Die Methode der richtigen und falschen Fälle in ihrer Anwendung auf Schallempfindungen.

Von

Gustav Lorenz.

Hierzu Taf. V.

I. Die verschiedenen Auffassungsweisen der Methode.

Wesen und Aufgabe der Methode. Die Methode der richtigen und falschen Fälle fußt auf der psychologischen Thatsache, dass unsere Auffassung gegebener Sinnesreize gewissen zufälligen Fehlervorgängen unterliegt, welche uns jene Reize bald größer bald kleiner erscheinen lassen, als sie wirklich sind. In Folge dessen kann man den Unterschied zweier Reize so klein machen, dass man bei wiederholten Vergleichsversuchen nur in einer beschränkten Zahl von Fällen richtig urtheilt, d. h. den wirklich stärkeren Reiz auch für den stärkeren hält, während man in einer anderen Anzahl von Fällen zweifelhaft bleibt, welcher von beiden Reizen der stärkere sei, oder aber Gleichheitsfälle constatirt oder endlich falsch urtheilt, d. h. den wirklich stärkeren Reiz für den schwächeren hält und umgekehrt. Es ist nun die Aufgabe der Methode der richtigen und falschen Fälle, aus den so erhaltenen Zahlen richtiger, zweifelhafter und falscher wie der Gleichheitsfälle die Unterschiedsempfindlichkeit zu bestimmen. Das ist bis jetzt auf zwei principiell von einander verschiedenen Wegen geschehen, deren einer von Fechner, deren anderer von Müller angegeben worden ist und die wir zunächst kurz darlegen wollen.

A. Die Fechner'sche Auffassungsweise der Methode der richtigen und falschen Fälle.

Die Ableitung Fechner's stützt sich auf die auch den übrigen psychophysischen Maßmethoden zu Grunde liegende Definition der Unterschiedsempfindlichkeit, dass dieselbe reciprok demjenigen Reizzuwachse zu setzen sei, welcher für die Empfindung dasselbe leistet oder gleichmerklich erscheint. Ergeben nun verschiedene nach der Methode der richtigen und falschen Fälle ausgeführte Versuchsreihen, die bei verschiedenen Reizunterschieden ausgeführt wurden, dieselbe relative Anzahl richtiger Fälle, so entspricht das einem immer gleichen Grade der Merklichkeit. Darum wird die Unterschiedsempfindlichkeit in den zu vergleichenden Fällen denjenigen Reizzuwüchsen reciprok zu setzen sein, welche dieselbe relative Anzahl richtiger Fälle liefern.

Wenn man demnach die Unterschiedsempfindlichkeit in Bezug auf zwei verschiedene Reizstärken zu vergleichen hat, und ein bestimmter Reizunterschied D zwischen dem einen der beiden Reize und seinem Vergleichsreize hat eine bestimmte Anzahl richtiger Fälle geliefert, so ist es weiter die Aufgabe des Versuchs, denjenigen Reizunterschied D' auszumitteln, welcher zwischen dem zweiten Reize und seinem Vergleichsreize bestehen muss, um dieselbe relative Anzahl richtiger Fälle zu ergeben. Die Bestimmung dieses Reizunterschiedes D' also, welcher dieselbe relative Anzahl richtiger Fälle liefert und dessen reciproker Werth als Maß der Unterschiedsempfindlichkeit dient, ist die principielle Aufgabe des experimentellen Verfahrens der Methode. So einfach diese Aufgabe auf den ersten Blick auch scheint, so ist ihre Ausführung doch äußerst langwierig, denn es gelingt in der Regel erst nach vielem Probiren, den Reizunterschied D so abzuändern, bis man auf die gewünschte Anzahl richtiger (r), zweifelhafter (z) und falscher (f) Fälle kommt.

Diesen Uebelstand suchte Fechner durch eine Formel zu heben, welche, gegründet auf das Wahrscheinlichkeitsgesetz der begangenen Fehler, es gestattete, aus den bei einem ganz beliebigen Reizunterschiede erhaltenen Zahlen r, f, z die Unterschiedsempfindlichkeit zu bestimmen, so dass nun eine Abänderung des D, um auf ein bestimmtes $\frac{r}{n}$ zu kommen, nicht mehr nöthig war. Unter der Voraussetzung nämlich, dass das Gauß'sche Fehlergesetz, nach welchem die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen eines Beobachtungsfehlers $\varDelta$ durch die Formel repräsentirt wird $w = ce^{-h^2\varDelta^2}$, wo h das Maß der Genauigkeit der Beobachtungen und c die Wahrscheinlichkeit des Fehlers vom Betrage 0 bedeutet, auch auf das Gebiet unserer Beobachtungen anwendbar sei, erblickt Fechner in dem Präcisionsmaß ein Maß der Unterschiedsempfindlichkeit. Er begründet dies dadurch, dass bei sonst gleich gehaltenen Versuchsumständen die Präcision nur noch von der Empfindlichkeit abhänge, mit welcher der Unterschied aufgefasst wird. So gewinnt er eine mathematische Beziehung zwischen dem Producte hD und dem bei dem Versuche erhaltenen Verhältnisse $\frac{r}{n}$, der Anzahl der richtigen zur Gesammtzahl der Fälle. Mit Hülfe einer auf Grund dieser Formel construirten Tabelle 1) findet man dann zu jedem bei einem bestimmten D erhaltenen $\frac{r}{n}$ einen Werth hD und durch Division desselben durch D einen Werth von h, der als Maß der Unterschiedsempfindlichkeit dient.

Dies der allgemeine Gedankengang Fechner's. Was die specielle Entwicklung jener mathematischen Beziehung anbelangt, so ist dieselbe von Fechner in zweifacher Weise angegeben worden; einmal in den »Elementen« 2) unter Anhalt an ein von Prof. Möbius vorgeschlagenes Linienbeispiel und dann in der »Revision der Hauptpunkte der Psychophysik« 3) in directer Weise, d. h. unter Bezugnahme auf die die Fehler r, f, z bedingenden Fehlervorgänge. Wir werden uns im Folgenden nur an die letztere als an die durchsichtigste Darstellung halten, indess gegen die erste Ableitung mancherlei Bedenken namentlich von Müller erhoben worden sind, bezüglich deren zwar eine Rechtfertigung Fechner's erfolgt ist, ohne aber diese Ableitung empfehlenswerther zu machen. Direct auf die in Frage kommenden Verhältnisse gestützt und nicht in Anlehnung an ein den psychophysischen Versuchsgebieten fernliegendes Linienbeispiel, ist diese zweite Ableitung von größerem Werthe.

---

1) Vgl. Fechner, Revision der Hauptpunkte der Psychophysik. S. 66. Fechner, Elemente der Psychophysik. I. S. 108.

2) Elem. der Psychophysik. Th. I. S. 104.

3) Rev. d. Hptp. d. Psychophysik. S. 86.

Wie schon oben erwähnt, werden die verschiedenen Fälle r, f, z durch die jeden Versuch begleitenden zufälligen Fehlervorgänge bedingt, welche uns die Reize bald größer bald kleiner erscheinen lassen, als sie thatsächlich sind. Diese Reizänderungen sind nur scheinbare, nur in der Empfindung existirende, während die Reize immer dieselbe constante Größe besitzen. Offenbar aber ergibt sich dasselbe Resultat, wenn wir von den zufälligen Fehlervorgängen abstrahiren und die verschiedenen Versuchsfälle hervorgebracht denken durch wirkliche Reizänderungen, die den durch die Fehlervorgänge hervorgebrachten scheinbaren an Größe gleich sind. Fassen wir die Verhältnisse so auf, so entsprechen jedem Versuchsfall der Methode bestimmte Aenderungen der beiden Reize und mithin auch jedem Versuchsfall eine bestimmte Größe des durch die Zufälligkeiten verändert gedachten Unterschiedes D. Das gilt, wie für die richtigen und falschen Fälle, so auch für die Nullfälle; ihnen entsprechen gleichfalls bestimmte Aenderungen des Reizunterschiedes, nur dass dieselben in der Empfindung als Null erscheinen, weil sie hier unter die Schwelle fallen. Auf diese den verschiedenen Fällen zu Grunde liegenden scheinbaren Reizunterschiede, nicht auf die Empfindungen selbst bezieht Fechner seine Rechnungen. Als richtige Fälle für die Rechnung fasst er demnach diejenigen auf, bei denen der scheinbare Unterschied der beiden Reize positiv ist, d. h. wo die Summe des wirklichen Unterschiedes D und der durch die zufälligen Fehlervorgänge bedingten Abweichung des Unterschiedes größer als Null ist, während als falsche Fälle diejenigen aufzufassen sind, wo jene Summe kleiner als Null ist.

Gehen wir nun zunächst von Versuchen mit zwei Reizen A und B aus, deren Unterschied $D = 0$ ist, welche also gleichstark sind, so wird uns infolge des Einflusses der zufälligen Fehlervorgänge bald $B > A$, bald umgekehrt erscheinen. Während uns ohne zufällige Fehlervorgänge die beiden Reize immer gleichstark erscheinen müssten, erleiden dieselben jetzt zufällige Abweichungen Δ von einander, die bald nach der einen, bald nach der andern Seite fallen. Bezeichnen wir nun mit Fechner schon jetzt im Falle $D = 0$ die Fälle als richtige, wo das später größer zu nehmende B größer als A erscheint, diejenigen aber, wo B kleiner als A erscheint, als falsche und nehmen die den ersteren entsprechenden Abweichungen Δ mit positivem Vorzeichen, die andern mit negativem Vorzeichen, so wird jetzt im Falle

$D = 0$, die Wahrscheinlichkeit der positiven und negativen s, mithin die der richtigen und falschen Fälle (r und f) gleich sein. Die mit auftretenden Nullfälle z werden für die Rechnung zu halbiren und die eine Hälfte derselben nach der einen, die andre nach der andern Seite zu schlagen sein. Denn bei der Symmetrie nach beiden Seiten können die unterliegenden Abweichungen der Reize ebensogut positiv wie negativ sein. Darnach wird man für den Fall $D = 0$ für die Rechnung

$$r' = r + \frac{z}{2} \text{ positive und } f' = f + \frac{z}{2}$$

negative Fälle haben.

Es fragt sich nun aber, welchem Gesetze die zufälligen Abweichungen Δ folgen. Wie die Verhältnisse liegen, kann jede Abweichung Δ ebenso gut positiv wie negativ ausfallen, die relative Wahrscheinlichkeit aber des Vorkommens einer bestimmten Abweichung Δ wird um so geringer, je größer sie ist, weil dazu die Wahrscheinlichkeiten mit um so höhern Werthen in demselben Sinne zusammentreffen müssen. Das sind aber die Voraussetzungen, auf denen das Gauß'sche Fehlergesetz beruht. Es folgen also unsere Abweichungen Δ diesem Gesetze und sie stellen sich darnach als zufällige Abweichungen von $D = 0$ dar. So erhält man für die Wahrscheinlichkeit der gesammten positiven wie negativen Δ:

$$\frac{r'}{n} = \frac{f'}{n} = \frac{1}{2}.$$

Geben wir jetzt D einen von Null verschiedenen Werth, so wird die Wahrscheinlichkeit der richtigen Fälle um eine gewisse Größe wachsen, die der falschen um ebensoviel abnehmen. Diese Grösse sei C; dann werden wir jetzt haben;

$$\frac{r'}{n} = \frac{1}{2} + C; \qquad \frac{f'}{n} = \frac{1}{2} - C,$$

wo es sich nur noch darum handelt, C in seiner Abhängigkeit von D darzustellen.

Wenn wir die Abweichungen $\pm \Delta$ nach derselben Einheit wie D gemessen denken, so kommt nun gegen den vorigen Fall zu den Abweichungen $\pm \Delta$ der constante Werth D hinzu, sodass wir jetzt Abweichungen $\pm \Delta + D$ der beiden Reize haben, die wir θ nennen wollen. Wie vorhin, geben auch jetzt positive Werthe der Abweichungen die richtigen Fälle r', negative Werthe derselben die falschen Fälle f'. Die Scheidegrenze aber zwischen den r' und f' liegt bei $\theta = 0$, wo ein negatives Δ mit dem hinzugetretenen positiven D sich aufhebt. Um nun die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens der Werthe θ zu ermitteln, erinnere man sich des Satzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung, dass die Wahrscheinlichkeit zutälliger Werthe sich durch Zufügung eines constanten Werthes nicht ändert. Darnach haben die Abweichungen θ, die sich von den Δ's nur um den constanten Werth D unterscheiden, dieselbe Wahrscheinlichkeit wie die Abweichungen Δ. Die Wahrscheinlichkeit der positiven Δ's oder vielmehr der Δ's, wo θ positiv ist, welche $\frac{1}{2}$ bei $D = 0$ war, wird jetzt nach Verwendung eines positiven D um die Wahrscheinlichkeit aller der Werthe Δ wachsen, welche von $\Delta = 0$ bis zu einem negativen Δ reichen, welches nach absolutem Werthe gleich D ist.

Nun ist aber die Wahrscheinlichkeit zufälliger Abweichungen zwischen $\Delta = 0$ und einem gegebenen Δ nach dem Gauß'schen Gesetze:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hs} e^{-t^2}dt.$$

Für unsern Fall, wo also Δ dem absoluten Werthe nach sich von 0 bis D erstreckt, hat man darnach für die Wahrscheinlichkeit C:

$$C = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hD} e^{-t^2}dt,$$

deren Substitution in unsere obigen Formeln liefert:

$$\frac{r'}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hD} e^{-t^2}dt; \qquad \frac{f'}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hD} e^{-t^2}dt.$$

Jedem Werthe $\frac{r'}{n}$, wie er durch den Versuch gefunden wurde, entspricht nach dieser Formel ein bestimmter Werth hD, dessen Division durch D einen Werth h als Maß der Unterschiedsempfindlichkeit liefert.

Inwiefern es berechtigt ist, h als Maß der Unterschiedsempfindlichkeit zu benutzen, lässt sich leicht aus folgendem Zusammenhange entnehmen. Das Maß der Unterschiedsempfindlichkeit ist bestimmt durch einen Werth, der reciprok dem D ist, welches ein gleiches $\frac{r'}{n}$ in den zu vergleichenden Fällen liefert. Mit der Gleichheit von $\frac{r'}{n}$ ist aber nach unsrer Formel auch die Gleichheit von hD gegeben.

Wenn man also bei Anwendung verschiedener D doch ein gleiches hD, mithin gleiches r' und f' erhalten will, so muss sich h umgekehrt wie D verhalten. Darnach aber entspricht h dem Begriffe der Unterschiedsempfindlichkeit.

