Über zusammengesetzte Wellenformen.

Von

C. Stumpf.

Mit 2 Figurentafeln von K. L. und M. Schaefer.

Das vorliegende Heft enthält Tafeln von Schwingungsfiguren, die Herr und Frau Dr. Schaefer in sehr exakter Ausführung gezeichnet und mir zur Verfügung gestellt haben. Solche Tafeln dürften wie die früher veröffentlichten der Schwingungszahlen [1] einem Bedürfnis akustisch Arbeitender entsprechen. Die Figuren, die man in den Schriften von Melde, König u. a. findet, sind nach spezielleren Gesichtspunkten ausgewählt. [2] Dagegen enthalten die

[1] „Tontabellen" von C. Stumpf und K. L. Schaefer in *diesen Beiträgen* III. Heft (1901). Auch separat.

[2] Melde (Lehren v. d. Schwingungsfiguren 1864) gibt einige Kurven mit Phasenverschiebung und geringer Amplitudenverschiedenheit (Taf. VII), aufserdem hauptsächlich Lissajoussche Figuren. R. König (Pogg. Ann. d. Physik Bd. 15, 1877 und „Quelques expériences d'acoustique" 1882) hat längere Wellenzüge reiner und besonders verstimmter Konsonanzen von 1 : 1 bis 1 : 8 durch schwingende Gabeln selbst aufzeichnen lassen. Diese schönen Verstimmungskurven sind auch durch unsere Tafeln nicht überflüssig gemacht, sondern müssen gegebenenfalls neben ihnen zu Rate gezogen werden. In Wiedemanns Ann. d. Physik N. F. XIV gibt König Kurven aus je 4 bis 10 Teiltönen mit gleicher und mit ungleicher Amplitude, mit und ohne Phasendifferenz (auch diese in „Quelques expériences" aufgenommen). William Thomson (Proc. Royal Society of Edinburgh Vol. IX, 1878) zeichnet eine Anzahl konsonanter Intervalle mit dem Amplitudenverhältnis des umgekehrten Quadrats der Schwingungszahlen (1 : 2 mit dem Amplitudenverhältnis 4 : 1 usw.) und je vier Phasendifferenzen. Bosanquet (Philos. Magazine XI, 1881, Taf. IV—VII) hat mit Donkins' Harmonographen die um ein Komma verstimmten Intervalle 4 : 5, 2 : 3, 1 : 2, 2 : 5 in je 3—5 verschiedenen Amplitudenverhältnissen aufgenommen.

Eine Anzahl binärer Kurven mit gleicher Amplitude der Komponenten, darunter auch Kurven mit höheren Schwingungsverhältnissen, wie 16 : 23, gegenwärtigen Tafeln in ihrer ersten Abteilung (*A*) die sämtlichen Wellenformen, die durch Kombination zweier Sinuswellen in gleicher Ebene und Richtung bei gleicher Amplitude und gleichzeitigem Beginn entstehen, wenn die Verhältnisse der Schwingungsfrequenz durch die ganzen Zahlen zwischen 1 und 12 ausgedrückt sind. Anhangsweise sind unter *B* bis *D* zur Erläuterung bestimmter Punkte auch eine kleine Auswahl charakteristischer Kurven beigefügt, wie sie bei ungleichzeitigem Beginn oder ungleicher Höhe oder bei mehr als zwei Elementarschwingungen entstehen.

Die Figuren sind sämtlich, mit Ausnahme derer bei ungleichzeitigem Beginn (*C*), nur bis zur Hälfte der Schwingungsperiode gezeichnet, da die andere Hälfte symmetrisch verläuft; man erhält diese durch Umdrehung des Blattes.

Im folgenden möchte ich nun gewisse durch die Anschauung oder einfache geometrische und arithmetische Betrachtungen ersichtliche Eigenschaften kombinierter Wellenformen erläutern, die in zusammenhängender Weise noch nicht dargestellt sind. Mathematiker würden ohne Zweifel alles kürzer und zwingender fassen. Ich wage diesen Übergriff auch nur in Ermangelung einer bereits vorliegenden Theorie und in der Hoffnung auf eine kommende. Die Hauptfragen waren: wie und in welchem Sinne man Schwingungen der Resultierenden unterscheiden und zählen könne; ferner: inwieweit man die Zerlegung, die das Ohr des Geübten, oft auch des Ungeübten, mühelos an den Klangwellen vornimmt, auch durch das Auge an den Schwingungsfiguren vornehmen könne. Tragen sie solche räumliche Kennzeichen an sich, so kann man weiter fragen, ob sich daran auch mechanische oder chemische Eigenschaften knüpfen können, durch die sie auf die peripherischen Endigungen der Gehörnerven im Sinne der Klangzerlegung zu wirken vermögen. Als eine Vor- oder Hilfs-

---

findet man bei Grailich, Zur Theorie der gemischten Farben, Sitz.-Ber. d. Wiener Akademie d. Wissensch., Math.-Naturwiss. Klasse XII (1854) S. 846, wozu zu vergleichen 810f. Die Auswahl ist hier durch die Interessen der Farbentheorie bestimmt, für welche freilich derartige Betrachtungen sich nutzlos erweisen dürften.

Einige sehr gut gezeichnete Kurven, auch solche mit drei Komponenten, bei Max Meyer, Zeitschr. f. Psych. XI, 1896, S. 218—219. Von den oft reproduzierten Figuren in Helmholtz' Tonempfindungen[4] S. 50 u. 53 ist Fig. 11 *C* ungenau; von denen bei Wundt, Physiol. Psych.[5] II, 66 die eine ungenau, die andere ganz falsch.

betrachtung im Streite der Hörtheorien also bitte ich das Folgende aufzufassen, damit man es nicht als bloſs geometrische Spekulation in dieser Zeitschrift deplaciert finde.

Daſs die Frage nach den charakteristischen Eigenschaften der zusammengesetzten Wellen, so als Vorfrage verstanden, keine müſsige ist, dürfte aus den mehrfachen neueren Versuchen erhellen, Helmholtzens Lehre vom Mechanismus der Klangzerlegung teilweise oder ganz durch andere Theorien zu ersetzen, die direkt von den Eigenschaften der resultierenden Welle selbst ausgehen. Speziell die Kombinationstöne suchen manche aus solchen Eigenschaften herzuleiten. Wenn auch Helmholtzens Lehre immer noch das weitaus beste zusammenfassende Bild der vielen in Betracht kommenden Tatsachen bietet und jedenfalls irgend eine analysierende Einrichtung im Ohr unentbehrlich ist, so sind doch Ergänzungen oder Modifikationen der Lehre sicher erforderlich. Dazu kann es nützlich werden, die Mannigfaltigkeit der Kurven, die Bildungsgesetze und charakteristischen Eigenschaften der verschiedenen Gruppen zu übersehen: dann erst lassen sich solche Hypothesen aufstellen und beurteilen. Wer aber die Resonanztheorie wörtlich und unverändert für wahr hält, auch der wird für die Kritik abweichender Hypothesen an solchen Kurvenbildern Material und an ihren Eigenschaften Anhaltspunkte gewinnen.

Wir setzen bis zum V. Abschnitt zwei Elementarwellen von gleicher Höhe und gleichzeitigem Beginn voraus, wo nicht anderes besonders bemerkt ist. Durchgängig ist angenommen, daſs das Verhältnis der Schwingungszahlen durch ganze Zahlen ausdrückbar ist.

I. Periode und Wellen der Resultierenden.

Die aus zwei Sinusschwingungen resultierende Bewegung hat eine bestimmte Periodik, und zwar gerät das schwingende Teilchen erst dann wieder in genau denselben Schwingungszustand, wenn die elementaren Wellenzüge die durch ihre Verhältniszahlen gegebenen Schwingungen vollbracht haben, also z. B. bei 3 : 5 nach Ablauf von 5 Schwingungen der schnelleren oder 3 der langsameren Welle. Dann befinden sich beide Elementarwellen in der nämlichen Phasendifferenz wie im Anfang, während inzwischen eine beständige Verschiebung der Phasen gegeneinander stattgefunden hat. Diesen Abschnitt nennen wir die P e r i o d e der Resultierenden. Dagegen wollen wir den Ausdruck Welle oder Schwingung, der häufig für diesen Abschnitt gebraucht wird, vielmehr gewissen Teilen der Periode vorbehalten, die man behufs näherer Beschreibung der Kurven und ihrer Gesetze unterscheiden mufs. Die Definition dieser Teile ist natürlich Sache der Zweckmäfsigkeit. Wir werden zunächst die einfachste Definition aufstellen:

Eine Ganzwelle der Resultierenden heifse die Strecke von einem ihrer Schnittpunkte mit der Mittellinie bis zum zweitnächsten Schnittpunkt. Anders ausgedrückt: bis zu dem Punkt, wo die Mittellinie das nächste Mal von der nämlichen Seite her durch die Resultierende geschnitten wird. Jeder durch benachbarte Schnitt- oder Berührungspunkte eingegrenzte Teil ist dann eine Halbwelle, analog wie bei den elementaren Schwingungen, nur dafs es sich nicht um Sinuswellen handelt, auch nicht um Wellen von stets gleichbleibender Länge und Höhe. Selbst die zu einer Ganzwelle gehörigen Halbwellen sind nicht immer von gleicher Länge, weshalb der Ausdruck Halbwelle hier eben nur bedeuten soll, dafs zwei benachbarte Kurvenstücke dieser Art eine Welle zusammensetzen.

