Bemerkungen über die Messung von Schallstärken, mit Rücksicht auf psychophysische Versuche.

Von

Dr. Ernst Tischer.

Von unseren Versuchen über die Messung von Schallstärken wurden im I. Abschnitt der vorigen Abhandlung nur die unmittelbaren Ergebnisse kurz mitgetheilt und am Schlusse die Bemerkung gemacht, dass für die Psychophysik ihr Gesammtresultat ein negatives sei, insofern sie zeigten, dass der Exponent ε nicht als eine universelle Constante betrachtet werden dürfe. Denn derselbe zeigte sich erstens abhängig von der Beschaffenheit des jeweils zu Fallunterlage und Fallkugel benutzten Materials, kann also keine allgemeingültige Constante sein; zweitens änderte er sich insbesondere bei den Unterlagen (3) und (4) auch mit der Größe der Fallgewichte und Fallhöhen, verlor also überhaupt die Berechtigung, als Constante in Rechnung gebracht zu werden. Es ist der Mühe werth, das letztere Resultat, nämlich die Veränderlichkeit von ε mit Fallhöhe und Fallgewicht, noch einer kurzen Discussion zu unterwerfen.

Sofern sich dieselbe nur auf unsere Versuche stützt, kann sie keine völlig exacte sein, weil das von uns nach dem Vorgange von Vierordt benutzte Verfahren der Vergleichung von Schallstärken nicht gestattet, den Verlauf der Größe i der Schallintensität in seiner Abhängigkeit von den Argumenten p und h (Fallgewicht und Fallhöhe) zu verfolgen. Dies ist in exacter Weise nur dann möglich, wenn man die einer Reihe von Werthpaaren

$$p_0,\ h_0,\quad p_1,\ h_1,\quad p_2,\ h_2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

zugehörigen Schallstärken

$$\dot{i}_0 \qquad \dot{i}_1 \qquad \dot{i}_2 \, .\, .\, .\, .\, .$$

zu messen im Stande ist, d. h. die Verhältnisse $\dot{i}_0 : \dot{i}_1 : \dot{i}_2 : \ldots.$ auch dann noch anzugeben vermag, wenn dieselben nicht gleich 1 sind. Nach unserem Verfahren lassen sich aber bloß solche Werthpaare aufsuchen, denen g l e i c h e Schallstärken entsprechen, und desshalb kann man sich desselben nicht eigentlich zur Ermittelung einer Function $i = f(p, h)$, sondern höchstens zur P r ü f u n g einer vorläufig hypothetisch aufgestellten Beziehung $i = f(p, h)$ bedienen. Zum Zwecke dieser Prüfung berechnet man sich solche Werthpaare p_0, h_0, p_1, h_1, p_2, h_2, . . ., für welche $f(p_0, h_0) = f(p_1, h_1) = f(p_2, h_2) = \ldots$ sein müsste, und prüft durch den Versuch, ob diese Gleichheit wirklich stattfindet; oder, was besser ist, man wählt willkürliche drei Werthe p_0, h_0 und p_1, ermittelt durch den Versuch dasjenige h_1, für welches die Schalle $i(p_0, h_0)$ und $i(p_1, h_1)$ gleich stark erscheinen, und sieht zu, ob dieses empirisch gefundene h_1 identisch ist mit demjenigen, welches sich aus der Gleichung $f(p_0, h_0) = f(p_1, h_1)$ berechnet. Findet diese Identität bei vielfach wiederholten und unter verschiedenen Bedingungen angestellten Versuchen statt, so wird man annehmen dürfen, dass die hypothetische Function $i = f(p, h)$ der Wahrheit entspreche. Unsere Versuche waren nun eine solche Prüfung der Formel $i = p\,h^{\varepsilon}$ (ε = constans). Insofern letztere die Prüfung nicht bestand, wurde eben das Resultat der Versuche als ein n e g a t i v e s bezeichnet.