B. Die Müller'sche Auffassungsweise der Methode der richtigen und falschen Fälle.

Die Müller'sche Auffassungsweise unterscheidet sich von der Fechner'schen schon darin, dass nicht jeder beliebige gleich merklich in die Empfindung fallende Reizunterschied, sondern nur ein einziger, der Unterschiedsschwellenwerth, zur Messung der Unterschiedsempfindlichkeit tauglich erachtet wird. Der reciproke Werth der Unterschiedsschwelle ist daher das Maß der Unterschiedsempfindlichkeit. Dementsprechend gehen Müller's Formeln in erster Linie auf die Berechnung des Unterschiedsschwellenwerthes aus; erst in zweiter Linie steht die Berechnung eines Präcisionsmaßes, das aber eine von dem Fechner'schen abweichende Bedeutung hat. Die Ableitung der Formeln ist die folgende. Unter der Voraussetzung, dass die zufälligen Abweichungen δ und δ', welche die beiden zu vergleichenden Reize P und $P + D$ durch die zufälligen Fehlervorgänge erleiden, dem Gauß'schen Fehlergesetze folgen, leitet Müller auf mathematischem Wege das Wahrscheinlichkeitsgesetz für die zufälligen Abweichungen α der Differenz beider Reize ab, welche sich aus den Abweichungen δ und δ' so zusammensetzen, dass $\alpha = \delta - \delta'$. Er findet so für die Wahrscheinlichkeit der Abweichungen α den Ausdruck: $w = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{h h' \alpha}{\sqrt{h^2 + h'^2}}} e^{-t^2} dt$,

worin h und h' die resp. Präcisionsmaße bei Auffassung der Reize P und $P + D$ sind.[1]) Beachtet man, dass nach einem Satze der Wahr-

1) G. E. Müller, Grundlegung der Psychophysik, S. 16. Vgl. a. Fechner, Rev. d. Hptp. S. 84 ff.

scheinlichkeitsrechnung der wahrscheinliche Fehler W der Summe oder des Unterschieds zweier Größen, deren wahrscheinliche Fehler w und w' sind, durch die Formel dargestellt ist: $W^2 = w^2 + w'^2$, und dass ferner die wahrscheinlichen Fehler den Präcisionsmaßen umgekehrt proportional sind, sodass man W^2 durch $\frac{1}{H^2}$, w^2 durch $\frac{1}{h^2}$, w'^2 durch $\frac{1}{h'^2}$ ersetzen kann, wonach $H^2 = \frac{h^2 h'^2}{h + h'^2}$ wird, so kann man obigen Ausdruck auch so darstellen: $w = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{H\alpha} e^{-t^2} dt$, in welchem H das Präcisionsmaß der Abweichungen α der Differenz beider Reize ist. Dieser Ausdruck aber lehrt, dass auch die Abweichungen α dem Gauß-schen Gesetze folgen. — Wir können uns hier die von Müller gegebene mathematische Begründung dieser Formel ersparen; viel einfacher folgt das Resultat aus dem Satze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, dass ein zusammengesetzter Fehler α das Gauß'sche Gesetz befolgt, wenn seine Componenten es thun. Unter Benutzung dieses Resultates ist es nun leicht, die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen der Fälle r, f, z durch eine Formel auszudrücken. Zuvor aber macht sich eine Eintheilung dieser Fälle nöthig. Als richtige Fälle sollen diejenigen aufgefasst werden, wo der scheinbare Unterschied beider Reize, d. i. die Summe des Unterschiedes D und der zufälligen Abweichungen α, algebraisch gerechnet, größer als der Unterschiedsschwellenwerth ist, als falsche Fälle die, wo der scheinbare Unterschied wiederum größer, aber negativ ist. Die zweifelhaften Fälle liegen zwischen den richtigen und falschen, treten also auf, wenn der scheinbare Unterschied positiv oder negativ, aber kleiner als der Unterschiedsschwellenwerth ist. Die relative Möglichkeit derjenigen Fälle nun, wo $D + \alpha > S$ und positiv ist, ist im Falle $S > D$ gleich der relativen Möglichkeit ($\frac{1}{2}$) aller derjenigen Fälle, in denen α überhaupt positiv ist, vermindert um die relative Möglichkeit aller derjenigen Fälle, in denen α positiv, aber $< S - D$ ist, und im Falle $S < D$ gleich der relativen Anzahl aller Fälle, wo α positiv ist, vermehrt um die relative Anzahl aller der Fälle, wo α negativ und dem absoluten Werthe nach $< D - S$ ist. Darnach ergibt sich für das Verhältniss $\frac{r}{n}$, je nachdem $S \gtrless D$ der Ausdruck:

$\frac{r}{n} = \frac{1}{2} \mp W_0^{\pm(S-D)}$, wo $W_0^{\pm(S-D)}$ die Wahrscheinlichkeit aller derjenigen Fälle bezeichnet, in denen die Fehler α innerhalb der Grenzen 0 und $\pm(S-D)$ liegen. Nach dem Gauß'schen Gesetze ist diese Wahrscheinlichkeit durch die Formel darstellbar:

$$W_0^{\pm(S-D)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pm H(S-D)} e^{-t^2} dt,$$

so dass man nun hat:

$$\frac{r}{n} = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pm H(S-D)} e^{-t^2} dt.$$

In analoger Weise findet man eine Formel für das Verhältniss $\frac{f}{n}$. Die relative Anzahl der falschen Fälle ist nämlich gleich der relativen Anzahl aller der Fälle, in denen α negativ ist, vermindert um die relative Zahl derjenigen Fälle, in denen α negativ und dem absoluten Werthe nach $< D + S$ ist. Darum hat man:

$$\frac{f}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{H(S+D)} e^{-t^2} dt.$$

Eine Formel für die zweifelhaften Fälle erhält man aber aus der Ueberlegung, dass $\frac{r}{n} + \frac{f}{n} + \frac{z}{n} = 1$ sein muss. Darnach erhält man unter Benutzung der schon gewonnenen Ausdrücke für $\frac{r}{n}$ und $\frac{f}{n}$ die Formeln

$$\frac{z}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-H(D+S)}^{H(S-D)} e^{-t^2} dt \quad \text{und} \quad \frac{z}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{+H(D-S)}^{H(D+S)} e^{-t^2} dt.$$

wo die erste Formel für den Fall $S > D$, die zweite für den Fall $S < D$ gilt.

Nach diesen Formeln berechnet sich der Unterschiedsschwellenwerth wie folgt. Die ersten beiden Formeln liefern für ein durch den Versuch gegebenes $\frac{r}{n}$ und $\frac{f}{n}$ einen bestimmten Werth der oberen Integralgrenze, den wir t_{I} resp. t_{II} nennen wollen. Ist also

$$\pm H(S - D) = t_{\mathrm{I}}; \qquad H(D + S) = t_{\mathrm{II}},$$

so erhält man aus diesen Gleichungen

$$S = \frac{(\pm t_{\mathrm{I}} + t_{\mathrm{II}})\, D}{t_{\mathrm{II}} \mp t_{\mathrm{I}}}$$

und ebenso findet man einen Ausdruck für das Fechner'sche

$$H = \frac{t_{\mathrm{II}} \mp t_{\mathrm{I}}}{2D},$$

welches allerdings nicht im Müller'schen Sinne als Präcisionsmaß der Abweichungen des kleineren der beiden Reize, sondern im Fechner'schen Sinne als Präcisionsmaß der Abweichungen α der Differenz beider Reize aufzufassen ist. Weil keine Verwendung davon zu machen, unterlassen wir die Anführung einer Formel für das Präcisionsmaß im Müller'schen Sinne.

Will man nicht die falschen Fälle, sondern die zweifelhaften in Verbindung mit den richtigen zur Bestimmung von S benutzen, so hat man die Formel für $\frac{z}{n}$ zu derjenigen für $\frac{r}{n}$ zu addiren, wodurch kommt:

$$\frac{r+z}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{H(D+S)} e^{-t^2} dt.$$

Nun erhält man aus $\frac{r}{n}$ wie vorhin einen bestimmten Werth t_{I} der oberen Integralgrenze, ebenso aus $\frac{r+z}{n}$ einen anderen solchen Werth, der t_{II} heißen möge, und ganz wie oben findet man:

$$S = \frac{(\pm t_{\mathrm{I}} + t_{\mathrm{II}})\, D}{+ t_{\mathrm{II}} \mp t_{\mathrm{I}}},$$

welcher Ausdruck mit dem vorigen übereinstimmt, nur dass t_{II} jetzt in anderer Weise bestimmt worden ist.

Die den Verhältnissen $\frac{r}{n}$, $\frac{f}{n}$, $\frac{r+z}{n}$ entsprechenden t-Werthe entnimmt man am bequemsten der Fechner'schen Fundamentaltabelle; da dieselbe aber nur für den Fall eingerichtet ist, wo $\frac{r}{n} > 0{,}5$ ist, so hat man bei Werthen $\frac{r}{n} < 0{,}5$ vielmehr statt $\frac{r}{n}$ $\frac{n-r}{n}$ zu nehmen, und den zugehörigen t-Werth aufzuschlagen.

II. Die bisherigen nach der Methode der richtigen und falschen Fälle ausgeführten Versuche und deren Verwendung.

A. Die Gewichtsversuche Fechner's.

Die ausgedehntesten Versuche nach unserer Methode sind die Gewichtsversuche Fechner's, die von demselben in den Jahren 1856 bis 1859 ausgeführt worden sind. Die beiden zu vergleichenden Gewichte P und $P+D$, die von einander nur um die kleine Größe D abwichen, befanden sich in zwei mit Handgriffen versehenen geschlossenen Gefäßen, welche kurz nach einander gehoben und gesenkt wurden. Ohne Zögern wurde nach erfolgter Hebung und Senkung angegeben, ob eins und welches der beiden Gewichte das schwerere sei. Je nachdem zu den Versuchen nur eine Hand oder beide Hände verwendet wurden, unterschied Fechner ein einhändiges von einem zweihändigen Verfahren. Um aber jeden einseitigen störenden Einfluss zu vermeiden, wurde für eine systematische und symmetrische Versuchsanordnung peinlich Sorgfalt getragen. Wenn so bei dem zweihändigen Verfahren in der einen Hälfte der Versuchsfälle das größere Gewicht $P+D$ sich rechts befand, wurde es in der anderen Hälfte der Fälle zur Linken genommen, und wenn in der einen Versuchsreihe immer zuerst das größere der beiden Gewichte gehoben wurde, wechselte man in der nächsten Versuchsreihe um und ließ den Versuch mit dem kleineren Gewichte vorangehen. Diesen verschiedenen Zeit- und Raumlagen entsprechend unterschied Fechner vier Hauptfälle der Methode, für die er gesondert die Rechnungen durchführte.

Alle diese Versuche stellte er bei einer ganzen Scala von Hauptgewichten an bei $P = 300$, 500, 1000, 1500, 2000 und 3000 Grammen und für jedes dieser Gewichte mit den Zulagegewichten $0{,}04\,P$ und $0{,}08\,P$. Auch betreffs der Versuche mit verschiedenen Hauptgewichten hielt Fechner auf eine systematische Versuchsanordnung. Nach Tagen wechselnd wurde in aufsteigender und absteigender Folge verfahren. Jede Versuchsreihe setzte sich aus 64 Einzelversuchen zusammen; die Zeit aber für einen einzelnen Versuch betrug 5 Secunden, indem die Zeit jeder Hebung und Senkung 1 Secunde, die Zwischenzeit zwischen Niedersetzen des einen und Heben des anderen Gewichtes auch 1 Secunde betrug. So führte Fechner 8 Hauptversuchsreihen, 5 einhändige und 3 zweihändige, aus, von denen die ersteren 44128, die letzteren 18944, zusammen also 63072 Doppelhebungen umfassten.

Die auf diese Weise erhaltenen Versuchszahlen wurden zu verschiedenen Zwecken verwendet. Der Hauptsache nach sollten sie die Frage nach der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes und des Parallelgesetzes entscheiden, während sie in zweiter Linie die Statthaftigkeit des von Fechner aufgestellten Rechnungsprincipes darthun sollten; nebenbei aber wurde die Beziehung der Unterschiedsempfindlichkeit zur Pulszahl untersucht, welchem Zwecke eine Anzahl besonders ausgeführter Versuchsreihen diente.

Stellen wir kurz die auf diese Punkte bezüglichen Ergebnisse zusammen.

Die experimentelle Bewährung der Methode kommt nach Fechner darauf hinaus, zu zeigen, dass, wenn man bei constanter Empfindlichkeit einen gewissen Werth $\frac{r}{n}$ bei einem gewissen D erlangt hat, der nach der Formel berechnete Werth für ein anderes D, was zu jenem in einem bestimmten Verhältnisse steht, sich durch Versuche richtig wiederfindet; oder was auf dasselbe hinauskommt, daß die bei gleicher Empfindlichkeit, aber verschiedenem D erhaltenen Verhältnisse $\frac{r}{n}$ nach der Formel Werthe von hD liefern, welche proportional mit D sind. Indem aber die Unterschiedsempfindlichkeit, um die es sich hier handelt, mit P (aber nicht mit D, so lange D klein bleibt) variabel ist, hat man also zur Prüfung der Methode Versuche bei constantem P, aber variablem D auszuführen. Wenn die dabei erhaltenen Zahlen $\frac{r}{n}$ Werthe von hD liefern, die proportional mit D sind, oder mit anderen Worten, wenn sich h, das Maß der Unterschiedsempfindlichkeit, als constant erweist, so ist die Richtigkeit des Rechnungsprincipes dargethan.

Fechner benutzte, wie schon früher erwähnt, zu seinen Versuchen als verschiedene Werthe von D die Gewichte 0,04 P und 0,08 P. Für diese Werthe von D enthalten die nachfolgenden Tabellen die Werthe von hD der verschiedenen Versuchsreihen, wobei nur auf die Summenwerthe für die vier verschiedenen Hauptfälle, nicht auf diese selbst Rücksicht genommen worden ist. Nach dem oben Gesagten müssten die Werthe von hD bei $D = 0{,}08\ P$ immer das Doppelte der Werthe bei $D = 0{,}04\ P$ betragen. Um den Grad der Bestätigung dieser Forderung sofort zu erkennen, haben wir die Quotienten aus den Werthen von hD für $D = 0{,}08\ P$ und $D = 0{,}04\ P$ berechnet und in der mit $\frac{h.0{,}08\ P}{h.0{,}04\ P}$ überschriebenen Spalte notirt. Die Abweichungen dieser Quotienten von 2 geben die Abweichungen von der Theorie an.

Zum Verständniss der Tabellen sei noch angeführt, dass die über den Tabellen für n angeführten Zahlen angeben, aus wie vielen Einzelversuchen ein hD-Werth gewonnen worden ist, die Zahlen ν aber besagen, wie viele der so erhaltenen hD-Werthe vereinigt sind zu einem Mittelwerthe, wie er in den Tabellen selbst verzeichnet ist. Alles Uebrige erklärt sich von selbst.