Während einer Periode wird die Mittellinie von der Resultierenden doppelt so oft geschnitten als die gröfsere Verhältniszahl angibt. Die Resultierende hat daher ebensoviele Ganzwellen im genannten Sinne, wie der höhere Ton innerhalb der Periode Elementarwellen aufweist. Darum fällt auch die Anzahl der Gipfel der Resultierenden zusammen mit der Anzahl der Gipfel dieses Elementarwellenzuges. Die Ganzwellen der Resultierenden sind nur die modifizierten, gewissermafsen entstellten Wellen der schnelleren Schwingung.

Bei dieser Zählung ist nur der Umstand zu beachten, dafs in bestimmten, unten näher zu bezeichnenden, Fällen die Resultierende die Mittellinie nur berührt und dann nach der gleichen Seite, woher sie gekommen, zurückgeht. Dies mufs so angesehen werden, als ob sie um einen unendlich kleinen Betrag über die Mittellinie hinausginge. Diese wird hier gleichsam von unten und oben her zugleich geschnitten. Der Berührungspunkt mufs daher als eine Halbwelle gezählt werden; wie denn auch bei der geringsten Verstärkung des höheren Tones eine entsprechend kleine Halbwelle wirklich entsteht. Nur mittels dieser Betrachtungsweise trifft die angegebene Regel über die Zahl der

Ganzwellen zu: die fingierte, virtuelle Halbwelle muſs hier mit der vorausgehenden oder nachfolgenden wirklichen Halbwelle zusammen als Ganzwelle gezählt werden; mit der vorausgehenden, wenn die Berührung von oben her, mit der nachfolgenden, wenn sie von unten her erfolgt (vgl. 5 : 11 mit 7 : 9).

II. Ausgezeichnete Punkte.

Beginnen die beiden Elementarwellen mit der Phasendifferenz 0 oder $^1/_2$, bez. $^1/_4$ oder $^3/_4$, so bietet die Resultierende gewisse ausgezeichnete Punkte dar, an die unsere weiteren Betrachtungen anknüpfen. Ein solcher Punkt entsteht, wenn beide Elementarwellen zu gleicher Zeit ihre gröſste Entfernung von der Mittellinie erreichen, wenn also ihre entferntesten Punkte senkrecht über oder unter demselben Punkte der Mittellinie liegen. Liegen sie dabei auf der gleichen Seite der letzteren, so hat die Resultierende hier die doppelte Höhe jeder Elementarwelle, liegen sie auf verschiedenen Seiten, so berührt sie die Mittellinie, ohne sie zu schneiden. Wir nennen den Punkt der Resultierenden im ersten Fall eine absolut gröſste Elongation, einerlei ob sie positiv oder negativ ist, nach oben oder unten liegt. In Zeichen Ea. Im zweiten Falle sprechen wir von einer absolut kleinsten Elongation (= 0), wiederum einerlei ob die Berührung der Mittellinie von oben oder unten her erfolgt. In Zeichen ea.

Ein anderer ausgezeichneter Moment ist vorhanden, wenn beide Elementarwellen sich in der Mittellinie treffen. Auch die Resultierende schneidet dann die Mittellinie und ist von diesem Punkt aus nach rechts und links symmetrisch. Hiermit hängt nun wieder eine gröſste und eine kleinste Elongation zusammen. Begegnen sich die Elementarwellen auf der Mittellinie in gleicher Richtung, so sprechen wir von einer gröſsten, begegnen sie sich in entgegengesetzter Richtung, von einer kleinsten symmetrischen Elongation, weil eben für diese Elongationen die Nachbarschaft einer gleich groſsen Elongation nach der Gegenseite charakteristisch ist. In diesen Fällen rechnen wir aber bei den folgenden Beschreibungen und Regeln die beiden zusammengehörigen gleichgroſsen Exkursionen nach oben und unten nur einfach. In Zeichen Es und es.

Wenn wir mit h die gröſsere, mit t die kleinere Verhältniszahl bezeichnen, mit δ aber die Phasendifferenz beim Beginn einer Periode, bezogen auf die früher beginnende (nach links verschobene) Welle, so lassen sich für das Stattfinden von *Ea*, *ea*, *Es*, *es* innerhalb einer Periode folgende Regeln aussprechen. Die Periode besitzt

1. bei einer geraden und einer ungeraden Verhältniszahl
   a) für $\delta = 0$ oder $= {}^1/_2$: ein *Es* und ein *es*,
   b) für $\delta = {}^1/_4$ oder $= {}^3/_4$
      α) wenn die ungeradzahlige Welle früher beginnt: ein *Es* und ein *es*,
      β) wenn die geradzahlige Welle früher beginnt: ein *Ea* und ein *ea*;

2. bei zwei ungeraden Verhältniszahlen
   a) für $\delta = 0$
      α) wenn $\frac{h-t}{2}$ eine gerade Zahl ist: zwei *Es* und zwei *Ea*,
      β) wenn $\frac{h-t}{2}$ eine ungerade Zahl ist: zwei *Es* und zwei *ea*;
   b) für $\delta = {}^1/_2$
      α) im 1. Falle zwei *es* und zwei *ea*,
      β) im 2. Falle zwei *es* und zwei *Ea*.

Für $\delta = {}^1/_4$ und $= {}^3/_4$ findet hier keiner der ausgezeichneten Punkte statt.[1]

Diese Regeln folgen aus den Eigenschaften der Zahlen. In den 4 Vierteln der Periode müssen sich bei einer geraden Verhältniszahl nur ganze oder abwechselnd ganze und halbe Zahlen ergeben, bei einer ungeraden aber eine Zahlenfolge, in der die Werte 1, $^1/_4$, $^1/_2$, $^3/_4$ in dieser Anordnung oder in der Anordnung 1, $^3/_4$, $^1/_2$, $^1/_4$ zu irgendwelchen ganzen Zahlen addiert erscheinen.

---

[1] In seiner Abhandlung „On beats of imperfect Harmony“ (Proceedings R. Soc. of Edinburgh Vol. IX, 1878, S. 602 f.) hat W. Thomson verwandte Unterscheidungen und Regeln aufgestellt. Aber er berücksichtigt nur die Fälle von *Ea* und *ea* (mit der Unterscheidung, je nachdem *Ea* oben oder unten liegt, bzw. die Berührung bei *ea* von oben oder unten erfolgt, wovon wir hier absehen), nicht dagegen die Fälle *Es* und *es*. Ferner gibt er die Regeln in unbestimmter Weise, ohne die Bedingungen in bezug auf die Phasenverhältnisse, unter denen diese Fälle eintreffen. Meine Studien hierüber, sowie über die Wellenlängen an den ausgezeichneten Punkten stammen aus demselben Jahre wie Thomsons Abhandlung, die mir erst 10 Jahre später bekannt wurde.

Bezeichnen wir nun mit 1 den Anfang einer Elementarwelle, mit $^1/_4$ das erste Viertel u. s. f., so können wir den gleichzeitigen Beginn der beiden Wellen mit $\binom{1}{1}$ ausdrücken, den Fall, wo die eine Welle im 1. Viertel ihrer Bewegung, die andere gleichzeitig im 3. Viertel der ihrigen ist, mit $\binom{^1/_4}{^3/_4}$ u. s. f. Dann findet statt:

$$Ea \text{ bei } \binom{^1/_4}{^1/_4} \text{ und bei } \binom{^3/_4}{^3/_4}, \quad ea \text{ bei } \binom{^1/_4}{^3/_4}$$

$$Es \text{ bei } \binom{1}{1} \text{ und bei } \binom{^1/_2}{^1/_2}, \quad es \text{ bei } \binom{1}{^1/_2}.$$

Haben wir nun z. B. 7 : 16 bei $\delta = 0$, so erhalten wir für den gegenseitigen Stand der Wellen in den 4 Vierteln der Periode: $\begin{pmatrix} 1 & ^1/_4 & ^1/_2 & ^3/_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und lesen daraus unmittelbar ab, dafs ein Es und ein es stattfindet.

Man könnte noch mehr ausgezeichnete Punkte unterscheiden, z. B. wenn eine Welle am Beginn oder in der Hälfte, die andere in $^1/_4$ oder $^3/_4$ ihrer Bewegung ist. Doch genügen uns die erwähnten, da sie allein für das Folgende in Betracht kommen.

III. Wellenlänge der Resultierenden in der Gegend der ausgezeichneten Punkte.

L' bzw. l' mögen die Wellenlängen der Resultierenden in der Gegend der Ea und Es bzw. ea und es bedeuten. In welcher Weise diese Wellenlängen von den Längen der Elementarwellen abhängen, ergibt sich am einfachsten und anschaulichsten, wenn man auf die Ableitung der Sinuswellen zurückgeht und in einem Kreise zwei Leitstrahlen in gleicher Richtung, aber mit verschiedener Geschwindigkeit umlaufen läfst, wie die zwei Zeiger einer Uhr. Hat ein Leitstrahl die Peripherie 2π durchlaufen, so bedeutet dies den Ablauf der bezüglichen Elementarwelle, die Hälfte dieses Weges also den Punkt, wo sie die Mittellinie durchschneidet. Bezeichnet weiter X die Strecke der Peripherie, welche die längere (langsamere) Welle in einer bestimmten Zeit zurückgelegt hat, x die in derselben Zeit bei gleichem Ausgangspunkt von der kürzeren (schnelleren) Welle zurückgelegte Strecke, so besteht die Proportion $x : X = L : l$.

