

# Versuch, das psychophysische Gesetz auf die Farbenunterschiede trichromatischer Augen anzuwenden.

Von

H. v. HELMHOLTZ.

(Mit 2 Figuren.)

Ich habe im zweiten Bande dieser Zeitschrift<sup>1</sup> versucht, eine erweiterte Form des psychophysischen Gesetzes anzugeben, in der es auf Mannigfaltigkeiten von mehr als einer Dimension anwendbar erscheint. Eine solche liegt im Farbensystem vor, indem die messende Bestimmung der Art einer Farbenempfindung bei dichromatischen Augen durch zwei unabhängige Variable, bei den häufiger vorkommenden trichromatischen Augen sogar erst durch drei Variable zu gewinnen ist. In dem bezeichneten Aufsatz sind die Folgerungen, welche aus der Hypothese fließen, mit den Beobachtungsthatsachen zunächst nur so weit verglichen worden, als sie sich auf die Bestimmungen der kleinsten wahrnehmbaren Helligkeitsunterschiede bei verschiedenen Farben und auf die kleinsten wahrnehmbaren Farbenunterschiede für ein dichromatisches Auge beziehen. Die Rechnung für ein solches Auge ist natürlich viel einfacher, wenigstens, wenn man dabei die gewöhnlich bisher gemachte Annahme zu Grunde legt, daß darin eine der Grundempfindungen der Trichromaten überhaupt nicht zu Stande kommt, sondern gänzlich fehlt. Die auf diese Annahme und unsere oben bezeichnete Hypothese gegründete Rechnung stimmte nicht gerade besonders genau mit den Beobachtungen überein, aber doch immerhin genügend, daß man die stehenbleibenden Differenzen sich aus den Ungenauigkeiten der ursprünglich

---

<sup>1</sup> H. v. HELMHOLTZ: *Versuch einer erweiterten Anwendung des Fechner'schen Gesetzes im Farbensystem*. Diese Zeitschrift Bd. II, S. 1. 1891.

zu verschiedenen unabhängigen Zwecken angestellten Beobachtungen, aus der Unsicherheit der sie ergänzenden Interpolationsrechnungen und der Unbestimmtheit des angewendeten Helligkeitsgrades erklären konnte.

Nun würde die von mir formulirte hypothetische Erweiterung des psychophysischen Gesetzes, wenn sie sich durchgängig bewährt, Eines für die Theorie der Farbenempfindungen leisten können, wozu bisher noch gar kein sicherer Anhalt gegeben war, nämlich die Feststellung der wirklichen drei physiologisch einfachen Farbenempfindungen.

Es ist bekannt, daß NEWTONS Farbenmischungsgesetz die ganze Mannigfaltigkeit der möglichen Farbenempfindungen zwar auf drei nebeneinander bestehende Erregungsweisen des Sehnervenapparates zurückzuführen erlaubt, aber ganz oder fast ganz unbestimmt läßt, welche Farbenempfindungen diesen drei elementaren Erregungen entsprechen. Denken wir uns nach NEWTONS Regel die Spektralfarben und ihre Mischungen in eine Farbentafel eingetragen, so würden die Orte der drei Grundfarben in der YOUNGSchen Theorie nur der einzigen Beschränkung unterliegen, daß das zwischen ihnen construirte Dreieck sämmtliche Spektralfarben in sich fassen muß; wenn wir dagegen mit Hrn. E. HERING negative Erregungswerthe zulassen wollten, würden gar keine Beschränkungen in der Wahl der drei Urempfindungen gegeben sein.

Dieses Problem erschien mir wichtig genug, um seine Lösung, so gut es eben mit den bisher vorliegenden, in vieler Beziehung unzureichenden Beobachtungen angeht, zu versuchen, auch wenn man nur hoffen durfte, eine vorläufige angenäherte Lösung zu erhalten. Gleichzeitig wird sich ja dabei zeigen müssen, ob auch die Beobachtungen über die Farbenempfindlichkeit des trichromatischen Auges sich so weit unserer psychophysischen Hypothese fügen, als es bei den bestehenden Fehlergrenzen der Beobachtungen zu erwarten ist.

In letzterer Beziehung erinnere ich hier zunächst an die zur Zeit noch bestehenden Unzulänglichkeiten der Beobachtungen. Grofse Genauigkeit ist überhaupt bei allen Messungen der Grenze, wo irgend eine Erscheinung noch wahrnehmbar ist, ehe sie ganz verschwindet, der Regel nach nicht zu erreichen. Hier handelt es sich um die Wahrnehmung des Farbenunterschiedes benachbarter Spektralfarben. Dabei, wie in fast allen

ähnlichen Fällen, spielen allerlei unkontrollirbare Abänderungen in dem Zustande unserer Nervenapparate und psychischen Thätigkeiten mit, welche sich schliesslich in dem abweichenden Gange der Messungsergebnisse zu erkennen geben.

Die Vergleichenngen des Farbentons sind zwar in den letzten Messungsreihen der Hrn. A. KÖNIG und E. BRODHUN<sup>1</sup> zwischen gleich hell erscheinenden Farben durchgeführt worden, und wir dürfen wohl annehmen, daß sie sich zu diesem Zwecke die günstigsten Helligkeiten herzustellen gesucht haben. Solche würden in den Gültigkeitsbereich des normalen FECHNERSchen Gesetzes fallen, wo die wahrnehmbaren Helligkeitsstufen der absoluten Lichtstärke proportional sind. Aber selbst, wenn sie dies für die sämmtlichen Spektralfarben haben einhalten können, ist es fraglich, ob nicht Abweichungen von dieser einfachsten Form des FECHNERSchen Gesetzes da eintreten konnten, wo einer oder zwei der elementaren Farbeneindrücke in der Gesamtfarbe sehr schwach vertreten waren, z. B. bei sehr gesättigten Farben, deren schwache andersfarbige Einmischungen den Farbenunterschied bedingen. Hier konnten sich die Abweichungen von dem genannten Gesetz geltend machen, welche bei geringen Helligkeiten eintreten. In der That werden wir Abweichungen dieser Art zwischen Rechnung und Beobachtung begegnen. Wären Angaben über die absoluten Lichtstärken der verglichenen farbigen Felder gegeben worden, so würden wir die von dem genannten Umstand bedingte gröfsere Unempfindlichkeit gegen die betreffenden Farbenunterschiede berechnen können; sehr grofs können allerdings diese Abweichungen unter den Verhältnissen des Farbendreiecks, die wir finden werden, nicht sein, da fast alle Spektralfarben sich als stark gemischt aus den Grundfarben ergeben werden.