Trotzdem darf man versuchen, demselben eine positive Interpretation abzugewinnen, nur darf man nicht vergessen, dass dieselbe desswegen keine ganz eindeutige sein kann, weil die willkürliche Variation e i n e r der vier Größen P, h, p und H, aus denen ε mit Hülfe der Gleichung $\varepsilon = \dfrac{\log P/p}{\log H/h}$ berechnet wurde, immer gleichzeitig die davon in u n b e k a n n t e r Weise abhängige Aenderung noch einer z w e i t e n von jenen vier Größen bedingte.

Unmittelbar sagen nun unsere Versuche nur dieses, dass, wenn man die Größen P, h, p, H so wählt, dass $P \cdot h = p \cdot H$ ist, der Schall $i(p, H)$ schwächer ist als $i(P, h)$, vorausgesetzt, dass $P > p$ sei; d. h. obgleich zwei Kugeln von gleichem Material, aber verschiedenem Gewicht mit g l e i c h e r l e b e n d i g e r K r a f t auf eine und dieselbe Stelle einer und derselben Unterlage aufschlagen, so ist dennoch der

Schall der kleineren Kugel schwächer als derjenige der größeren, also ist der Bruchtheil der lebendigen Kraft, welcher beim Aufschlagen der kleineren Kugel nicht in Schall übergeht, größer, als bei der größeren Kugel. Nennt man diesen Bruchtheil den »relativen Schallverlust«, so steht, da der Exponent ε im allgemeinen < 1 ist, in eindeutiger Weise die Folgerung sicher:

Der relative Schallverlust ist bei kleinem Fallgewicht und großer Fallhöhe größer als bei großem Fallgewicht und kleiner Fallhöhe.[1])

---

1) Die Thatsache, dass $\varepsilon < 1$ ist, lehrt also nur, dass i mit wachsenden p schneller zunimmt als mit wachsenden h, oder dass

$$\frac{\partial^2 i}{\partial p^2} > \frac{\partial^2 i}{\partial h^2}$$

ist; dagegen gibt sie über die Vorzeichen von $\frac{\partial^2 i}{\partial p^2}$ und $\frac{\partial^2 i}{\partial h^2}$, d. i. über die Art des Wachsthums von i mit p und h keinen Aufschluss. Denn um die obige Ungleichung zu erklären, kann man irgend eine der fünf folgenden Annahmen machen:

$$\begin{array}{lll}
1) & \frac{\partial^2 i}{\partial h^2} < 0, & \frac{\partial^2 i}{\partial p^2} > 0, \\
2) & \frac{\partial^2 i}{\partial h^2} < 0, & \frac{\partial^2 i}{\partial p^2} = 0, \\
3) & \frac{\partial^2 i}{\partial h^2} < 0, & \frac{\partial^2 i}{\partial p^2} < 0, \text{ jedoch } \frac{\partial^2 i}{\partial h^2} < \frac{\partial^2 i}{\partial p^2}, \\
4) & \frac{\partial^2 i}{\partial h^2} = 0, & \frac{\partial^2 i}{\partial p^2} > 0, \\
5) & \frac{\partial^2 i}{\partial h^2} > 0, & \frac{\partial^2 i}{\partial p^2} > 0, \text{ jedoch } \frac{\partial^2 i}{\partial h^2} < \frac{\partial^2 i}{\partial p^2},
\end{array}$$

und man ist zunächst nicht bloß auf die von Vierordt gemachte Annahme (2) beschränkt. Da indessen schon aus physikalischen Gründen eine Abnahme des relativen Schallverlustes, d. i. der Deformation der Fallkugel, der Wärmeentwicklung, des Rückstoßes etc. mit wachsender Fallgeschwindigkeit unwahrscheinlich ist, so darf man die Möglichkeit von $\frac{\partial^2 i}{\partial h^2} > 0$ ausschließen. Da ferner der Einfluss der verschiedenen Fallunterlagen auf den Werth von ε, sowie die auf Seite 507 mitgetheilten Versuche entschieden auf eine Zunahme des relativen Schallverlustes mit wachsender Fallgeschwindigkeit hinweisen, so ist auch von $\frac{\partial^2 i}{\partial h^2} = 0$ abzusehen. Daher bleiben nur noch die Annahmen (1), (2) und (3) zulässig. Die Art und Weise, wie sich ε mit den absoluten Werthen von h, P und P/p ändert, nöthigt zu keiner weiteren Einschränkung der letzteren. Denn dieselbe gestattet nur in Bezug auf das Vorzeichen von $\frac{\partial^2 i}{\partial h\, \partial p}$ den Schluss, dass $\frac{\partial^2 i}{\partial h\, \partial p} > 0$ sei, während sie über $\frac{\partial^2 i}{\partial h^2}$