Nehmen wir nun zunächst ein Es, wie es bei gleichzeitigem Beginn jedesmal im ersten Abschnitt der Resultierenden entsteht, so ist es nach der Definition vorhanden, wenn der schnellere Strahl so weit über die Hälfte der Kreisbewegung (π) hinaus ist, als der langsamere dahinter zurückgeblieben ist, wenn also $\frac{x+X}{2} = \pi$. Wenn wir nun die kürzere Elementarwelle als Maſseinheit nehmen, so daſs also $2\pi = l$, ferner aus obiger Proportion den Wert für X in die ebenerhaltene Gleichung einsetzen, so ergibt sich $x = \frac{Ll}{L+l}$ als Ausdruck für diejenige Strecke auf der Peripherie, die durch den Schnittpunkt der Resultierenden mit der Mittellinie begrenzt ist, d. h. für die Länge der resultierenden Halbwelle. Und da bei einem E_s nach der Definition zwei genau symmetrische Halbwellen liegen, ist die Ganzwelle der Resultierenden hier

$$L' = \frac{2Ll}{L+l}$$

Die Resultierende steht also ihrer Länge nach der kürzeren Elementarwelle näher als der längeren, und zwar in demselben Verhältnis, in welchem diese die kürzere Elementarwelle übertrifft (harmonisches Mittel).

Diese Entwicklung gilt aber nur, solange $\frac{L}{l} < 3$ ist. Wenn nämlich das Geschwindigkeitsverhältnis derart ist, daſs der langsamere Strahl noch im ersten Viertel weilt, während der schnellere bereits im dritten angelangt ist, so gibt es keinen Zeitpunkt, in welchem π symmetrisch zwischen ihnen läge. Der Zeitpunkt, in welchem die Sinusse beider Wellen gleich und entgegengesetzt sind, tritt vielmehr in diesem Falle dann ein, wenn der eine Strahl die einfache Verlängerung des anderen ist, beide Wege also um $\pi = \frac{l}{2}$ differieren. Wir erhalten dann $x - X = \frac{l}{2}$, woraus auf demselben Wege die Länge der resultierenden Ganzwelle beim E_s

$$L' = \frac{Ll}{L-l}$$

Diese Formel gilt also für $L : l > 3$. Es folgt daraus, daſs L' mit wachsendem Verhältnis $L : l$ zunimmt, bis dieses Verhältnis den Wert 3 erreicht, dann aber wieder abnimmt. Z. B. bei 4 : 1 ist

L' wieder ebensogroſs wie bei 2 : 1, bei 6 : 1 so groſs wie bei 3 : 2, bei ∞ : 1 so groſs wie bei 1 : 1.

In analoger Weise ergibt sich für die um das e_s liegende resultierende Welle die Länge

$$l' = \frac{Ll}{L + l}$$

also die Hälfte der Länge für E_s unterhalb 3 : 1. Hier gibt es aber keine Umkehr, sondern l' nimmt mit wachsendem Verhältnis $L : l$ stetig zu. Daher nähern sich von $L : l = 3$ an mit wachsender Gröſse dieses Verhältnisses E_s und e_s einander, wie man leicht auch an den Figuren bestätigt findet.

Für die Wellenlänge beim E_a und e_a findet man durch ähnliche Betrachtungen denselben Wert wie beim E_s und e_s, wenn man die beim E_a entstehende Halbwelle mit der vorausgehenden oder nachfolgenden zusammennimmt, beim e_a aber berücksichtigt, daſs nach der Bemerkung S. 65 hier der Berührungspunkt als eine Halbwelle von der Länge 0 gerechnet werden muſs, also die Ganzwelle gleich der Länge eines rechts oder links davon liegenden einfachen Abschnittes ist.[1]

Es gibt nun aber eine Betrachtungsweise, welche gestattet, die erste Formel für L' auch auf die Fälle $h : t > 3$ anzuwenden. Von 3 : 1 an entsteht nämlich eine zweite Halbwelle, die von Null immer mehr wächst, je weiter $h : t$ über 3 hinausgeht; und zwar wächst sie um denselben Betrag, um welchen die erste abnimmt. Für beide zusammen gilt dann also dieselbe Längenformel, die für die erste Halbwelle allein unterhalb 3 : 1 gültig ist. Und so ist auch die Formel für die Ganzwelle anwendbar, nur daſs auch diese jetzt aus zwei Ganzwellen im früheren Sinne besteht, also eben nicht mehr als Ganzwelle im Sinne jener Definition bezeichnet werden kann.

Wenn man nun weiter die übrigen Abschnitte auf der Resultierenden vergleicht, so findet man durch Fortsetzung der obigen Betrachtungen, daſs der durch die erste Halbwelle (bzw. für $h : t > 3$ durch die erste plus zweite) gegebene Abschnitt ganz regelmäſsig auf der Mittellinie wiederkehrt, nur daſs er wiederum häufig einen Schnittpunkt in sich schlieſst; und zwar

[1] Von den bis hierher erwähnten Formeln habe ich bereits in der Tonpsychologie II, 27—29 und 478—479 Gebrauch gemacht.

ist letzteres bei diesen übrigen Abschnitten auch schon für Kurven unterhalb 3 : 1 der Fall.

Wir wollen das zuletzt Gesagte beispielshalber für eine besondere Klasse von Kurven, die Kurven $h : 1$, $h > 3$, näher ausführen. Man findet hier folgende Gesetzmäfsigkeiten, die jedem leicht verständlich werden, der einige solcher Kurven aus den Elementarwellen konstruiert[1]:

a) Je mehr h über 3 hinausgeht, um so mehr nähert sich der zweite Abschnitt auf der Mittellinie an Länge dem ersten, obschon er ihm niemals ganz gleich wird. b) Unter den weiter folgenden Abschnitten jeder Kurve bis zum ersten Viertel der Periode wechselt in gleicher Weise immer ein längerer mit einem kürzeren. c) Die Differenz der so zusammengeordneten Abschnitte wächst bis zum ersten Viertel, der gröfsere wird gröfser, der kleinere kleiner. d) Die Summe je zweier zusammengeordneter Abschnitte ist stets gleich der Summe der beiden ersten. e) Beim ersten Viertel der Periode erreichen die bis dahin wachsenden Gipfel ihre höchste Erhebung auf dieser Seite der Mittellinie, welche in gewissen Fällen aus einem, in anderen aus zwei gleich hohen Teilgipfeln besteht (Näheres unten). Die solchen Gipfeln entsprechenden Abschnitte auf der Mittellinie sind so grofs, wie vorher je 2 benachbarte zusammengenommen. f) Im zweiten Viertel sind wieder je zwei Abschnitte zusammenzunehmen, aber jetzt kommt immer der kürzere zuerst, und seine Länge nimmt zu bis zur Periodenhälfte; wiederum aber besitzt die Summe der zusammengehörigen Abschnitte dieselbe gleichbleibende Länge. g) In der zweiten Periodenhälfte kehren natürlich wegen der Symmetrie aller ohne Phasendifferenz beginnenden Kurven dieselben Verhältnisse wieder.

Ähnliches ergibt sich auch für die sonstigen Kurven $h : t > 3$, bei welchen die kleinere Verhältniszahl t gröfser als 1 ist, wie 9 : 2, 17 : 5, nur dafs die Gipfel mehr als einmal steigen und fallen und dafs statt eines oder zweier Abschnitte t oder $t + 1$ Abschnitte in der Periodenhälfte einfach zu zählen sind, während die übrigen wieder paarweise zusammengenommen einem von diesen gleich sind.

Diese Erwägungen können nun dazu führen, die Ausgangs-

---

[1] Man braucht für den gegenwärtigen Zweck nur die Schnittpunkte aufzusuchen, was bei einiger Übung rasch gelingt.

definition von Halb- und Ganzwellen überhaupt aufzugeben und folgende neue Definition an ihre Stelle zu setzen:

Eine Halbwelle in diesem neuen Sinne nennen wir jeden durch Schnitt- oder Berührungspunkte der Resultierenden mit der Mittellinie begrenzten Abschnitt von gleicher Länge mit dem ersten, bzw. bei $h:t > 3$ mit dem ersten plus zweiten. Eine Ganzwelle nennen wir jetzt jeden durch solche Schnitt- oder Berührungspunkte begrenzten Abschnitt von der doppelten Länge des ersten, bzw. bei $h:t > 3$ des ersten plus zweiten.

Nicht also die Zahl der eingeschlossenen Schnittpunkte, sondern die Länge bestimmter Abschnitte im Verhältnis zu anderen maſsgebenden Abschnitten auf der Mittellinie ist jetzt das Kriterium. Daſs dies eine wesentlich andere Definition ist als die auf die Zahl der Schnittpunkte gegründete, muſs man sich klar zum Bewuſstsein bringen und streng festhalten.

Wir können das Nämliche auch so ausdrücken: Eine Halbwelle der Resultierenden heiſse jeder gröſste einfache Abschnitt, eine Ganzwelle jeder Abschnitt von der doppelten Länge der Halbwelle, einerlei übrigens ob er aus zwei oder mehr einfachen Abschnitten besteht. Hier ist die Alternative $\frac{h}{t} \gtrless 3$ in der Definition vermieden, da eben in jeder Kurve solche gröſste Abschnitte vorkommen; der Unterschied ist nur, daſs bei denen über 3 : 1 ein solcher nicht den Anfang bildet.

