

# Sur l'application de la méthode de Mr. Ludimar Hermann à l'analyse des courbes périodiques.

Par M. N. O u m o f f,

professeur de physique de l'Université Impériale de Moscou.

L'éminent physiologiste de Koenigsberg, Mr. Ludimar Hermann, dans un travail important <sup>1)</sup> sur la constitution des voyelles, expose une méthode ingénieuse d'analyse d'une courbe périodique. Un compte-rendu succinct de cette méthode fut aussi donné par Mr. Weiss <sup>2)</sup>.

Considérant les applications du procédé de Mr. Hermann à la théorie des voyelles, j'ai pensé utile de l'approfondir et de mettre en lumière son véritable sens. J'exposerai, par suite, dans cet article les résultats d'une analyse théorique de la méthode, faite en commun avec mes jeunes collaborateurs MM. Batchinski et Gabritchewski.

1. Mr. Hermann se propose de calculer les coefficients de la série de Fourier qui doit représenter l'ordonnée d'une courbe périodique trouvée expérimentalement.

Posons:

$$y = \frac{1}{2} A_0 + \sum_1^{\infty} A_r \cos r \frac{2\pi}{nh} x + \sum_1^{\infty} B_r \sin r \frac{2\pi}{nh} x \quad (1)$$

$$A_r = \frac{2}{nh} \int_0^{nh} y \cos r \frac{2\pi}{nh} x dx; \quad B_r = \frac{2}{nh} \int_0^{nh} y \sin r \frac{2\pi}{nh} x dx, \quad (2)$$

L'ordonnée de la courbe est  $y$ ;  $nh$ —la longueur de la période sur l'axe des  $x$ . Cette période est sensée être divisée en parties égales, la longueur de chacune étant égale à  $h$ . Pour calculer les coefficients  $A_r$  et  $B_r$ , Mr. Hermann pose dans les formules (2)  $dx = h$ ,  $x = 0, h, \dots, (n-1)h$ , et égale les  $y$  aux ordonnées mesurées  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  correspondant aux valeurs mentionnées des  $x$ . En désignant les coefficients  $A_r$  et  $B_r$  trouvés de cette manière par des minuscules, Mr. Hermann pose:

$$a_r = \frac{2}{n} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} y_{\nu} \cos \left( 2\pi r \frac{\nu}{n} \right); \quad b_r = \frac{2}{n} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} y_{\nu} \sin \left( 2\pi r \frac{\nu}{n} \right) \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Pflüger's Archiv für Physiologie, Bde: 47, 48, 53.

<sup>2)</sup> Séances de la Société française de physique, année 1897, p. 84

Pour calculer ces expressions, Mr. Hermann a proposé une méthode très ingénieuse, qui consiste à employer des schablons ou papiers fenêtrés, spécialement arrangés, et pour laquelle nous renvoyons le lecteur à la description originale <sup>1)</sup>.

2. Analysons maintenant la méthode de Mr. Hermann.

En admettant que la courbe est constituée par des sinussoïdes harmoniques entre eux, on voit que les  $y_v$  des expressions (3) représentent les sommes des ordonnées pour des valeurs  $x = v h$  des courbes de la forme

$$(5) \quad A_m \cos m \frac{2\pi}{nh} x \text{ et } B_m \sin m \frac{2\pi}{nh} x. \quad (4)$$

On peut donc regarder les  $a_r$  et  $b_r$  comme composés de termes dont chacun est dû à la présence d'une fonction harmonique simple (4) ou (5). Par suite en posant:

$$a_r = \sum (a_r^m + \beta_r^m), \quad b_r = \sum (b_r^m + \alpha_r^m) \quad (6)$$

le signe de la somme s'étendant aux différents  $m$ , nous aurons:

$$a_r^m = A_m \frac{2}{n} \sum_{v=0}^{v=n-1} \cos \frac{2\pi}{n} m v \cos \frac{2\pi r}{n} v, \quad b_r^m = B_m \frac{2}{n} \sum_{v=0}^{v=n-1} \sin \frac{2\pi}{n} m v \sin \frac{2\pi r}{n} v \quad (7)$$

$$\beta_r^m = B_m \frac{2}{n} \sum_{v=0}^{v=n-1} \sin \frac{2\pi}{n} m v \cos \frac{2\pi r}{n} v, \quad \alpha_r^m = A_m \frac{2}{n} \sum_{v=0}^{v=n-1} \cos \frac{2\pi}{n} m v \sin \frac{2\pi r}{n} v.$$