Da aber ε außerdem in der auf S. 503 u. f. angegebenen Weise sich mit den absoluten Werthen von Fallhöhe und Fallgewicht ändert, so ergeben sich die folgenden Schlussfolgerungen, die zunächst auf die Unterlagen (3) und (4) sich beziehen, bei denen die Kugeln starke bleibende Formänderungen erfuhren, innerhalb weiterer Grenzen von p und h aber auch bei (2) zu gelten scheinen:

(I) Die Schallstärke wächst langsamer als die Fallhöhe, aber so, dass sie mit wachsender Fallhöhe der Proportionalität mit letzterer mehr und mehr zustrebt. $\left(\frac{\partial^2 i}{\partial h^2}\right.$ ist negativ, nimmt aber mit wachsenden h zu und nähert sich mehr und mehr der Null.$\left.\right)$

(II) Die Schallstärke wächst um so langsamer mit der Fallhöhe, je kleiner das Fallgewicht ist. $\left(\frac{\partial^2 i}{\partial h \partial p} > 0.\right)$

(III) Die Schallstärke ist dem Fallgewicht nicht proportional, sondern nimmt bei großen Gewichten langsamer zu als bei kleinen. $\left(\frac{\partial^2 i}{\partial p^2}\right.$ nimmt mit wachsenden p ab.$\left.\right)$

Oberbeck formulirt das auf unsere Frage bezügliche Resultat seiner Untersuchungen in den beiden Sätzen[1]: 1) »Die Intensität wächst viel langsamer als die Fallhöhe; sie ist eher proportional der Quadratwurzel aus derselben.« 2) »Die Intensitäten sind den Fallgewichten innerhalb gewisser Grenzen proportional. Bei großen Gewichten wachsen sie etwas langsamer.«

Der erste dieser Sätze steht mit unserer Folgerung (I) nicht in Widerspruch, nur enthält diese nicht nur über das Wachsthum der Schallstärke, sondern auch über die Veränderungen dieses Wachs-

---

und $\frac{\partial^2 i}{\partial p^2}$ nur aussagt, dass $\frac{\partial^2 i}{\partial h^2}$ mit wachsenden h zunimmt, und $\frac{\partial^2 i}{\partial p^2}$ mit wachsenden p abnimmt. Die Annahmen (1), (2) und (3) könnten daher sämmtlich bestehen und zwar (1) bei kleinen, (2) bei mittleren und (3) bei großen Werthen von p. Diese Mehrdeutigkeit der Ergebnisse findet in den unten folgenden Schlussfolgerungen (I), (II) und (III) ihren Ausdruck.

1) Wiedemann's Annalen XIII, S. 243 und 244.

thums eine Bestimmung. Der zweite Oberbeck'sche Satz stimmt mit unserem Satze (III) überein, sagt aber außerdem, dass $\frac{\partial^2 i}{\partial p^2}$ von der Grenze 0 an abnimmt, während wir darüber nicht entscheiden konnten, sondern auch die Möglichkeit zulassen mussten, dass bei kleinen p $\frac{\partial^2 i}{\partial p^2}$ sogar > 0 sein kann und von einem positiven Werthe an abnimmt.

Die Uebereinstimmung zwischen unseren Schlüssen (I), (II) und (III) und Oberbeck's Resultaten wird noch größer, wenn man sich unmittelbar an die in den Tabellen 8 bis 11 der Oberbeck'schen Abhandlung enthaltenen Zahlen hält, aus welchen die angeführten Sätze abstrahirt sind. Was zunächst die Frage anbelangt, wie die Schallstärke vom Gewicht abhängt, so stehen in Oberbeck's Tabelle (11) unter B_2/B_1, St_2/St_1, St_3/St_1 die Verhältnisse der zwei Schallstärken der zwei Kugeln B_2/B_1, St_2/St_1 oder St_3/St_1, wenn dieselben von gemeinsamer Höhe herabfallen. Diese Verhältnisse sind im Mittel:

B_2/B_1	St_2/St_1	St_3/St_1
1,670	1,798	2,282;

aber die Verhältnisse der Gewichte dieser Kugelpaare sind:

1,622	1,783	2,582

und die absoluten Gewichte:

B_1	B_2	St_1	St_2	St_3
3,68	5,97	6,82	12,16	17,64.

