Function, so weit bisher die Messungen gehen.[1] Also setzen wir

$$\left.\begin{aligned} dE_1 &= \frac{k\,.\,dx}{(\alpha+x)\,[1+lx+my+nz]} \\ dE_2 &= \frac{k\,.\,dy}{(\beta+y)\,[1+lx+my+nz]} \;\ldots\ldots \\ dE_3 &= \frac{k\,.\,dz}{(\gamma+z)\,[1+lx+my+nz]} \end{aligned}\right\} 2$$

Hierin müssen l, m, n verhältnifsmäfsig kleine Gröfsen sein, welche erst bei hohen Werthen der mit ihnen multiplicirten x, y und z Einflufs gewinnen. Andrerseits müssen lx, my und nz gleich helle Quanta der drei Grundfarben bedeuten. Denn für jede der drei Grundfarben müssen bei gleicher Helligkeit gleiche Werthe der Empfindlichkeit dE gleichen Brüchen $\frac{dx}{x}$ u. s. w. entsprechen, was in der That der Fall ist, wenn gleiche

[1] S. diese Zeitschrift, Bd. I, Heft 1, S. 15 ff.

Werthe von lx, my und nz gleichen Helligkeiten entsprechen bei hinreichend hohen Graden der Helligkeit.

Es sind hiernach die Blendungscoefficienten l, m, n diejenigen Gröfsen, welche die Lichteinheiten gleicher Helligkeit von sehr unähnlichen Farben bestimmen.

Nebenbei erwähne ich hier, dafs mich dieses Verhältnifs veranlafst die Definition der Helligkeit so aufzustellen: Gleich hell sind differente Farben, welche gleiche Blendung und gleiche Unterschiedsempfindlichkeit haben. Letztre entscheidet namentlich bei niederen Lichtstärken, wo die Blendung aufhört.

Auf Feldern von gleicher Unterschiedsempfindlichkeit kann man zarte Schatten, von Modulirung der Oberfläche herrührend, und kleine Objecte gleich gut unterscheiden. Man kann gleich viel auf ihnen sehend erkennen, und das ist es eigentlich, was wir von gleicher Helligkeit verlangen.

Gesetz der Intensitätsabstufungen abgeleitet.

Wenn wir eine zusammengesetzte Farbe in ihrer Lichtstärke ändern, steigern wir alle ihre Bestandtheile um denselben Bruchtheil $d\varepsilon$ und wir haben also zu setzen

$$dx = x \,.\, d\varepsilon, \quad dy = y \,.\, d\varepsilon, \quad dz = z \,.\, d\varepsilon.$$

Dann wird nach unserer Grundformel

$$dE = \frac{k \,.\, d\varepsilon}{1 + lx + my + nz} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+\frac{b}{y}}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+\frac{c}{z}}\right)^2}.$$

Bei hinreichend hohen Werthen der Lichtstärken, wo die Brüche

$$\frac{a}{x}, \ \frac{b}{y} \text{ und } \frac{c}{z}$$

verschwinden, wird dies

$$dE = \frac{k \,.\, d\varepsilon}{1 + lx + my + nz} \sqrt{3}$$

den Versuchen bei hohen Lichtstärken entsprechend.

Bei niederen Lichtstärken dagegen werden die vernachlässigten Brüche Einflufs gewinnen, die Empfindlichkeit verkleinern und diejenige Farbe wird bei geringsten Helligkeiten überwiegenden Einflufs behalten, für welche die entsprechende Constante a, b oder c den kleinsten Werth hat. Das ist der Erfahrung gemäfs Violett oder Blau.

Der die Blendung ausdrückende Factor zeigt durch seine Form schon ein Zusammenwirken der physiologischen Processe an, die den Grundfarben entsprechen. Aber dies ist nicht nothwendig ein neues Empfindungselement in den Nerven, sondern könnte auch auf einem zu starken Verbrauch der Blutbestandtheile durch die gereizten Nerven beruhen, wodurch auch den örtlich zwischengelagerten, nicht gereizten Nervengebilden das Nahrungsmaterial entzogen wird, eine Hypothese derjenigen ähnlich, die Herr H. Ebbinghaus für Erklärung des Helligkeitscontrastes gebildet.