Die Zahlenwerthe, welche die thatsächliche Unterlage für die bezeichnete Rechnung bilden, sind bei verschiedenen, von einander unabhängigen Untersuchungen gewonnen worden, die ohne Rücksicht auf den gegenwärtig vorliegenden Zweck durchgeführt wurden. Wäre letzteres der Fall gewesen, so hätten einige Erleichterungen der Rechnung und eine wesentliche Siche-

---

<sup>1</sup> E. BRODHUN: *Verhandl. der physiol. Gesellschaft zu Berlin*, 1885—1886. Nr. 17 und 18. — Eine ausführlichere Mittheilung über diese Beobachtungsreihen folgt weiter unten auf S. 89 dieses Bandes.

rung ihrer Genauigkeit eintreten können. Namentlich wird die Rechnung erschwert und die Genauigkeit der Ergebnisse beeinträchtigt dadurch, daß die Bestimmungen der Mischungsverhältnisse der Farben einerseits und die Bestimmungen der Sehschärfe für Farbenunterschiede andererseits nicht durchgängig für dieselben Wellenlängen gemacht sind, so daß die Zahlen für die Mischungsverhältnisse, die in der Rechnung gebraucht werden, zum Theil schon durch Interpolation gefunden werden mußten. Vollends konnten die gleichzeitig gebrauchten Werthe der nach den Wellenlängen genommenen Differentialquotienten der Farbenwerthe im Spektrum überhaupt nur durch Interpolation gefunden werden, und gerade an einigen Stellen, wo diese Differentialquotienten sich sehr schnell ändern, wären engere Intervalle für die Beobachtungen höchst wünschenswerth.

Da die von Hrn. A. KÖNIG gefundenen Zahlen, welche selbst schon die Umrechnung von dem prismatischen Spektrum des Gaslichtes auf das Interferenzspektrum des Sonnenlichtes mit Hülfe einer empirischen Formel erlitten hatten, unverkennbare kleine Unregelmäßigkeiten der nach ihnen construirten Intensitätskurven der Elementarfarben erkennen ließen, schien es am besten, eine graphische Interpolation zu Grunde zu legen, wie eine solche übrigens der genannte Autor in den von ihm und C. DIETERICI veröffentlichten Kurven selbst angewendet hat. Diese Interpolation ist von Hrn. Dr. SELL, der den größten Theil der höchst langwierigen Rechnungen durchgeführt hat, gemacht worden, und zwar zu einer Zeit, wo weder er noch ich übersehen konnten, welchen Einfluß auf die erhofften Rechnungsergebnisse die Führung der Kurve haben würde.

Für 18 Wellenlängen lagen ausreichende Beobachtungen vor. Wenn man annehmen durfte, daß durchgängig die einfache erste Form des FECHNERSchen Gesetzes als gültig betrachtet werden durfte, waren sechs Parameter zu suchen, mit deren Hülfe sich für alle diese Wellenlängen nahehin gleiche Werthe für das Maaf der Empfindlichkeit des Auges hätten ergeben müssen. Die Gleichungen, aus denen die Parameter gefunden werden mußten, waren sechsten Grades nach jedem von ihnen, also nur durch allmälige Annäherungsrechnungen lösbar. Es ließen sich jedoch Regeln über den Sinn der Änderungen der Werthe der Empfindlichkeit für die einzelnen



Wellenlängen bei Änderungen der einzelnen Parameter finden, welche als Leitfaden für die Rechnung dienen konnten.

Die Rechnung konnte schliesslich überhaupt nur so weit fortgesetzt werden, bis die übrigbleibenden Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung keinen regelmässigen Gang mehr erkennen liessen, oder wenigstens keinen, der sich nicht schon aus den bekannten Abweichungen vom FECHNERSchen Gesetze hätte erklären lassen. Die grosse Arbeit, welche es gemacht hätte, die Differenzen durch Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate noch zu verkleinern, schien mir gegenüber der ungenügenden Genauigkeit der zu Grunde liegenden Beobachtungen, welche künftig unschwer werden verbessert werden können, nicht gerechtfertigt.

Da diese Untersuchung einen Zusammenhang nachzuweisen sucht zwischen Grössen, für die ein solcher bisher durchaus nicht bekannt war, und die, wenn die von uns vorausgesetzte Abhängigkeit oder eine analoge zwischen ihnen nicht bestände, ebensogut im Verhältnisse von 1:100 oder 1:1000 hätten stehen können, statt einander annähernd gleich zu sein, so wird es immerhin als ein vorläufiges Resultat zu betrachten sein, wenn dieselben, trotz aller besprochenen ungünstigen Verhältnisse, nur im Verhältniss von 1:1,5 von ihrem Mittelwerthe abweichen.

Berechnungsweise. In meinem früheren Aufsatz habe ich die Rechnung nur für das dichromatische Auge durchgeführt. Sie muss also hier zunächst auf das trichromatische Auge erweitert werden.

Ich benutze dieselben Bezeichnungen, wie früher. Es sei wieder  $dE$  die Deutlichkeit eines sehr kleinen Unterschiedes einer zusammengesetzten Empfindung, die entsprechenden Deutlichkeitsgrade der Einzelempfindungen seien  $dE_1$ ,  $dE_2$  und  $dE_3$ . Ich folge weiter der dort aufgestellten und motivirten Hypothese, dass

$$dE^2 = dE_1^2 + dE_2^2 + dE_3^2 \dots \dots \dots \} 1$$

sei.

Für die hier durchzuführende Rechnung begnügen wir uns, wie schon bemerkt, mit der einfachsten Form des FECHNERSchen Gesetzes und setzen demnach:

$$\left. \begin{aligned} dE_1 &= k \cdot \frac{dx}{x} \\ dE_2 &= k \cdot \frac{dy}{y} \dots\dots\dots \\ dE_3 &= k \cdot \frac{dz}{z} \end{aligned} \right\} 2$$

Es ergibt sich also

$$dE = k \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{x}\right)^2 + \left(\frac{dy}{y}\right)^2 + \left(\frac{dz}{z}\right)^2 \dots\dots\dots} \left. \right\} 2a$$

Um die Wahrnehmbarkeit der Farbenabstufungen auf die der Helligkeitsabstufungen zurückzuführen, wenden wir diese Gleichung zunächst auf den Fall an, wo nur die Lichtstärken zweier Farben gleicher Qualität verglichen werden, also die Intensitäten aller drei Grundfarben in der einen Lichtmenge die in der anderen um einen gleichen Bruchtheil übertreffen. Wir setzen daher

$$dx = \varepsilon \cdot x, \quad dy = \varepsilon \cdot y, \quad dz = \varepsilon \cdot z,$$

worin  $\varepsilon$  einen kleinen ächten Bruch bezeichnet. Dies ergibt

$$dE = k \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{3} = k \cdot \varepsilon \cdot 1,7320 \dots\dots\dots \left. \right\} 3$$

Der Werth von  $k$  ist, wie ich schon in meinem vorigen Aufsatze erwähnt habe, je nach der Methode der Beobachtung verschieden groß zu nehmen. Ich habe dort schon erwähnt, daß der aus den Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung hergeleitete theoretische Werth von  $k$  bei solchen Beobachtungen, wo man  $\varepsilon$  als den mittleren Fehler bestimmt hat, 1,8238 mal so groß zu nehmen ist, als wenn  $\varepsilon$  den kleinsten Fehler bedeutet, den man in 10 Fällen immer noch wahrnehmen konnte.