Introduisons les notations suivantes:

$$\xi = \frac{\sin (2n-1) \frac{\pi}{n} (m-r)}{2 \sin \frac{\pi}{n} (m-r)}, \quad \eta = \frac{\sin (2n-1) \frac{\pi}{n} (m+r)}{2 \sin \frac{\pi}{n} (m+r)} \quad (8)$$

$$s = \frac{\sin \pi (m+r) \sin (n-1) \frac{\pi}{n} (m+r)}{\sin \frac{\pi}{n} (m+r)},$$

<sup>1)</sup> l. c. Bd. 47, p. 49.

$$\sigma = \frac{\sin \pi (m - r) \sin (n - 1) \frac{\pi}{n} (m - r)}{\sin \frac{\pi}{n} (m - r)}.$$

Une transformation connue nous donne:

$$\begin{aligned} a_r^m &= A_m \frac{1}{n} \left[ 1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{r-1} \right], & b_r^m &= B_m \frac{1}{n} \left[ \zeta^r - \zeta \right] \\ \beta_r^m &= B_m \frac{1}{n} \left[ s + \sigma \right], & \alpha_r^m &= A_m \frac{1}{n} \left[ s - \sigma \right] \end{aligned} \quad (9)$$

En admettant que  $m$  soit un nombre entier, nous aurons toujours

$$\begin{aligned} \beta_r^m &= \alpha_r^m = 0. \text{ Ainsi:} \\ a_r &= \sum a_r^m, & b_r &= \sum b_r^m. \end{aligned} \quad (10)$$

Les coefficients  $a_r^m$  et  $b_r^m$  ne diffèrent de zéro que dans les cas suivants:  $m = r$ ,  $m - r = \pm ni$ ,  $m + r = ni$ ,  $i$  étant un nombre entier positif.

Nous aurons donc

$$a_m^m = A_m, \quad b_m^m = B_m \quad (11)$$

et en outre:

pour  $in > m$ :

$$a_{in-m}^m = A_m, \quad b_{in-m}^m = -B_m; \quad a_{in+m}^m = A_m, \quad b_{in+m}^m = B_m; \quad (12)$$

pour  $in < m$ :

$$a_{m-in}^m = A_m, \quad b_{m-in}^m = B_m.$$

Nous trouvons par conséquent que la méthode de Mr. Hermann ajoutée à une sinusoïde une infinité d'autres sinusoïdes harmoniques avec elle. La série qui doit représenter la sinusoïde (4) et (5) sera donc formée de termes ayant les coefficients suivants:

$m < \frac{n}{2}$ :

$$a_m^m, a_{n-m}^m, a_{n+m}^m \dots \dots \dots; \quad b_m^m, b_{n-m}^m, b_{n+m}^m \dots \dots \dots; \quad (13)$$

$\frac{n}{2} < m < n$ :

$$a_{n-m}^m, a_m^m, a_{2n-m}^m, a_{n+m}^m \dots \dots \dots; \quad b_{n-m}^m, b_m^m, b_{2n-m}^m, \dots \dots \dots; \quad (14)$$

Ainsi dans le cas d'une courbe formée par des termes harmoniques, la méthode du calcul des coefficients, proposée par Mr. Hermann, conduit à augmenter de la valeur de l'amplitude propre à un harmonique, les amplitudes des harmoniques d'un ordre supérieur ou inférieur, et à créer des termes qui ne doivent pas exister. On voit aussi qu'on obtient une analyse juste en arrêtant le développement au terme  $n - m - 1$ , à condition que le nombre  $n$  soit choisi tel qu'il dépasse le double de l'ordre  $m$  de l'harmonique supérieur de la courbe à analyser.

Mr. Hermann cite <sup>1)</sup> comme confirmation de sa méthode le développement de la fonction  $y = 40 (1 - \cos x)$ . Il trouve par le calcul des schablon's outre le terme  $a_0$  encore un seul  $a_1 = -40$ , et tous les  $b_r = 0$ ; c'est précisément le résultat que donneraient les formules exactes. Mais la vérification apparente de la méthode provient exclusivement de ce que le calcul n'était pas prolongé au delà du 15-me harmonique. Nous aurions encore  $a_{39} = a_{41} = \dots = -40$ .