Übrigens fühlt man die Blendung ja auch als Schmerz, vielleicht herrührend von Iriskrampf oder Gefäfskrampf, und die Reflexwirkung in der Iris ist ein Zeichen weiter sich verbreitender Innervationen. Aber hierbei addiren sich auch wie bei der Blendung Wirkungen auf verschiedene Stellen der Netzhaut, die im Gesichtsbilde getrennt bleiben.

Ähnlichste Farben.

Wenn wir dieses Gesetz zunächst anwenden auf nur zwei Grundfarben, deren Quanta wir mit x und y bezeichnen, und uns zunächst beschränken auf Lichtstärken, die innerhalb des Geltungsbereiches von Fechner's Gesetz liegen, so wird

$$dE_1 = k \cdot \frac{dx}{x}$$

$$dE_2 = k \cdot \frac{dy}{y}$$

also
$$dE = k \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{x}\right)^2 + \left(\frac{dy}{y}\right)^2}$$

Wenn wir nun eine der beiden Farben als fest gegeben betrachten und zwar so, dafs wir setzen

für die erste
$$x = r \cdot p$$
$$y = r \cdot (1 - p),$$

für die zweite $x = (r + dr)\,(p + dp)$
$$y = (r + dr)\,(1 - p - dp)$$
und wir annehmen, dafs bei beiden das Verhältnifs der Mischung, also sowohl p, wie $(p + dp)$ unverändert bleibe, so ist

$$dE^2 = k^2 \left[\frac{(pdr + r\,.\,dp)^2}{p^2\,r^2} + \frac{[(1-p)\,dr - r\,.\,dp]^2}{(1-p)^2\,.\,r^2}\right]$$

oder

$$dE^2 = k^2 \left\{\left(\frac{dr}{r} + \frac{dp}{p}\right)^2 + \left(\frac{dr}{r} - \frac{dp}{1-p}\right)^2\right\}$$

Die Gröfse von dE^2 kann, wenn dp, d. h. der Farbenton unverändert bleibt, doch noch geändert werden, wenn man dr, d. h. die Intensität der zweiten Farbe, ändert. Ein Minimum wird dE^2, d. h. die beiden Farbenmischungen werden am ähnlichsten, bei Änderung von dr allein, wenn

$$2\frac{dr}{r} + \frac{dp}{p} - \frac{dp}{1-p} = 0$$

oder

$$\log\left\{r^2\,.\,p\,.\,(1-p)\right\} = \log\,(x\,.\,y) = \text{Const.} \quad \ldots\ldots \Big\} \; 2\text{a}$$

Setzen wir diesen Werth von dr in den Werth von dE^2, und bezeichnen wir dieses Minimum mit $dE_0{}^2$, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} dE_0{}^2 &= \frac{k^2}{2}\left[\frac{dp}{1-p} + \frac{dp}{p}\right]^2 \\ &= \frac{k^2}{2}\left[d\log\left(\frac{x}{y}\right)\right]^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \; 2\text{b}$$

In diesem letztren Ausdruck ist wichtig, dafs der gefundene Werth der Empfindlichkeit unabhängig von den Maafseinheiten ist, nach denen man x und y mifst. Denn wenn nach einem andern Maafs gemessen y durch ny zu ersetzen wäre, so wäre

$$\log\left(\frac{x}{ny}\right) = \log\left(\frac{x}{y}\right) - \log n$$

und da n eine Constante:

$$d\log\left(\frac{x}{ny}\right) = d\,.\,\log\left(\frac{x}{y}\right).$$

Wenn wir in einem rechtwinkeligen Coordinatensystem die Quanta der Farbe x als Ordinaten und die Quanta von y als Abscissen auftragen, so stellt die Gleichung (2 a) eine Curve dar, in denen die Farben kleinsten Unterschiedes neben einanderliegen. Diese Curve ist eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten in der Entfernung sich den Coordinataxen anschliefsen. Es ist dies in Übereinstimmung mit den oben beschriebenen Versuchen am Farbenkreisel. Dagegen würden die aus x und y auf dem Farbenkreisel gebildeten Mischfarben in einer geraden Linie liegen. Zu diesen letztern gehören auch die bei Vergleichung sehr unterschiedener Farben von Brodhun, beziehlich von Herrn E. Hering für gleich hell geschätzten Farben, so weit nicht Purkinje's Phänomen in Betracht kommt.