I. Werthe hD der zweihändigen Reihe. $n = 64$.[1])

P	$D = 0{,}04\ P$ ($\nu = 32$)	$D = 0{,}08\ P$ ($\nu = 32$)	$\frac{h\ .\ 0{,}08\ P}{h\ .\ 0{,}04\ P}$
300	2023	3918	1,937
500	1965	3705	1,885
1000	2530	4637	1,883
1500	2774	5910	2,130
2000	2966	6034	2,034
3000	3296	6520	1,978
Summe:	15554	30274	1,975

II. Werthe hD der einhändigen Reihe. $n = 64$.[2])

	Linke			Rechte		
P	$D=0{,}04\ P$ ($\nu=16$)	$D=0{,}08\ P$ ($\nu=16$)	$\frac{h\ .\ 0{,}08\ P}{h\ .\ 0{,}04\ P}$	$D=0{,}04\ P$ ($\nu=16$)	$D=0{,}08\ P$ ($\nu=16$)	$\frac{h\ .\ 0{,}08\ P}{h\ .\ 0{,}04\ P}$
300	3916	4845	1,237	3658	5360	1,465
500	2876	5246	1,824	3349	5584	1,667
1000	2906	5649	1,944	5103	6230	1,221
1500	4016	6426	1,600	4638	7647	1,649
2000	4700	6515	1,386	4517	6821	1,510
3000	4455	8084	1,814	4551	7616	1,673
Summe:	22869	36765	1,608	25816	39258	1,521

1) Fechner, Elemente der Psychophysik. Th. I. S. 193. Tab. VI.
2) Fechner, El. d. Psych. I. S. 193. VII.

III. Werthe hD der zwei- und einhändigen Reihe für $P = 2000$ und $P = 3000$ g.

$n = 64.$ [1]

P	Zweihändig. ($\nu = 32$)		
	$D = 0,04\ P$	$D = 0,08\ P$	$\frac{h\ .\ 0,08\ P}{h\ .\ 0,04\ P}$
2000	2461	5018	2,039
3000	2702	5326	1,971
Summe:	5163	10344	2,003

P	Einhändig. ($\nu = 16$) Linke			Rechte		
	$D = 0,04\ P$	$D = 0,08\ P$	$\frac{h\ .\ 0,08\ P}{h\ .\ 0,04\ P}$	$D = 0,04\ P$	$D = 0,08\ P$	$\frac{h\ .\ 0,08\ P}{h\ .\ 0,04\ P}$
2000	3456	7078	2,551	3709	9464	2,048
3000	4270	8310	1,906	4212	8028	1,946
Summe:	7726	15388	2,209	7921	17492	1,992

IV. Werthe hD für Versuche mit $P = 1000$ g. [2]

$n = 64.$

D	Linke			Rechte		
	U	u	z	U	u	z
15	2854	2447	3890	4044	2984	4822
20	4809	3349	4937	5698	4534	5801
30	7171	6570	4400	7593	7776	8233
40	8980	10485	11108	9052	13054	11693
60	13092	12352	11464	12112	14056	16470

Zur vorstehenden Tabelle fügen wir folgende Erläuterungen. Sie entstand bei Versuchen, welche den Einfluss der Ermüdung feststellen

1) Fechner, El. d. Psychoph. I. S. 196. V.　2) Ebenda S. 311.

sollten, aber insofern die Versuche bei verschiedenem D ausgeführt sind, kann sie auch zur Untersuchung unserer Frage benutzt werden. Unter der Columne z sind die Werthe hD im ermüdeten, unter u im unermüdeten Zustand, bloß berechnet aus den Versuchen, welche der Ermüdungsoperation jedesmal vorangingen, unter U endlich sind die Werthe aus der Totalität jedes Versuchstages vor der Ermüdung, sämmtlich abgeleitet aus Fractionen mit $n = 64$ mit Unterscheidung der vier Hauptfälle, enthalten. Das Fechner'sche Rechnungsprincip erfordert für die verschiedenen D die Gleichheit der Quotienten $\frac{U}{D}$, $\frac{u}{D}$, $\frac{z}{D}$. Dieselben finden sich in Tabelle V zusammengestellt.

Ferner müssten die Zahlenwerthe für $D = 30$ das Doppelte derjenigen für $D = 15$ sein; ebenso müssten sich die Zahlenwerthe von $D = 40$ und 20 g, von $D = 60$ und 30 verhalten. Die Quotienten aus jenen Zahlenwerthen finden sich in Tabelle VI.

V. Werthe der Quotienten $\frac{U}{D}$, $\frac{u}{D}$, $\frac{z}{D}$.

D	Linke U	Linke u	Linke z	Rechte U	Rechte u	Rechte z
15	1,903	1,631	2,593	2,696	1,989	3,215
20	2,405	1,674	2,468	2,849	2,265	2,900
30	2,390	2,190	1,467	2,531	2,592	2,744
40	2,245	2,622	2,770	2,211	3,263	2,923
60	2,182	2,059	1,911	2,019	2,397	2,745

VI. Werthe der Quotienten $\frac{hD_2}{hD_1}$ für $\begin{cases} D_2 = 30,\ 40,\ 60 \text{ g.} \\ D_1 = 15,\ 20,\ 30 \text{ „} \end{cases}$

$\frac{hD_2}{hD_1}$	Linke U	Linke u	Linke z	Rechte U	Rechte u	Rechte z
$\frac{h\,.\,30}{h\,.\,15}$	2,513	2,685	1,131	1,491	2,606	1,707
$\frac{h\,.\,40}{h\,.\,20}$	1,867	3,131	2,250	1,589	2,879	2,016
$\frac{h\,.\,60}{h\,.\,30}$	1,825	1,880	2,605	1,470	1,808	2,001

VII. Werthe hD für Versuche mit $P = 1000$ g.[1])

$n = 64.$

Hebungsdauer	$D = 0{,}04\ P$	$D = 0{,}08\ P$	$\frac{h\,.\,D\,(=0{,}08\ P)}{h\,.\,D\,(=0{,}04\ P)}$
½ sec.	4248	5802	1,366
1 „	3406	3426	1,006
2 „	3076	6002	1,951
4 „	2550	7802	3,131
Summe:	13280	23032	1,734

Der Ueberblick über diese Ergebnisse spricht nicht unbedingt für das Rechnungsprincip. Die Werthe hD der zweihändigen Reihe unter I wie der zwei- und einhändigen unter III erfüllen zwar mit ziemlicher Annäherung sowohl für die einzelnen Gewichte wie für die Summenzahlen die Forderung, für $D = 0{,}08\ P$ doppelt so groß wie für $D = 0{,}04\ P$ zu sein, dagegen zeigen die einhändige Reihe unter II, die unter V und VI aus den Zahlen der Tabelle IV berechneten Quotienten wie diejenigen unter VII ganz bedeutende Abweichungen; in der einhändigen Reihe unter II betragen beispielsweise die hD-Werthe für $D = 0{,}08\ P$ noch lange nicht das Doppelte der Werthe für $D = 0{,}04\ P$. Den Grund hierfür sucht Fechner in der Versuchsanordnung bei jener einhändigen Reihe; dieselbe wurde in 32 Tagen ausgeführt, wobei mit den Zulagegewichten $0{,}04\ P$ und $0{,}08\ P$ nur von 8 zu 8 Tagen gewechselt wurde. Durch letzteren Umstand, meint Fechner, sei die Empfindlichkeit bei Versuchen mit verschiedenen D eine geänderte gewesen, so dass die erhaltenen Maßwerthe nicht mit einander vergleichbar seien. Ob freilich diese Erklärung genügt, d. h. ob die fragliche Abweichung auf alleinige Rechnung der Versuchsanordnung zu setzen ist, erscheint bei der Größe derselben zweifelhaft; in den 32 Versuchstagen der einhändigen Reihe fand immerhin ein zweimaliger Wechsel der Zulagegewichte statt, wodurch eine gewisse Compensation des Einflusses einer Aenderung der Empfindlichkeit bedingt wurde. Durch einen Ueberblick über den Verlauf der Versuchsreihe an den einzelnen Tagen würde man entscheiden können, wie sich die

1) Rev. d. Hptp. d. Psychoph. S. 364. V.

Sache verhält; dazu fehlen aber die geeigneten Angaben. — Somit bleibt trotz der vielen Versuche die Bewährung des Rechnungsprincipes immer noch eine unzureichende; besonders auch deshalb, weil die Versuche nur mit zwei verschiedenen Zulagegewichten ausgeführt worden sind. Eine ausreichende Bewährung würde erst dann geliefert sein, wenn man bei einer ganzen Reihe D die Versuche ausgeführt und untersucht hätte, ob die aus den erhaltenen Werthen $\frac{r}{n}$ berechneten hD-Werthe den D proportional seien. Nur die Reihe unter IV, die freilich nicht zu diesem Zwecke, sondern zur Untersuchung der Ermüdungseinflüsse angestellt wurde, genügt dieser Forderung einigermaßen; aber gerade die daraus berechneten Quotienten zeigen die gewünschte Constanz nicht. Berücksichtigt man in V und VI nur die Zahlen unter U und u, welche sich auf den unermüdeten Zustand beziehen, so schwanken die fraglichen Quotienten zwischen 1,3 und 3,2, während ihr genauer Werth 2 sein soll.

Ein weiterer Einwand gegen das Rechnungsprincip lässt sich aus folgender Tabelle entnehmen, die aus den Fechner'schen Angaben (s. Elemente I. S. 190) gezogen ist. Für jedes Gewicht wurden für je ein D 2048 Versuche angestellt; die Berechnung aber für $n = 512$ ausgeführt.

VIII.

P	$D = 0{,}04\,P$		$D = 0{,}08\,P$	
	r	hD	r	hD
300	1226	1774	1434	3792
500	1235	1871	1408	3521
1000	1306	2404	1490	4333
1500	1321	2639	1592	5407
2000	1343	2881	1626	5862
3000	1335	3066	1657	6285

Das Weber'sche Gesetz erfordert bei demselben D für alle Gewichte ein constantes r; aber wie man sieht, findet nach oben hin eine, doch nicht sehr beträchtliche Zunahme statt; sie beträgt 9 resp. 15 % der Werthe für $P = 300$ g. Ob man darnach eine angenäherte Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes zugestehen will, kommt auf die näheren Versuchsumstände an; jedenfalls ist dies unter Umständen zulässig. Diesen Werthen r correspondiren nun nach dem Rechnungsprincip die Werthe hD, für welche ebenfalls Constanz zu fordern ist. Aber weit davon entfernt, sind sie in einer Weise auseinander gelegen, dass von einer wenn auch nur angenäherten Constanz nicht die Rede sein kann, denn jetzt übertrifft der obere den unteren Werth um 73 resp. 67 %. Die wahre Lage der Dinge, wie sie sich in den direct erhaltenen Zahlen r aussprechen muss und ausspricht, hat also durch Anwendung der Fechner'schen Formel ein total verändertes Aussehen erhalten, was gerechte Zweifel gegen ihre Anwendbarkeit erweckt.

Fechner erklärt die Abweichungen von der Forderung des Gesetzes aus dem Einfluss des Armgewichts; er betrachtet die Abweichung darnach nur als eine scheinbare, analog derjenigen, die im Gebiete der Lichtempfindung aus der beständigen inneren Lichterregung resultire. Ein solcher Einfluss des Armgewichtes lässt sich nun nicht wohl in Abrede stellen; allein es erscheint doch bedenklich und ist im Grunde eine unerlaubte Correction, diesen Einfluss des Armgewichtes gerade so groß anzunehmen, dass mit Wegfall desselben sich eine vollkommene Bestätigung des Weber'schen Gesetzes ergibt. Bei der Unmöglichkeit, den Verhältnisstheil, mit welchem das Moment des gehobenen Armes zu dem des gehobenen Gewichtes zuzurechnen ist, mit irgend welchem Grade der Annäherung zu bestimmen, kann durch die Fechner'schen Versuchszahlen das Weber'sche Gesetz noch nicht für bestätigt erachtet werden. So lange man nicht im Stande ist, den Einfluss des Armgewichtes genau zu bestimmen, dürften derartige Versuche zur Bestätigung des Weber'schen Gesetzes ungeeignet und immer solche vorzuziehen sein, wo jener Factor gar nicht in Frage kommt.

Eine weitere Anwendung der Versuchsresultate bestand in dem Versuch, das Weber'sche Parallelgesetz zu bestätigen. Dasselbe lautet: Wenn sich die Empfindlichkeit für zwei Reize in gleichem Verhältnisse ändert, so bleibt doch die Empfindung ihres Unterschiedes gleich. — Hierzu wurden die Versuche so ausgeführt, dass man 4 verschiedene Hebungszeiten $^1/_2$, 1, 2, 4 Secunden anwandte. Jede längere Hebung nahm die Kraft stärker in Anspruch, spannte also mehr ab als eine kürzere. Wenn nun diese Ermüdung einen Einfluss auf die Unterschiedsempfindlichkeit gehabt hätte, so würde dies in den Fällen

r und den daraus abgeleiteten hD-Werthen zum Ausdruck gekommen sein; ein solcher Einfluss zeigte sich aber nicht; die Unterschiedsempfindlichkeit war im Wesentlichen dieselbe nach der Ermüdungsoperation wie vor der Ermüdung; nur durch eine möglichst weit getriebene Ermüdung steigerte sich die Unterschiedsempfindlichkeit für Gewichte etwas.

Nebenbei wurde bei diesen Versuchen ein anderes Resultat gewonnen. Es ergab sich nämlich, dass eine durch vermehrte Pulszahl angezeigte Aufregung einen steigernden Einfluss auf die Unterschiedsempfindlichkeit ausübte.

Hält man alles dies zusammen, so sind Gewichtsversuche, wie sie Fechner ausgeführt hat, zur Prüfung des Rechnungsprincipes wie zur Prüfung des Weber'schen Parallelgesetzes wohl geeignet, bezüglich des ersten Punktes sind indess die bisher von Fechner ausgeführten Versuche noch nicht ausreichend; die bisherigen sprechen mehr dagegen wie dafür und sind nur bei zwei verschiedenen Zulagegewichten ausgeführt worden; zur Bestätigung des Weber'schen Gesetzes aber sind derartige Versuche nicht wohl brauchbar, da der Einfluss des Armgewichtes eine unlösliche Complication in die Verhältnisse bringt. Die äußere bei diesen Versuchen von Fechner getroffene Versuchsanordnung dagegen ist eine solche, dass sie für alle psychophysischen Untersuchungen als Muster hingestellt werden kann.

B. Die Schallversuche Nörr's. [1])

Die zweite ausgedehnte Gruppe von Versuchen nach unserer Methode sind in dem Tübinger physiologischen Institute des Herrn Prof. v. Vierordt durch C. Nörr ausgeführt worden. Sie wurden angestellt, um für eine größere Breite von Schallstärkedifferenzen das Weber'sche Gesetz zu bestätigen. Die zu vergleichenden Schalle wurden durch Bleikugeln verschiedenen Kalibers erzeugt, welche von bestimmter Höhe auf eine fest aufliegende Eisenplatte fielen. Sieben verschiedene Schallstärken wurden zu den Versuchen verwandt; bezüglich jeder derselben wurden die Versuche für drei verschiedene Schallstärkedifferenzen durchgeführt. Die Berechnung der Schallstärken wurde anfangs auf die Voraussetzung gestützt, dass die Schallstärke

1) Zeitschrift für Biologie. Bd. XV. S. 297 ff.

der lebendigen Kraft der Schallbewegung proportional sei, später aber nach Vierordt's Vorschlag die Formel benutzt, wonach die Schallstärke durch das Product aus dem Fallgewicht in die Quadratwurzel der Fallhöhe gemessen wurde. Das Versuchsverfahren war ein wissentliches. Die Ergebnisse aber der Nörr'schen Versuche sind kurz die folgenden:

1) Die Procentzahl der richtigen Fälle nimmt mit zunehmendem Unterschied der beiden Schallstärken zu und die Procentzahl der falschen Fälle ab; die unentschiedenen (d. i. nach Nörr's Angabe die Fälle der Gleichheit) zeigen mit zunehmendem Unterschied der Schallstärken ebenfalls eine Abnahme mit nur 2 Ausnahmen in 21 Versuchsreihen.