La fonction  $y = 40 (1 - \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \cos 39x)$  nous donnerait de même par la méthode de Mr. Hermann  $a_1 = -40$ , car  $a_1 = a_1^1 + a_{40-39}^{39} =$

$$= \left( -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \cdot 40.$$

Nous devons donc conclure que les amplitudes, calculées par Mr. Hermann pour les harmoniques constituant une voyelle, ne leur appartiennent véritablement que si l'on émet l'hypothèse qu'il n'existe pas d'harmoniques d'ordre supérieur au 20-ème (Mr. Hermann admet  $n = 40$ ).

Mr. Hermann applique ensuite sa méthode au développement d'un triangle. Avant de passer à la révision du résultat trouvé, nous allons exposer un problème général dans lequel la méthode de Mr. Hermann trouve une application rigoureuse.

3. Nous posons le problème suivant: représenter par la série de Fourier un polygone ouvert s'appuyant par ses points extrêmes sur l'axe des  $x$  et formé par des droites, ayant des projections égales sur le même axe. Si l'on emploie les mêmes notations et si l'on met en application les formules (2), nous trouverons par un calcul simple, désignant par  $n$  le nombre des côtés du polygone, et en observant que  $y_0 = y_n = 0$ :

$$A_r = \left( \frac{\sin \frac{\pi r}{n}}{\frac{\pi r}{n}} \right)^2 a_r; \quad B_r = \left( \frac{\sin \frac{\pi r}{n}}{\frac{\pi r}{n}} \right)^2 b_r \quad (15)$$

Ces formules peuvent servir aussi à l'analyse d'une courbe expérimentale ne différant pas sensiblement d'un polygone ayant les propriétés mentionnées. La correction qu'il faut apporter aux termes de Mr. Hermann se réduit à un

<sup>1)</sup> l. c. Bd. 53. p. 45.

facteur facile à calculer: il représente l'intensité lumineuse dans le phénomène de diffraction donné par une fente étroite. Ce facteur a des maxima pour des

valeurs de  $\frac{\pi r}{n} = u$  qui sont des racines de l'équation

$$u = \text{tang. } u \quad (16)$$

et sont calculés par Schwerd. Nous trouvons que le premier maximum de divergence entre le calcul rigoureux et celui de Mr. Hermann, correspond à un nombre entier s'approchant fort de la quantité 1,4393  $n$ . Mr. Hermann prend toujours  $n = 40$ ; le maximum de la divergence correspondra donc à l'harmonique d'ordre 57, ce qui n'a aucune importance pratique. Néanmoins, même pour  $n = 40$ , les valeurs du facteur de correction sont déjà considérables comme on peut le voir par le tableau suivant:

$$\Theta = \frac{\frac{\sin \frac{\pi r}{n}}{\frac{\pi r}{n}}}{\frac{\pi r}{n}}$$

$r =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Theta^2 =$	1	0,99	0,98	0,97	0,95	0,93	0,90	0,87	0,84	0,81

(17)

$r =$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\Theta^2 =$	0,78	0,74	0,70	0,66	0,62	0,57	0,53	0,49	0,45	0,41

L'exemple du triangle isocèle, présenté par M-r Hermann <sup>1)</sup> comme vérification de sa méthode ne peut pas servir dans ce but. Le contrôle apparent trouvé par Mr. Hermann est dû aux erreurs amenées par les abréviations du calcul.

En résumé la méthode ingénieuse des schablon diffère de celle de Fourier, et peut être très utile quand on connaît son véritable sens. La comparaison du calcul des schablon avec les résultats donnés par un analyseur harmonique, sera exposée dans un article postérieur.

4. Mr. Hermann expose une théorie des voyelles <sup>1)</sup>: il admet que le ton caractéristique est intermittent ou qu'il possède une amplitude qui ne reste pas constante, — une amplitude oscillante. Nous allons rechercher quels doivent être les résultats de la méthode des schablon en pareil cas. Pour les voyelles *A* et *O*, selon Mr. Hermann, le nombre des vibrations du ton caractéristique est très restreint: il disparaît dans un temps plus court que la période de la note fondamentale qui est aussi celle de l'intermittence. Le ton caractéristique des voyelles *E* et *J* est très haut, il remplit toute la période de la note fondamentale et possède une amplitude oscillante. Dans les deux cas, que le ton caractéristique soit harmonique ou non avec la note fondamentale, la question, n'est pas essentielle. C'est pourquoi nous arrivons à résoudre la question posée en

<sup>1)</sup> l. c. Bd. 53 p. 46.

