Ueber mehr als zwölfstufige gleichschwebende Temperaturen.

Von

Paul v. Jankó.

Theilt man die Octave in 12 Intervalle von gleichem Schwingungsverhältniſs, so erhält man die Töne der allgemein gebräuchlichen musikalischen Temperatur. In ihr stellen die vierte und siebente Stufe (den Grundton nicht mitgerechnet) angenäherte Werthe der groſsen Terz und reinen Quint dar, und es ist hinlänglich bekannt, daſs die Quint sich dem reingestimmten Intervall mehr annähert, als die Terz. Um sich über die Gröſse der Abweichung Rechenschaft zu geben, ist es am zweckmäſsigsten, die Intervallverhältnisse durch Logarithmen der Basis 2 auszudrücken; Logarithmen deshalb, weil hierdurch die Proportionen in Differenzen verwandelt werden, und man somit auf den ersten Blick erkennen kann, welches von zwei gegebenen Intervallen das gröſsere ist; die Basis 2 aber aus dem Grunde, weil damit die Maaſszahl 1 der Octave zugewiesen wird (${}^{2}\log 2 = 1$), dem einzigen Intervall, welches in allen möglichen gleich- und ungleichschwebenden Temperaturen im selben Schwingungsverhältniſs beibehalten werden muſs und thatsächlich die Grundlage unserer heutigen Musikausübung bildet.

In diesem Logarithmensystem sind die Maaſszahlen der reingestimmten groſsen Terz und der Quint:

$$^{2}\log \frac{5}{4} = \text{Terz} = 0{,}3219281$$

$$^{2}\log \frac{3}{2} = \text{Quint} = 0{,}5849625$$

Die Maaſszahlen der zwölfstufig temperirten Terz und Quint findet man durch Verwandlung der Brüche $\frac{4}{12}$ (4. Ton der 12 Stufen) und $\frac{7}{12}$ in Decimalbrüche und erhält:

$$\text{temp. Terz} = \frac{4}{12} = 0{,}3333333$$

$$\text{temp. Quint} = \frac{7}{12} = 0{,}5833333$$

Die Abweichungen dieser Intervalle von den reingestimmten sind durch die Differenzen der entsprechenden Decimalbrüche gekennzeichnet und betragen

für die Terz + 0,0114052
„ „ Quint — 0,0016292

wobei das Zeichen + bedeutet, daſs das betreffende Intervall im temperirten System zu hoch, das Zeichen —, daſs es zu tief ist.

Die Quint ist also um 0,0016 Octave oder um $0{,}0016 \times 12 = 0{,}019$ d. i. beiläufig $^1/_{50}$ eines Halbtons unserer gebräuchlichen zwölfstufigen Temperatur zu tief, ein Intervall, welches unserem Gehör noch nicht entgeht, wie die Clavierstimmer zu erfahren Gelegenheit haben. Die Terz ist um 0,011 Octave oder $0{,}011 \times 12 = 0{,}132$ d. i. beiläufig um $^1/_8$ Halbton zu hoch, also etwa 7 mal schlechter als die Quint.

Die Unreinheit der Terzen hat zu verschiedenen Vorschlägen geführt, die Octave in eine andere Anzahl als 12 gleiche Intervalle zu theilen. In der Praxis haben sich diese nicht einbürgern können; auch theoretisch scheinen mir diejenigen nur ein untergeordnetes Interesse zu bieten, welche zwar bessere Terzen, dagegen aber schlechtere Quinten geben, so die in H. Riemann's Musiklexicon [3] S. 985 aufgezählten 19-, 22-, 28- und 31 stufigen.

Viel gröſsere Annäherung beider Intervalle, als es bei 12 Stufen der Fall ist, bietet eine 53 stufige gleichschwebende Temperatur, nach welcher das in Helmholtz' Lehre von den Tonempfindungen beschriebene Harmonium von Bosanquet gebaut worden ist. Diese Temperatur ist nach Riemann's angeführtem Werk S. 986 zuerst von Mercator anfangs des 18. Jahrhunderts vorgeschlagen worden und giebt für die Terz (17. Stufe) und Quint (31. Stufe) die Werthe:

$$\text{Terz} = \frac{17}{53} = 0{,}3207547$$

$$\text{Quint} = \frac{31}{53} = 0{,}5849057$$

Die Abweichungen von den reingestimmten Intervallen sind:

für die Terz: — 0,0011734

„ „ Quint: — 0,0000568

Es ist also die Abweichung der Terz ungefähr 10 mal geringer als bei der 12 stufigen Temperatur, und die Quint nähert sich der reingestimmten derart, daſs ihre Abweichung unserem Gehör direct entgeht und nur mittels Schwebungen nachgewiesen werden kann.