2) Der Einfluss der Zeitfolge der beiden Schalle äußert sich darin, dass die Procentzahl der richtigen Fälle um 8,7 % größer ist, wenn der stärkere Schall zuletzt gehört wird; es ergeben sich als Mittelwerth, wenn der erste Schall der stärkere war, 81,7 %, dagegen 89,4 %, wenn der zweite den ersten überwog.

3) Für dieselben relativen Reizunterschiede aber findet sich bei allen Reizstärken dieselbe Procentzahl richtiger Fälle, was einer Constanz der Unterschiedsempfindlichkeit bei allen Schallstärken entspricht. Sogar die schwächsten Schalle zeigen hierin, entgegen den Verhältnissen in anderen Sinnesgebieten, keine Ausnahme.

4) Die Berechnung der Werthe des Präcisionsmaßes nach Fechner wie nach Müller ergab Werthe, welche durchaus unregelmäßige, von der Schallstärke unabhängige Abweichungen zeigten; in dieser Unregelmäßigkeit der Schwankungen erblickte Nörr trotz der Größe derselben eine »vollständige und buchstäbliche« Bestätigung des Weber'schen Gesetzes.

5) Während die Werthe von h für denselben Reizunterschied unregelmäßig schwankten, zeigten sie hingegen bei geändertem Reizunterschied eine regelmäßige Abnahme mit zunehmender Schallstärkedifferenz; um dieses Resultat mit dem Fechner'schen in Einklang zu bringen, dass die Unterschiedsempfindlichkeit gleich bleibe bei größeren und geringeren Unterschieden der Reize, schlug Nörr eine andere Benutzung der Fechner'schen Fundamentaltabelle vor; statt $h = \frac{t}{D}$ sei vielmehr $h = \frac{t}{\sqrt{D}}$ zu setzen.

Was die ersten aus den Versuchszahlen direct zu entnehmenden Resultate 1) und 2) betrifft, so dürften dieselben für später anzustellende Schallversuche beachtenswerthe Vergleichungspunkte liefern; in Bezug auf die unter 3) erwähnte Angabe ist jedoch zu bemerken, dass Nörr's Behauptung entgegen eine geringe Zunahme der Fälle r mit wachsenden Reizstärken stattfindet, obwohl dieselbe minder groß ist wie in den Fechner'schen Zahlen. Dementsprechend lassen auch die hD-Werthe eine einseitige Abweichung erkennen und ist die Nörr'sche Behauptung nicht richtig, dass diese Werthe nach keiner bestimmten Richtung hin regelmäßige Abänderungen zeigen; denn sowohl die Columne für die mittlere, wie für die größte Schalldifferenz zeigen eine Zunahme mit wachsenden Schallstärken (siehe Tabelle IX).

IX. Werthe hD und h nach Fechner.[1]

Schallstärke in mg	hD			h		
	Kleinste Schall-diff.	Mittlere Schall-diff.	Größte Schall-diff.	Kleinste Schall-diff.	Mittlere Schall-diff.	Größte Schall-diff.
2572	13,30	8,30	5,70	0,5895	0,7655	0,9912
7098	15,31	9,90	6,09	0,7671	0,9924	1,1597
53436	14,57	9,08	6,32	0,7142	0,8721	1,1754
294039	9,24	7,88	5,98	0,4714	0,7568	1,1239
4404832	11,51	9,28	6,16	0,5642	0,8719	1,1207
43829691	14,39	11,04	7,24	0,7149	1,1039	1,4487
786251700	13,44	10,07	7,37	0,6699	0,9948	1,4750

Ueberdies aber musste Nörr die Bestätigung des Weber'schen Gesetzes nicht auf die Gleichheit von h, sondern auf die Gleichheit der hD-Werthe stützen, wie Fechner richtig in seiner »Revision« S. 384 ausführt, obgleich dadurch keine wesentliche Aenderung herbeigeführt wird. Denn auch dann noch zeigen die Zahlenwerthe, die in der zweiten Hälfte der obigen Tabelle notirt sind, allzugroße Abweichungen, um eine »vollständige und buchstäbliche« Bestätigung des Weber'schen Gesetzes abzugeben. Es kann das aber auch nicht auffallen, wenn man bedenkt, dass die Berechnung der Schallstärken neueren Untersuchungen Vierordt's und Tischer's zufolge nicht die

1) Nörr, a. a. O. S. 316.

richtige war. Ob freilich ein Einfluss dieses Umstandes in den Schwankungen der Nörr'schen Zahlen seinen Ausdruck findet, wie Fechner in der »Revision« S. 376 meint, erscheint zweifelhaft; die Werthe ε verlaufen stetig mit Fallhöhe und Gewicht und werden demnach keine erheblichen Schwankungen bedingen. Wohl aber wird, wie Fechner ebendaselbst bemerkt, die große Zahl richtiger Fälle bei den schwersten Kugeln von diesem Umstande abhängen. Zu erwähnen ist noch, dass die Nörr'schen Versuche sich über zwei Semester ausdehnten, ein Zeitraum, der vielleicht große Aenderungen der Empfindlichkeit mit sich führte, wodurch die obigen Schwankungen herbeigeführt wurden. —

Außer den Fechner'schen und Nörr'schen Versuchen nach unserer Methode liegen noch solche von Hegelmayer in Tübingen im Gebiete des Augenmaßes, wie von Renz und Wolf im Felde des Schallmaßes vor. Wir brauchen indess nicht näher darauf einzugehen, da die ersteren an Zahl zu gering waren, um maßgebende Resultate zu liefern, den letzteren aber eine irrthümliche Berechnung der Schallstärken zu Grunde lag.

III. Experimentelle Prüfung der Fechner'schen und Müller'schen Formeln.

Vorbemerkungen.

Ob die eine oder die andere der oben dargelegten Auffassungsweisen der Methode der richtigen und falschen Fälle in der Psychophysik zu verwenden oder ob beiden ein Platz zuzugestehen sei, ist eine bisher vielfach erörterte, aber keineswegs zum Abschluss gebrachte Frage. Die Verwendbarkeit der Formeln beider Auffassungsweisen setzt die Richtigkeit der Annahme voraus, dass das Gauß'sche Fehlerwahrscheinlichkeitsgesetz wie auf physikalischem, so auch auf psychophysischem Gebiete anwendbar sei. Das ist eine durchaus nicht selbstverständliche Voraussetzung; vielmehr bedarf dieselbe einer experimentellen Prüfung. Sollte diese Prüfung die Gültigkeit des Gauß-schen Gesetzes ergeben, so bedarf es des Weiteren noch der Untersuchung, ob den Fechner'schen oder Müller'schen Formeln der Vorzug zu geben sei. Was nun die Prüfung des Gauß'schen Gesetzes betrifft, so lässt sich auf psychophysischem Gebiete ein directer Nachweis seiner Gültigkeit wegen der Natur der hier auftretenden Fehler nicht liefern; infolge der Existenz der Schwelle entzieht sich eine ganze Reihe von Fehlern unserer Beobachtung. Wenn man aber dennoch die Richtigkeit jener Voraussetzung untersuchen will, wird man sich an die aus dieser Voraussetzung entwickelten Formeln halten müssen. Ist man sich über die richtige Verwendung derselben, sowie über die etwa noch anderweit in dieselben eingehenden Voraussetzungen im Klaren, so wird einer Prüfung nichts im Wege stehen. Nun lässt sich gegen die mathematische Entwickelung der Fechner'schen und der Müller'schen Formeln kaum etwas einwenden; in die Müller'sche Formel geht außer der Voraussetzung des Gauß'schen Gesetzes keine andere ein; was ihre Verwendung betrifft, so sind der Ableitung nach die Fälle als richtige aufzufassen, wo man deutlich den stärkeren Reiz stärker als den schwächeren empfindet; das ist aber ein einfaches Kriterium, welches jede Zweideutigkeit ausschließt. In die Verwendung der Fechner'schen Formeln geht dagegen noch die zweite Annahme ein, dass die bei dem Versuch auftretenden Nullfälle zur Hälfte den richtigen, zur Hälfte den falschen Fällen zuzuzählen seien. Es sind nämlich nach den Fechner'schen Entwickelungen diejenigen Fälle als richtige aufzufassen, wo der scheinbare Reizunterschied $D + \Delta$ größer als Null ist; daher ist zu den Fällen, wo ein Unterschied deutlich empfunden wird, noch derjenige Theil der Fälle hinzuzuzählen, wo für die Empfindung kein Unterschied existirt, thatsächlich aber $D + \Delta > 0$ ist. Fechner macht nun die Annahme, dass dieser Theil die Hälfte der zweifelhaften Fälle sei. Die Richtigkeit dieser Annahme scheint sich theoretisch wegen der Natur der in Betracht kommenden Fehler gar nicht entscheiden zu lassen; will man an die Frage mit Betrachtungen herantreten, die denen für Beobachtungsfehler analog sind, so erhebt sich die Schwierigkeit, dass man es bei unserer Methode immer mit zwei Größen zu thun hat, welche zufälligen Abweichungen unterliegen, aus denen sich erst die Abweichungen des Unterschiedes der beiden Größen zusammensetzen, während die Beobachtungsfehler zufällige Abweichungen von nur einer Größe sind. Das ändert aber die ganze Sachlage.

Wäre die Gültigkeit des Gauß'schen Fehlergesetzes auf psychophysischem Gebiete erwiesen, so würde leicht über die Richtigkeit oder Unrichtigkeit der Fechner'schen Vertheilungsweise experimentell zu entscheiden sein. Ungehörige Werthe des Präcisionsmaßes aus einer genügenden Zahl sorgfältiger Beobachtungen würden für die Unhaltbarkeit der Fechner'schen Vertheilungsweise sprechen. Aber bei der Ungewissheit, ob das Gauß'sche Gesetz hier gilt, können widersinnige Werthe von h ebensowohl der ungerechtfertigten Anwendung dieses Gesetzes wie der angewandten Vertheilungsweise zur Last gelegt werden. Betreffs der im folgenden zu erwähnenden Versuche habe ich mehrfach Proben mit anderen Vertheilungsprincipien gemacht, ohne aber zu einfacheren und besseren Resultaten zu kommen. Die nächst einfacheren Vertheilungsweisen, die der verhältnissmäßigen Theilung der Fälle z, wie die der Ausschließung der z waren nicht wohl anwendbar; die ersteren wegen der besonderen Verhältnisse unserer Versuchszahlen (es treten nur wenig falsche Fälle auf, sodass bei der Theilung $\frac{rz}{r+f}$, $\frac{fz}{r+f}$ fast alle z zu den richtigen zu schlagen waren), wie später besser zu ersehen sein wird, die andere, weil sie durchaus nicht mit der Fechner'schen Formel verträglich ist, die eine lückenlose Werthscala für die Anwendung des Gauß'schen Gesetzes erfordert. Für complicirtere Vertheilungsprincipien, denen etwas bessere Rechenresultate zur Seite standen, fehlte es an einer ausreichenden Begründung.

Deshalb ist bei Prüfung der Fechner'schen Formeln, welche zuerst stattfinden soll, bei der Fechner'schen Vertheilungsweise stehen geblieben worden; auch bei der ev. Unhaltbarkeit dieses Princips dürfte die folgende Prüfung insofern ein Interesse haben, als sie einen Vergleich mit den früher von Fechner und Nörr erhaltenen Rechnungsresultaten darbietet. Uebrigens, wenn die Müller'schen Formeln, welche nur das Gauß'sche Gesetz voraussetzen, richtig sein sollten, kann die Fechner'sche Vertheilungsweise nicht sehr viel von der Wahrheit abweichen, da die bisherigen nach beiden Formeln gewonnenen Resultate wenig von einander differiren.

Dass wir aber nicht zuerst die Müller'schen Formeln berücksichtigen, trotzdem man bei denselben keinen Scrupeln über die Vertheilungsweise unterworfen ist, liegt darin begründet, dass man dieselben bei den von uns erhaltenen Versuchszahlen nicht direct zur Berechnung einer Unterschiedsschwelle benutzen kann. Es erfordert nämlich die Müller'sche Formel das Vorkommen falscher Fälle;

diese Bedingung wurde aber bei unseren Versuchen nur ausnahmsweise erfüllt.

Nach diesen Vorbemerkungen werden wir den Gang zu fixiren haben, nach welchem die Prüfung der in Rede stehenden Formeln erfolgen soll.

A. Methoden der Prüfung.

Bezüglich der Fechner'schen Formeln schlagen wir den schon von Fechner innegehaltenen Weg ein, indem wir untersuchen, ob die bei gleicher Empfindlichkeit, aber verschiedenen D erhaltenen Verhältnisse $\frac{r}{n}$ nach der auf die Formel gegründeten Tabelle Werthe von hD geben, welche proportional mit D sind, oder was dasselbe ist, ob sich für solche $\frac{r}{n}$ constante Werthe des Präcisionsmaßes h ergeben. In gleicher Weise müssen die Müller'schen Formeln für Versuche mit constantem P, aber variablem D immer denselben Werth der Unterschiedsschwelle liefern. Denn über die Größe des bei den Versuchen zu verwendenden D ist keine Voraussetzung gemacht; für den bei dem Versuche verwandten Hauptreiz P existirt aber ein ganz bestimmter Unterschiedsschwellenwerth; dieser muss sich, sollen die Formeln richtig sein, immer wieder, welches D man auch für die Versuche benutze, ergeben.

Stellen wir die zu prüfenden Formeln noch einmal zusammen. Die Fechner'sche Formel lautet:

$$\frac{r}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hD} e^{-t^2} dt$$

woraus h zu berechnen ist;
die Müller'schen Formeln aber sind:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{r}{n} = \dfrac{1}{2} \mp \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{\pm H(S-D) = t_{\mathrm{I}}} e^{-t^2} dt \\[2ex] \dfrac{r+z}{n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{H(D+S) = t_{\mathrm{II}}} e^{-t^2} \end{array}\right.$$

woraus S folgt:

$$S = \frac{\pm t_{\mathrm{I}} + t_{\mathrm{II}}}{t_{\mathrm{II}} \mp t_{\mathrm{I}}}$$

wo das obere Zeichen von t_{I} für $\frac{r}{n} < \frac{1}{2}$, das untere für $\frac{r}{n} > \frac{1}{2}$ gilt. Nach dem Gesagten besteht die Prüfung rechnungsweise darin, dass man nach Fechner zu gefundenen Werthen $\frac{r}{n}$ den Werth hD der Fundamentaltabelle entnimmt und durch Division mit dem zugehörigen D den Werth h gewinnt, der bei den Versuchen mit den verschiedensten (nur nicht zu großen) Reizunterschieden D unter Anwendung desselben Hauptreizes P constant sein muss.