<sup>1)</sup> l. c. Bd. 47 p. 380.

admettant que la période entière ne peut être subdivisée en  $\frac{n}{s}$  parties égales,  $\frac{n}{s}$  et  $s$  étant des nombres entiers; ces parties sont choisies de telle sorte que les ordonnées  $y^m$ , de la courbe du son caractéristique  $m$ , qui correspondent à une subdivision, se répètent dans le même ordre dans chacune d'elles. La longueur de la subdivision peut renfermer généralement plusieurs périodes du ton caractéristique plus une partie privée de ses vibrations. En désignant par  $A_\nu^m$  l'amplitude du son caractéristique pour l'abscisse  $x = \nu h$  et, remarquant que, si

$$A_\nu^m = A_{\nu+s}^m,$$

les formules (7) prennent la forme suivante:

$$a_r^m = \frac{2}{n} \sum_{p=0}^{p=s-1} A_p^m \int_{i=0}^{i=\frac{n}{s}-1} \left( \cos \frac{2\pi}{n} m\nu \cos \frac{2\pi}{n} r\nu \right)_{\nu=p+is} \quad (18)$$

Si l'on observe que  $m$  et  $r$  sont des nombres entiers, et en posant

$$\xi = \frac{\sin \left( \frac{2n}{s} - 1 \right) \frac{\pi s}{n} (m - r)}{2 \sin \frac{\pi}{n} s (m - r)} \quad (19)$$

$$\eta = \frac{\sin \left( \frac{2n}{s} - 1 \right) \frac{\pi s}{n} (m + r)}{2 \sin \frac{\pi}{n} s (m + r)}$$

nous verrons, si  $s$  n'est pas égal à  $n$ :

$$a_r^m = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=s-1} A_p^m \left( \left\{ \frac{1}{2} + \xi \right\} \cos \frac{2\pi p}{n} (m - r) + \left\{ \frac{1}{2} + \eta \right\} \cos \frac{2\pi p}{n} (m + r) \right)$$

$$b_r^m = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=s-1} B_p^m \left( \left\{ \frac{1}{2} + \xi \right\} \cos \frac{2\pi p}{n} (m - r) - \left\{ \frac{1}{2} + \eta \right\} \cos \frac{2\pi p}{n} (m + r) \right)$$

$$\beta_r^m = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=s-1} B_p^m \left( \left\{ \frac{1}{2} + \eta \right\} \sin \frac{2\pi p}{n} (m+r) + \left\{ \frac{1}{2} + \xi \right\} \sin \frac{2\pi p}{n} (m-r) \right) \quad (20)$$

$$\alpha_r^m = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=s-1} A_p^m \left( \left\{ \frac{1}{2} + \eta \right\} \sin \frac{2\pi p}{n} (m+r) - \left\{ \frac{1}{2} + \xi \right\} \sin \frac{2\pi p}{n} (m-r) \right)$$

Nous devons maintenant distinguer deux cas: premièrement quand le nombre  $r$  répond à l'une des égalités:

$$m = r, \quad s(m-r) = \pm jn, \quad s(m+r) = jn \quad (21)$$

$j$  étant un nombre entier; secondement quand tel n'est pas le cas.

Prenons le second cas; alors:

$$\xi = -\frac{1}{2}, \quad \eta = -\frac{1}{2},$$

par conséquent

$$a_r^m = b_r^m = \xi_r^m = \alpha_r^m = 0$$

Les seuls coefficients différant de zéro seront ceux correspondant aux  $r$ , qui satisfont les conditions du premier cas. (22)

Si  $m = r$  et  $(m-r)s = \pm jn$ , on a

$$\xi = \frac{n}{s} - \frac{1}{2}, \quad \eta = -\frac{1}{2}$$

si  $(m+r)s = jn$ , on a

$$\xi = -\frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{n}{s} - \frac{1}{2}$$

Nous aurons par conséquent:

$$a_m^m j \frac{n}{s} = m = a_m^m m - j \frac{n}{s} = \frac{1}{s} \sum_{p=0}^{p=s-1} \left( A_p^m \cos \frac{2\pi pj}{s} + B_p^m \sin \frac{2\pi pj}{s} \right); \quad (23)$$

$$a_m^m = \frac{1}{s} \sum_{p=0}^{p=s-1} A_p^m$$

$$= b^m j \frac{n}{s} = m = b^m m - j \frac{n}{s} = \frac{1}{s} \sum_{p=0}^{p=s-1} \left( B_p^m \cos \frac{2\pi pj}{s} - A_p \sin \frac{2\pi pj}{s} \right); \tag{24}$$

$$b^m_m = \frac{1}{s} \sum_{p=0}^{p=s-1} B_p^m$$

Les  $j$  dans les deux termes de la 1-ère et de la 3-ème lignes sont différents. En comparant ces formules à celles qui ont été données dans le  $n^o$  2 on voit que,