Correctionen wegen der Abweichungen von Fechner's Gesetz.

Wenn wir die kleinen Abweichungen von Fechner's Gesetz berücksichtigen wollen, so müssen wir für dE_1 und dE_2 die oben in Gleichungen 2 angegebenen Werthe nehmen, können aber für den gegenwärtigen Zweck den auf die Blendung bezüglichen Factor vernachlässigen, indem wir ihn gleich Eins setzen.

Erkennbarkeit von Farbenstufen.

Da bei Berechnung der Brodhun'schen Versuche die Werthe der wahrnehmbaren Unterschiedsstufen bis zu sehr kleinen Lichtstärken hin gebraucht werden, so will ich hier noch die allgemeinsten Grundlagen der Rechnung entwickeln, ohne eine der bisher vorgeschlagenen Annäherungsformeln zu Grunde zu legen; ich beschränke mich dabei aber auf das dichromatische Auge. Die Übertragung auf das trichromatische läfst sich, ohne dafs neue Principien in Frage kommen, theoretisch durchführen.

Ich will, wie früher, die Lichtstärken zweier Grundfarben mit x und y bezeichnen, und es sei X eine Function von x, Y eine solche von y, so gewählt, dafs die Werthe der Unterschiedsschwellen

$$\left.\begin{aligned} dE_x &= \frac{dx}{x} \cdot X \ldots\ldots\ldots\ldots \\ dE_y &= \frac{dy}{y} \cdot Y \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 3$$

seien. Diese Werthe X und Y sind also solche, welche innerhalb des normalen Gebiets des FECHNER'schen Gesetzes fast constant sind, für sehr kleine und sehr grofse Lichtstärken aber steigen.

Zunächst wollen wir die Quanta der Endfarben des Spectrum, ξ und η, welche in BRODHUN's Mischungsversuchen die Elemente der Mischung bildeten, nach NEWTON's Gesetz durch die ihnen zu Grunde liegenden Grundfarben ausdrücken, welche letzteren wir nach Helligkeitswerthen gemessen denken. Dann würden erstre, nach eben solchen Einheiten gemessen, darzustellen sein durch

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (1+\alpha)\,.\,x - \alpha y \;\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta &= -\beta\,.\,x + (1+\beta)\,.\,y \;\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 4$$

oder, wenn wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \frac{\alpha}{1+\alpha+\beta} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta' &= \frac{\beta}{1+\alpha+\beta}, \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 4_a$$

ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{(1+\beta)\,\xi + \alpha\eta}{1+\alpha+\beta} = (1-\alpha')\,\xi + \alpha'\eta \;\ldots\ldots \\ y &= \frac{(1+\alpha)\,\eta + \beta\xi}{1+\alpha+\beta} = (1-\beta')\,\eta + \beta'\xi \;\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 4_b$$

Wenn wir nun die Quanta ξ und η durch eine Variable P, die das Mischungsverhältnifs, wie bisher ergiebt, und durch einen die Lichtstärke bestimmenden Factor R ausdrücken; also setzen

$$\xi = R\,.\,P \text{ und } \eta = R\,(1-P),$$

so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} x &= R\,[(1-2\alpha')\,P + \alpha'] \;\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y &= R\,[(1-2\beta')\,(1-P) + \beta'] \;\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 4_c$$