Also ist bei den kleinen Gewichten B_1, B_2 das Verhältniss der Schallstärken größer als dasjenige der Gewichte, während bei den etwas größeren Gewichten St_1, St_2 beide Verhältnisse nahezu gleich sind und bei den noch größeren Gewichten St_1, St_3 umgekehrt das Verhältniss der Schallstärken kleiner als das der Gewichte ist; d. h. die Schallstärke wächst bei kleinen Fallgewichten etwas rascher als letztere, bei mittleren ist sie ihnen proportional und bei großen wächst sie langsamer als diese. Dies stimmt aber vollständig mit unserer Folgerung (III) überein.

Ebenso kann aus Oberbeck's Zahlen auch hinsichtlich der Art, wie die Schallstärke mit wachsender Fallhöhe verläuft, ein etwas bestimmteres Resultat abgeleitet werden, als es der Verf. selbst formulirt. Es eignen sich dazu bloß die Versuche mit den Bleikugeln B_1 und B_2, weil nur bei diesen die Schallstärke für drei verschiedene Fallhöhen gemessen wurde, während diejenigen der Steinkugeln *St* nur für zwei Fallhöhen angegeben sind. Oberbeck theilt (Tab. 8, S. 242) die Zahlen von drei Versuchsreihen mit, welche sich durch die absolute Größe der Ausschläge an seinem Messapparat unterschieden. Jede Versuchsreihe theilt sich in zwei Unterreihen, die wir als *a* und *b* unterscheiden wollen. Bei *a* wurde mit der kleineren Kugel B_1, bei *b* mit der etwas größeren Kugel B_2 experimentirt. In beiden Fällen aber wurde die Fallhöhe *h* in ganz gleicher Weise variirt. Ich stelle die Zahlen hier in einer anderen als der von Oberbeck gegebenen Anordnung zusammen. *i* bezeichnet die Schallstärke, Δi die erste, $\Delta^2 i$ die zweite Differenz:

	a			b		
h	i	Δi	$\Delta^2 i$	i	Δi	$\Delta^2 i$
Versuchsreihe 1.						
10	14,7			25,7		
20	22,6	7,9	— 6,8	37,3	11,6	— 14,1
30	29,9	7,3	— 0,6	50,2	12,9	+ 1,3
Versuchsreihe 2.						
10	21,9			36,0		
20	32,9	11,0	—10,9	56,7	20,7	— 15,3
30	41,2	8,3	— 2.7	71,4	14,7	— 6,0
Versuchsreihe 3.						
10	17,3			27,7		
20	26,9	9,6	— 7,7	46,8	19,1	— 8,6
30	37,7	10,8	+ 1,2	57,3	10,5	— 8,6

Die zweiten Differenzen $\Delta^2 i$ sind hiernach im allgemeinen negativ, also wächst die Schallstärke *i* langsamer als die Fallhöhe *h*. Was aber die Frage anlangt, ob sie proportional zu $\sqrt{h}$ ist, so spricht nur die Reihe 3 *b* dafür, denn in dieser ist in der That $\Delta^2 i$ constant $= -8,6$. In allen fünf übrigen Reihen dagegen nimmt $\Delta^2 i$ sehr rasch zu, in 1 *b* und 3 *a* wird sie für $h = 30$ cm sogar schon positiv, während sie bei 1 *a* und 2 *a* noch negativ bleibt, aber der Null schon sehr nahe rückt;