Auf Grund dieser Definitionen können wir zunächst die obigen Formeln auch in solche für Schwingungszahlen übersetzen. Wir bezeichnen dann als Verhältniszahl r der Resultierenden, d. h. als ihre Schwingungszahl im Verhältnis zu den Schwingungszahlen der Elementarwellen, die Zahl, welche angibt, wie oft ihr erster Abschnitt (bei $h : t > 3$ die Summe ihrer beiden ersten Abschnitte) in der Periodenhälfte enthalten ist.

Nach der ursprünglichen Definition von Ganzwellen erhält man für die Resultierende stets dieselbe Anzahl von Ganzwellen wie für die schnellere Elementarwelle, müſste ihr also insofern auch dieselbe Schwingungszahl zuschreiben. Setzt man aber die Schwingungszahl (Verhältniszahl) der Wellenlänge umgekehrt proportional, so würde sich für die Stellen e_a und e_s die doppelte Schwingungszahl ergeben wie für die übrigen Teile der Resultierenden, und diese doppelte Schwingungszahl würde innerhalb der Periode stets nur einer einzigen Welle zukommen, die zwischen anderen von abweichender Gröſse eingeschaltet wäre.

Nach der jetzigen Definition dagegen erhalten wir für die Resultierende eine selbständige und einheitliche Schwingungszahl; und zwar findet man sie aus der ersten Formel für L' bei E_s, da dieser Wert nach den neuen Definitionen auch auf die Fälle $h:t > 3$ und auf sämtliche durch die neue Definition gegebenen Ganzwellen der Resultierenden übertragbar ist. Man hat nur statt L', L und l die ihnen umgekehrt proportionalen Werte der Schwingungszahlen, $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{t}$, einzusetzen. Dies ergibt $r = \frac{h+t}{2}$.

Die früheren Ganzwellen bei e_a und e_s, die wegen ihrer abweichenden Länge andere Schwingungszahlen lieferten, erfordern jetzt keine gesonderte Bestimmung; denn sie sind nach der jetzigen Definition eben nur Halbwellen trotz des in ihnen enthaltenen Schnittpunktes, da sie der Länge nach gleich dem ersten Abschnitt der Resultierenden sind.

Der Wert $\frac{h+t}{2}$ als Schwingungszahl der Resultierenden ist des öfteren auch analytisch aus der Bewegungsgleichung eines unter dem Einfluſs zweier Töne schwingenden Luftteilchens abgeleitet worden.[1] Aus dem Ausdruck für die Verschiebung eines unter dem Einflusse zweier Töne von gleicher Amplitude schwingenden Luftteilchens

$$\sin 2\pi mt + \sin 2\pi nt$$

erhält man

$$2 \sin (m+n)\pi t \cos (m-n)\pi t.$$

Hier entspricht der zweite Faktor, eine langsam veränderliche

---

[1] Sedley Taylor, Philos. Magazine **44** (1872), S. 56 f. Terquem und Boussinesq, Journal de Physique **4** (1875), S. 193 f. L. Hermann, Archiv f. d. gesamte Physiologie **56** (1894), S. 486.

Von der Wellenlänge ausgehend kam schon Grailich (a. a. O. S. 799 f.) zu demselben Schluſs. Auch zu seiner Darstellung ist zu bemerken, daſs „die Punkte, in denen die Verrückung der Teilchen gleichzeitig gleich Null ist", durch die Wellenlänge $\frac{2Ll}{L+l}$ nicht vollständig angegeben werden, sondern nur diejenigen unter ihnen, die eben diesen gleichen Abstand voneinander haben. Grailich weist selbst (S. 802) auf die in der Mitte der Periode entstehende kleine Welle hin, deren Länge genau halb so groſs sei wie die der übrigen.

Funktion der Zeit t, dem Amplitudenfaktor in der Gleichung der Sinuswelle, nur daſs eben die Konstante hier in eine langsam Veränderliche übergegangen ist. Der erste Faktor aber entspricht der Schwingungszahl $\frac{m+n}{2}$ (da statt 2π nur π steht). Er verschwindet jedesmal, wenn t ein Multiplum von $\frac{1}{m+n}$ ist. Die $\frac{m+n}{2}$ Wellen innerhalb der Periode sind also untereinander gleich lang.[1]

Man hat aber niemals genügend hervorgehoben, daſs von „Wellen" und „Schwingungszahlen" hierbei überhaupt nur unter Voraussetzung ganz bestimmter, nicht selbstverständlicher und vom gewöhnlichen Sprachgebrauche der Wellentheorie abweichenden Definitionen gesprochen werden kann, und man hat keinen Versuch gemacht, diese Definitionen genauer zu formulieren. Dies hängt teilweise damit zusammen, daſs man bei der Berechnung nur die Fälle kleinerer Schwingungsverhältnisse zwischen den Elementartönen im Auge hatte. Doch sind auch hier schon, wie oben bemerkt, im Verlaufe der Periode oft genug zwei Halbwellen im früheren und gewöhnlichen Sinn als eine Halbwelle im gegenwärtigen Sinne zu zählen.[2]

---

[1] Es ergibt sich aus obigem Ausdruck auch, warum die Zahl der Wellen — das Wort jetzt im Sinne der halben Anzahl sämtlicher Schnittpunkte verstanden — gleich der gröſseren der beiden primären Schwingungszahlen ist. Denn man kann ebensogut den ersten Faktor als Amplitudenfaktor und den zweiten als Ausdruck der Schwingungszahl $\frac{m-n}{2}$ ansehen. Es sind also beide Schwingungszahlen, $\frac{m+n}{2}$ und $\frac{m-n}{2}$, vorhanden, jede mit den aus ihr folgenden Schnittpunkten (nur wieder im Berührungsfalle doppelt zu zählen), und die Summe ist $\frac{m+n}{2}+\frac{m-n}{2}=m$.

[2] Ich habe (Tonpsych. II, 478) gegen die Formel $\frac{m+n}{2}$ auch eingewendet, daſs beim Minimum der Resultierenden (e_a und e_s) tatsächlich eine um das Doppelte gröſsere Schwingungszahl wegen der um die Hälfte kleineren Wellenlänge eintrete. Diese Einwendung ist vollkommen richtig, wenn man die Wellenlänge nach dem Kriterium der Schnittpunkte definiert sie fällt jedoch hinweg, wenn man die neue Definition der Wellen und Wellenlängen zugrunde legt. Die Notwendigkeit, beide Definitionen scharf auseinanderzuhalten, war mir selbst damals noch nicht so klar zum Bewuſstsein gekommen.

Für den Ausdruck „Schwingung oder Welle der Resultierenden“ haben wir also bisher drei mögliche Definitionen gefunden:

1. Man identifiziert sie mit dem, was wir Periode nannten: eine Schwingung ist vollendet, wenn das Luftteilchen sich wieder genau im gleichen Schwingungszustand befindet, wenn also die Gestalt der Kurven sich identisch wiederholt. Diese Definition deckt sich am vollständigsten mit der der Schwingung im gewöhnlichen Sinne der Wellenlehre und sie ist auch bei beliebigem Amplituden- und Phasenverhältnis anwendbar, hat aber keinen Nutzen für die nähere Beschreibung des so begrenzten Abschnittes.

Die Schwingungszahl (Verhältniszahl) r der Resultierenden ist in diesem Falle $= 1$.

2. Man definiert eine Schwingung der Resultierenden durch Schnittpunkte derselben mit der Mittellinie in der S. 65 angegebenen Weise.

Die Schwingungszahl r der Resultierenden ist dann $= h$.

3. Man definiert sie durch die doppelte Länge des ersten (ev. plus zweiten) Abschnittes auf der Mittellinie in der S. 72 angegebenen Weise.

Dann ist $r = \frac{h + t}{2}$.

Nun gibt es aber noch verschiedene Möglichkeiten, die ihre besonderen Anwendungsvorteile haben. Eine davon, die wir im folgenden gebrauchen werden, bietet zugleich eine besonders nahe Analogie zu den Elementarwellen:

4. Man definiert als Schwingungen oder Wellen der Resultierenden diejenigen Abschnitte, die durch die relativ höchsten Gipfel gegeben sind. Die aufeinanderfolgenden, im allgemeinen ungleich hohen Gipfel der Resultierenden auf der gleichen Seite der Mittellinie bilden Gruppen, innerhalb deren je eine, in besonderen Fällen zwei gleich hohe benachbarte, sich über die nach rechts und links folgenden erheben. Diejenigen Gipfel, welche nach beiden Seiten kleinere neben sich haben, wollen wir als „relativ höchste Gipfel“ bezeichnen, dabei aber zwei benachbarte gleich hohe Gipfel, denen rechts und links kleinere zur Seite liegen, als einen zählen. So viele relativ höchste Gipfel man nun hierbei findet, so viele Schwingungen der Resultierenden kann man unterscheiden. Die Form dieser Wellen ist dann allerdings insofern eine unbestimmte, als hier-

mit ja nur diskrete Punkte gegeben sind, deren Verbindung untereinander nur der Bedingung unterliegt, dafs das dazwischen gezogene Kurvenstück keinen Wendepunkt enthalten darf.