Ersteres ist bei KÖNIGS und BRODHUNS Messungen der Empfindlichkeit für Farbenunterschiede, letzteres bei denen der beiden genannten Beobachter für Helligkeitsstufen geschehen.

In einer Arbeit von Hrn. UHTHOFF<sup>1</sup> ist das Verhältniss

<sup>1</sup> W. UHTHOFF, Über die Unterschiedsempfindlichkeit des normalen Auges gegen Farbentöne im Spektrum. *Gräfes Archiv*. Bd. XXXIV (4). pag. 14.

empirisch bestimmt. Es schwankt zwischen den Werthen 1,25 und 2,44 und beträgt im Mittel 2,025, was mit der theoretischen Ableitung des Werthes ausreichend stimmt.

Bestimmung ähnlichster Farbenpaare. Wenn wir ein Paar zusammengesetzter Farben haben, von denen die eine die Quanta der Grundfarben  $x, y, z$  enthält, die andere die wenig davon verschiedenen  $(x + dx), (y + dy), (z + dz)$ , und die Lichtstärke der ersten Farbe gesteigert werden kann im Verhältniss  $1 : (1 + \epsilon)$ , so daß ihre Componenten werden

$$x(1 + \epsilon), \quad y(1 + \epsilon), \quad z(1 + \epsilon),$$

so ist das Maafs für den Empfindungsunterschied zwischen der zweiten und dritten dieser Farben

$$\frac{dE^2}{k^2} = \left( \frac{dx - \epsilon x}{x} \right)^2 + \left( \frac{dy - \epsilon y}{y} \right)^2 + \left( \frac{dz - \epsilon z}{z} \right)^2.$$

Bei veränderlichen Werten von  $\epsilon$  wird dies ein Minimum, wenn

$$0 = -2 \left[ \frac{dx - \epsilon x}{x} + \frac{dy - \epsilon y}{y} + \frac{dz - \epsilon z}{z} \right]$$

oder

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 3\epsilon \quad \dots \dots \dots \} \quad 3a$$

Und wenn wir dem  $\epsilon$  diesen Werth geben, erhalten wir den Werth des Minimums von  $dE^2$

$$\frac{dE^2}{k^2} = \frac{1}{3} \left\{ \left( \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} \right)^2 + \left( \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} \right)^2 + \left( \frac{dz}{z} - \frac{dx}{x} \right)^2 \right\} \dots \dots \} \quad 3b$$

$$\frac{dE}{k} =$$

$$\frac{\delta \lambda}{V^{\frac{1}{3}}} \sqrt{\left( \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{d\lambda} - \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{d\lambda} \right)^2 + \left( \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{d\lambda} - \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{d\lambda} \right)^2 + \left( \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{d\lambda} - \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{d\lambda} \right)^2}.$$

Die  $x, y, z$  hängen nun mit den Elementarfarben  $R, G, V$ , welche zur Angabe des Farbenwerthes der verschiedenen Spektralfarben von den Hrn. A. KÖNIG und C. DIETERICI gebraucht sind, nach NEWTONS Gesetz durch lineare homogene Gleichungen

zusammen, deren Coefficienten aber zunächst noch unbekannt sind. Bezeichnen wir diese Werthe mit

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 \cdot R + b_1 \cdot G + c_1 \cdot V \\ y &= a_2 \cdot R + b_2 \cdot G + c_2 \cdot V \dots\dots\dots \\ z &= a_3 \cdot R + b_3 \cdot G + c_3 \cdot V \end{aligned} \right\} 4$$

so ist zunächst zu bemerken, daß je einem der Coefficienten in jeder Horizontalreihe ein willkürlicher Werth gegeben werden kann, da

$$\frac{dx}{x}, \frac{dy}{y} \text{ und } \frac{dz}{z}$$

ihre Werthe nicht ändern, wenn jeder der Größen  $x, y, z$  ein willkürlicher constanter Factor hinzugefügt wird. Sonst ist die Wahl der Coefficienten im Sinne von YOUNGS Theorie nur der einen Beschränkung unterworfen, daß die Werthe von  $R, G, V$ , welche den Spektralfarben angehören, keine negativen Werthe von  $x, y, z$  geben dürfen. Das wird nie der Fall sein können, wenn sämtliche Coefficienten  $a, b, c$  positive Werthe haben. Wenn aber negative Werthe vorkommen, wird man prüfen müssen, ob alle Spektralfarben positive  $x, y, z$  ergeben.

Übrigens wird man von jedem System von Coefficienten der  $[x, y, z]$ , was der letzteren Bedingung Genüge leistet, zu anderen der  $[x_1, y_1, z_1]$  übergehen können, indem man setzt

$$x_1 = x + fy + gz \\ \text{etc.}$$

Wenn die  $f$  und  $g$  positiv sind, wird auch das neue System für die Spektralfarben keine negativen Werthe ergeben.

Es kommt nun zunächst darauf an, sechs Verhältnisse der Constanten in den Gleichungen 4 so zu bestimmen, daß die Werthe von  $dE$  aus den Gleichungen 3b alle einander möglichst gleich werden. Dann würde nachher der berechnete Grad der Empfindlichkeit zu vergleichen sein mit dem, der für Helligkeitsunterschiede mittels der Gleichung 3 gefunden ist.

Die Werthe der Constanten, die uns bis jetzt in unseren Berechnungsversuchen am besten zu genügen schienen, waren

$$\begin{aligned} x &= 0,7964 \cdot R - 0,3515 \cdot G + 0,555 \cdot V \\ y &= 0,2612 \cdot R + 0,3483 \cdot G + 0,3930 \cdot V \\ z &= 0,250 \cdot R + 0,125 \cdot G + 0,625 \cdot V \end{aligned}$$

Die im Folgenden angegebenen Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{dR}{d\lambda}, \frac{dG}{d\lambda}, \frac{dV}{d\lambda},$$

sowie auch einige der Werthe von  $R$ ,  $G$ ,  $V$  wurden, wie oben bemerkt, durch graphische Interpolation theils gefunden, theils ausgeglichen.

Die  $\delta\lambda$  sind die von KÖNIG gefundenen mittleren Fehler, welche in je zehn Versuchen, das Spektrometer auf gleiche Farben einzustellen, begangen wurden.