also ist auf Grund der von Oberbeck gefundenen Zahlen gar nicht daran zu denken, dass i nahezu $\sqrt{h}$ proportional sei, vielmehr sagen diese Zahlen direct aus, dass die Curve, welche den Verlauf der Schallstärke in seiner Abhängigkeit von der Fallhöhe darstellt, bei Gewichten von 3 bis 6 g in dem Intervall $h = 0$ bis $h = 10$ gegen die h-Achse allerdings beträchtliche Concavität besitzt, dass sie aber später, in dem Intervall $h = 20$ bis $h = 30$ nahezu geradlinig verläuft, ja zufolge der positiven $\Delta^2 i$-Werthe in $1b$ und $3a$ gegen die h-Achse convex werden kann. Also findet auch in diesem Punkte zwischen Oberbeck's Resultaten und unseren Folgerungen (I) vollständige Uebereinstimmung statt.

Aber sogar unsere Folgerung (II) wird durch Oberbeck's Zahlen bestätigt. Vergleicht man nämlich die Ergebnisse der oben angeführten sechs Versuchsreihen mit einander und mit ihrem Gesammtergebniss, so sieht man, dass letzteres in den Werthen der zweiten Reihe seinen schärfsten Ausdruck findet, während dies von der ersten und dritten Reihe nicht in dem Maße gesagt werden kann. Außerdem stimmen die Ergebnisse von $2a$ und $2b$ untereinander viel besser überein, als diejenigen von $1a$ und $1b$ und noch mehr als die von $3a$ und $3b$, welche letztere mit einander fast unvereinbar sind, da in $3a$ die Werthe $\Delta^2 i$ rasch aus dem negativen ins positive übergehen, während in $3b$ vollständige Constanz zum Vorschein kommt. Vergleicht man ebenso die in Oberbeck's Tabellen 10 und 11 zusammengestellten Zahlen der drei Versuchsreihen, so zeichnen sich wieder diejenigen der zweiten Reihe vor den beiden übrigen durch außerordentliche Regelmäßigkeit aus, während die der ersten und dritten Reihe unregelmäßig hin und her schwanken. Dies lässt vermuthen, dass Oberbeck's Messapparat bei den Bedingungen, unter denen die zweite Reihe angestellt wurde, am zuverlässigsten gearbeitet habe. Nimmt man dies an, so lehrt Tab. 10, dass, wenn man eine und dieselbe Kugel von zwei verschiedenen Höhen h_o und h_u fallen lässt, das Verhältniss der zugehörigen Schallstärken $\frac{i_o}{i_u}$ zwar immer kleiner ist als $\frac{h_o}{h_u}$, dass es aber um so größer wird und der Zahl $\frac{h_o}{h_u}$ um so näher rückt, je größer das Gewicht der angewendeten Kugel ist. Denn es ist nach Tab. 10:

bei $h_o/h_u =$	20/10 cm		20/10 cm			30/10 cm	
für	B_1	B_2	St_1	St_2	St_3	B_1	B_2
$\frac{i_o}{i_u} =$	1,502	1,575	1,571	1,622	1,698	1,881	1,983

Daraus folgt in vollständig eindeutiger Weise, dass die Schallstärke bei kleinem Fallgewicht mit zunehmender Höhe langsamer wächst als bei größerem Fallgewicht, oder dass $\frac{\partial i}{\partial h}$ von p abhängt und mit demselben wächst, also $\frac{\partial^2 i}{\partial h\,\partial p} > 0$ ist.

Tab. 11 lehrt, dass, wenn man zwei ungleich schwere Kugeln, eine größere P und eine kleinere p, von gemeinsamer Höhe fallen lässt, das Verhältniss der Schallstärken $\frac{i(P)}{i(p)}$ sich mit h ändert und mit wachsenden h zunimmt. Denn es ist nach Tab. 11

bei den Kugeln	B_2/B_1			St_2/St_1		St_3/St_1	
für $h =$	10	20	30	10	20	10	20
$\frac{i(P)}{i(p)} =$	1,644	1,723	1,733	1,809	1,867	2,179	2,356

Der Schall der großen Kugel übertrifft also den der kleinen umsomehr, je größer die gemeinsame Fallhöhe ist, die kleine Kugel büßt mit wachsender Fallhöhe relativ mehr an Schallstärke ein als die größere. Demnach liefert sowohl Tab. 10 als auch Tab. 11 eine Bestätigung unserer Folgerung (II).