Nach dieser Definition ist, wie wir unten finden werden, $r = h - t$ für $h : t < 2$ und $= t$ für $h : t > 2$.

5. Endlich werden wir noch einer Auffassungs- und Zählungsweise begegnen, nach welcher die Resultierende allgemein nur so viele Wellen hat wie die längere Elementarwelle, also schlechthin $r = t$ ist, indem alle jene Gipfel, die nur der kürzeren Elementarwelle ihr Dasein verdanken, für diese Auffassung nicht besonders gezählt werden.

IV. Hauptgruppen der Wellenformen und Bestimmung der Verhältniszahlen aus der Wellenform.

Überschauen wir jetzt die Figuren unserer Schwingungstafeln, und richten wir das Augenmerk besonders auf die Frage, wodurch sich die Verhältniszahlen der Elementarschwingungen an der Gesamtform der Resultierenden kenntlich machen, so lehrt die Anschauung in Verbindung mit den vorausgehenden Betrachtungen folgendes:

1. Die gröfsere Verhältniszahl ist gleich der Anzahl der Gipfelpunkte der Periode, unter Gipfelpunkten alle gleichsinnigen Wendepunkte verstanden. Bei unseren Figuren braucht man also nur, nachdem die oberen Gipfel von links nach rechts gezählt sind, auf der unteren Seite von rechts nach links weiter zu zählen, da dies wegen der Symmetrie mit der Fortzählung auf der oberen Seite der zweiten Hälfte gleichbedeutend ist. Dagegen darf man nicht etwa die Gipfelzahl in der ersten Hälfte blofs verdoppeln: denn in gewissen Fällen (vgl. 1 : 3) enthält die zweite Hälfte nicht dieselbe Anzahl von Gipfeln wie die erste.

2. Unter der verwirrenden Menge der Kurven sind zunächst zwei Gruppen durch ihren einförmigen Verlauf sofort kenntlich: solche, deren kleinere Verhältniszahl 1 ist, und solche, deren Verhältniszahlen um 1 differieren.

Diese beiden Gruppen haben gemeinsam, dafs man ihre Gipfel, wenn man mehrere Perioden aneinanderreiht, selbst wieder durch eine Wellenlinie derart verbinden kann, dafs auf jede Periode eine Welle kommt. Am einfachsten repräsentiert dies 1 : 2, das ja auch der gemeinschaftliche Ausgangspunkt beider Gruppen ist.

Die beiden Gruppen unterscheiden sich aber voneinander dadurch, daſs bei der Gruppe $1 : (1 + x)$ in der ersten Kurvenhälfte zunächst ein Aufsteigen der Gipfel stattfindet, bei der Gruppe $x : (x + 1)$ dagegen der erste Gipfel zugleich der höchste ist. Nur $1 : 2$ und $1 : 3$ fallen insofern nicht unter die Beschreibung, als $1 : 2$ überhaupt nur einen, $1 : 3$ aber zwei gleiche Gipfel in der ersten Periodenhälfte besitzt.

Für diese beiden Gruppen ist nun die Bestimmung der Verhältniszahlen aus der Kurve leicht: die gröſsere h hat man durch die Gipfelzahl, die kleinere t ist im ersten Fall 1, im zweiten $h-1$.

3. Unter sämtlichen Kurven (die eben erwähnten mit eingeschlossen) sind zwei Klassen zu unterscheiden, die man an der Gestaltung der Kurvenhälfte ohne weiteres erkennt:

I. Bei zwei ungeraden Verhältniszahlen besitzt die Kurvenhälfte zwei einander symmetrische Hälften auf gleicher Seite der Mittellinie.

II. Bei einer geraden und einer ungeraden Verhältniszahl dagegen ist kein Wellengipfel dem anderen gleich. (Für den Fall, daſs die Zählung der Gipfel eine gerade Zahl ergibt, ist ja übrigens ohnedies klar, daſs die kleinere Verhältniszahl nur ungerade sein kann.)

ad I. Wenn zwei ungerade Verhältniszahlen vorliegen, so gibt es wieder zwei Untergruppen: Ist $\frac{h-t}{2}$ gerade, also die Differenz der Verhältniszahlen $= 4, 8, 12 \ldots$, so hat die Kurvenhälfte in ihrer Mitte eine schlechthin höchste Erhebung nach oben oder nach unten.[1] Ist $\frac{h-t}{2}$ ungerade, also die Differenz der Verhältniszahlen $= 2, 6, 10 \ldots$, so berührt sie in ihrer Mitte die Abszisse und liegt von da symmetrisch nach rechts und links.[2] Dies entspricht den obigen Regeln für das Stattfinden von Ea und ea.

Und zwar liegt im ersten Falle die Erhebung Ea oben, wenn die kleinere Verhältniszahl $= 1 + 4y$, sie liegt unten, wenn diese $= 3 + 4y$, wobei $y = 0$ oder gleich einer beliebigen ganzen Zahl ist. Also sie liegt oben bei $t = 1, 5, 9 \ldots$, unten bei $t = 3, 7,$

[1] Vgl. in den Tafeln 1 : 5, 1 : 9, 3 : 7, 3 : 11, 5 : 9, 7 : 11.

[2] Vgl. in den Tafeln 1 : 3, 1 : 7, 1 : 11, 3 : 5, 5 : 7, 5 : 11, 7 : 9, 9 : 11.

11 . . . Und ebenso berührt im zweiten Fall die Kurve die Mittellinie von oben oder von unten, wenn die gleichen Voraussetzungen stattfinden.

Der Grund ist wieder leicht in den Gesetzen der Zahlen zu finden. Ist $\frac{h-t}{2}$ gerade, so trifft in dem genannten Punkt, dem ersten Viertel der Periode, $^1/_4$ der einen mit $^3/_4$ der anderen Elementarwelle zusammen, oder aber $^3/_4$ mit $^3/_4$, was nach S. 68 ein *Ea* ergibt. Ist $\frac{h-t}{2}$ ungerade, so trifft beidemale $^1/_4$ und $^3/_4$ der Elementarwellen zusammen, was ein *ea* ergibt. Wenn nun aber $t = 1 + 4y$, so ist die längere Welle im 1. Viertel, also oberhalb der Mittellinie, wenn dagegen $t = 3 + 4y$, ist sie im 3. Viertel, also unterhalb: und auf der Seite der längeren Welle findet notwendig das *Ea* bzw. *ea* statt.

Für die Bestimmung der kleineren Verhältniszahl genügt die Subsumtion unter eine dieser Klassen natürlich nicht, sie ist aber auch nicht dazu erforderlich. Es gilt vielmehr für alle Fälle unter I folgende Regel:

Ist die Zahl p der relativ höchsten Gipfel (nach der Definition S. 75) innerhalb der ganzen Periode der Resultierenden gerade, so ist $t = h - p$. Ist sie ungerade, so ist $t = p$.

Bei unseren Kurvenhälften braucht man wieder nur zuerst oben von links nach rechts, dann unten von rechts nach links zu zählen. Selbst an den ersten Kurvenvierteln kann man durch entsprechendes Verfahren (oben vorwärts, oben rückwärts, dann unten vorwärts und wieder rückwärts) die verlangte Zahl bestimmen.

Dieser Unterschied, je nachdem $p = t$ oder $p = h - t$, hängt mit einer noch nicht besprochenen aber sehr wichtigen Klassifikation der Kurvenformen zusammen: p ist nämlich $= h - t$, wenn $h : t < 2$, es ist $= t$, wenn $h : t > 2$. Für $h : t = 2$ treffen beide Formeln zu.

Diesen Sachverhalt möge man sich an der Hand von Kurven mit eingezeichneten Elementarwellen vergegenwärtigen. Die Höhe eines Gipfels der Resultierenden ist um so gröfser, je geringer der horizontale Gipfelabstand der Elementarwellen in der betreffenden Gegend. Wie nun bei den Verhältnissen $x : x + 1$ diese horizontale Gipfelabstände innerhalb der Periode von einem Minimum aus sich immer mehr vergrösser und dann wieder abnehmen und wie infolgedessen die Gipfel der Resultierenden selbst eine nur einmalige Senkung und Hebung erfahren, so nimmt der Gipfelabstand bei $x : x + n$, solange $n < x$, also das Verhältnis $h : t$ unter 2 bleibt, n mal zu und ab (dabei die Gipfel auf der unteren Seite mitzuvergleichen). Also erfahren die Gipfel der Resultierenden eben so viele Senkungen und Hebungen, es resultieren n relativ höchste Gipfel, soviel als die Differenz der Verhältniszahlen beträgt.

Dagegen besitzen nun alle resultierenden Kurven bei $h : t > 2$, also jenseits der Oktave, einfach so viele Senkungen und Hebungen der Gipfel, wie die längere Welle. Die kürzere Welle bedingt hier nur sekundäre Ausbiegungen der längeren, die deren Verlauf im grossen nicht ändern. Die Zahl der Gipfel überhaupt bleibt zwar auch hier immer gleich der der kürzeren Welle, aber sie folgen in ihrer Höhenordnung durchaus dem Rhythmus der längeren. Und je grösser das Intervall $h : t$, um so genauer schmiegt sich die Verbindungslinie der resultierenden Gipfel dem Laufe der längeren Welle selbst an.