Tafel I.  
Data für die Rechnung

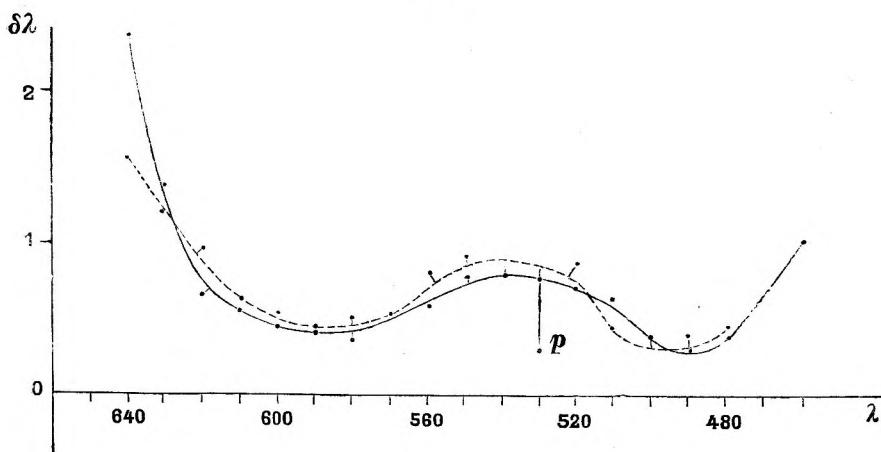
Wellenlänge	$R$	$G$	$V$	$\frac{dR}{d\lambda}$	$\frac{dG}{d\lambda}$	$\frac{dV}{d\lambda}$	$\delta\lambda$
640 $\mu\mu$	2,66	0,22	0	— 0,116	— 0,023	0	2,37 $\mu\mu$
630 „	3,95	0,54	0	— 0,129	— 0,044	0	1,35 „
620 „	5,35	1,12	0	— 0,160	— 0,078	0	0,67 „
610 „	6,60	2,17	0	— 0,107	— 0,123	0	0,55 „
600 „	7,51	3,60	0	— 0,081	— 0,165	0	0,45 „
590 „	8,27	5,48	0	— 0,067	— 0,208	0	0,42 „
580 „	8,90	7,65	0	— 0,055	— 0,200	0	0,38 „
570 „	9,37	9,98	0	— 0,039	— 0,199	0	0,51 „
560 „	9,56	11,45	0,22	0	— 0,100	0	0,58 „
550 „	9,21	12,00	0,3	+ 0,068	0	— 0,0138	0,77 „
540 „	8,30	11,55	0,49	+ 0,121	+ 0,083	— 0,0233	0,80 „
530 „	6,54	10,36	0,75	+ 0,202	+ 0,139	— 0,0326	0,77 „
520 „	4,62	8,45	1,10	+ 0,171	+ 0,228	— 0,0400	0,71 „
510 „	3,0	5,75	1,55	+ 0,162	+ 0,271	— 0,0536	0,64 „
500 „	1,50	3,32	2,2	+ 0,114	+ 0,168	— 0,0887	0,35 „
490 „	0,78	2,24	3,6	+ 0,051	+ 0,059	— 0,208	0,31 „
480 „	0,4	1,88	7,9	+ 0,043	+ 0,028	— 0,52	0,38 „

Dies sind die durch die Beobachtungen gegebenen Grundlagen der Rechnung. Die folgende Tafel II. giebt die Ergebnisse der Rechnung.

Tafel II.

Wellen- länge	$x$	$y$	$z$	$\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{d\lambda}$	$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{d\lambda}$	$\frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{d\lambda}$	$dE$
640 $\mu\mu$	2,05	0,73	0,69	— 0,0413	— 0,0496	— 0,0455	(0,0263)
630 „	2,98	1,18	1,10	— 0,0294	— 0,0402	— 0,0346	0,0196
620 „	3,88	1,70	1,47	— 0,0261	— 0,0391	— 0,0359	0,0120
610 „	4,52	2,38	1,92	— 0,0094	— 0,0298	— 0,0221	0,0151
600 „	4,75	3,10	2,32	— 0,0014	— 0,0250	— 0,0175	0,0146
590 „	4,68	3,95	2,76	+ 0,0043	— 0,0226	— 0,0156	0,0158
580 „	4,43	4,86	3,18	+ 0,0060	— 0,0171	— 0,0122	0,0125
570 „	3,99	5,79	3,59	+ 0,0098	— 0,0136	— 0,0097	0,0173
560 „	3,77	6,43	3,96	+ 0,0093	— 0,0054	— 0,0032	0,0125
550 „	3,31	6,47	3,99	+ 0,0142	+ 0,0017	+ 0,0021	0,0146
540 „	2,86	6,26	3,82	+ 0,0210	+ 0,0078	+ 0,0064	0,0173
530 „	2,00	5,51	3,40	+ 0,0469	+ 0,0155	+ 0,0140	(0,0389)
520 „	1,37	4,51	2,90	+ 0,0196	+ 0,0300	+ 0,0159	0,0138
510 „	1,24	3,31	2,44	+ 0,0043	+ 0,0338	+ 0,0167	(0,0253)
500 „	1,33	2,38	2,16	— 0,0129	+ 0,0219	— 0,0027	0,0169
490 „	1,83	2,38	2,72	— 0,0287	— 0,0202	— 0,0404	0,0133
480 „	4,04	3,86	5,27	— 0,1028	— 0,0725	— 0,0877	0,0141
Mittel:							0,0176

Fig. 1.





Um eine anschauliche Übersicht über die bisher erreichte Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie zu geben, habe ich in Fig. 1 die Werthe des  $\delta\lambda$  dargestellt, wie sie KÖNIGS letzte Beobachtungen ergeben haben. Diese sind durch die ausgezogene Curve verbunden. Die punctirte Curve dagegen giebt die Werthe von  $\delta\lambda$ , wie sie nach der Theorie sein müßten, um ein constantes  $dE$  bei den gemachten Annahmen über die Grundfarben zu erreichen. Man sieht daſs eine ziemlich ähnlich verlaufende Curve, wie die der beobachteten Werthe, durch die gegebene Theorie erreicht werden kann. Auch würden weitere Verbesserungen der Constanten  $a, b, c$  wohl noch merklich bessere Übereinstimmung haben erreichen lassen, als es bisher gelungen ist. Die auffallendste Abweichung ist bei  $\lambda = 530 \mu\mu$ , wo ein einzelner ganz kleiner Werth von  $\delta\lambda$ , in Fig. 1 mit  $p$  bezeichnet (bezüglich gröſser Werth von  $\delta E$ ), mitten zwischen solchen erscheint, die dem dort bestehenden Maximum von  $\delta\lambda$  entsprechen. Es liegt diese Stelle im Grün nahe bei der Linie  $E$  und dort mußte ein besonders weites Intervall (von  $\lambda = 536 \mu\mu$  bis  $516,5 \mu\mu$ ) durch Interpolation ausgefüllt werden, wodurch die Werthe der Differentialquotienten an jener Stelle erheblich unsicher werden. Der hier vorliegende jähe Sprung zwischen den drei benachbarten Werthen läſst sich durch keine Combination der Constanten  $a, b, c$  beseitigen. Es ist hauptsächlich das Glied

$$\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{d\lambda}\right),$$

was hier die Abweichung verursacht, und diese wird um so gröſser, da  $x$  hier einem Minimum ganz nahe ist und das  $x$  im Nenner deshalb sehr klein ausfällt.