1) l'influence d'un son à amplitude oscillante ou intermittente s'étend à un nombre plus grand de termes harmoniques que l'influence d'un son à amplitude constante;

2) cette influence est moindre.

Prenons un exemple. Soit  $n = 20$ ,  $s = 5$ ,  $m = 6$  La méthode de M-r Hermann donnera les termes suivants:  
amplitude constante:

$$a_6^6, a_{14}^6, a_{26}^6 \dots$$

amplitude variable, dans le même intervalle:

$$a_2, a_6^6, a_{10}^6, a_{14}^6, a_{22}^6, a_{26}^6 \dots$$

Mais en même temps que l'influence du son intermittent se répartit entre un plus grand nombre de termes, cette influence devient moindre. Désignons par  $A^m$  et  $B^m$  les maxima des  $A_p^m$  et  $B_p^m$ , et par  $\bar{A}^m$  et  $\bar{B}^m$  leurs moyennes, par  $[a_m^m]$  et  $[b_m^m]$  les valeurs de  $a_m^m$  et  $b_m^m$  en cas d'un son  $m$  d'amplitude constante  $\sqrt{(A^m)^2 + (B^m)^2}$ . Nous aurons en vertu des résultats du  $n^o$  2:

$$a_m^m = \bar{A}^m < [a_m^m]; \quad b_m^m = \bar{B}^m < [b_m^m] \tag{25}$$

Si la période de l'intermittence coïncide avec la période de la note fondamentale, ce qui a lieu, d'après l'hypothèse de M-r Hermann, pour certaines voyelles, nous devons poser  $s = n$ ,  $\xi = \eta = \frac{1}{2}$ ; les  $a_p$  et  $b_p$  seront généralement différents de zéro.

Nous voyons en outre que dans ce dernier cas les  $a_m^m$  et  $b_m^m$  peuvent être très petits comparativement aux autres termes, surtout si l'on admet que le son caractéristique dure pendant une petite fraction de la période de l'intermittence: la majeure partie des  $A_p^m$  et  $B_p^m$  sera nulle et le reste des sommes qui entrent dans l'expression des coefficients doit être divi-

sée par  $n$ . Dans ce cas on n'a pas de raison pour chercher l'ordre du son caractéristique parmi ceux dont l'amplitude, calculée par le procédé de Mr. Herman, a une grande valeur. Si l'ordre  $m$  du son caractéristique est assez élevé, et si l'on admet que les harmoniques d'ordre supérieur du ton fondamental ne possèdent pas des amplitudes considérables, les termes d'ordre  $m$  ne se distingueront pas d'une manière marquée des termes voisins, c'est-à-dire que le son caractéristique n'aura aucune influence sur le caractère de la voyelle. Or, contrairement à cette conclusion, nous trouvons dans les chiffres donnés par Mr. Hermann des groupes de sons surpassant les autres par leurs amplitudes. Cette circonstance montre l'état permanent des sons intenses. Ainsi les hypothèses des amplitudes oscillantes ou intermittentes ne passent pas aux données de l'expérience <sup>1)</sup>: elles ne sont donc pas démontrées.

5. Proposons-nous maintenant d'analyser le cas où la courbe est formée de sinusoïdes dont l'une n'est pas harmonique avec la note fondamentale. Nous nous arrêterons sur un tronçon de la courbe résultante dont la longueur coïncide avec la période de la note fondamentale.