Hiernach ist auch, wenn wir die Einzelwellen der Resultierenden in der S. 75 unter Nr. 4 erwähnten Weise definieren, die Schwingungszahl r der Resultierenden zu bestimmen. Für $h : t < 2$ ist $r = h - t$, für $h : t > 2$ ist $r = t$.

ad II. Ist die eine der beiden Verhältniszahlen gerade, so entstehen, wie gesagt, Formen ohne Symmetrie ihrer Teile innerhalb der einen Kurvenhälfte und von der buntesten Mannigfaltigkeit. Dennoch gibt es auch hier natürlich gewisse Regelmässigkeiten. Z. B. wenn die kleinere Verhältniszahl t gerade ist, schneidet die Resultierende in der Mitte der ganzen Periode die Abszisse von oben her[1], wenn aber die grössere Verhältniszahl h gerade ist, von unten her.[2] Ferner: wenn die ungerade Zahl (einerlei ob h oder t) $= 1 + 4y$, liegt die mittlere Erhebung der ersten Kurvenhälfte oben; wenn sie $= 3 + 4y$, liegt sie unten (sie ist aber hier kein *Ea*, auch nicht in dem Sinn eine mittlere, dass der Gipfel genau bei $^1/_4$ der Periodenlänge entstände).

Auch hier trifft es zu, dass $p = h - t$, wenn $h : t < 2$, dagegen $p = t$, wenn $h : t > 2$. Und wieder ergibt sich dieselbe Konsequenz

---

[1] Vgl. in den Tafeln 2 : 3, 2 : 5, 2 : 7 usw.; 4 : 5, 4 : 7, 4 : 9, 4 : 11; 6 : 7, 6 : 11; 8 : 11; 10 : 11.

[2] Vgl. in den Tafeln 1 : 2, 1 : 4 usw.; 3 : 4, 3 : 8, 3 : 10; 5 : 6, 5 : 8, 5 : 12; 7 : 8, 7 : 10, 7 : 12; 9 : 10; 11 : 12.

in bezug auf die Schwingungszahl der Resultierenden nach der vierten unserer Definitionen.

Für die Bestimmung von t sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Wenn die gröfsere Verhältniszahl ungerade, gilt die umgekehrte Regel wie bei I: für gerades p ist $t = p$; für ungerades p ist $t = h - p$.

2. Wenn die gröfsere Verhältniszahl gerade, so erscheint immer ein ungerades p. Wie unterscheiden sich nun hier die Fälle von gleichem p untereinander, z. B. 1 : 8 und 7 : 8, 3 : 8 und 5 : 8, 5 : 12 und 7 : 12?

Es kommt hier darauf an, ob der letzte Gipfel der Kurvenhälfte gröfser oder kleiner ist als der erste. Wenn gröfser, ist $t = p$, wenn kleiner, ist $t = h - p$. Man braucht sich nur den Anfang und den Schlufs der Periodenhälfte bei 1 : 8 und 7 : 8 aus den Elementarwellen selbst zu konstruieren, um die Notwendigkeit dieses Sachverhaltes allgemein einzusehen.

Um zusammenzufassen, so hat man, wenn bei einer aus zwei Sinuswellen von gleicher Amplitude und anfänglicher Phasendifferenz Null entstandenen Gesamtwelle die Verhältniszahlen der Elementarwellen bestimmt werden sollen, zunächst die gröfsere h durch Zählung der Gipfel. Für die kleinere t kommt es auf die Anzahl p der relativ höchsten Gipfel an. Diese ist aber in verschiedener Weise mafsgebend, jenachdem der Fall I (zwei ungerade Verhältniszahlen) oder II (eine gerade und eine ungerade) vorliegt, welche beiden Fälle sich durch die Form der Kurven grundwesentlich unterscheiden. Der erste Fall differenziert sich wieder in die Unterfälle von geradem und ungeradem p, der zweite in die des geraden und ungeraden h. Jedesmal ist $t = p$ oder $= h - p$ und gibt es entscheidende Merkmale für die eine und andere Formel. —

Ich will hier noch eine einfache Methode erwähnen, die sich Frau Dr. Schaefer während des Zeichnens der Schwingungsfiguren ausgebildet hat, um aus dem blofsen Anblick der Figuren die kleinere Verhältniszahl zu erkennen, und mit der man in der Tat bei einiger Übung rasch und unfehlbar zum Ziele kommt. Das Prinzip läfst sich folgendermafsen aussprechen:

Man zählt Halbwellen der Resultierenden, die so beschaffen sein müssen, dafs sie stets abwechselnd nach oben und nach unten gehen, wie bei den Sinuswellen. Hierbei werden aber zwei oder mehr auf gleicher Seite liegende Gipfel immer dann als nur eine Halbwelle gezählt, wenn zwischen ihnen die Mittellinie nicht oder nur wenig von der Resultierenden überschritten wird. Die letzte kleine Ausbiegung in der Periodenhälfte, die in allen Fällen auftritt, wo die Periodenhälfte nicht aus zwei symmetrischen Vierteln besteht (d. h. in allen Fällen einer geraden und einer ungeraden Verhältniszahl), darf hierbei nicht gezählt werden. Die so bestimmte Zahl der Halbwellen in der Periodenhälfte ist dann $= t$.

Dies sind nun also wieder Halbwellen in einem besonderen, fünften Sinne des Wortes (o. S. 76), der aber auch beachtenswert ist, weil man damit eben ohne weiteres die kleinere Verhältniszahl hat.

Die Methode fällt nicht etwa zusammen mit der Zählung der relativ höchsten Gipfel, obschon sie derselben nahesteht. Denn für 3 : 8 und 5 : 8, ebenso für 3 : 10 und 7 : 10, für 5 : 12 und 7 : 12 ist ja die Zahl der relativ höchsten Gipfel (p) die nämliche und müssen daher noch andere Kriterien herangezogen werden, während nach dieser Methode beide Fälle von vornherein verschiedene Ergebnisse liefern.

Die reale Grundlage dieser Methode liegt darin, dafs gleiche Amplituden zweier Wellen ein mittlerer Fall sind zwischen den Extremen, wo die kürzere und wo die längere Welle eine verschwindend geringe Amplitude haben. Geht man von einem solchen Grenzfall aus und nähert sich der Amplitudengleichheit, so erscheint zunächst die Gestalt der überwiegend hohen Welle kaum alteriert; allmählich nehmen die Alterationen im Sinne der anderen Welle zu, dennoch bleibt die Form der einen und anderen bis zur Amplitudengleichheit kenntlich, für den wenigstens, der die allmähliche Entstehung solcher Alterationen sich an vielen Beispielen vergegenwärtigt hat. Man erkennt dann leicht die blofsen „Einschnürungen", die die Folge der kürzeren Welle sind, und scheidet sie bei der Zählung der längeren Wellen aus. Auf diesem Wege genetischer Betrachtung ist denn auch Frau Dr. Schaefer zu ihrer Methode gekommen. Für denjenigen, der ohne solche Vorstudien und ohne entsprechende Übung herantritt, lassen sich die Kriterien allerdings nicht so leicht begrifflich exakt festlegen wie die meinigen. Hat man sie aber an der Anschauung erfafst und geübt, so sind sie rascher zu handhaben.

Es gibt aber einen noch einfacheren Weg, um t zu finden: die Zählung der in der Periodenhälfte vorkommenden gröfsten

Abschnitte auf der Mittellinie. Oben wurde erwähnt, daſs man, um gleiche Abschnitte zu bekommen, bald einen für sich allein, bald zwei benachbarte zusammennehmen muſs. Die Abschnitte der ersten Art sind also gröſste Abschnitte, und ihre Zählung führt ohne weiteres zum Ziel. Es ist nämlich die Anzahl der gröſsten Abschnitte in der Periodenhälfte stets gleich t, ausgenommen wenn in der Mitte der Periodenhälfte die Mittellinie von der Resultierenden nur berührt wird. In letzerem Fall ist sie $= t + 1$. Der Fall tritt ein, wenn sowohl h als t als auch $\frac{h-t}{2}$ ungerade Zahlen sind.

Zu beachten ist hierbei, daſs in manchen Fällen, namentlich bei geraden t und ungeraden h, sowie in Fällen, wo $h : t$ stark über 3 hinausgeht, die Mittellinie von der Resultierenden nur minimal überschritten wird und daſs hier der Anschein zweier gleich groſser einfacher Abschnitte entsteht. (Vgl. 1:8, 6:11.) Doch kann man auch in diesen Fällen sich sofort dadurch sichern, daſs man nach den angrenzenden Gipfeln sieht: nur wenn diese gleich hoch, sind auch die beiden Abschnitte einfach und gleich groſs.

Man kann endlich auch nur den ersten, bei $h : t > 3$ den ersten plus zweiten (oder allgemein und ohne diese Unterscheidung: einen gröſsten) Abschnitt messen und mit dieser Strecke die ganze Länge der Periodenhälfte dividieren, wodurch man nach S. 72 die Schwingungszahl r erhält: dann ist $t = 2r - h$ infolge der Formel $r = \frac{h+t}{2}$. Ob man aber nur den ersten oder den ersten plus zweiten Abschnitt zu messen hat, lehrt ein Blick auf den Kurvenanfang: das erste ist der Fall, wenn auf den ersten Gipfel ein kleinerer, das zweite, wenn ein gröſserer folgt.