Übrigens könnte es wohl sein, daſs eine der Curven der Farbenwerthe der Spektralfarben eine Ecke hätte mit plötzlicher Änderung des Differentialquotienten. Unsere Interpolationsrechnungen, die von der Annahme einer continuirlichen Krümmung der Kurven ausgehen, müssen an einer solchen Stelle irre führen.

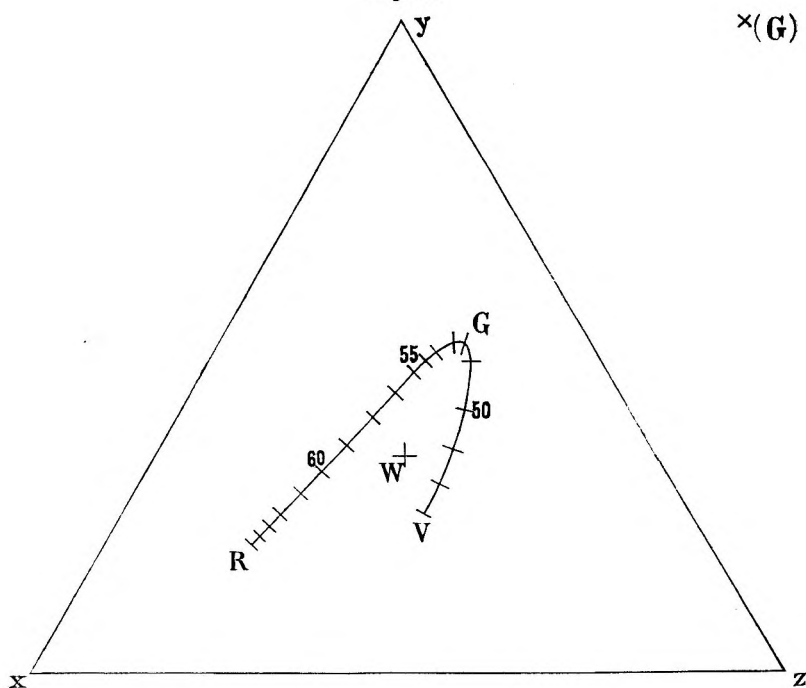
Sonst ist noch zu bemerken, daſs überall, wo die Lichtstärke einer der drei Farben gegen die anderen sehr zurücktritt, die verminderte Empfindlichkeit für die Unterschiedsschwellen schwachen Lichtes sich geltend macht. Dort wird, wenn nicht

gleichzeitig der Differentialquotient nach  $\lambda$  sehr klein wird, zu erwarten sein, daß die Empfindlichkeit für die Farbenunterschiede in der Beobachtung sich geringer ( $\delta\lambda$  dagegen größer) zeigen wird, als sie der Theorie nach sein sollte. Das ist also außer bei der schon angegebenen Stelle zwischen  $530 \mu\mu$  und  $510 \mu\mu$ , wo das eingemischte Roth sehr schwach ist, auch für die grüne Elementarfarbe am rothen Ende des Spektrum der Fall, und dem entspricht hier die Abweichung der Curven voneinander, welche Fig. 1 bei  $640 \mu\mu$  zeigt.

### Die gefundenen Grundfarben.

Das Verhältniß der durch unsere Rechnung wenigstens provisorisch gefundenen Grundfarben zu den Spektralfarben macht sich am besten in einem Farbdreieck anschaulich. Ein

Fig. 2.



solches ist in Fig. 2 construirt. Die Farbenwerthe der neuen Grundfarben sind einander gleich gesetzt und dieselben daher in den Ecken des gleichseitigen Dreiecks  $x y z$  angebracht, wobei nach den auf S. 8 gegebenen Werthen Weiß

(nämlich das des Sonnenlichts) im Mittelpunkt des Dreiecks bei *W* liegt. Die Curve *R G V* entspricht der Reihe der Spektralfarben. Diese liegen alle ziemlich entfernt von den Ecken des Dreiecks, sind also, wie es schon die oben gegebenen Zahlenwerthe anzeigten, stark gemischt, auch die Endfarben Roth und Violett.

Das spektrale Rot würde nach den auf S. 8 angegebenen Werthen eine weißliche und ein wenig gelbliche Modifikation der Grundfarbe *x* sein; letztere also würde etwa ein höchst gesättigtes Carminroth darstellen. Das spektrale Violett wäre eine weißröthliche Abänderung der Grundfarbe *z*, und diese letztere wäre also etwa mit dem Ultramarinblau im Farbenton zu vergleichen. Beide Farbenbestimmungen stimmten demnach mit Hrn. E. HERINGS Vermuthungen. Endlich würde die Grundfarbe *y* im Farbenton der Stelle zwischen  $\lambda = 540 \mu\mu$  und  $560 \mu\mu$  entsprechen, wo  $x = z$  ist; das wäre im gelblichen Grün, und zwar grüner, als die Complementärfarbe des Violett, etwa dem Grün der Vegetation entsprechend.

Die starke Wölbung der Curve bei *G* entspricht dem spektralen Grün bei FRAUNHOFERS Linie *E*. Das (*G*) außerhalb des Dreiecks bezeichnet das von A. KÖNIG und C. DIETERICI ursprünglich als Elementarfarbe für ihre Mischungsversuche gewählte Grün *G*. Diese Farbe war übrigens auch schon außerhalb ihres nach der Analogie der farbenblinden Augen construirten Farbdreiecks *R*, *G*, *B* gelegen.

Da das spektrale Grün dem Rande des Farbdreiecks verhältnißmäßig nahe liegt, bekommt es eine unter den übrigen Farben, die im Farbenton der Mischung zweier Grundfarben entsprechen, ziemlich hervortretende Farbensättigung. Die bei  $\lambda = 530 \mu\mu$  hervortretende Unregelmäßigkeit der Empfindlichkeitskurve fällt gerade in diese starke Krümmung der Farbenkurve im Grün, was die Unsicherheit der dort gemachten Messungen und Interpolationen erklärlich machen mag.