Aus den soeben mitgetheilten Schlüssen folgt, dass die Formel $i = p h^{\varepsilon}$ unter der Voraussetzung $\varepsilon =$ constans nur innerhalb sehr enger Grenzen als giltig betrachtet werden darf. Zunächst dürfen in dieselbe nur solche Gewichte p eingesetzt werden, für welche die Schallstärke annähernd dem Gewicht proportional ist, also Gewichte von 4 bis 12 g, vorausgesetzt, dass man sich der von Oberbeck benutzten Fallunterlage bedient und dass die Kugeln aus Stein sind. Aber selbst dann ist ε noch keine Constante, sondern eine mit h wachsende Function von h. Dabei wird unter ε dasjenige verstanden, welches sich bei Benutzung der Oberbeck'schen Methode der Schallmessung berechnen lässt. Dasselbe ist an Bedeutung nicht ganz identisch mit demjenigen, welches sich aus unseren Versuchen, nämlich durch Berechnung aus der Gleichung

$$Ph^{\varepsilon} = pH^{\varepsilon}$$

ergibt. Jenes ε gehört wirklich zu einem bestimmten Fallgewicht und zu einer bestimmten Fallhöhe, weil es aus der Gleichung $i = Ph^{\varepsilon}$ berechnet wird, in welcher neben P und h auch i eine objectiv gemessene Größe ist; unser ε aber gehört weder zu den bestimmten Werthen P und h, noch zu den anderen bestimmten Werthen p und H, sondern es gehört zu einem Gewichtspaare P und p und zugleich zu einem Höhenpaare h und H. Da ich in der vorigen Abhandlung diesen Punkt nicht weiter hervorgehoben, gleichwohl aber im zweiten Abschnitt mit Hülfe empirisch ermittelter und in sogenannten Reizmaßtabellen zusammengestellter ε Schallstärken mit einander verglichen, d. h. ihr Verhältniss berechnet habe, so sei hier noch in Kürze ausgeführt, wie ich dabei verfahren bin.

Sind die vier Größen P, h, p und H durch den Versuch so abgestuft worden, dass der Schall $i(P,h)$ gleich dem Schalle $i(p,H)$ erscheint, so wird aus der Gleichung $Ph^{\varepsilon} = pH^{\varepsilon}$ oder

$$\text{(I)} \qquad \frac{P}{p}\left(\frac{h}{H}\right)^{\varepsilon} = 1$$

ε berechnet. Sind jetzt an Stelle von p und H zwei andere Werthe p' und H' gegeben und soll das Verhältniss der Schallstärken $i(P,h)$ und $i(p',H')$ berechnet werden, so mache ich die Voraussetzung, dass man setzen dürfe:

$$\text{(II)} \qquad \frac{i(P,h)}{i(p',H')} = \frac{P}{p'}\left(\frac{h}{H'}\right)^{\varepsilon},$$

und dass hierin der Ausdruck rechter Hand bei Benutzung des aus (I) gefundenen ε-Werthes das Verhältniss linker Hand auch dann noch richtig angebe, wenn es von 1 verschieden ist, so lange nur diese Abweichung in gewissen engen Grenzen eingeschlossen liegt. Diese Grenzen habe ich in den obigen Versuchen so gewählt, dass für die Verhältnisse der Gewichte P und p' und der Höhen h und H' die Bedingungen

$$P \geqq p' \geqq \tfrac{2}{5}P, \quad 3h \geqq H' \geqq h$$

erfüllt sind. Der in der Formel (II) zu benutzende Werth von ε wird nun experimentell ermittelt, indem man zu einer Kugel p auf die in Abschnitt I angeführte Weise dasjenige H aufsucht, für welches der

Schall von P demjenigen von p gleich wird, und dann ε aus der Gleichung (I) berechnet.