Nach Müller hat man gleichfalls aus der Fundamentaltabelle die Werthe von t_{I} und t_{II} zu entnehmen, welche den gefundenen Verhältnissen $\frac{r}{n}$ und $\frac{r+z}{n}$ entsprechen, und aus ihnen S zu berechnen, das wiederum unter Anwendung desselben D, aber der verschiedensten P einen constanten Werth ergeben muss. Wir wollen hier gleich vorausschicken, dass diese Prüfung der Müller'schen Formeln nach unseren Versuchen nicht ausführbar ist; denn für dieselben nimmt in den meisten Fällen $\frac{r+z}{n}$ Werthe nahe der Einheit, ja oft gleich der Einheit an, wofür aber $t_{\mathrm{II}} = \infty$ wird.

Will man die Prüfung der Fechner'schen Formel nicht an den Zahlen selbst ausführen, sondern sich mittelst des anschaulicheren graphischen Verfahrens orientiren, so kann man folgenden Weg einschlagen. Man zeichne zunächst die der Formel entsprechende mathematische Curve für $\frac{r}{n}$ in ihrer Abhängigkeit von hD und stelle dann aus den durch die Versuche bei verschiedenen D erhaltenen Werthen $\frac{r}{n}$ eine zweite entsprechende Curve her. Der Vergleich beider Curven wird zeigen, ob die Formeln geeignet sind, die Versuchsverhältnisse zu repräsentiren. Die erste jener Curven aber wird erhalten, indem man die in der Fundamentaltabelle enthaltenen Werthe von hD unter Annahme einer beliebigen Einheit als Abscissen, die zugehörigen Werthe von $\frac{r}{n}$ als Ordinaten eines rechtwinkligen Coordinatensystems aufträgt. Die Ordinaten dieser Curven werden dann (wenn man etwa die Hundertstel als Einheiten gewählt hatte) von 50 bis 100 laufen, während die Abscissen von 0 bis ∞ fortschreiten; die Curve wird also asymptotisch gegen eine zur Abscissenachse parallele Gerade verlaufen.

Die andere der beiden Curven hingegen gewinnt man folgendermaßen: Wie schon erwähnt, müsste sich unter Anwendung desselben Hauptreizes P, aber verschiedener Reizunterschiede D derselbe Werth von h ergeben. Wäre uns dieser Werth bekannt, so würden wir für jedes D einen Werth hD haben, welchem wir das bei diesem D sich ergebende $\frac{r}{n}$ zuordnen würden. Aber nun ist uns h nicht bekannt, so dass wir für die durch den Versuch gewonnenen Ordinaten $\frac{r}{n}$ nicht die entsprechenden Abscissen hD haben, und so eine mit der ersten vergleichbare Curve erhalten können. Indess können wir uns auf folgende Weise helfen. Wir berechnen in bekannter Weise zu dem durch den Versuch erhaltenen $\frac{r}{n}$ die zugehörigen Werthe des Präcisionsmaßes h; für die Versuche bei verschiedenem D werden sich dann im Allgemeinen von einander etwas abweichende Werthe ergeben; indem wir aber annehmen, dass die Abweichungen vom wahren Werthe gleich stark nach beiden Seiten sind, halten wir den Mittelwerth dieser h für denjenigen, der dem wahren Werthe am nächsten kommt. Unter Zuhilfenahme dieses Werthes erhält man nun zu jedem Werthe D einen Werth hD, dem man dasjenige $\frac{r}{n}$ entsprechen lässt, welches bei dem in den Werth hD eingegangenen Werthe D erhalten wurde. Nun die Werthe hD als Abscissen, $\frac{r}{n}$ als Ordinaten eines rechtwinkligen Coordinatensystems aufgetragen, erhält man eine Curve, die mit der ersten vergleichbar ist. Soll die Formel die Versuchsverhältnisse darstellen, so müssen beide Curven zusammenfallen.

Kurz zusammengefasst kommt diese Art der Prüfung darauf hinaus, unter Annahme eines constanten h (Mittelwerth verschiedener h) zu untersuchen, inwieweit die Curven für $\frac{r}{n}$, die mathematische und die Versuchscurve sich decken.

Im Wesentlichen führt dies auf dasselbe, wie die Untersuchung der Constanz von h, nur dass durch dieses graphische Verfahren ein anschaulicheres Bild entsteht.

Die Art und Größe der Abweichungen der Zahlen resp. der Curven wird dann über die Gültigkeit oder Ungültigkeit der Formeln entscheiden. Was das erste betrifft, so würden ganz unregelmäßige Abweichungen der Werthe des Präcisionsmaßes von einem Mittelwerthe für eine Constanz von h sprechen; aber falls die Abweichungen nicht der Art sind und falls neben der Gültigkeitsfrage auch untersucht werden soll, welchen Grad der Genauigkeit für eine bestimmte Anzahl von Versuchen der Fechner'sche und Müller'sche Mechanismus der Berechnung der Empfindlichkeitsmaße gewährt, gilt es klar zu werden, welche Bedeutung eine Abweichung des Präcisionsmaßes von gegebener Größe hat. In dieser Beziehung fehlt es aber leider an einem geeigneten Maßstab, mit dem man die gegebenen Abweichungen vergleichen könnte, oder mit andern Worten: indem man die Schwankungen auf nichts Concretes, in den Versuchsverhältnissen Gegebenes beziehen kann, gewinnt man keine Vorstellung von denselben. Von diesem Standpunkte betrachtet, weiß man allerdings nicht recht, was man mit dem Präcisionsmaße anfangen soll.

Das ist anders, wenn man die Unterschiedsschwelle als Empfindlichkeitsmaß benutzt. Beträgt hier die Abweichung, bezogen auf die Unterschiedsschwelle, etwa $^1/_{10}$ derselben, so ist dies ein Ausspruch, der einen klaren bestimmten Sinn hat.

Es liegt nicht in unserer Absicht, hierauf näher einzugehen, vielmehr kommt es uns darauf an, einen andern Weg der Prüfung anzugeben, der die Mängel der vorgenannten Arten vermeidet und uns ein Bild gibt, welche Bedeutung die vorkommenden Unterschiede von h für die Bestimmung der Empfindlichkeit haben. Dieser Weg besteht darin, dass man die Fechner'schen Formeln darauf hin untersucht, mit welcher Genauigkeit man aus den Formeln den Gleichheitspunkt berechnen kann, die Müller'schen Formeln aber darauf hin, wie genau sich der Unterschiedsschwellenwerth ergibt. Dass nach diesem Verfahren die Versuche eine Anwendung der Müller'schen Formeln gestatten, was direct nicht möglich ist, muss als besonderer Vortheil desselben bezeichnet werden. Diese Art der Prüfung ist aber insofern von der oben angegebenen experimentellen verschieden, als dabei Versuche bei je zwei, nicht nur einem D benutzt werden. Dies die allgemeinen Bemerkungen hierüber; die specielle Ausführung gestaltet sich folgendermaßen.

Wenn man mit zwei verschiedenen Reizunterschieden $P_1 - P$ und $P_2 - P$ Versuche anstellt und es ergeben sich die Verhältnisse $\frac{r_1}{n}$ und $\frac{r_2}{n}$, so hat man nach Fechner

$$\frac{r_1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{H(P_1 - P)} e^{-t^2} dt$$

und

$$\frac{r_2}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{H(P_2 -} e^{-t^2} dt$$

wo P den Reiz bedeutet, der dem Gleichheitspunkte entspricht, P_1 und P_2 aber die Stärken der Vergleichsreize für die beiden Versuchsreihen sind. Nun erhält man diesen Formeln entsprechend aus der Fundamentaltabelle für $\frac{r_1}{n}$ einen bestimmten Werth α von $H(P_1 - P)$, für $\frac{r_2}{n}$ einen Werth β von $H(P_2 - P)$, aus den Gleichungen aber

$$H(P_1 - P) = \alpha, \quad H(P_2 - P) = \beta$$

berechnen sich:

$$P = \frac{P_2 \alpha - P_1 \beta}{\alpha - \beta}; \quad H = \frac{\alpha - \beta}{P_1 - P_2}.$$

Es muss sich nach der ersten Formel aus Versuchen mit zwei verschiedenen D immer derselbe Werth von P ergeben.

Setzt man in dieser Formel für P_2 wieder $P + D_2$, für P_1 seinen Werth $P + D_1$, so kommt

$$P = P + \frac{D_2 \alpha - D_1 \beta}{\alpha - \beta}$$

oder:

$$0 = \frac{D_2 \alpha - D_1 \beta}{\alpha - \beta}.$$

Diese Relation muss sich aus unsern Versuchen heraus bestätigen, falls die Fechner'schen Formeln gültig sind.

Eine ganz ähnliche Prüfung durch Combination der Versuche bei 2 Punkten lässt die Müller'sche Formel zu. Dem bei dem Reizunterschiede D_1 erhaltenen $\frac{r_1}{n}$ entspreche nach der Fundamentaltabelle der Werth α von $H(S - D_1)$; für das dem Reizunterschiede D_2 entsprechende $\frac{r_2}{n}$ erhalte man β als Werth von $H(S - D_2)$; dann ist

$$\pm H(S - D_1) = \alpha; \qquad \pm H(S - D_2) = \beta$$

woraus

$$H = \frac{\alpha - \beta}{D_2 - D_1} \text{ und } S = \frac{\alpha D_2 - \beta D_1}{\alpha - \beta} \text{ folgt.}$$

Nimmt man etwa:

$$D_1 = 5,\ D_2 = 15$$
$$- = 10,\ - = 20$$
$$- = 15,\ - = 25$$
u. s. w.,

so müssen sich immer constante Werthe der Unterschiedsschwelle S und des Präcisionsmaßes H ergeben.

Aus den bei dieser Prüfung sich ergebenden Abweichungen vom Gleichheitspunkte resp. vom Ebenmerklichkeitspunkte ersieht man weit besser als oben, welchen Anspruch unsere Formeln auf Brauchbarkeit machen dürfen.

An diese Arten der Prüfung

1) durch Berechnung der Werthe von H und S und Construction derselben,
2) durch Berechnung des Gleichheitspunktes und der Unterschiedsschwelle aus Versuchen mit zwei D

reiht sich noch eine weitere, die an sich von allgemeinerer Bedeutung ist, zugleich aber auf eine der Voraussetzungen der Müller'schen Formel sich bezieht. Wenn nämlich $D = S$ ist, so ergibt sich $\frac{r}{n} = \frac{1}{2}$. Bestimmt man nun den Unterschiedsschwellenwerth nach der Methode der eben merklichen Unterschiede und stellt dann Versuche mit einem Reizunterschiede gleich dem Schwellenwerthe an, so fragt es sich, ob die Beziehung $\frac{r}{n} = \frac{1}{2}$ verificirt wird.

Wir werden im Folgenden versuchen, die Prüfung der Formeln auf den genannten verschiedenen Wegen auszuführen, zuvor aber müssen wir das zur Prüfung zu verwendende Versuchsmaterial näher in's Auge fassen.

B. Anordnung der Versuche.

Wie ein Ueberblick über das bis jetzt nach der Methode der richtigen und falschen Fälle gewonnene Versuchsmaterial gezeigt hat, leidet dasselbe an dem Mangel der Unvollkommenheit und Einseitigkeit. Zur Unterlage fast aller Erörterungen über die Methode sind bisher die aus den Gewichtsversuchen Fechner's resultirenden Zahlen benutzt worden. Aber dass dieselben trotz ihrer großen Zahl noch unzureichend sind, haben wir früher gesehen. Und was Nörr's Versuchszahlen anlangt, so dürfte ihre Gewinnung nicht methodisch genug sein, um die

Verwendung derselben zur Untersuchung der in Rede stehenden Frage zu rechtfertigen. Daher war es geboten, das Versuchsmaterial zu vermehren. Auf Vorschlag des Herrn Prof. Wundt habe ich so unter Mitwirkung des Herrn J. Merkel in methodischer Weise eine große Reihe von Schallversuchen angestellt. Die Schallstärken, deren wir uns bei den Versuchen bedienten, wurden durch zwei Bleikugeln erzeugt, die wir kurz hintereinander von bestimmten Höhen auf eine constante Unterlage fallen ließen. Die von uns verwandten Bleikugeln standen immer in dem Gewichtsverhältniss 2 : 1. Wir verwandten gerade solche Kugeln, weil auch die später näher zu erörternde Berechnung der Schallstärken und die Bestimmung des Reizunterschiedes D auf Versuche mit Kugeln gestützt waren, die das gleiche Gewichtsverhältniss besaßen. An den Versuchen waren stets zwei Personen betheiligt; die eine, der Manipulator, besorgte das Fallenlassen der Kugeln und die Registrirung der Resultate, die andere gab ein Urtheil über die vergleichsweise Stärke der beiden Schalle ab, was ohne Zögern sofort nach dem Fall der Kugeln geschah. Uebrigens hatte letztere Person keine Kenntniss von dem Gang der Versuche, so dass das Versuchsverfahren ein unwissentliches war. Um die Versuche in gewisser Vollständigkeit ausführen zu können, haben wir uns auf Versuche mit den Gewichtspaaren $^{50}/_{25}$ g und $^{25}/_{12,5}$ g beschränkt; die Schalle, welche diese Kugeln erzeugten, waren am besten für unsere Versuche geeignet. Die so erzeugten Schallstärken waren nämlich weder so stark, um eine unangenehme Empfindung hervorzurufen, noch so schwach, um eine besondere Spannung der Aufmerksamkeit zu verlangen. Von den beiden Kugeln ließen wir immer die größere von einer bestimmten constanten Höhe fallen, und zwar wählten wir dazu in der einen Hälfte der Versuche die Höhe 20 cm, in der andern Hälfte die Höhe 30 cm. Die kleinere Kugel fiel während einer Versuchsreihe von 50 Einzelversuchen gleichfalls von einer constanten Höhe; in den einzelnen Versuchsreihen hingegen variirte die Fallhöhe. Wenn so z. B. bei Anwendung des Gewichtspaares $^{50}/_{25}$ die Kugel vom Gewichte 50 g von der constanten Höhe 30 cm fiel, so fiel die kleinere Kugel in der ersten Versuchsreihe etwa von der Höhe 55 cm, in der zweiten von der Höhe 60 cm, in der dritten von der Höhe 65 cm u. s. f. So führten wir die einzelnen Reihen mit immer andern Reizunterschieden durch. Um alle einseitigen störenden Einflüsse zu vermeiden, strebten wir möglichste Symmetrie und Regelmäßigkeit in den Versuchen an. Ein solcher störender Einfluss ist die Zeitfolge der Schalle. Darum haben wir die Versuche in zwei Gruppen ausgeführt; das eine Mal ließen wir stets die größere der beiden Kugeln zuerst fallen, während die kleinere Kugel durch alle in Frage kommenden Höhen variirte; das andere Mal hingegen fiel stets die kleinere Kugel zuerst. Ein anderer einseitiger Einfluss entspringt daraus, dass man die Aenderungen in den Fallhöhen der kleineren Kugeln nur nach einer Richtung, entweder von unten nach oben oder umgekehrt, stattfinden lässt. Daher unterscheiden wir auch zwischen aufsteigendem (↑) und absteigendem (↓) Verfahren. Im Ganzen waren also vier Hauptfälle zu beachten. Nennen wir die Zeitfolge I diejenige, wo die grössere beider Kugeln zuerst fällt, die Zeitfolge II die umgekehrte, so hat man für die vier Hauptfälle das Schema:

I ↓	I ↑	II ↓	II ↑
Größere Kugel zuerst.	Desgl.	Kleinere Kugel zuerst.	Desgl.
Absteigend.	Aufsteigend.	Absteigend.	Aufsteigend.