Für die zweite zu vergleichende Farbe setzen wir statt R und P beziehlich $(R+\varrho)$ $(P+\varpi)$. Dann wird nach unsrer Hypothese der Empfindungsunterschied an der Grenze zu setzen sein, gleich:

$$\varepsilon^2 = X^2 \left\{\frac{[(1-2\alpha')\;P+\alpha']\;\;\varrho + R\;(1-2\alpha')\;\varpi}{R\,[(1-2\alpha')\,P+\alpha']}\right\}^2$$
$$+\,Y^2 \left\{\frac{[(1-2\beta')\,(1-P)+\beta']\,\varrho - R(1-2\beta')\,\varpi}{(1-2\beta')\,(1-P)+\beta'}\right\}^2$$

Darin setze ferner zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha'}{1-2\alpha'} &= \frac{\alpha}{1-\alpha+\beta} = a \;\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\beta'}{1-2\beta'} &= \frac{\beta}{1+\alpha-\beta} = b \;\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 4_d$$

Dann ergiebt sich

$$\left.\varepsilon^2 = X^2\left\{\frac{\varrho}{R} + \frac{\varpi}{P+a}\right\}^2 + Y^2\left\{\frac{\varrho}{R} - \frac{\varpi}{1-P+b}\right\}^2 \ldots\right\} 5$$

Wenn wir ϖ, also die Mischung der zweiten Farbe, constant lassen und nur ϱ, d. h. ihre Lichtstärke ändern, ist die Bedingung des Minimum

$$\left.0 = \frac{\varrho}{R}\left[X^2 + Y^2\right] + \varpi\left[\frac{X^2}{P+a} - \frac{Y^2}{1-P+b}\right] \ldots\right\} 6$$

und der Betrag des Minimum ε_0

$$\left.\varepsilon_0{}^2 = \frac{\varrho\varpi}{R}\left\{\frac{X^2}{P+a} - \frac{Y^2}{1-P+b}\right\} + \varpi^2\left\{\frac{X^2}{(P+a)^2} + \frac{Y^2}{(1-P+b)^2}\right\}\right\} 6_a$$

was durch Einsetzung des Werthes von $\frac{\varrho}{R}$ aus Gleichung (3) sich verwandelt in:

$$\left.\varepsilon_0 = \frac{\varpi \,.\, XY}{\sqrt{X^2+Y^2}} \cdot \left[\frac{1}{P+a} + \frac{1}{1-P+b}\right] \ldots\ldots\right\} 6_b$$

oder

$$\left.\varpi = \frac{\varepsilon_0}{1+b+a} \cdot \sqrt{\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2}} \,.\, (P+a)(1-P+b)\right\} 6_c$$

Die Werthe der Functionen X und Y werden in unserem Falle am besten durch Interpolation aus den von K. und B. beobachteten Werthen bestimmt, da wir zum Theil dabei zu sehr kleinen Lichtintensitäten herabgehen müssen, für welche die bisher gegebenen empirischen Formeln nicht sicher genügen. Es tritt nur die Schwierigkeit ein, daſs der Werth der gemeinsamen Helligkeit, bei welcher die beiden Farben verglichen worden sind, nicht angegeben ist, und also nicht sicher auf die in der Untersuchung von K. und B. über die Unterschiedsschwellen angewendeten Lichteinheiten gleicher Helligkeit reducirt werden kann, vielleicht auch nicht einmal durchgängig derselbe gewesen ist. Nur der Umstand, dafs die Autoren keine auffallende Abhängigkeit der Unterschiedsempfindlichkeit von der Lichtstärke gefunden haben, läfst darauf schliefsen, dafs im Allgemeinen die genannte Lichtstärke höher als 100 ihrer Scala gewesen ist. Diesen Werth habe ich weiter unten in der Rechnung angenommen. Erhebliche Unterschiede in den Resultaten erhält man übrigens nicht, selbst wenn man sie zwischen 200 und 50 jener Scala variirt.