Posons:

$$m = p + \alpha \quad (26)$$

où  $p$  est un nombre entier et  $\alpha$  une fraction de l'unité positive, puis  
(26)  $A_m = R_m \sin \varepsilon$ ,  $B_m = R_m \cos \varepsilon$ ;  $(a_r)^m = a_r^m + \zeta_r^m$ ,  $(b_r)^m = b_r^m + \alpha_r^m$   
nous trouvons ainsi des formules (9), répondant à la condition (25),

$$(a_r)^m = R_m \sin (\varepsilon + \pi\alpha) \frac{2 \sin \pi\alpha}{n} \left[ - \cotg (\varepsilon + \pi\alpha) + \frac{\sin 2\pi \frac{m}{n}}{2 \sin \frac{\pi}{n} (m - r) \sin \frac{\pi}{n} (m + r)} \right] \quad (27)$$

$$(b_r)^m = R_m \cos (\varepsilon + \pi\alpha) \frac{\sin \pi\alpha}{n} \cdot \frac{\sin 2\pi \frac{r}{n}}{\sin \frac{\pi}{n} (m - r) \sin \frac{\pi}{n} (m + r)}$$

On voit que l'expression de  $(a_r)^m$  contient un membre indépendant de  $r$  et que l'influence d'un son qui n'est pas harmonique s'étend généralement sur la valeur de tous les termes, calculés par la méthode de Mr. Hermann.

Nous tirons des expressions (27) la relation générale:

<sup>1)</sup> Consultez les tableaux de Mr. Hermann l. c. Bd. 53 p. 20 et suivantes.

$$\left[ (a_r)^m + \frac{2R_m}{n} \sin \pi\alpha \cos (\varepsilon + \pi\alpha) \right] \sin \frac{2r}{n} = (b_r)^m \operatorname{tang} (\varepsilon + \pi\alpha) \sin 2\pi \frac{m}{n}$$

ou, en désignant par  $C^m$  et  $C_1^m$  deux constantes,

$$\frac{(a_r)^m + C^m}{(b_r)^m} \cdot \sin \frac{2\pi r}{n} = C_1^m \quad (28)$$

Cette formule devrait se vérifier pour les nombres  $r$  contigus à  $p$ , si le son caractéristique  $m$  était d'un ordre élevé et si les harmoniques de la note fondamentale d'ordre inférieur à  $p$  possédaient déjà de faibles amplitudes.

En posant avec Mr. Hermann  $n = 40$ , l'angle correspondant à  $\frac{\pi}{n}$  sera de  $4\frac{1}{2}^\circ$ . Nous pouvons donc poser approximativement:

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}, \quad \cos \frac{\pi}{n} = 1, \quad \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}, \quad \cos \frac{2\pi}{n} = 1.$$

A fortiori nous pourrons écrire des expressions correspondantes pour l'angle  $\frac{\pi}{n} \alpha$ .

Nous trouverons ainsi des formules (27):

$$(a_p)^m = R_m \sin (\varepsilon + \pi\alpha) \frac{2 \sin \pi\alpha}{n} \left[ - \operatorname{cotg} (\varepsilon + \pi\alpha) + \frac{n}{\pi\alpha} + \right. \\ \left. + 2 \operatorname{cotg} \frac{2\pi p}{n} \right] \quad (29)$$

$$(b_p)^m = R_m \cos (\varepsilon + \pi\alpha) \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}$$

$$(a_{p \pm 1})^m = R_m \sin (\varepsilon + \pi\alpha) \frac{2 \sin \pi\alpha}{n} \left[ - \operatorname{cotg} (\varepsilon + \pi\alpha) + \frac{n}{\pi(\alpha \mp 1)} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\alpha}{\alpha \mp 1} \operatorname{cotang} \frac{2\pi p}{n} \right]$$

$$(b_{p \pm 1})^m = R_m \cos (\varepsilon + \pi\alpha) \frac{\sin \pi\alpha}{n} \left[ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{n}{\alpha \mp 1} \pm \frac{2}{\alpha \mp 1} \operatorname{cotang} \frac{2\pi p}{n} \right] \quad (30)$$

Nous tirons de cette analyse une remarque essentielle: pour découvrir la présence d'un son qui n'est pas harmonique dans un tronçon de courbe, il ne suffit pas de connaître les amplitudes des termes du développement, il est aussi nécessaire de connaître leurs composantes, c'est-à-dire les  $a_r$  et  $b_r$  séparément.

Les coefficients  $(a_p)^m$  et  $(b_p)^m$  ne seront pas toujours les plus grands. Par exemple, si  $\cotang \frac{2\pi p}{n}$  est positif, et  $\alpha > \frac{1}{2}$ ,  $(b_{p+1})^m$  sera plus grand que  $(b_p)^m$  en valeur absolue, et aura un signe contraire,  $(b_{p-1})^m$  sera moindre que  $(b_p)^m$  en valeur absolue. Si  $\alpha < \frac{1}{2}$  les valeurs absolues de  $(b_{p+1})^m$  et de  $(b_{p-1})^m$  seront moindres que  $(b_p)^m$ .