Bei unseren Versuchen zur Prüfung des Weber'schen Gesetzes sind die beschränkenden Bedingungen, unter denen ich mir eine Berechnung von Schallstärkeverhältnissen aus empirisch ermittelten ε gestatte, erfüllt, denn bei denselben handelt es sich um Berechnung von Schallreizverhältnissen, welche in der That gleich 1 $\pm$ einem kleinen echten Bruche sind, nämlich um Berechnung der Verhältnisse $\frac{r + \varDelta r_0}{r} = a$ und $\frac{r - \varDelta r_u}{r} = b$. Das bei Berechnung von a zu benutzende ε gehört zum Höhenpaar h_0' und h $(h'_0 > h)$, das bei Berechnung von b zu benutzende ε zu dem Höhenpaar h und h'_u $(h > h'_u)$. Da nun unsere Vergleichungsversuche ergeben haben, dass bei der Unterlage (3) die ε mit zunehmender unterer Fallhöhe wachsen, so muss zur Berechnung eines jeden a ein größeres ε benutzt werden, als zur Berechnung des zugehörigen b.

Zur Vermeidung der Ermüdung habe ich die Versuche in zwei Reihen gesondert ausgeführt, und in der einen bloß h'_0- und h'_u-Werthe bestimmt, in der andern bloß ε-Werthe gesucht. Als Beispiel des bei der Aufsuchung der ε-Werthe eingeschlagenen Verfahrens wähle ich die Versuche, in denen Herr Lorenz die Schallstärken verglich. Dieselben lieferten:

p	P	h	H	ε
0,3	0,66	15	65	0,549
		35	120	0,653
1,06	2,6	15	62	0,628
		35	130	0,680
2,6	5,6	15	54	0,599
		35	104	0,705
5,6	12,5	15	48,5	0,691
		35	107	0,726
12,5	25	15	41,5	0,681
		35	91	0,725
25	50	15	40,5	0,698
		35	90	0,734
50	100	15	38	0,746
		35	80	0,836

Nach dieser Tabelle gehörten zu den Höhenpaaren 40/15 und 100/35, welche bei den Versuchen über das Weber'sche Gesetz annähernd benutzt worden sind, mit Rücksicht auf die oben zu Gleichung (II) gemachte Bemerkung die folgenden ε:

	$P/p =$	0,66/0,3 g	2,6/1,06	5,6/2,6	12,5/5,6	25/12,5	50/25	100/50
$H/h =$	40/15 cm	0,55	0,63	0,60	0,69	0,68	0,70	0,75
	100/35 -	0,65	0,68	0,70	0,73	0,72	0,73	0,84

Aus dieser Tabelle erhält man dann, unter der Voraussetzung, dass die wahren ε nicht auf- und abspringen, sondern dass ihr Wachsthum mit P und h ein regelmäßiges sein werde, die Reizmaßtabelle XVIII, S. 513.

Noch sei der Gebrauch dieser Tabelle bei Berechnung der a- und b-Werthe an einem Beispiel erläutert. Gesetzt, man suche die Unterschiedsschwelle zum Reize $r\ (p, h)$ für $p = 5,6$ g und $h = 40$ cm und finde für das h'_0 des Reizes $r + \varDelta r_0 = r\ (p, h'_0)$ den Werth $h'_0 = 92$ cm, so ist

$$a = 5,6/5,6\ (92/40)^{\varepsilon}$$

und man hat jetzt das zu dem Gewichtspaare 5,6/5,6 g und dem Höhenpaare 92/40 cm gehörige ε aus der Reizmaßtabelle zu entnehmen. Das Höhenpaar 92/40 cm steht 100/35 cm nahe; man wende sich also an die zweite Zeile der Tabelle XVIII und suche darin das ε derjenigen Verticalspalte, an deren Kopf das Gewichtspaar 5,6/5,6 g steht. Da dieselbe gar nicht in der Tabelle vorkommt, so denken wir sie uns zwischen die Spalten 5,6/2,6 und 12,5/5,6 eingeschaltet und finden dann, dass ε zwischen 0,69 und 0,72 liegen müsse. Das Mittel ist 0,705 und da bloß mit zweistelligen ε gerechnet wird, so haben wir uns für 0,70 oder 0,71 zu entscheiden. Da 5,6 relativ näher bei 2,6 als bei 12,5 liegt, so wird 0,70 angenommen und mithin