Die obere und untere Höhe, von welcher man begann abwärts resp. aufwärts zu steigen, bestimmte sich dadurch, dass die beiden Schalle zweifellos in allen Fällen als verschiedene erkannt wurden, oder mit andern Worten: jene Höhe war eine solche, bei der sich lauter richtige Fälle ergaben. Um innerhalb einer Versuchsreihe, deren 50 Versuche immer in continuo ausgeführt wurden, alle störenden Einflüsse zu vermeiden und einen vollkommen gleichmäßigen Verlauf der ganzen Reihe zu ermöglichen, sind wir bald nach Beginn unserer Versuche davon abgekommen, die Resultate Fall für Fall aufzuzeichnen. Es erforderte das zu viel Zeit und brachte Störungen durch die mehr oder minder langen Pausen mit sich. Wir haben uns vielmehr Zählmarken verschafft und nach Abgabe eines Urtheils eine solche an die für die Fälle r, f, g, z bestimmten Plätze gelegt. Sobald die 50 Zählmarken vergriffen waren, war eine Versuchsreihe beendet, worauf die verschiedenen Fälle ausgezählt und das Resultat notirt wurde. So hatten wir, abgesehen von dem außerordentlichen Zeitgewinn, den Vortheil, eine Reihe vollkommen gleichmäßig durchzuführen. Außerdem war man so weit weniger Irrungen ausgesetzt, als wenn man eine Anzahl, etwa 4—8 Fälle, sich dem Gedächtniss einprägte, um sie dann zu notiren. Die Geschwindigkeit, mit der wir die Versuche ausführten, war eine derartige, dass ein Versuch etwa 5 Secunden beanspruchte. Zwischen den einzelnen Versuchsreihen ließen wir, um der Ermüdung vorzubeugen, eine Zeit von 5—10 Minuten verstreichen. Die ganze Versuchszeit betrug nie mehr als $1^1/_2$ Stunde und hörten wir schon früher auf, falls der Reagirende sich nicht mehr frisch genug fühlte. Der bei diesen Versuchen benutzte Fallapparat war ganz derselbe, wie ihn Tischer zu seinen Schallversuchen benutzte. Auf einem Dreifuß stand vertical eine 1,5 m lange eiserne Stange, welche zwei Arme mit kreisrunden Oesen trug, die horizontal und vertical verstellbar waren. Unter diesen Oesen befand sich die Fallunterlage, ein nacktes Brett aus Apfelbaumholz, 22 cm lang, 18 cm breit und 2,5 cm dick. Die Oberfläche desselben war vollkommen eben, ohne Aeste und sonstige Discontinuitäten. Dadurch, dass das Fallbrett 15^0 gegen die Horizontale geneigt war, wurde beim Rückprall die Kugel auf ein tiefer gelegenes Wattepolster geworfen und so jedes Nebengeräusch vermieden. Das Fallbrett ruhte auf zwei horizontalen Kanten, der Raum darunter war hohl.

C. Versuchstabellen.

Die auf diese Weise erhaltenen Versuchszahlen sind in folgenden Tabellen I bis IV zusammengestellt. Zur Erläuterung derselben diene Folgendes:

Ueber der Tabelle ist das Gewichtspaar angegeben, mit welchem die Versuche ausgeführt wurden, sowie die Höhe, von welcher die größere der beiden Kugeln fiel. In der ersten Columne sind die Höhen verzeichnet, von welchen die kleinere Kugel fallen gelassen wurde. Die nächsten mit I ↓, I ↑, II ↓, II ↑ bezeichneten Columnen enthalten die verschiedenen Arten von Fällen, die für das angegebene Gewichtspaar und die vorn bezeichneten Höhen genommen wurden. (Siehe oben.) Unter diesen Bezeichnungen befinden sich in jeder der vier Columnen noch die Buchstaben P, g, z, p. Die Zahlen unter P beziehen sich auf die Fälle, wo der Schall der Kugel P als der stärkere empfunden wurde; analog die Bezeichnung p; unter g sind die Gleichheitsfälle, unter z die zweifelhaften Fälle notirt. Was die letzteren angeht, so haben wir neben den zweifelhaften auch Fälle g unterschieden, wo die beiden Schalle als gleich stark erschienen. Von diesen Fällen, die mit den »unentschiedenen« Nörr's übereinstimmen, unterscheiden sich die z dadurch, dass bei ihnen der Unterschied wohl empfunden, aber nicht die Richtung desselben erkannt wird. Bei den Vorversuchen, die wir angestellt haben, um uns einzuüben, war die Zahl der z bedeutend; später haben sie in einer Versuchsreihe nie mehr als 8 % betragen; ja in sehr vielen Fällen kamen sie gar nicht vor. Wie wir beobachten konnten, waren die z durch die mangelhafte Versuchstechnik oder aber durch Mangel an Aufmerksamkeit bedingt. Die Versuchstechnik bot insofern Schwierigkeiten dar, weil wir verschieden große Bleikugeln zu den Versuchen verwendeten, die einen abweichenden Timbre besaßen, sodass es im Anfang unserer Versuche schwer war, von demselben zu abstrahiren und nur auf die Intensität der Schalle zu achten. Besser würde man mit gleich großen Kugeln experimentiren, aber für diese wird wiederum unsere Schallstärkenberechnung hinfällig. Außerdem aber erforderte es große Sorgfalt, die Kugeln immer auf denselben Punkt des Fallbretts aufschlagen zu lassen; trotz großer Vorsicht geschah es doch dann und wann, dass die Kugel etwas abwich und auf einem etwas andern Punkte auftraf, was immer einen abweichenden Klang herbeiführte. Was aber die Aufmerksamkeitsverhältnisse anlangt, so war zwar durch die geringe Zahl (50) einer Versuchsreihe, wie durch die Erholungspausen zwischen den Reihen dafür gesorgt, dass die Aufmerksamkeit nicht erlahmte; doch bei der unvermeidlichen Monotonie der Versuche kann es sich zuweilen ereignen, dass vorübergehende Stadien verminderter Aufmerksamkeit eintreten, welche dann Fälle z bedingen. Dass übrigens dieser Umstand nicht von großem Belang ist, zeigt die geringe Zahl der zweifelhaften Fälle. — Hinsichtlich der Zahl der Versuche sei bemerkt, dass in jeder Columne die Versuche zweier Reihen à 50 Versuche für jede Höhe H mitgetheilt sind, welche unter vergleichbaren Umständen ausgeführt wurden. Demnach umfassen die Tabellen zusammen 30 100 Versuche; die erste 7100, die zweite 8300, die dritte 6900, die vierte 7800. Alle vier Tabellen sind aus Beobachtungen des Herrn Merkel entstanden, während ich selbst den Apparat bediente. Hiernach wird die Orientirung keine weiteren Schwierigkeiten bieten.

Tabelle I. $P/p = {}^{25}/_{12,5}$, $h = 20$.

H	I $\downarrow$				I $\uparrow$				II $\downarrow$				II $\uparrow$			
	P	g	z	p	P	g	z	p	P	g	z	p	P	g	z	p
105									—	—	—	100	—	—	—	100
100					—	—	—	100	—	12	—	88	—	10	—	90
95					—	10	—	90	—	16	4	80	—	18	4	78
90	—	—	—	100	—	14	4	82	—	30	—	70	—	32	—	68
85	—	14	—	86	—	26	—	74	—	38	—	62	—	38	4	58
80	—	22	2	76	—	28	—	72	—	46	—	54	—	48	2	50
75	—	26	2	72	—	50	—	50	—	48	2	50	—	66	—	34
70	—	44	—	56	—	58	2	40	—	62	—	38	—	72	4	24
65	—	50	—	50	—	64	4	32	—	72	4	24	—	84	—	16
60	—	62	—	38	—	68	—	32	6	82	—	12	4	92	—	4
55	—	78	2	20	8	68	4	20	16	76	2	6	10	90	—	—
50	2	72	8	18	12	74	2	12	26	70	4	—	42	58	—	—
45	4	84	6	6	30	66	4	—	42	54	4	—	54	46	—	—
40	22	74	4	—	40	58	2	—	52	48	—	—	60	40	—	—
35	42	54	4	—	46	48	6	—	68	32	—	—	72	28	—	—
30	56	44	—	—	58	40	2	—	80	20	—	—	84	16	—	—
25	70	28	2	—	74	22	4	—	84	12	4	—	100	—	—	—
20	78	22	—	—	88	10	2	—	90	10	—	—				
15	84	16	—	—	100	—	—	—	100							
10	100	—	—	—												

Tabelle II. $P/p = {}^{50}/_{12,5}$, $h = 30$.

H	I $\downarrow$				I $\uparrow$				II $\downarrow$				II $\uparrow$			
	P	g	z	p	P	g	z	p	P	g	z	p	P	g	z	p
135																100
130									—	—	—	100	—	—	14	86
125									—	6	2	92	—	24	—	76
120					—	—	—	100	—	6	—	94	—	38	—	62
115					—	10	—	90	—	5	5	90	—	40	2	58
110	—	—	—	100	—	18	—	82	—	36	2	62	—	50	2	48
105	—	6	—	94	—	30	—	70	—	52	—	48	—	54	—	46
100	—	28	2	70	—	34	—	66	—	70	—	30	—	52	8	40
95	—	44	—	56	—	44	—	58	—	76	4	20	—	54	2	44
90	—	50	2	48	—	48	—	52	—	82	—	18	—	60	2	38
85	—	64	2	34	—	50	2	48	—	96	4	—	—	68	—	32
80	—	64	2	34	—	70	—	30	16	84	—	—	2	96	—	2
75	—	80	2	18	6	74	—	20	28	72	—	—	18	78	—	4
70	6	82	2	10	4	92	—	4	34	64	2	—	24	72	4	—
65	22	74	—	—	18	80	—	4	32	66	2	—	34	62	4	—
60	26	68	6	—	18	80	2	—	54	46	—	—	50	48	2	—
55	38	58	4	—	34	66	—	—	78	22	—	—	64	32	4	—
50	46	52	2	—	42	54	2	—	80	18	2	—	72	28	—	—
45	42	54	4	—	54	46	—	—	90	10	—	—	80	20	—	—
40	50	46	4	—	60	38	2	—	96	4	—	—	84	12	4	—
35	58	40	2	—	70	30	—	—	100	—	—	—	90	10	—	—
30	78	22	—	—	82	14	4	—					100			
25	82	18	—	—	86	14	—	—								
20	86	14	—	—	100											
15	100	—	—	—												

Tabelle III. $P/p = {}^{50}/_{25}$; $h = 20$.

H	I ↓				I ↑				II ↓				II ↑			
	P	g	z	p	P	g	z	p	P	g	z	p	P	g	z	p
110													—	—	—	100
105									—	—	—	100	—	14	—	86
100									—	10	—	90	—	20	—	80
95					—	—	—	100	—	16	—	84	—	24	—	76
90	—	—	—	100	—	6	—	94	—	30	—	70	—	28	—	72
85	—	4	4	92	—	14	—	86	—	40	—	60	—	30	—	70
80	—	18	4	78	—	14	—	86	—	46	—	54	—	40	—	60
75	—	28	4	64	—	20	—	80	—	50	2	48	—	54	—	46
70	—	36	2	62	—	36	—	64	—	60	—	40	—	66	—	34
65	—	42	8	50	—	38	—	62	—	56	4	40	—	72	2	26
60	—	54	2	44	—	58	2	40	2	68	—	30	12	68	—	20
55	—	54	6	40	—	60	—	40	10	84	—	6	18	68	4	10
50	2	74	—	24	—	72	—	28	12	88	—	—	26	70	—	4
45	14	70	2	14	—	82	6	12	30	70	—	—	38	62	—	—
40	32	66	—	2	28	64	8	—	44	56	—	—	52	48	—	—
35	46	50	4	—	46	44	8	2	58	38	2	—	54	46	—	—
30	66	26	8	—	72	28	—	—	72	26	2	—	72	28	—	—
25	80	20	—	—	88	10	2	—	90	10	—	—	86	14	—	—
20	96	4	—	—	100	—	—	—	100	—	—	—	100	—	—	—
15	100	—	—	—												

Tabelle IV. $P/p = {}^{50}/_{25}$; $h = 30$.

H	I ↓				I ↑				II ↓				II ↑			
	P	g	z	p	P	g	z	p	P	g	z	p	P	g	z	p
130									—	—	—	100	—	—	—	100
125					—	—	—	100	—	10	—	90	—	10	—	90
120					—	6	—	94	—	30	—	70	—	10	—	90
115	—	—	—	100	—	14	2	84	—	48	—	52	—	22	—	78
110	—	6	—	94	—	22	—	78	—	56	—	44	—	38	—	62
105	—	10	2	88	—	28	2	70	—	66	4	30	—	40	—	60
100	—	24	—	76	—	34	—	66	—	70	—	30	—	62	—	38
95	—	40	—	60	—	48	2	50	—	74	—	26	—	66	2	32
90	—	48	—	52	—	52	4	44	—	76	4	20	—	78	—	22
85	—	56	—	44	—	62	—	38	—	80	2	18	—	86	—	14
80	—	70	6	24	—	76	—	24	2	82	2	4	—	94	2	4
75	—	72	8	20	—	86	2	12	—	94	2	4	2	92	2	4
70	10	70	4	16	6	88	—	6	14	86	—	—	2	98	—	—
65	26	70	2	2	24	76	—	—	20	78	2	—	10	90	—	—
60	30	62	8	—	32	68	—	—	34	66	—	—	18	82	—	—
55	38	54	4	—	42	58	—	—	46	50	4	—	34	66	—	—
50	48	50	2	—	54	42	4	—	58	40	2	—	46	52	2	—
45	54	46	—	—	60	34	6	—	78	22	—	—	70	28	2	—
40	70	30	—	—	84	16	—	—	96	4	—	—	82	18	—	—
35	74	26	—	—	90	10	—	—	100	—	—	—	100	—	—	—
30	100	—	—	—	100		—	—								

D. Allgemeine Versuchsergebnisse.

1. Ab- und Zunahme der Fälle *P, p, g, z.*

Ehe wir an die rechnerische Verwerthung der Versuchszahlen gehen, werfen wir einen Blick auf die allgemeinsten sich darbietenden Verhältnisse. Dabei halten wir uns der Kürze des Ausdrucks halber an die erste der Columnen (I ↓); für die übrigen finden analoge Verhältnisse statt. Fassen wir die Zahl der Fälle selbst ins Auge, so beginnt die Zahl der Fälle p bei einer gewissen Fallhöhe mit 100 und nimmt mit abnehmender Höhe stetig bis 0 ab; bei der entsprechenden Höhe, oft schon bei einigen vorangegangenen Höhenstufen beginnen die Fälle P, welche nun mit weiterer Abnahme der Höhe H bis 100 zunehmen. Die Gleichheitsfälle verhalten sich umgekehrt; sie nehmen mit abnehmenden Höhen zu, erreichen ein Maximum ungefähr bei derjenigen Höhe, wo die Anzahl der Fälle p oder P nahezu 0 ist, um von da mit weiterer Abnahme der Höhe H wieder bis 0 abzunehmen. Die zweifelhaften Fälle treten ganz unregelmäßig auf; wie schon bemerkt, ist ihre Zahl nicht bedeutend.