In der citirten Abhandlung ist die objective Lichtstärke der dunkleren Fläche in Einheiten gleicher Helligkeit mit r bezeichnet, die Unterschiedsschwelle für den kleinsten sichtbar werdenden Unterschied mit dr. Gegeben sind daselbst die Werthe von r, dr und berechnet auch

$$\frac{dr}{r+dr}.$$

Das von mir im folgenden gebrauchte $\frac{dr}{r}$ ist nach Koenig's Bezeichnung zu schreiben

$$\frac{1}{2}dr\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{r+dr}\right].$$

Ich behalte die Bezeichnung dr für die nach Koenig und Brodhun's Methode gefundenen Schwellen bei Intensitätsvergleichungen dagegen δr für die Werthe der mittleren Fehler bei Vergleichungen des Farbentons, und setze $k \,.\, \delta r = dr$. Dem entsprechend bezeichnen wir auch die in beiden Beobachtungsreihen entsprechenden Empfindungsschwellen mit dE und δE und betrachten dE als Einheit der Empfindungschwelle. Dann ist

$$1 = X \,.\, \frac{dx}{x}$$

$$1 = Y \,.\, \frac{dy}{y}$$

und danach aus den Beobachtungen zu berechnen.

Der Factor k ist nothwendig gröfser als 1, weil sich die dr auf Beobachtungen beziehen, bei denen der Unterschied in 10 Fällen nie übersehen ist, die δr aber sich auf den mittleren Fehler beziehen, der nicht mehr gesehen worden ist. Damit es wahrscheinlicher wird, dafs in 10 Fällen die Differenz nie übersehen wird, als dafs dies einmal geschieht, müfste, wie schon oben erwähnt, nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$k > 1{,}8238$$

sein.

Der Werth der Constanten b hat fast gar keinen Einflufs auf das Resultat. Ich habe für sie den von K. und D. aus der Vergleichung dichromatischer und trichromatischer Augen hergeleiteten Werth 0,1 in Farbenwerth oder $a = \frac{1}{260}$ in Helligkeitswerth angesetzt. Durch passende Wahl von b kann man unwahrscheinlich grofse Werthe der Empfindlichkeit am rothen Ende in die Reihe der übrigen bringen. Der dazu erforderliche Werth ist sehr klein

$$\alpha = 0{,}00065.$$

Es zeigte sich schliefslich mit Berücksichtigung aller Correctionen, dafs die Genauigkeit von Herrn BRODHUN's Messungen zwar hinreicht einen zuverlässig erscheinenden Mittelwerth zu geben, aber nicht um einen regelmäfsigen Gang der einzelnen Werthe längs des Spectrum zu sichern. Namentlich ist zwischen $\lambda = 510$ und 500 ein Sprung, der sich bei allen Arten von Formeln und Curvenconstructionen bemerkbar machte.

Tabelle IV.

Wellenlänge	$\frac{\delta P}{1-P+\alpha'}$	$\frac{\delta P}{P+\beta'}$	Summe beider $=\sigma$	X	Y	$\sqrt{\frac{1}{X^2}+\frac{1}{Y^2}}$ $=s$	$\frac{s}{\sigma}$
550	0,1017	0,00013	0,1018	0,0267	0,1435	0,1460	1,4
540	0,1074	0,00016	0,1075	0,0267	0,1283	0,1310	1,2
530	0,0732	0,00023	0,0734	0,0267	0,1129	0,1160	1,6
520	0,0407	0,00029	0,0410	0,0268	0,0869	0,0909	2,2
510	0,0286	0,00054	0,0291	0,0268	0,0701	0,0750	2,6
500	0,0137	0,00058	0,0143	0,0271	0,0515	0,0618	(4,3)
490	0,0154	0,00187	0,0173	0,0278	0,0431	0,0513	3,0
480	0,0227	0,00841	0,0311	0,0297	0,0378	0,0481	1,5
470	0,0351	0,0435	0,0786	0,0343	0,0328	0,0469	(0,6)
						Mittel	(2,05)
						oder	1,93