$$a = (92/40)^{0,70}$$

gesetzt. Wurde ferner bei dem Reize $r - \varDelta r_u = r\ (p, h'_u)\ h'_u = 19$ cm gefunden, so ist $b = 5,6/5,6\ (19/40)^{\varepsilon}$, und es wird jetzt das ε der oberen Zeile entnommen, weil es zum Höhenpaar 40 und 19 cm gehören muss; dasselbe muss wieder zwischen den Spalten 5,6/2,6 und 12,5/5,6 liegen, ist also gleich 0,64 anzunehmen und mithin

$$b = (19/40)^{0,64}.$$

Weicht das Höhenpaar h'_0/h oder h/h'_u beträchtlich von 100/35 cm oder 40/15 ab, so wird auch dieses entsprechend den in Abschnitt I mitgetheilten Erfahrungen über die Veränderlichkeit von ε in Rechnung gezogen.

Wollte man an Stelle dieses empirischen Verfahrens die Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden, so würde das Verhältniss kaum wesentlich anders, weil man sich bei den empirischen Ermittelungen einer Anzahl von ε, auf die sich die Rechnung zu stützen hat, auf Angaben verlassen muss, die aus einer mehr schätzenden als messenden Vergleichung der Schallstärken entspringen. Eine größere Sicherheit der Berechnung würde nur dann zu gewinnen sein, wenn wir über die Form der Function $i = F(p, h)$ einige Sicherheit besäßen, der Ermittelung einer solchen stehen aber zunächst unüberwindliche physikalische Schwierigkeiten entgegen. Würde die gesammte Energie der aufschlagenden Kugel auf Schallerzeugung verwendet, so wäre unzweifelhaft $i = c\,p\,h$, wo c eine Constante bedeutet, die bloß von den gewählten Maßeinheiten abhängt und deshalb gleich 1 gesetzt werden darf. Nun ist aber klar, dass ein Theil der Energie nicht in Schall übergeht, dass demnach die Schallstärke (wenn $c = 1$ gesetzt worden ist) nicht gleich $P\,h$, sondern

$$i = \frac{k}{N} p\,h,\; k < N,$$

gesetzt werden muss. Wäre der Schallverlust immer derselbe Bruchtheil der gesammten Energie, so wären auch k und N constante Grössen, und dann könnte immer noch $i = P\,h$ als Vergleichsformel für Schallstärken dienen. Nach unserer Folgerung (I) (Seite 546) sowie nach den Ergebnissen von Oberbeck's Untersuchungen nimmt aber der relative Schallverlust mit wachsender Fallgeschwindigkeit zu, also muss $\frac{k}{N}$ eine mit wachsenden h abnehmende, oder auch k constant und der Nenner N eine mit h wachsende Function von h sein. Nach Folgerung (III) kann aber N auch von p nicht unabhängig sein, sondern muss bei großen Gewichten schneller zunehmen als bei kleinen. Endlich verlangt noch die Folgerung (II), dass die in Beziehung auf h constanten Parameter der Function $N(h)$ das Argument p in solcher Form enthalten müssen, dass N bei wachsenden h schneller wächst, wenn p klein ist, als wenn es groß ist.

Die Annahme, welche Vierordt nach seiner ersten Prüfung der Formel $i = P\,h$ machte, dass nämlich $i = P\sqrt{h}$ sei, involvirt nach den obigen Entwicklungen stillschweigend die Hypothese, dass der relative Schallverlust proportional der Geschwindigkeit der aufschlagenden Kugel wachse, d. h. N proportional $\sqrt{h}$ sei. Denn unter dieser Voraussetzung ergibt sich

$$i = \frac{k}{\sqrt{h}} \cdot p\,h = k\,p\sqrt{h}.$$

Wäre die Formel $i = p\,h^{\varepsilon}$, $\varepsilon =$ constans, richtig, so würde dieselbe aussprechen, dass der relative Schallverlust oder der Nenner N von p unabhängig sei, seine Abhängigkeit von h sich aber durch $N = h^{1-\varepsilon}$ ausdrücken lasse. Denn es wäre dann

$$i = \frac{k}{h^{1-\varepsilon}} \cdot p\,h = k\,p\,h^{\varepsilon}.$$

Beide Voraussetzungen haben sich als unzulässig erwiesen.