Übrigens zeigt diese Curve an, daß alle einfachen Farben die sämtlichen lichtempfindlichen Nerven Elemente des trichromatischen Auges gleichzeitig und mit nur mäßigen Intensitätsunterschieden erregen. Wenn wir also diese Erregungen auf die Anwesenheit dreier photochemisch zu verändernder Substanzen in der Netzhaut hypothetisch zurückführen, so müssen wir schließen, daß diese alle drei nahehin

gleiche Grenzen der Lichtempfindlichkeit haben und nur untergeordnete Abweichungen von mäßigem Betrage im Gange der photochemischen Wirkung für die verschiedenen Wellenlängen zeigen. Ähnliche Abänderungen durch Zumischung anderer Substanzen, Substitutionen analoger Atomgruppen u. s. w. kommen ja auch bei anderen photochemisch veränderlichen Substanzen vor, wie sie in der Photographie gebraucht werden, z. B. bei den verschiedenen Haloidsalzen des Silbers.

### Vergleich mit dichromatischen Augen.

Die hier gefundenen Grundfarben stimmen nicht mit denen überein, welche die Hrn. A. KÖNIG und C. DIETERICI aus der Vergleichung farbenblinder Augen mit normalsichtigen hergeleitet haben. Indessen liegt in den Thatsachen hierbei kein nothwendiger Widerspruch. Nur die besondere, von TH. YOUNG ausgegangene und von den meisten Bearbeitern der Theorie, auch von mir selbst, von E. HERING, A. KÖNIG und C. DIETERICI früher angenommene Erklärungsweise, daß bei den Dichromaten einfach eine der Grunderregungen des trichromatischen Auges nicht zu Stande komme, tritt in Widerspruch mit dem bezeichneten Ergebniss. Aber es ist eine allgemeinere Hypothese über das Wesen der Dichromasie möglich, bei welcher die Nothwendigkeit aufhört, daß die fehlende Farbe eine der Grundfarben sei, und doch die Regel festgehalten wird, daß alle Farbenspaare, welche für das normale trichromatische Auge gleich aussehen, auch für das dichromatische gleich aussehend bleiben.

Um dies durch ein einfaches Beispiel anschaulich zu machen, nehme man an, daß die Lichteinwirkungen, welche sonst die Empfindung Grün erregen, die grünempfindenden Nerven nicht, wohl aber die roth- und blauempfindenden in bestimmtem festen Verhältniss erregen. Alle Empfindungen eines solchen Auges würden aus Rot und Blau gemischt erscheinen; es wäre dichromatisch. Aber die Farben, welche auf der Farbenscheibe in denjenigen Geraden liegen, die durch den Ort der grünen Grundempfindung gezogen werden, werden im Allgemeinen nicht gleich erscheinen, wie es unter der älteren Annahme der Fall sein würde, wo einfach Ausfall der grünen Erregung angenommen wurde. Denn statt der wechselnden Menge des Grün im trichromatischen Auge würde hier eine wechselnde Menge einer bestimmten Purpurfarbe zu dem schon vorhandenen, verschieden gemischten

Purpur hinzukommen und diesen in der Mehrzahl der Fälle verändern. In diesem Falle würde in der That der Schnittpunkt derjenigen Linien des dichromatischen Feldes, welche dichromatisch gleich erscheinende Farben enthalten, außerhalb des Farbdreiecks jenseits der grünen Ecke desselben liegen müssen.

Dies Verhältniß bliebe ungeändert, wenn wir hierzu noch weiter annehmen wollten, daß jede Erregung des Roth, auch die eben neu angenommene, in bestimmtem Verhältniß auch die grünempfindenden Nerventheile erregte, und also eine bestimmte Art Gelb zur Empfindung brächte, und jede Erregung des Blau ebenso eine bestimmte Art Grünblau. Dann wären sämtliche Empfindungen eines solchen Auges aus Gelb und Grünblau zu mischen, während der Schnittpunkt der dichromatischen Linien gleichen Aussehens dadurch nicht geändert würde.

#### Allgemeinere Form der Dichromasie.

Bezeichnen wir, wie bisher, mit  $x, y, z$  die Farbenwerthe der verschiedenen Lichter für das trichromatische Auge und damit zugleich das Maass für die ihnen entsprechenden physiologischen Prozesse im Sehnervenapparat, welche nebeneinander bestehen und sich addiren bei der Erzeugung der Farbeempfindung. Dagegen wollen wir mit  $\xi, \eta, \zeta$  die entsprechenden physiologischen Prozesse im dichromatischen Auge bezeichnen.

Die erste Regel, die sich aus den Beobachtungen ergeben hat, ist die, daß farbige Lichter, die den normalen Trichromaten gleich aussehen, es auch für die Dichromaten thun. Also wenn  $x, y$  und  $z$  gleichen Werth für zwei aus verschiedenen Spektralfarben gemischte Lichter haben, haben für beide auch  $\xi, \eta$  und  $\zeta$  gleiche Werthe, d. h. die letzteren Größen sind Funktionen von  $x, y, z$ , und nur von diesen.

Die zweite Regel ist die, daß NEWTONS Mischungsgesetz auch für die Farben des dichromatischen Systems anwendbar ist, was zu einer Gleichung von der Form führt

$$\xi(x + x_1) = \xi(x) + \xi(x_1),$$

woraus folgt, daß die  $\xi, \eta, \zeta$  nur lineare Functionen von  $x, y, z$  sein können, und zwar homogene lineare, da  $\xi = \eta = \zeta = 0$

sein muß, wenn  $x=y=z=0$ . Da aber  $\xi, \eta, \zeta$  nur zwei Variable vertreten sollen, so wird zwischen ihren Werthen eine Gleichung stattfinden müssen, die wiederum nur eine lineare sein kann. Wir kommen also zu drei Gleichungen folgender Form:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta && \dots\dots\dots \} 5 \\ \xi &= p_1x + p_2y + p_3z && \dots\dots\dots \} 5a \\ \eta &= q_1x + q_2y + q_3z && \dots\dots\dots \} \end{aligned}$$

Die Coefficienten  $p$  und  $q$  dieser letzteren Gleichungen müssen positiv sein, da  $\xi$  und  $\eta$  für alle positive Werthe von  $x, y$  und  $z$  positiv sein müssen. Dagegen muß einer der Coefficienten der Gleichung 5 nothwendig das entgegengesetzte Vorzeichen von den beiden anderen haben, da  $\xi, \eta, \zeta$  in TH. YOUNG'S Theorie nothwendig positive Gröfsen für alle physiologisch möglichen Farbenempfindungen sein müssen.