Diese Resultate sind leicht verständlich; je größer die Höhendifferenz ist, von welcher die beiden Kugeln fallen, desto größer ist die Schalldifferenz. Wir sind nun von einer Höhe H ausgegangen, für welche der eine der beiden Schalle in jedem Falle stärker war als der andere, für welche sich also lauter richtige Fälle ergeben; mit abnehmender Höhe vermindert sich die Schalldifferenz und es treten deshalb zu den richtigen noch Gleichheitsfälle und zweifelhafte Fälle hinzu; bei weitergehender Verringerung der Schalldifferenz verringern sich die richtigen Fälle, während die Gleichheitsfälle sich vermehren; weiterhin treten Fälle auf, wo P größer erscheint, endlich verschwinden die Fälle p ganz und die Fälle P erfahren eine ebensolche Zunahme, wie vorher die Fälle p abnahmen, indess die Gleichheitsfälle wieder abnehmen. Dass die zweifelhaften Fälle so unregelmäßig auftreten, erklärt sich aus der oben angegebenen Entstehungsweise derselben.

2. Eintheilung in *r, f, z.*

Wir haben bis jetzt nur Fälle P, g, z, p unterschieden, für die späteren Rechnungen aber bedürfen wir der Eintheilung in Fälle r, f, z.

Da wir erst aus den Versuchen heraus urtheilen müssen, wann die Schalle gleich stark sind, so fragt es sich zunächst, welche Fälle als r, welche als f zu bezeichnen sind. Kein Zweifel kann hierüber obwalten, so lange neben den Fällen p keine Fälle P vorkommen und umgekehrt; aber sobald beide Arten auftreten, fragt es sich, wo die Scheidegrenze zwischen den r und f liegt. Hier geben offenbar in erster Linie die Gleichheitsfälle den Ausschlag: wo diese ein Maximum erreichen, werden die Schallstärken der beiden Kugeln als gleich zu bezeichnen sein; die entsprechende Höhe gibt also die Scheidegrenze zwischen den r und f.

Beispielsweise hat man in Tabelle I für die kritischen Höhen folgende Zahlen:

H	P	g	z	p
50	2	72	8	18
45	4	84	6	6
40	22	74	4	—

Diejenige Höhe, wo die beiden Schalle als gleich zu erachten sind, ist darnach annähernd $H = 45$ cm.

In manchen Fällen wird jedoch dieses Kriterium noch nicht ausreichend sein; man wird bei der Bestimmung des Gleichheitspunktes oft auch darauf achten müssen, dass für denselben ebensoviel Fälle P wie p auftreten, obgleich für die entsprechende Höhe kein Maximum von Gleichheitsfällen auftritt. Hätte man z. B. folgende Zahlen erhalten:

H	P	g	z	p
50	—	78	—	22
45	4	78	—	18
40	12	76	—	12

so würde man nicht die Höhe 50 als die dem Gleichheitspunkte entsprechende zu benutzen haben, also nicht diejenige Höhe, wo das Maximum der Gleichheitsfälle liegt, sondern die Höhe 40, für welche P und p gleich sind. Beide Bedingungen also, Maximum der Fälle g und Symmetrie der Fälle P und p, wird man zugleich bei Bestimmung des Gleichheitspunktes ins Auge zu fassen haben. Dies vorausgesetzt sind in I $\downarrow$ die oberhalb der dem Gleichheitspunkte entsprechenden Höhe gelegenen Fälle p als richtige, die unterhalb derselben gelegenen als falsche aufzufassen, während es sich mit den Fällen P umgekehrt verhält.

3. Einfluss der Zeitfolge, sowie des auf- und absteigenden Verfahrens.

Fixirt man nun die so gewonnenen Gleichheitspunkte, so bemerkt man betreffs der Zeitfolge in den vier Columnen unserer Tabellen ein analoges Verhalten. Es liegen nämlich die Gleichheitspunkte für die Zeitfolge I in allen Tabellen niedriger als für die Zeitfolge II; wie sich dies erklärt, davon später; was ferner das auf- und absteigende Verfahren anlangt, so hat sich gefunden, dass der Gleichheitspunkt bei dem absteigenden in der Regel in beiden Zeitfolgen niedriger war als bei dem aufsteigenden Verfahren.

Nehmen wir, um diese Verhältnisse zunächst bezüglich der Zeitfolge zu überblicken, aus den Columnen I↓, I↑ und II↓, II↑ das Mittel für die dem Gleichheitspunkt entsprechenden Höhen, so hat man folgendes Resultat:

P/p	h	H(I)	H(II)
$^{25}/_{12,5}$	20	47	57,5
	30	70	82,5
$^{50}/_{25}$	20	45	55,5
	30	70	77,6

Wie man sieht, ist bei der Zeitfolge II der Gleichheitspunkt durchgängig höher gelegen. Für den Einfluss des auf- und absteigenden Verfahrens aber erhält man ein Bild aus folgender Tabelle, wobei wir das Mittel aus I↓, II↓, sowie aus I↑, II↑ gezogen haben.

P/p	h	H (↓)	H (↑)
$^{25}/_{12,5}$	20	50	50
	30	82,5	75
$^{50}/_{25}$	20	49	51,5
	30	72,5	75

In nur einem Falle, bei dem Gewichte $^{25}/_{12,5}$ und $h = 30$ cm, liegt der Gleichheitspunkt beim absteigenden Verfahren höher als beim aufsteigenden.

Gleiches gilt denn auch im Allgemeinen für diejenigen Höhen, bei denen für alle Fälle einer Reihe der eine Schall stärker als der andere erschien. Für die Zeitfolge I liegen diese Höhen im Allgemeinen niedriger als für die Zeitfolge II, und ebenso ergeben sich beim absteigenden Verfahren geringere Höhen als beim aufsteigenden.

Es ist nicht schwer, diesen Einfluss der Zeitfolge wie des auf- und absteigenden Verfahrens zu erklären Dadurch, dass die beiden Reize bei unsern Versuchen successive dem Reagirenden dargeboten werden, erfolgt die Beurtheilung derselben nicht unter gleichen Umständen. Wenn man sofort nach Eintritt des zweiten Reizes das Urtheil abgibt, den letzteren also nach seiner unmittelbaren Stärke auffasst, so wird hingegen der vorangegangene, welcher aus dem Blickpunkt des Bewusstseins getreten ist, als Erinnerungsbild mit dem zweiten zum Vergleich gebracht. Wegen der geringeren Intensität des Erinnerungsbildes gegenüber dem unmittelbaren Eindruck erleidet so der erste Schall bei der Beurtheilung einen Verlust, er wird zu schwach geschätzt. Dazu kommt bei rascher Aufeinanderfolge der Eindrücke wahrscheinlich noch ein zweiter rein physiologischer Einfluss: wenn der zweite Schall eintritt, ist die durch den ersten verursachte Erregung noch nicht völlig abgeklungen; es entsteht so eine theilweise Summation der Eindrücke. Führt man daher Versuche bei der ersten Zeitfolge aus, d. h. lässt man die größere Kugel zuerst fallen, so wird der Schall derselben beim Vergleich mit dem Schall der kleineren Kugel einen Verlust erleiden. Infolgedessen wird man den Werth der Höhe H nicht so groß zu nehmen haben, als es dem idealen Gleichheitspunkte entspricht, den man erhalten würde, wenn beide Schalle unter gleichen Bedingungen einwirkten. Anders bei der zweiten Zeitfolge. Hier kommt der Schall der kleineren Kugel als der erste bei der Beurtheilung der Schallstärken zu kurz weg. So kommt es, dass die Höhe H für den Gleichheitspunkt bei der Zeitfolge I tiefer als bei der Zeitfolge II liegt.

Der Gleichheitspunkt ist ein bestimmter Grad der Merklichkeit; ebenso aber sind das diejenigen Punkte, für welche alle Fälle richtig werden. Es wird demnach hier bezüglich des Einflusses der Zeitfolge dasselbe wie für den Gleichheitspunkt gelten. Um lauter Fälle r zu erhalten, wird man bei Versuchen mit Zeitfolge I die Höhe H weniger hoch als bei Versuchen mit Zeitfolge II finden. Untersucht man diese Verhältnisse in den Tabellen, so finden sie sich mit wenigen Ausnahmen so, wie zu erwarten war. Die folgende Tabelle gibt eine Uebersicht über die fraglichen Höhen, wobei wir aus den Höhen für das auf- und absteigende Verfahren das Mittel gezogen haben.

P/p		Zeitfolge I.		Zeitfolge II.	
	h	H_o	H_u	H_o	H_u
$^{25}/_{12,5}$	20	95	12,5	105	22,5
	30	115	20	132,5	32,5
$^{50}/_{25}$	20	92,5	17,5	107,5	20
	30	120	30	130	35

Was das auf- und absteigende Verfahren betrifft, so kann ein Unterschied in den Versuchsergebnissen durch die Trägheit unsres Bewusstseins, wenn man so sagen darf, begründet werden. Wiederholte Eindrücke, in einer bestimmten Form dem Bewusstsein eingeprägt, stellen sich immer noch in derselben Form demselben dar, wenn letztere in der That sich auch verändert hat. So wurde bei unsern Versuchen nach der Methode der eben merklichen Unterschiede beobachtet, dass man zu ganz andern Resultaten kam, wenn man den Versuch mit zwei Schallstärken begann, die kaum merklich verschieden erschienen, als mit solchen, die einen sehr deutlichen Unterschied zeigten. Es wirkte der Eindruck der starken Verschiedenheit im zweiten Falle für die folgenden Versuche noch nach, wenn auch der Unterschied in diesen Versuchen weit geringer gemacht worden war. Bei den Versuchen nach unsrer Methode ließen wir nun beim absteigenden Verfahren die obere Kugel von einer Höhe H fallen, bei welcher alle Fälle richtig wurden, d. h. bei welcher der eine Schall den andern bedeutend überwog. Bei der ersten Zeitfolge überwog der zweite, bei der zweiten der erste Schall. Hierdurch wurde im Bewusstsein etwa bei der ersten Zeitfolge ein bestimmtes Bild, bestehend aus einem schwachen und einem darauf folgenden starken Schalleindruck, erzeugt, welches haften bleibt und mitbestimmend für die folgenden Versuche ist. Oder mit andern Worten: es prägt sich der Takt der beiden Schalle dem Bewusstsein ein, den man auch aus den folgenden Versuchen herauszuhören geneigt ist, falls man ihn nur einmal gehörig wahrgenommen hat. Darum werden jetzt beim absteigenden Verfahren die Gleichheitsfälle später hervortreten, als es der Fall sein würde, wenn nicht Fälle vorangegangen wären, wo der eine Schall unverkennbar stärker war; für das aufsteigende Verfahren gilt das Umgekehrte. Es wird also für das absteigende Verfahren die Höhe H des Gleichheitspunktes sich niedriger ergeben als beim aufsteigenden Verfahren. Dass der Versuch dies bestätigt, haben wir schon gesehen.

Durch denselben Umstand aber wird absteigend die Höhe H_o geringer, aufsteigend die Höhe H_u größer werden müssen, für welche alle Fälle richtig werden. Und analog erklärt sich, dass absteigend die Höhe H_u geringer, aufsteigend die Höhe H_0 größer wird, als es der Fall sein müsste; nur macht hier, wo man vom Gleichheitspunkte aus H_0 resp. H_u erreicht, nicht eine Verschiedenheit der Schalle ihren Einfluss geltend, sondern die Versuche mit einer bedeutenden Anzahl von Gleichheitsfällen üben einen Einfluss insofern, als sie gewissermaßen einem Wachsthum der richtigen Fälle hemmend entgegentreten. Auch dies zeigt sich in unseren Versuchszahlen. Die folgende Tabelle gibt im Auszug die bezüglichen Zahlen.

P/p	h	$H_o(\downarrow)$	$H_u(\downarrow)$	$H_o(\uparrow)$	$H_u(\uparrow)$
$^{25}/_{12,5}$	20	97,5	12,5	102,5	20
	30	120	25	127,5	25
$^{50}/_{25}$	20	97,5	17,5	102,5	20
	30	122,5	32,5	127,5	32,5

Man ersieht hieraus, wie beim absteigenden Verfahren ($\downarrow$) die Höhen H stets tiefer liegen.

Dieselben Verhältnisse wie der Gleichheitspunkt und diejenigen Punkte, für die alle Fälle richtig werden, müssen auch alle übrigen Punkte, die einem bestimmten Grade der Merklichkeit entsprechen, zeigen. Sucht man beispielsweise diejenigen Höhen auf, die einer bestimmten Procentzahl richtiger Fälle entsprechen, so müssen die Lagenverhältnisse bezüglich der Zeitfolge wie des auf- und absteigenden Verfahrens dieselben im Allgemeinen sein. Ein besonderes Interesse verdient hierbei der Fall, wo die Procentzahl der richtigen Fälle gleich 50 ist. Hier empfinden wir in der einen Hälfte der Fälle den Unterschied deutlich nach der einen Seite gelegen, in der anderen Hälfte spüren wir denselben gar nicht oder als entgegengesetzt gelegen. Untersuchen wir die Lage dieser Punkte, so erhalten wir für die entsprechenden Höhen H die folgende Uebersicht:

P/p	h	H_o(I)	H_u(I)	H_o(II)	H_u(II)
$^{25}/_{12,5}$	20	70	34	77,5	41
	30	90	51	107,5	61
$^{50}/_{25}$	20	62,5	36,5	78	38
	30	92,5	52	110	52

woraus ersichtlich ist, dass auch für $\frac{r}{n} = 0{,}50$ der Einfluss der Zeitfolge derselbe ist, wie wir ihn beschrieben haben. Für die Zeitfolge I liegen die Ebenmerklichkeitspunkte tiefer als für die andere Zeitfolge der Schalle.

Es muss hier noch erwähnt werden, dass bei Aufsuchung der vorstehenden Höhen unter r in dem Ausdruck $\frac{r}{n} = 0,50$ nicht die Anzahl richtiger Fälle allein, sondern noch vermehrt um die Hälfte der zweifelhaften verstanden ist. Es rechtfertigt sich diese Gleichtheilung durch die schon erwähnte Entstehungsweise der z. Doch fällt diese Theilung nicht mit der Fechner'schen zusammen, welcher nicht nur $\frac{z}{2}$, sondern $\frac{z+g}{2}$ zu den richtigen Fällen zählen würde. Wegen der geringen Zahl der z war nur sehr selten für obige Tabelle auf diese Bedeutung von $\frac{r}{n}$ Rücksicht zu nehmen. Untersucht man aber den Einfluss des auf- und absteigenden Verfahrens für Bestimmung der äußersten Höhen H_0 und H_u, so erhält man folgende kleine Tabelle:

P/p	h	$H_o(\downarrow)$	$H_u(\downarrow)$	$H_o(\uparrow)$	$H_u(\uparrow)$
$^{25}/_{12,5}$	20	70	37	77,5	40
	30	97,5	56,5	100	56
$^{50}/_{25}$	20	69,5	37	66	37,5
	30	97,5	50	105	52,5

Die Höhen beim absteigenden Verfahren sind darnach, mit nur einigen Ausnahmen, etwas geringer ausgefallen, wie es auch nach unserer Erklärung sein muss.