Nous obtenons encore les relations suivantes:

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot \frac{(b_{p+1})^m}{(b_p)^m} = 1 + \frac{2\pi}{n} \cotang \frac{2\pi p}{n}$$

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha} \cdot \frac{(b_{p-1})^m}{(b_p)^m} = 1 - \frac{2\pi}{n} \cotang \frac{2\pi p}{n} \quad (31)$$

$$(\alpha - 1) (b_{p+1})^m + (\alpha + 1) (b_{p-1})^m = \alpha (b_p)^m$$

Nous voyons encore que si  $\cos(\varepsilon + \pi\alpha)$  est petit, les  $(b_p)$  le seront aussi, et la série  $(a_{p-1})^m, (a_p)^m, (a_{p+1})^m$  présentera des variations brusques, approximativement dans la proportion:

$$\frac{1}{\alpha + 1} : \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\alpha - 1}$$

Au contraire si  $\sin(\varepsilon + \pi\alpha)$  est petit, les valeurs des  $(a_p)^m$  varieront peu de  $r$  et nous aurons approximativement  $(a_p)^m = -2(b_p)^m$ .

On voit que la comparaison des  $b$  et des  $a$  donne un moyen précieux pour la recherche des sons qui ne sont pas harmoniques; il y a lieu de regretter que Mr. Hermann ne donne les  $a$  et les  $b$  que pour la voyelle  $A$  <sup>1)</sup>.

L'application de cette théorie au tableau donné par Mr. Hermann pour la voyelle  $A$ , montre, par exemple, pour la série  $A, c$  (103) que les signes de  $b_5, b_6, b_7$  sont conformes aux prescriptions de la théorie et que  $p$  doit être égal à 6. Mais, les relations (28) et (31) n'étant pas vérifiées, on doit admettre que ces valeurs de  $b$  contiennent en outre  $(b_{p-1})^m, (b_p)^m, (b_{p+1})^m$ , les coefficients dûs aux harmoniques supérieurs de la note  $c$  et qui ne sont pas négligeables. Mais alors nous n'avons pas de raison pour admettre l'existence d'un son qui n'est pas harmonique. Nous exposerons plus loin l'hypothèse la plus probable, à notre avis, sur la théorie des voyelles; elle n'est pas en contradiction avec la discordance des séries calculées par la méthode de Mr. Hermann avec les règles qui découlent de l'analyse faite par nous des diverses conjectures.

6. Nous allons analyser maintenant la méthode barycentrique employée par Mr. Hermann pour calculer l'ordre du son caractéristique d'une voyelle. En désignant par  $C_i$  l'amplitude d'un des sons harmoniques, contigus au son caractéristique, et par  $i$  son ordre comparativement à la note fondamentale, Mr. Hermann calcule l'ordre  $J$  du son caractéristique par la formule

<sup>1)</sup> l. c. Bd. 53 p. 20.

$$J = \frac{\sum i C_i}{\sum C_i} \quad (32)$$

le signe  $\sum$  s'étendant à la série des sons harmoniques qui sont renforcés par le son caractéristique. Les cas, soumis par nous à l'analyse, nous montrent déjà que cette formule n'est pas rigoureuse. Mais nous aborderons la question à un point de vue plus général.

Si nous avons une série de sons, nous pouvons leur appliquer la méthode barycentrique de deux manières. Soit  $N_i$  le nombre de vibrations de l'harmonique  $i$ , et  $\lambda_i$  la longueur d'ondes correspondante. Le calcul peut être appliqué ou à la recherche du nombre des vibrations  $N_j$  ou de la longueur  $\lambda_j$ . On ne voit pas a priori pourquoi l'un de ces procédés doit être préféré à l'autre.

Nous aurons donc

$$N_j = \frac{\sum N_i C_i}{\sum C_i}, \quad \lambda_j = \frac{\sum \lambda_i C_i}{\sum C_i} \quad (33)$$

Mais en nommant  $N_o$  le nombre des vibrations de la tone fondamentale,  $N_i = i N_o$ ,  $N_j = J N_o$ ,  $\lambda_i = \frac{\lambda_o}{i}$ ,  $\lambda_j = \frac{\lambda_o}{J}$ , les relations (33) se transforment comme suit:

$$J = \frac{\sum i C_i}{\sum C_i} \quad (34), \quad f = \frac{\sum C_i}{\sum \frac{C_i}{i}} \quad (35)$$

La première est la formule de Mr. Hermann, la seconde est entièrement différente. On ne voit pas pourquoi l'une d'elles doit avoir l'avantage sur l'autre. Il est donc nécessaire de préciser le procédé physique de formation des voyelles qui serait compatible avec la formule (34).