Mit der Uebereinstimmung der groſsen Terz und der reinen Quint ist aber auch die Reinheit aller in unserer Musikausübung vorkommenden Intervalle gegeben, nachdem wir alle Accorde aus Octaven, groſsen oder kleinen Terzen und reinen Quinten aufbauen und die kleine Terz durch die Differenz zwischen Quint und groſser Terz gegeben ist. Man kann also ohne merklichen Fehler die 53 stufig gleichschwebende Temperatur an Stelle ganz rein gestimmter Intervalle setzen.

Theoretisch interessant schienen mir nun die Fragen:

1. Ob zwischen 12 und 53 sich thatsächlich keine Stufenzahl findet, deren Annäherungen Zwischenwerthe der genannten darstellen, und

2. Welche auf 53 zunächst folgende Theilung es wäre, die noch gröſsere Annäherungen gäbe, als diese.

Würde es sich darum handeln, die Näherungswerthe blos eines Intervalles zu finden, so wären diese Aufgaben durch Kettenbrüche leicht zu lösen. Auf diesem Wege würde man die Näherungswerthe finden:

$$\text{für die Terz:} \quad \frac{1}{3}, \ \frac{9}{28}, \ \frac{19}{59}, \ \frac{47}{146}, \ \frac{207}{643} \quad \text{u. s. w.}$$

$$\text{für die Quint:} \quad \frac{4}{12}, \ \frac{24}{41}, \ \frac{31}{53}, \ \frac{179}{306}, \ \frac{389}{665} \quad \text{u. s. w.}$$

Die Nenner dieser Brüche stimmen nicht mit einander überein, mit Ausnahme der ersten, bei welchen $\frac{1}{3}$ auf den Nenner 12 gebracht werden kann, — somit müſste man, um die günstigsten Annäherungen zu erhalten, für die Terzen andere Theilungen der Octave vornehmen als für die Quinten. Auf diesem Wege sind also die relativ besten Compromiſstheilungen nicht auffindbar.

Ein empirischer, d. h. auf systematisches Probiren gebauter Weg zur Lösung der vorgelegten Fragen ergiebt sich aus folgender Ueberlegung:

Die Maaſszahl irgend welcher Anzahl von Octaven ist eine ganze Zahl, weil die Maaſszahl der Octave $= 1$ ist. Bezeichnet man mit $q = 0{,}5849625$ die Maaſszahl der reingestimmten Quint und bildet die Vielfachen $s \times q$, wobei s nacheinander die Werthe 1, 2, 3 . . . 12, 13, 14 . . . 53, 54 . . . u. s. w. annehmen soll, so wird das Product $s\,q$ jedes Mal einer ganzen Zahl nahekommen, wenn s Quinten nahezu eine ganze Anzahl Octaven geben, d. h. eine s-stufige Temperatur Quinten giebt, die sich den reingestimmten nähern. Je mehr sich $s \times q$ einer ganzen Zahl nähert, um so bessere Quinten giebt das betreffende System. Damit aber die Quinten überhaupt besser werden als die einer bereits bekannten Temperatur von der Stufenzahl σ, muſs die Abweichung des Productes $s \times q$ von einer ganzen Zahl unterhalb einer gewissen Grenze liegen.

Bezeichnet man mit a_σ die Abweichung von $\sigma \times q$ von einer ganzen Zahl, so wird offenbar ohne Vortheil oder Nachtheil die Abweichung $2\,a_\sigma$, $3\,a_\sigma$, $4\,a_\sigma$ u. s. w. betragen können, wenn die Temperatur eine 2σ-, 3σ-, 4σ-stufige werden soll; mithin ist die Grenze, unterhalb welcher die Abweichung a_s irgend einer Stufenzahl liegen muſs:

$$a_s = a_\sigma \times \frac{s}{\sigma},$$

wenn a_σ die Abweichung bezeichnet, die einer bekannten Stufenzahl σ entspricht.

Die Vielfachen der Quint sind daher nur dann näher zu untersuchen, wenn sie von ganzen Zahlen um einen geringeren Betrag, als dieser ist, abweichen. Auf diese Art findet man, daſs eine 24-, 36-, 48-stufige Temperatur keine besseren Quinten giebt, als die 12-stufige. Zwischen 12 und 53 Stufen finden sich blos die beiden Stufenzahlen 29 und 41, welche bessere Quinten als 12 geben.

Die betreffenden Vielfachen der reinen Quint sind:

$$29\ q = 16{,}9639125$$
$$41\ q = 23{,}9834625$$

Es kommt also im 29-stufigen System die 17. Stufe, im 41-stufigen die 24. der reingestimmten Quint am nächsten.

Die Maaſszahlen dieser Töne sind:

$$\frac{17}{29} = 0{,}5862069$$

$$\frac{24}{41} = 0{,}5853659,$$

und ihre Abweichung von der reingestimmten Quint 0,5849625 beträgt:

$$+\ 0{,}0012444$$
$$+\ 0{,}0004034$$

Vergleicht man diese Abweichungen von jener der 12-stufigen Temperatur (— 0,0016292) so sieht man, daſs die Quint der 29-stufigen Temperatur wenig besser, dagegen die der 41-stufigen beiläufig 4 mal besser ist als bei 12 Stufen.