Es sei  $\gamma$  dieser Coefficient mit abweichendem Zeichen. Schreiben wir

$$-\frac{\alpha}{\gamma} = a \text{ und } -\frac{\beta}{\gamma} = b,$$

wo also  $a$  und  $b$  positiv sind, so ergibt Gleichung 5

$$\zeta = a\xi + b\eta \dots\dots\dots \} 5b$$

Setzen wir weiter

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= a\xi \text{ und } \zeta_2 = b\eta \\ \zeta &= \zeta_1 + \zeta_2, \end{aligned}$$

so können wir die Empfindung  $\xi$  mit der ihr proportionalen  $\zeta_1 = a\xi$  zusammenfassen in die Empfindung einer Mischfarbe von bestimmter Zusammensetzung  $\zeta_1$  und  $\xi$ , und ebenso  $\zeta_2 = b\eta$  mit  $\eta$ . Der ganze vorhandene Farbenwerth des dichromatischen Auges erscheint dann als Mischung in veränderlichem Verhältniß von diesen beiden bestimmt zusammengesetzten Farben. Dadurch wäre dann auch das Aussehen der dichromatischen Farben bestimmt.

Um die besprochenen Verhältnisse in einer analytisch geometrischen Darstellung des Farbensystems anschaulich zu machen, verfahren wir am einfachsten,<sup>1</sup> wenn wir die Werthe

<sup>1</sup> S. mein *Handbuch der Physiologischen Optik*, 2. Aufl., S. 336—338.



der Grundfarben des trichromatischen Systems  $x, y, z$  als rechtwinklige Coordinaten eines die betreffende Farbe enthaltenden Punctes gebrauchen. Nach YOUNGS Hypothese, welche nur positive Werthe der physiologisch möglichen Farbewerthe zuläfst, ist dann das System aller Farben in der rechtwinkligen positiven Ecke dieses Coordinatensystems angeordnet. Als Farbentafel kann jede Ebene gelten, die die drei positiven Coordinataxen schneidet, z. B. die Ebene

$$x + y + z = \text{Const.} \dots\dots\dots \} 5c,$$

in der das Farbendreieck ein gleichseitiges wird.

Unter diesen Annahmen würde die Gleichung

$$\xi = p_1 \cdot x + p_2 \cdot y + p_3 \cdot z = 0 \dots\dots\dots \} 6$$

eine Ebene darstellen, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten (die Spitze der Farbenecke) geht, aber ganz aufserhalb der positiven Ecke liegt, da bei den vorausgesetzten positiven Werthen der Coefficienten  $p$  nothwendig eine oder zwei der Coordinaten negative Werthe haben müssen, um das Trinom zu Null zu machen.

Dasselbe würde gelten für die andere Gleichung

$$\eta = q_1 \cdot x + q_2 \cdot y + q_3 \cdot z = 0 \dots\dots\dots \} 6a,$$

Sollen die beiden Gleichungen gleichzeitig gelten, so würde dadurch die Schnittlinie der beiden Ebenen, beziehlich wenn wir die Gleichung der Farbentafel (5c) hinzunehmen, der Punct, wo die Schnittlinie die Farbentafel schneidet, gegeben sein.

Setzen wir dagegen die Gleichung

$$B \cdot \xi = A \cdot \eta \dots\dots\dots \} 6b$$

oder

$$(Bp_1 - Aq_1) \cdot x + (Bp_2 - Aq_2) \cdot y + (Bp_3 - Aq_3) \cdot z = 0 \} 6c,$$

so ist dies wieder Gleichung einer Ebene, und zwar einer solchen, welche die beiden früher genannten  $\xi = 0$  und  $\eta = 0$  in derselben Schnittlinie schneidet, da diese beiden letzteren Gleichungen zusammen auch 5c erfüllen.

Die Gleichung 6b aber können wir auch schreiben

$$\xi : \eta = A : B$$

und mit Hülfe von Gleichung 5 ergibt sich dann für die Punkte der Ebene 6b weiter

$$\frac{\zeta}{\xi} = a + \frac{b \cdot B}{A}$$

$$\frac{\zeta}{\eta} = b + \frac{A}{B'}$$

d. h., die drei Farbenempfindungen haben in jeder Ebene von der Form 6b constantes Verhältniß zu einander. Die ganze Ebene ist gleichfarbig, und alle in einem dichromatischen Farbensystem gleichfarbigen Ebenen gehen durch eine gemeinsame Schnittlinie, die aber nothwendig außerhalb oder an der Grenze der positiven Farbenecke liegt. In der nach NEWTON konstruirten Farbentafel schneiden sich alle gleichfarbigen Linien eines dichromatischen Systems in einem Punkte außerhalb oder an der Grenze des trichromatischen Farbendreiecks.

Zu bemerken ist, daß in diesem Punkte auch  $\zeta = 0$  werden, also jede Lichtempfindung fehlen würde, was aber thatsächlich nur dann in Betracht kommt, wenn der Punkt an der Grenze oder in einer Ecke des Farbengebietes liegt. Letzteres würde der älteren Annahme über die Natur der Dichromasie entsprechen.

In unseren Betrachtungen ist keinerlei Beschränkung für die Lage des Schnittpunctes gegeben. Daher fällt bei dieser Verallgemeinerung der Theorie der Dichromasie auch die Trennung in zwei scharf getrennte Klassen Grünblinde und Rothblinde weg, welche ja auch den Beobachtungen gegenüber nicht ganz gesichert erschien.

Damit ist auch nachgewiesen, daß der Mangel an Übereinstimmung zwischen der fehlenden Farbe der dichromatischen Systeme und je einer der von uns gefundenen Grundfarben keinen unlöslichen Widerspruch einschließt.

Die Messungen der Hrn. KÖNIG und DIETERICI haben für zwei Klassen von Dichromaten die fehlenden Farben auf die von ihnen gewählten Elementarfarben  $R$ ,  $G$ ,  $V$  zurückgeführt.

Diejenige Grundfarbe, welche normale Trichromaten mehr haben als Grünblinde, ist von den beiden Autoren bezeichnet als:

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{5} R + \frac{4}{5} G,$$

dagegen die andere, welche normale Trichromaten mehr haben als Rothblinde, als

$$\mathfrak{R} = \frac{20 R - 3 G + 2 V}{19}.$$

Wenn wir die oben gefundenen Gleichungen, in denen die Werthe von  $x, y, z$  durch  $R, G, V$  ausgedrückt waren, benutzen, um die letzteren Gröfsen durch  $x, y, z$  auszudrücken, erhalten wir:

$$\begin{aligned} R &= 1,328 \cdot x + 2,278 \cdot y - 2,611 \cdot z \\ G &= -0,5122 \cdot x + 2,8294 \cdot y - 1,3249 \cdot z \\ V &= -0,4288 \cdot x - 1,4771 \cdot y + 2,9094 \cdot z. \end{aligned}$$

Ferner die beiden fehlenden Farben

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= 1,434 \cdot x + 1,797 \cdot y - 2,132 \cdot z \\ \mathfrak{G} &= -0,1442 \cdot x + 2,715 \cdot y - 1,483 \cdot z. \end{aligned}$$

Da negative Coefficienten anzeigen, daß die definirten Farben aufserhalb des Farbendreiecks liegen, so ergibt sich dies hiermit thatsächlich für die fehlenden Farben beider Klassen von Dichromaten. Die fehlende Farbe der Grünblinden würde zwischen den verlängerten Seiten des Farbendreiecks liegen, die sich im Grün schneiden, näher dem vom Roth kommenden Schenkel, die der Rothblinden aufserhalb der Roth-Grün-Linie, deren Mitte etwa gegenüber, aber ziemlich entfernt.