Die Grőſse $\frac{s}{\sigma}$ in der letzten Columne dieser Tabelle sollte constant sein und den Werth $k = 1{,}82$ haben, wenn die Beobachtungen der oben aufgestellten Hypothese, die zur Gleichung 6_b geführt hat, genau entsprächen. Die stark aus der Reihe der übrigen fallenden Zahlen, welche ich eingeklammert habe, entsprechen Stellen, in denen die Interpolationsrechnung, durch welche der Differentialquotient $dP : d\lambda$ zu suchen war, unsicher wurde. Im Allgemeinen konnte ich aus je zwei Paaren benachbarter Intervalle den Werth jenes Differentialquotienten berechnen, nur nicht für $\lambda = 470$, wo die Beobachtungen über Mischung der beiden Farben abbrechen. So bleibt die dort gefundene Zahl ohne Controlle, und bei 500 war eine verhältniſsmäſsig groſse Abweichung zwischen den beiden interpolirten Zahlen, welche auf eine Unregelmäſsigkeit im Verlauf der Curven hindeutet, die durch die hier wirkende Absorption des gelben Flecks der Netzhaut bedingt sein mag.

Wenn sich herausstellen sollte, daſs die starke Abweichung bei 470 nicht auf einem Fehler beruht, so würde sogar eine ganz abweichende Hypothese in Frage kommen können, nämlich, ob nicht immer nur die deutlichste Empfindung wirkt, und was unter der Schwelle bleibt, gar nicht in Betracht kommt. In sämmtlichen andern Beobachtungen bleibt nämlich der eine Eindruck sicher unter der Schwelle.

Ich habe schlieſslich das Mittel der Zahlen für $\frac{s}{\sigma}$ gegeben, einmal eingeklammert mit Einschluſs der eingeklammerten Einzelwerthe, einmal frei ohne dieselben. Beide Zahlen schlieſsen sich hinreichend nahe an die theoretisch geforderte Zahl $k = 1{,}82$ an, daſs dies in der That unsere Hypothese von der Unabhängigkeit der Empfindungsunterschiede der einzelnen Grundempfindungen von einander zu bestätigen geeignet ist.

Dies zeigt zugleich einen Weg an, auf dem es möglich erscheint zu einer sicheren Bestimmung der Grundempfindungen zu gelangen. In den uns vorliegenden Beobachtungen von Brodhun kommen wir nur der einen (warmen) Grundempfindung des dichromatischen Auges sehr nahe. Diese kann sich nur sehr wenig von der Farbenempfindung des äuſsersten Roth des Spectrum unterscheiden, höchstens noch ein wenig gesättigter sein al sletztre.

Daſs die bisher vorliegenden Beobachtungen noch nicht besser übereinstimmende Resultate geben, erklärt sich daraus, dafs die dabei concurrirenden Messungen zu verschiedenen Zeiten, zu andern unabhängigen Zwecken und mit verschiedenen Instrumenten angestellt worden sind, wobei sich mancherlei Umrechnungen der Zahlen und Interpolationen einschoben. Aussichtsreicher erscheint es mir, den directen Weg einzuschlagen und die Unterschiedsempfindlichkeiten von Mischungen theils der Endfarben des Spectrum, theils dieser mit Grün zu untersuchen.

Das trichromatische Auge habe ich vorläufig noch nicht berücksichtigt, da die bisher dafür gegebenen Daten noch unsicherer und unvollständiger sind als für das dichromatische, und zu hoffen ist, dafs man mit geringerer Mühe durch neue Versuche, als durch die hier noch weitläuftigeren Rechnungen Resultate wird erlangen können.

Zum Schlusse möchte ich noch bemerken, dafs die hier gegebenen Formeln für die kleinsten Unterschiede auch ergeben:

1) dafs die Unterschiede der Farben bei sehr geringer Intensität ihres Lichtes verschwinden müssen;
2) dafs sie auch bei sehr hoher Intensität verschwinden, wenn man den die Blendung ausdrückenden Factor berücksichtigt;
3) dafs die Linien kleinsten Farbenunterschiedes (kürzeste Linien im Farbenfelde), die von einer gegebenen Farbe zum Nullpuncte des objectiven Lichts zu ziehen sind, nicht den Linien gleicher Mischung folgen, und dafs also zwischen Farben einerseits grofser, andrerseits kleiner Helligkeit nicht immer die von gleichen Mischungsverhältnissen einander am ähnlichsten sehen werden.