Natürlich wachsen zuletzt alle diese Methoden aus den gleichen Wurzeln heraus und hängen die Merkmale alle unter sich zusammen.

V. Bemerkungen über die Veränderungen bei anfänglicher Phasendifferenz, ungleicher Amplitude und Kombination von mehr als zwei Elementarwellen.

1. Bei ungleichzeitigem Beginn zweier Elementarwellen von gleicher Amplitude verändert sich zwar die Gestalt der Resul-

tierenden sehr, die Gipfel und die Abschnitte folgen sich in anderer Ordnung, aber die Regeln über die Zahl der Gipfel ($= h$), die verschiedenen Definitionen und Regeln betreffs Wellenlänge, Schwingungszahl, relativ höchster Gipfel, Bestimmung der kleineren Verhältniszahl t daraus bleiben in gleicher Weise anwendbar. Dies geht auch mathematisch aus der Bewegungsgleichung des schwingenden Teilchens hervor.

Bei fortgesetzter Phasenverschiebung zweier Wellen gegeneinander treten wiederholt gleiche oder symmetrische Formen auf. Zunächst ist hier an die S. 67 formulierten Regeln zu erinnern. Wir können sie aber jetzt noch erweitern, indem wir nicht blofs die Phasendifferenzen $\delta = 0$, $^1/_4$, $^2/_4$, $^3/_4$, sondern alle möglichen Verschiebungen ins Auge fassen.

α) Bei einer geraden und einer ungeraden Verhältniszahl erscheinen mit fortschreitender Zeitverschiebung stets abwechselnd die durch $Es\ es$ und durch $Ea\ ea$ charakterisierten Formen, und zwar erhält man im ganzen, bis die Verschiebung die Länge der verschobenen Welle erreicht, 4 mal so viele Formen (alternierend aus beiden Klassen) als die Verhältniszahl der nicht verschobenen Welle Einheiten hat. Also z. B. wenn wir bei 2 : 3 die gröfsere Welle, 2, früher beginnen lassen, d. h. nach links verschieben, so wechseln innerhalb der Gesamtverschiebung 3×4 Formen, 6 von der Art $Es\ es$ und 6 von der Art $Ea\ ea$ in gleichem Abstand voneinander, also um je $^1/_{12}$ der früher beginnenden Welle getrennt, miteinander ab. Natürlich gehen sie jedesmal stetig ineinander über. Oder lassen wir bei 5 : 8 die kleinere Welle, 8, früher beginnen, so erhalten wir 5×4 in solcher Weise abwechselnde Formen beider Klassen, getrennt durch Abstände von je $^1/_{20}$ der verschobenen Welle.[1]

β) Bei zwei ungeraden Verhältniszahlen resultieren innerhalb der Gesamtverschiebung nur halb so viele Formen mit ausgezeichneten Punkten, und zwar wechseln, wenn $\frac{h-t}{2}$ gerade ist,

[1] Nach den Regeln S. 67 könnte es scheinen, als ob bei früherem Beginn der ungeradzahligen Welle überhaupt nur die Form $Es\ es$ herauskommen könnte. Aber dort sind eben nur die 4 Quartalsverschiebungen berücksichtigt, während hier auch die zwischenliegenden in Betracht gezogen werden. Z. B. wenn bei 2 : 3 die Welle 3 früher beginnt, so erhält man für $\delta = 0$ $Es\ es$, für $\delta = {}^1/_8$ $Ea\ ea$, für $\delta = {}^2/_8$ $Es\ es$, für $\delta = {}^3/_8$ $Ea\ ea$ usf. Bei den Vierteln also in der Tat immer dieselben Formen.

die Formen $2\,Es\,2\,Ea$ und $2\,ea\,2\,es$, wenn aber $\frac{h-t}{2}$ ungerade, die Formen $2\,Es\,2\,ea$ und $2\,Ea\,2\,es$ miteinander regelmäſsig ab. Also z. B. wir erhalten bei 3 : 5, wenn die Welle 3 früher beginnt, 5×2, wenn die Welle 5 früher beginnt, 3×2 ausgezeichnete Formen abwechselnd aus den beiden zuletzt genannten Klassen. Bei 1 : 5 erhalten wir, wenn 1 früher beginnt, 1×2, wenn 5 früher beginnt, 5×2 Formen aus den beiden zuerst genannten Klassen.[1]

So läſst sich der gesamte Formenwechsel bei Phasenverschiebung unter einfache Gesichtspunkte bringen.

Die Formen einer und derselben Klasse, die so resultieren, sind aber nicht alle identisch, sondern teilweise Spiegelbilder oder vertikale Umkehrungen voneinander (z. B. liegt das Ea einmal oben, einmal unten usf.). Auch in dieser Beziehung findet regelmäſsige Abwechslung statt, doch hat die nähere Verfolgung kein ersichtliches Interesse.

In den Figuren unserer Tafeln sind hier ganze Perioden gezeichnet, weil für $\delta > 0$ die Periodenhälften nicht mehr symmetrisch sind. Als Beispiel ist 2 : 3 gewählt, und zwar ist die gröſsere Welle 2 um Beträge von $\delta = 0$ bis $\delta = 1/2$ nach links verschoben (früher beginnend) angenommen. Die Punkte auf der Abszisse bezeichnen den Anfang der ersten und das Ende der dritten von den 3 kürzeren Wellen, also die Länge der Periode. Um die regelmäſsigen typischen Formen zu erhalten, muſs man aber natürlich den Anfang immer auf einen Schnittpunkt der Resultierenden mit der Mittellinie verlegt denken; bei längeren Wellenzügen kann man ja den Periodenanfang willkürlich setzen.

Innerhalb der Verschiebungszone $\delta = 0$ bis $\delta = 1/2$ sind zunächst wieder die Hauptfälle $\delta = 1/12$, $2/12$, $3/12$, $4/12$, $5/12$, $6/12$ in den Figuren ausgeführt. Man sieht, wie die Formen $Ea\,ea$ und $Es\,es$ ständig alternieren, nur mit den erwähnten Umlagerungen. $4/12$ ist dann wieder identisch mit 0, $5/12$ mit $1/12$ usw., nur mit verschobenen Anfängen.

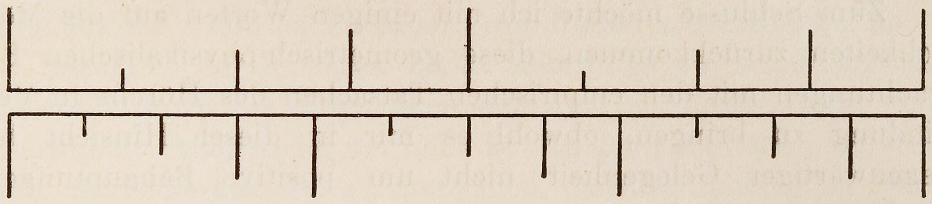
Um den Übergang zwischen diesen Hauptfällen zu illustrieren, sind zwischen $\delta = 1/12$ und $= 2/12$ noch zwei Fälle eingeschaltet.

---

[1] Daſs für zwei ungerade Verhältniszahlen bei $\delta = 1/4$ und $\delta = 3/4$ keiner der ausgezeichneten Punkte statthat, wie S. 67 bemerkt ist, ist eine notwendige Folge dieses allgemeineren Verhaltens.

Natürlich erfolgen auch diese stetigen Übergänge immer in gleicher oder symmetrischer Weise.

Am besten veranschaulicht man sich die Genesis der durch Phasenverschiebung entstehenden Formen, indem man zwei Papierstreifen gegeneinander verschiebt, auf denen innerhalb eines gleichen Zwischenraumes die h bzw. t Wellen nur mit Andeutung ihrer Viertel folgendermaſsen aufgetragen sind:



Aus den S. 67 angegebenen Regeln für das Stattfinden der ausgezeichneten Punkte kann man dann unmittelbar jedesmal die durch Verschiebung entstehenden Formen ablesen.

2. Bei ungleicher Amplitude der Elementarwellen entstehen Abweichungen von den erörterten Regeln, und natürlich im allgemeinen um so stärkere, je gröſser das Verhältnis der Amplituden wird. Doch bleiben auch hier die Bestimmungen über die Gipfelzahl ($= h$) und über die Ableitung von t aus den relativ höchsten Gipfeln bestehen, wenn die Welle von gröſserer Schwingungszahl h die gröſsere Amplitude hat.

Im umgekehrten Fall gelten diese Bestimmungen nur bis zu einem gewissen Betrage des Amplitudenverhältnisses. So hat die Kurve 5 : 8 nurmehr 5 deutlich ausgesprochene Gipfel, wenn der tiefere Ton eine 3 mal so groſse Amplitude hat wie der höhere. Dieser Fall tritt aber bei verschiedenen Schwingungsverhältnissen auch für verschiedene Amplitudenverhältnisse, und zwar bei gröſserem Schwingungsverhältnis für gröſseres Amplitudenverhältnis, ein. Bei 3 : 8 z. B. sind für das Amplitudenverhältnis 3 : 1, auch 4 : 1, noch merkliche Ausbiegungen vorhanden.

Auch die Zahl der relativ höchsten Gipfel folgt dann nicht mehr den angegebenen Regeln. 5 : 8 hat unter den genannten Umständen nur zwei relativ höchste Gipfel statt 3.

Die Regel jedoch, daſs für $h : t > 2$ diese Zahl $p = t$ ist, behält bei allen Amplitudenverhältnissen ihre Gültigkeit.