Vergleichung der Empfindlichkeit für Helligkeitsunterschiede mit der für Farbenunterschiede.

Der kleinste erkennbare Bruchtheil für Helligkeitsunterschiede bei weißer Beleuchtung in den Beobachtungen von Hrn. A. KÖNIG unter ähnlichen äusseren Einrichtungen, ähnlicher Gröfse des Gesichtsfeldes u. s. w., wie bei den Farbenvergleichen betrug 0,0173. Die Gleichung (3) ergibt alsdann

$$dE_h = k \cdot 0,0173 \cdot \sqrt{3}$$

Der Werth von  $k$  muß, wie oben bemerkt, bei den Farbenvergleichungsversuchen, in denen die Rechnung vom mittleren Fehler ausgeht, 1,8238 mal so groß genommen werden, als bei den Helligkeitsvergleichen, bei denen noch eben sichtbare Unterschiede gesucht sind. Wir erhalten daher aus den letzteren, wenn wir den Werth von  $dE$  hier auf dasselbe Maass zurückführen wollen, wie es in der obigen Tafel II (S. 10) gebraucht ist,

$$dE = \frac{0,0173}{1,8238} \cdot \sqrt{3} = 0,01643,$$

während der aus den Werthen der Tafel II gefundene Mittelwerth ist

$$dE = 0,0176.$$

Diese Übereinstimmung kann unter den gegebenen Umständen wohl als über Erwarten gut bezeichnet werden. Sie entspricht der Voraussetzung, von der wir hier ausgegangen sind, daß die Wahrnehmung der Farbenunterschiede ursprünglich auf der Wahrnehmung von Helligkeitsunterschieden beruht.

Eine weitere Prüfung des hier aufgestellten Gesetzes wird wohl besser durch direkte Mischung je zweier Spektralfarben in verschiedenem Verhältnisse auszuführen sein, bei denen das Mischungsverhältniß unmittelbar am Apparat abgelesen werden kann, und bei denen auch mannigfachere Vergleichen herzustellen sind, als sie zwischen unmittelbar benachbarten Spektralfarben eintreten.

Die Rechnung für das dichromatische Auge wäre ebenfalls mit den hier gefundenen Grundfarben  $x, y, z$  durchzuführen. Indessen läßt die Umformung der Formel schon übersehen, daß dabei noch eine neue Constante eintritt, über die frei zu verfügen ist, und man wird mit deren Hülfe also jedenfalls eine bessere Übereinstimmung mit der Formel herstellen können, als mit der kleineren Zahl von Constanten. Die mühsame Rechnung in diesem noch ziemlich provisorischen Zustande unserer Kenntnisse des Gegenstandes durchzuführen, schien mir überflüssig.

## Berichtigung.

Von

H. VON HELMHOLTZ.

In meiner in dem vorliegenden Bande dieser Zeitschrift enthaltenen Abhandlung über die Anwendung des psychophysischen Gesetzes auf Farbenunterschiede trichromatischer Augen ist auf Seite 19 ein Versehen vorgekommen in den Rechnungen, welche sich auf die mögliche Erweiterung der Theorie der Dichromasie beziehen. Es handelt sich dort darum, zu ermitteln, ob die von den Herren A. KÖNIG und C. DIETERICI mit  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{G}$  bezeichneten Farben, welche nach ihren Ermittlungen diejenigen sind, die den beiden Hauptklassen der dichromatischen Augen fehlen, außerhalb oder innerhalb des nach den Unterschiedsempfindlichkeiten berechneten neuen Farbendreiecks liegen, dessen Grundfarbenwerthe dort mit  $x, y, z$  bezeichnet sind. Es sind dazu Gleichungen benutzt worden, welche die Werthe von  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{G}$  ausgedrückt in  $x, y, z$  ergaben; und ist aus dem Umstande, daß die dabei gefundenen Coefficienten in beiden Werthen zum Theil negativ sind, geschlossen worden, daß die Farben  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{G}$ , wie es die Theorie verlangte, beide außerhalb des Farbendreiecks  $[x, y, z]$  liegen. Nach dem Sinne aber, den die genannten Autoren ihren Zeichen  $\mathfrak{R}, \mathfrak{G}, \mathfrak{B}$  untergelegt haben, und in dem auch die  $x, y, z$  genommen werden müssen, ist dies ein Irrthum. Man muß vielmehr, um die bezeichnete Frage zu entscheiden, die Werthe der  $x, y, z$  als Functionen der  $\mathfrak{R}, \mathfrak{G}, \mathfrak{B}$  ausdrücken. Wenn man zwei von diesen letzteren Größen gleich Null setzt, und die dritte übrig bleibende dann negative Werthe einer der  $x, y, z$  ergibt, so liegt die betreffende Farbe außerhalb des Dreiecks  $[x, y, z]$ . Diese Umrechnung ergibt folgende Werthe:

$$x = 0,810 \cdot \mathfrak{R} - 0,280 \cdot \mathfrak{G} + 0,470 \cdot \mathfrak{B}$$

$$y = 0,159 \cdot \mathfrak{R} + 0,466 \cdot \mathfrak{G} + 0,376 \cdot \mathfrak{B}$$

$$z = 0,200 \cdot \mathfrak{R} + 0,196 \cdot \mathfrak{G} + 0,604 \cdot \mathfrak{B}$$

Daraus geht hervor, daß, wenn  $\mathfrak{R} = \mathfrak{B} = 0$  ist und nur die Farbe  $\mathfrak{G}$  übrig bleibt, diese in der That einen negativen Werth des  $x$  hat, und außerhalb des Farbendreiecks  $[x, y, z]$ , jenseits seiner grünblauen Seite liegt, während die anderen beiden Grundfarben der genannten Autoren  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{B}$  im Innern des Dreiecks liegen. Das Roth indessen liegt der Grundfarbe  $x$  nahe genug, daß bei kleinen Änderungen der zu Grunde liegenden Beobachtungszahlen es leicht an den Rand des Dreiecks oder in seine rothe Ecke rücken könnte, wie es die dort vorgetragene Theorie fordert. Ich kann in dieser Beziehung nur meine Bitte wiederholen, den ganzen Aufsatz nur als einen ersten Versuch zu betrachten, um zu sehen, wie weit das vorhandene, zu anderen Zwecken gesammelte Beobachtungsmaterial sich in die vorgetragene Theorie einfügt.