Um die entsprechenden Abweichungen für die Terz zu bestimmen, sind die Producte $s \times t$ zu bilden, für $s = 29$ und 41, wobei wie schon erwähnt $t = 0{,}3219281$. Dies giebt

$$29\ t = 9{,}3359149$$
$$41\ t = 13{,}1990521,$$

somit müſsten wir im 29-stufigen System die 9. Stufe, im 41-stufigen die 13. als Terz annehmen.

Die Maaſszahlen dieser Intervalle und ihre Abweichungen von der reingestimmten Terz sind:

$$\frac{9}{29} = 0{,}3103448 \qquad +\ 0{,}0115833$$

$$\frac{13}{41} = 0{,}3170732 \qquad -\ 0{,}0048549$$

Dies verglichen mit der Abweichung $+\ 0{,}0114052$ der 12-stufigen

Temperatur ergiebt, dafs die Terzen der 29-stufigen schlechter sind, die der 41-stufigen dagegen besser, und zwar stehen sie der reingestimmten Terz $\frac{0,0114}{0,0048}$-fach, d. i. mehr als 2-fach näher.

Wir haben somit in der 41-stufig gleichschwebenden Temperatur eine Theilung gefunden, welche bessere Quinten und Terzen giebt als die 12-stufige, und zwar sind ihre Quinten 4 mal, ihre Terzen über 2 mal besser, womit die erste der oben gestellten Fragen ihre Beantwortung gefunden hat. Diese Thatsache scheint Jenen, die sich mit mehrstufigen Temperaturen befafst haben, bis jetzt entgangen zu sein; ich fand sie wenigstens in der Literatur nicht erwähnt; auch Riemann's angeführtes Werk spricht nur von Vorschlägen über 19-, 22-, 28-, und 31-stufige Temperaturen, die aber alle schlechtere Quinten geben als die 12-stufige.

Ob die 41-stufige Temperatur mit ihren Terzen, die von den reingestimmten um 0,0048 Octave d. h. ca. $^1/_{20}$ eines 12-stufigen Halbtons oder etwa $^1/_4$ eines syntonischen Kommas (0,0179) abweichen, geeignet wäre, jene Instrumente zu ersetzen, die mit Hülfe von 53 Stufen dazu dienen, die reingestimmten Intervalle zu Gehör zu bringen, vermag ich ohne einschlägige praktische Versuche nicht zu entscheiden; sollte dies der Fall sein, so würde diese Stufenzahl die Ersparnifs von 12 Tönen in der Octave bedeuten.

Auf dem oben dargelegten Wege ist auch die Frage zu lösen, welches die auf 53 folgende Anzahl von Stufen ist, deren Quinten und Terzen sich den reingestimmten noch mehr annähern. Ich nehme davon Abstand, hier den Gang der Rechnung ausführlicher darzulegen, nachdem derselbe ja aus dem Vorhergehenden erhellt, und theile nur die Resultate mit, die ich bei der Fortführung der Rechnung bis 612 Stufen erhielt. In folgender Tabelle sind sämmtliche Theilungen angeführt, von denen jede folgende eine bessere Annäherung sowohl der Quint als auch der Terz giebt, als alle vorhergehenden, wobei zu bemerken ist, dafs zwischen zwei aufeinanderfolgenden Theilungen keine möglich ist, die beide Intervalle besser geben würde, als die erste der beiden.

Stufenzahl	Stufen-nummer für die Quint	Abweichung von der reingestimmten Quint	Stufen-nummer für die Terz	Abweichung von der reingestimmten Terz
12	7	— 0,0016292	4	+ 0,0114052
41	24	+ 0,0004034	13	— 0,0048549
53	31	— 0,0000568	17	— 0,0011734
347	203	+ 0,0000519	112	+ 0,0008385
400	234	+ 0,0000375	129	+ 0,0005719
453	265	+ 0,0000265	146	+ 0,0003677
506	296	+ 0,0000177	163	+ 0,0002063
559	327	+ 0,0000107	180	+ 0,0000755
612	358	+ 0,0000048	197	— 0,0000327

Man sieht aus dieser Tabelle, dafs die auf 53 Stufen nächstfolgende Temperatur die 347-stufige ist, und dafs die 53-stufige Temperatur thatsächlich eine hervorragende Stelle in der Reihe einnimmt; denn ihre Annäherungen sind derartig grofs, dafs man erst bei 347 Stufen bessere Quinten und Terzen erhalten würde, und dafs man mit dieser grofsen Stufenzahl den reingestimmten Intervallen auch nur unwesentlich näher käme.