Cette formule appliquée aux hypothèses de Mr. Hermann, comme on le voit par ce que nous avons exposé dans les numéros précédents, ne donnera pas le son caractéristique. Nous allons montrer que cette formule sera exacte si l'on admet une tout autre hypothèse.

Supposons que la bouche et les fosses nasales jouent le rôle d'un résonateur; nous devons lui attribuer des sons dits naturels, des sons caractéristiques. Soit  $n_j$  le nombre de vibrations d'un de ces sons. Les vibrations qui se produisent pendant l'expiration provoquent dans notre résonateur des vibrations forcées. La théorie de ces vibrations est bien connue. Les vibrations forcées possèdent les mêmes périodes que les vibrations qui les provoquent; par conséquent si les secondes étaient harmoniques entre elles, les premières le seraient aussi. En désignant par  $C_i$  l'amplitude de la vibration à l'entrée du résonateur et par  $\mu$  une constante, inversement proportionnelle à la densité du milieu, nous aurons pour l'amplitude du son forcé:

$$C_i = \frac{\mu C_i}{n_j^2 - N_i^2} \quad (36)$$

On voit en premier lieu que *les sons s'approchant le plus du son caractéristique du résonnateur seront renforcés*. Ainsi la série des sons d'une voyelle doit renfermer un nombre de termes voisins avec des amplitudes maxima.

Ecrivons l'expression (36) sous la forme suivante

$$C_i n_j - C_i N_i = \frac{\mu C_i}{n_j + N_i} \quad (37)$$

Faisons la somme de ces expressions pour tous les sons contigus à  $n_j$ . Nous aurons:

$$n_j \Sigma C_i - \Sigma C_i N_i = \Sigma \frac{\mu C_i}{n_j + N_i} \quad (38)$$

Soient  $N_0$  le son fondamental,  $i$  un nombre entier,  $m$  un nombre quelconque. Nous pouvons poser:

$$N_i = i N_0, \quad n_j = m N_0,$$

l'expression (37) peut s'écrire sous deux formes:

$$n_j - \frac{\Sigma C_i N_i}{\Sigma C_i} = \frac{1}{\Sigma C_i} \cdot \Sigma \frac{\mu C_i}{n_j + N_i}; \quad m - \frac{\Sigma i C_i}{\Sigma C_i} = \frac{1}{N_0^2 \Sigma C_i} \cdot \Sigma \frac{\mu C_i}{m + i} \quad (39)$$

On voit que les premières parties de ces relations nous conduiront à la méthode barycentrique de Mr. Hermann, c'est-à-dire à la première des formules (33) et à la formule (34), c'est à dire à  $n_j = N_j$  et à  $m = J$ , dans le cas seulement où les secondes parties sont nulles ou négligeables et que le son propre du résonnateur est faible. Cela n'aura pas lieu généralement. L'approximation sera suffisante si  $N_0$  est assez grand. L'hypothèse exposée est la seule qui justifie la méthode de Mr. Hermann. Nous voyons donc que véritablement:

$$n_j - N_j = \frac{1}{\Sigma C_i} \Sigma \frac{\mu C_i}{n_j + N_i}, \quad m - J = \frac{1}{N_0^2 \Sigma C_i} \Sigma \frac{\mu C_i}{m + i} \quad (40)$$

c'est-à-dire que le son caractéristique du résonnateur et son ordre, diffèrent généralement de ceux calculés par Mr. Hermann, ce qui se confirme aussi en comparant les sons trouvés par lui avec les sons de la bouche, trouvés par d'autres expérimentateurs <sup>1)</sup>. Je ne crois pas que ces différences puissent être expliquées pleinement par la formule (40), qui se rapporte à un cas simple. Mais on voit qu'une analyse détaillée de cette hypothèse peut rendre compte des différences obtenues, et qu'elle est compatible avec le caractère des nombres extraits par Mr. Hermann de ses expériences.

<sup>1)</sup> l. c. Bd. 47 p. 374, 375.