3. Ebenso verlieren bei mehr als zwei Elementarwellen, auch wenn sie sämtlich gleiche Amplitude besitzen, verschiedene

Regeln ihre allgemeine Gültigkeit. Zwar bleibt die Zahl der Gipfel auch hier immer gleich derjenigen der kürzesten Teilwelle; aber einzelne davon werden durch Zufügung neuer Wellen auf minimale Ausbiegungen herabgedrückt. Vgl. 4 : 5 : 6, 4 : 5 : 9, 4 : 7 : 9 mit den zugehörigen binären Zusammensetzungen..

VI. Mögliche Anwendungen auf die Tatsachen des Hörens.

Zum Schlusse möchte ich mit einigen Worten auf die Möglichkeiten zurückkommen, diese geometrisch-physikalischen Betrachtungen mit den empirischen Tatsachen des Hörens in Verbindung zu bringen, obwohl es mir in dieser Hinsicht bei gegenwärtiger Gelegenheit nicht um positive Behauptungen, sondern nur um Anregungen zu tun ist.

Hierbei braucht uns der Umstand, daſs mathematisch gleiche Amplituden, wie wir sie unter I bis IV voraussetzten, physikalisch nicht herzustellen sind, nicht zu stören. Denn natürlich treffen bei nur annähernd gleichen Amplituden auch die Gesetze mit solcher Annäherung zu, daſs die groſsen und prinzipiellen Unterschiede auch da zu beobachten sein müssen, wenn überhaupt die Eigenschaften der zusammengesetzten Wellen sich in der Empfindung geltend machen. Für das Vorhandensein annähernd gleicher Amplituden aber können wir die gleiche Gehörsintensität so lange als genügendes Kennzeichen betrachten, als die Töne nicht zu weit in der Höhe auseinanderliegen, also etwa bei den Intervallen bis zur Quinte. Für gröſsere Intervalle allerdings würde die Erfahrung in Betracht kommen, daſs die höheren Töne eine geringere Amplitude brauchen als die tieferen, um doch einen annähernd gleichstarken Eindruck zu machen.

a) Was nun zunächst das Heraushören der Töne aus einem Zusammenklang betrifft, so könnte man gegenüber den Zerlegungshypothesen darauf hinweisen, daſs die Einfluſslosigkeit der Phasenunterschiede, die Helmholtz als einen Beweis für die Auflösung der zusammengesetzten Welle in Sinuswellen durch das Ohr geltend macht, sich doch auch schon an dem Verhalten der zusammengesetzten Wellen in bezug auf die im Obigen hervorgehobenen wesentlichen Punkte (Gipfelzahl usw.) nachweisen lasse. Trotzdem scheint mir nach wie vor jede Möglichkeit ausgeschlossen, ohne Annahme eines besonderen Zerlegungsmechanismus aus den Eigenschaften der zusammengesetzten Welle selbst die tatsächliche Zerlegung der Klänge in unserer Gehörswahrnehmung zu verstehen. Wollte man etwa für den höheren Ton eines Zweiklangs die Gipfelzahl überhaupt, für den tieferen die der relativ höchsten Gipfel in Anspruch nehmen, und daraus zwei gesonderte Formen der Einwirkung auf den Nerven herleiten, so würde dies versagen für die Fälle $h : t < 2$, und es würde sich nicht allgemein durchführen lassen für die Kombinationen von mehr als zwei Elementarwellen, sowie für die Fälle bedeutender Amplitudenverschiedenheiten.

Bezüglich der letzteren bleibt allerdings zu beachten, daſs tatsächlich auch die Möglichkeit der Analyse durchs Gehör eine Grenze hat. Aber weder der hohe Betrag der simultanen Schwelle noch der bemerkenswerte Unterschied, daſs der höhere Ton schon bei einer viel geringeren Abschwächung verschwindet als der gleichzeitig gehörte tiefere (Tonpsych. II, 228), findet in der Gestaltung der zusammengesetzten Wellen eine hinreichende Erklärung. Die letztere Tatsache erinnert oberflächlich an den vorhin erwähnten Unterschied im Verhalten der Resultierenden, je nachdem der höhere oder der tiefere Ton der schwächere ist, aber im einzelnen stimmen die Konsequenzen nicht. So müſste z. B. bei genügender Verstärkung des tieferen Tones von 5 : 8 der höhere zwar verschwinden, aber dafür ein unter 5 liegender Ton, nämlich 2, hinzukommen, da nunmehr nur 5 Gipfel und 2 relativ höchste Gipfel vorhanden sind. Die kleine Sexte müſste sich also hier für das Gehör in die groſse Dezime verwandeln, wovon natürlich keine Rede ist.

b) Eine Tatsache dagegen, die sicher mit der Gestalt der zusammengesetzten Welle als solcher zusammenhängt, sind die S c h w e b u n g e n. Helmholtz selbst hat ihr dadurch Rechnung getragen, daſs er hier die nämlichen Teilchen der Basilarmembran durch beide Primärwellen bewegt denkt, also in diesem Bezirk die Zerlegung aufgehoben sein läſst.

Ist nun die Zahl der Schwebungen gegeben durch die Zahl der relativ höchsten Erhebungen der Resultierenden, so ergibt sich aus obigen Betrachtungen die Folgerung, daſs die Regel: „die Zahl der Schwebungen ist gleich der Differenz der Schwingungszahlen“ nicht allgemein gilt, wie sie denn auch nur für Töne abgeleitet zu werden pflegt, deren Schwingungszahlen ebenso wie deren Amplituden nicht zu stark verschieden sind. Bei Intervallen, die die Oktave überschreiten, würde die Zahl der Schwebungen, soweit sie auf den relativ höchsten Gipfeln beruhen, unveränderlich gleich der Schwingungszahl des tieferen Tones sein.

Die Verifikation ist freilich schwer. Denn in allen Tonregionen aufser der tiefsten hören die direkten Schwebungen schon vor der Oktave auf. Die bei gröfseren Intervallen beobachteten Schwebungen sind regelmäfsig durch Obertöne oder Differenztöne vermittelt. In der tiefsten Region selbst glaube ich aber in der Tat die obige Folgerung bei Tönen bauchiger Flaschen bestätigt zu finden.

c) Weiter würde sich fragen, ob nicht die Tatsachen bezüglich der sog. Zwischentöne und bezüglich der Kombinationstöne in einer näheren und direkten Beziehung zur Gestalt der zusammengesetzten Welle stehen. Bezüglich der Zwischentöne ist dies von Früheren behauptet, von mir geleugnet worden. Aber hierüber wären doch noch genauere Untersuchungen erwünscht. Bezüglich der Kombinationstöne gibt es mehrere Erscheinungen, die eine auffällige Beziehung darbieten.

So könnte die Angabe M. Meyers, dafs bei 5:8, wenn 5 stärker, der Differenzton 2, wenn aber 8 stärker, der Differenzton 3 vorwiegend vernommen wird, mit dem oben (V, 2) erwähnten Verhalten in Beziehung gebracht werden; wie dies auch wirklich bereits Ebbinghaus (Grundzüge d. Psychologie I, 324) getan hat.

Ganz besonders aber käme die Frage nach den sog. zwischenliegenden Differenztönen in Betracht. Darunter versteht man solche, die, rein arithmetisch gesprochen, als Differenz der Schwingungszahlen der Primärtöne herauskommen, sobald deren Intervall die Oktave überschreitet: denn in diesem Fall mufs die Differenz rechnerisch zwischen den Primärzahlen liegen.

Nehmen wir nun einmal an, dafs der sog. erste Differenzton wie die Schwebungen erzeugt werde durch die relativ höchsten Gipfel der Resultierenden, so ergibt sich eine analoge Folgerung wie dort: dieser Kombinationston müfste für alle Intervalle über die Oktave hinaus zusammenfallen mit dem tieferen Primärton. Das heifst: die als Differenz der Schwingungszahlen der Primärtöne ausgerechneten Zwischentöne könnten für das Ohr nicht neben den Primärtönen vorhanden sein.

Wie verhält es sich hiermit in Wirklichkeit? K. L. Schaefer hat auf Grund seiner Beobachtungen, ohne damals von einer solchen Erklärungsmöglichkeit zu wissen, ihr Vorhandensein bestritten, F. KRUEGER dagegen hat es behauptet. Versuche hierüber, die demnächst veröffentlicht werden sollen, haben mich überzeugt, dafs solche Töne zwar existieren, aber sozusagen einer anderen Gröfsenordnung angehören, an Stärke vergleichbar etwa den sog. Summationstönen, nicht aber den Differenztönen der kleineren Intervalle oder den Obertönen. Man könnte daher immerhin daran denken, dafs sie auf eine andere Weise zustande kämen als die gewöhnlichen, so leicht hörbaren und kräftigen Differenztöne. Dann könnte also die alte Vorstellung zwar nicht die ganze Wahrheit, aber einen Teil der Wahrheit in Hinsicht der Entstehung der Kombinationstöne enthalten.

Mit alledem wollte ich aber keine positive Behauptung aufstellen, nicht einmal eine Wahrscheinlichkeit behaupten, sondern nur erläutern, wie es sich etwa lohnen möchte, die Verhältnisse der zusammengesetzten Welle bei der Anstellung und Auswertung von Beobachtungen im Auge zu behalten.