E. Berechnung des Reizunterschiedes D.

Ehe man von den im Vorigen erörterten allgemeinen Ergebnissen unserer Versuche aus weitergehend an eine eingehendere Verwerthung der Versuchszahlen treten kann, muss man Sorge tragen, dass die als bekannt vorausgesetzten Größen der zu prüfenden Formeln gehörig bestimmt sind. In alle Formeln geht der Reizunterschied D ein; eine Bestimmung desselben ist das erste Erforderniss für die Untersuchung. Hätte man Gewichtsversuche angestellt, so würde die Bestimmung von D keine Schwierigkeiten machen; die Waage würde uns ein objectives Maß für D liefern. Anders bei Schallreizen, bezüglich deren es kein objectives Maß gibt. Die theoretisch wahrscheinlichste Formel, dass die Intensität eines Reizes, der durch Aufschlagen einer Kugel vom Gewichte P, die von der Höhe H herabgefallen, erzeugt worden ist, gleich cPH sei (c eine vom Fallbrett und dem Material der Kugel abhängige Constante), ist durch die experimentellen Untersuchungen Vierordt's in Frage gestellt worden, der an ihre Stelle die Formel

$i = cp\sqrt{h}$ setzte. Oberbeck aber hielt es nach seinen Versuchen, ebenfalls mit fallenden Kugeln ausgeführt, für nöthig, eine empirische Formel von der Form $i = PH^{\varepsilon}$ aufzustellen. Für die Größe des hierin vorkommenden ε fand er nach seinen Versuchen den constanten Mittelwerth 0,641. Auch Tischer stützte sich bei seinen Versuchen über die Unterscheidung von Schallstärken auf diese empirische Formel, fand aber im Gegensatze zu Oberbeck, dass ε einer großen Variabilität je nach Fallhöhe und Gewicht unterworfen sei; der Werth desselben schwankte nach seinen Versuchen zwischen 0,6 und 1.

Wir hätten uns, da wir uns desselben Apparates und derselben Gewichte, wie Tischer sie benutzte, bei unseren Versuchen bedienten, auf die von ihm betreffs der Werthe von ε gewonnenen Resultate stützen und die von ihm erhaltenen Zahlen benutzen können. Allein da diese Resultate von anderer Seite noch keine weitere Bestätigung gefunden hatten und uns zudem die Versuchsmethode Tischer's wesentlicher Verbesserungen fähig schien, haben wir den Versuchen nach der Methode der richtigen und falschen Fälle solche zur Bestimmung der Werthe von ε nach der Methode der eben merklichen Unterschiede vorausgeschickt.

Anfänglich führten wir die Versuche nach dem von Tischer angegebenen Verfahren aus. Wir erzeugten die Schallreize durch zwei fallende Bleikugeln, die wir kurz hinter einander von solchen Höhen auf das Fallbrett des im Früheren beschriebenen Apparates fallen ließen, dass die Schalle als gleich stark empfunden wurden. Die einander entsprechenden Höhen h und H fanden wir, indem wir unter Festhaltung der unteren Höhe h die obere so lange abänderten, bis Schallgleichheit eingetreten war. Dabei ging man einmal von einem kleineren H, dem ein übermerklich schwächerer Schall der kleineren Kugel entsprach, aus, das bis zu einem H' vergrößert wurde, wo beide Schalle gleich stark waren, das andere Mal von einem übermerklich stärkeren Schall, und gelangte dann abwärts gehend zu einem Höhenwerthe H'', für welchen die Schalle gleich stark waren. Das Mittel aus den beiden so ermittelten Werthen H' und H'' fasste Tischer als die Höhe H auf, wo man nach Oberbeck's Formel:

$$pH^{\varepsilon} = Ph^{\varepsilon}$$

zu setzen, also den Schall der kleineren gleich dem Schall der größeren Kugel zu setzen habe.

Indem wir versuchten, die einander zugehörigen Höhenwerthe nach diesem Verfahren zu bestimmen, ergab sich bald, dass damit keine große Genauigkeit zu erreichen war. Es machte sich nämlich in Bezug auf die Zeitfolge der beiden Schalle eine Vervollkommnung des Verfahrens nothwendig. Hatte man für die eine der Zeitfolgen die Höhen H' und H'' gefunden und wechselte man dann die Reihenfolge der beiden Kugeln, so zeigten sich bei diesen Höhen und bei ihrem Mittelwerthe bedeutende Schalldifferenzen; der für die eine Zeitfolge gewonnene H-Werth erwies sich also verschieden von dem für die andere Zeitfolge. Obgleich Tischer diesen Einfluss der Schallfolge bei Anstellung der Weber'schen Versuche bemerkte (Philos. Studien I S. 511), hat er bei Bestimmung des Gleichheitspunktes doch nicht darauf besondere Rücksicht genommen. Indem sich aber, wie die folgenden Zahlen zeigen werden, bei einem Wechsel der Zeitfolge Höhenunterschiede von 10—20 cm ergeben, welche zu ganz anderen Mittelwerthen Anlass geben, kann von einer Berücksichtigung der Zeitfolge bei den Versuchsreihen nicht abgesehen werden. Wie dieser Einfluss der Zeitfolge sich theils aus der unmittelbaren Nachwirkung der Schallreizung, theils daraus erklären lässt, dass der erste der beiden Schalle nur als Erinnerungsbild beurtheilt wird, ist schon früher dargethan worden. Ist α der in Folge dessen verloren gehende Bruchtheil der Intensität J_1 der ersten Kugel, so kommt nur die Intensität $(1 - \alpha)\ J_1$ für die Beurtheilung in Frage. Mit Rücksicht auf die Zeitfolge der Schalle aber hat man die Versuche zur Bestimmung des Gleichheitspunktes in der Art auszuführen, dass man einmal stets die größere Kugel zuerst fallen lässt und nun Höhen H' und H'' in der oben beschriebenen Weise aufsucht; dann wiederholt man dieses Verfahren, indem man die kleinere Kugel zuerst fallen lässt. Das Mittel aus den so erhaltenen vier Höhenwerthen kann man dann mit größerem Rechte als die dem wahren Gleichheitspunkte entsprechende Höhe betrachten. Besondere Vorsicht war bei diesem Verfahren darauf zu verwenden, dass man einmal immer von einem ziemlich gleichen Grade der Unter- resp. Uebermerklichkeit sich dem Gleichheitspunkte näherte, und dass man um so geringere Höhenänderungen eintreten ließ, je näher man dem Punkte der Gleichheit kam. Bezüglich der ersten Bedingung gab uns eine vorläufige Bestimmung der Höhenpaare die Mittel an die Hand, um groben Fehlern nach dieser Hinsicht auszuweichen, und was die allmähliche Annäherung an die Gleichheitspunkte betrifft, so wurde zuletzt in Intervallen von nur $^1/_2$ cm auf- und abgestiegen.

In der Regel gelang es, für die vier Höhen $h = 10, 20, 30, 40$ cm die zugehörigen oberen Höhen in einer einzigen Versuchsstunde zu ermitteln. Hatte man hierbei das eine Mal die Werthe H bestimmt, indem man die Reihenfolge von kleineren zu größeren Höhen h innehielt, so wurde das nächste Mal behufs Elimination constanter Fehler der umgekehrte Gang eingeschlagen. Im Uebrigen wurde auch hier wie bei den Versuchen nach der Methode der richtigen und falschen Fälle auf möglichste Gleichmäßigkeit in dem Verfahren Rücksicht genommen.

Die Versuchszeit betrug bei Bestimmung der folgenden ε nie über $^3/_4$ Stunde; um aber dem wechselnden Stande der Empfindung Rechnung zu tragen, haben wir für die Gewichtspaare $^{50}/_{25}$ und $^{25}/_{12,5}$ g die Gleichheitspunkte in wiederholter Weise bestimmt; einmal vor Beginn der nach der Methode der richtigen und falschen Fälle anzustellenden Versuche, dann nach Gewinnung einiger Versuchsreihen und endlich nach Abschluss aller Versuche nach dieser Methode.

Wir theilen in der nächsten Tabelle die so erhaltenen Zahlen mit. Zum Verständniss derselben diene Folgendes: Die Höhen h, von denen die kleinere Kugel fiel, sind in der Mitte angeführt; rechts und links davon sind die Höhen H' H'' einmal für die Zeitfolge I, dann für die Zeitfolge II aufgeführt, die sich nach der oben beschriebenen Methode ergaben; die Pfeile in der h-Columne deuten an, in welcher Richtung die Versuche ausgeführt wurden. Aus den vier H-Werthen ist dann das arithmetische Mittel H gezogen und ε nach der Formel

$$\varepsilon = \frac{\log \frac{P}{p}}{\log \frac{H}{h}}$$

berechnet worden, welche Werthe gleichfalls in der Tabelle unter H und ε enthalten sind.

Ueberblickt man die Zahlenwerthe der ε (Tab. V), denen nunmehr möglichst sorgfältige Versuche zu Grunde liegen, so findet man, dass die Variabilität des ε lange nicht so stark ist, wie sie von Tischer gefunden wurde.

Die Werthe der ε in den sechs einzelnen Reihen für das Gewichtspaar $^{50}/_{25}$ zeigen mit Ausnahme der ersten keine regelmäßige Zu- oder Abnahme, so dass man geneigt sein könnte, dies als einen Hinweis auf ein constantes ε zu betrachten. Auch die Mittelwerthe aus je zwei zusammengehörigen Höhen für Reihe I und II, III und IV, V und VI (Tab. VI) zeigen kein regelmäßiges Verhalten und würden also diese Vermuthung rechtfertigen. Indess da in allen einzelnen Reihen wie in den Mittelwerthen je zweier die Werthe von ε für $h = 10$ geringer wie für $h = 40$ cm sind, und da die Hauptmittelwerthe mit dem Wachsthum von h doch wachsen (Tab. VII), so spricht dies für eine geringe Zunahme der ε mit wachsender Höhe. Die Abweichung für $h = 20$ und $h = 30$ cm in den Hauptmittelwerthen will nicht viel sagen; sie ist so gering, dass sie auf Rechnung der zufälligen Fehlervorgänge gesetzt werden kann. Der Einfluss der letzteren spricht sich in den Werthen der H aus; die Schwankungen derselben sind aber der Art, dass, wie wir uns überzeugt haben, Abweichungen von 0,05 in den Werthen von ε als Beobachtungsfehler in den Kauf zu nehmen sind.

In besserer Weise wird das Wachsthum von ε mit wachsenden Höhen durch die Ergebnisse der Versuche mit dem anderen Gewichtspaar $^{25}/_{12,5}$ bestätigt. Schon in zwei der Einzelreihen (I und IV) kommt dasselbe vollständig zum Ausdruck; in den übrigen Reihen finden unregelmäßige Schwankungen statt, die letzte Reihe ausgenommen, in der sogar eine regelmäßige Abnahme des ε stattfindet. In den Mittelwerthen kommt das Wachsthum besser zum Ausdruck, allerdings mit noch einer Ausnahme; die Hauptmittelwerthe aber zeigen keine Abweichung mehr.

Aus den berechneten Werthen ε sind in möglichster Annäherung die corrigirten gewonnen worden, von dem allgemeinen Ergebnisse der verschiedenen Versuchsreihen ausgehend, dass sowohl mit steigenden Höhen als mit zunehmenden Gewichten ε zunimmt. Wie schon früher bemerkt wurde, zeigen die Werthe von ε in den einzelnen Versuchsreihen manche Schwankungen. Indess sind diese für die Resultate belanglos, wie man sich leicht durch die Rechnung überzeugen kann. Aus diesem Grunde ist auch die Substitution der stetig abgestuften corrigirten Werthe von ε an Stelle der wirklich gewonnenen ohne Einfluss auf den Gang der Versuche.

Tabelle V.

Zahlenwerthe zur Bestimmung von ε.

$P/p = {}^{50}/_{25}$.

Beobachter: Merkel.

I		II		H	ε	h	I		II		H	ε
H'	H''	H'	H''				H'	H''	H'	H''		
	I								II			
21	34	22	32	27,2	0,692	10	18	20	31	35	26	0,725
39	58	52	75	56	0,673	20	48	58	53	65	56	0,672
67	80	70	95	78	0,725	30	58	70	87	97	78	0,725
79	96	111	126	103	0,733	40	71	104	103	125	100,7	0,750
		III							IV			
19	25	24	41	27,2	0,692	10	23	26	25	34	27	0,698
37	50	53	68	52	0,725	20	41	48	57	57	50,7	0,745
52,5	79	79	100	77,6	0,729	30	55	79	87	95	79	0,716
69,5	106,5	109	129	103,5	0,729	40	69	91	100	131	97,7	0,776
		V							VI			
22	29	23	26	25	0,756	10	21.5	27	30,5	32	27,8	0,678
41	47	43	61	48	0,792	20	39	41	49	67	49	0,774
58	80	74	92	76	0,746	30	57	74	89	92	78	0,722
72	98	100	126	99	0,765	40	70	100	101	124	98,7	0,767
					P/p	=	${}^{25}/_{12,5}$					
		I							II			
20	27	33	34	28,5	0,662	10	15	29	30	40	28,5	0,662
38	48	61	71	54,5	0,691	20	35	51	58	77	55,2	0,695
54	76	67	97	73,5	0,774	30	57	81	80	94	78	0,725
63	96	99	126	96	0,792	40	71	108	117	97	98,2	0,790
		III							IV			
20	23	25	30,5	24,6	0,770	10	21	27	29	36	28,2	0,669
41	48	58	73	55	0,685	20	37	56	57	72	55,5	0,697
50	66	66	103	71,2	0,803	30	51	78	80	93	75,4	0,752
69	107	97	128	100,2	0,755	40	70	105	115	121	102,7	0,735
		V							VI			
24	23	29	29,5	26,5	0,711	10	17	21	28	29	23,7	0,803
37	41	62	64	51	0,740	20	35	46	54	65	50	0,756
58	88	80	94	80	0,707	30	52	81	80	90	75,7	0,756
73	101	107	131	103	0,733	40	77	102	90	129	99,5	0,761

Tabelle VI.

Mittelwerthe von ε für je zwei zusammengehörige Reihen.

h	Combinirte Reihen	ε	h	Combinirte Reihen	ε
	$P:p=50:25$			$P:p=25:12{,}5$	
10	I und II	0,708	10	I und II	0,662
„	III „ IV	0,695	„	III „ IV	0,796
„	V „ VI	0,717	„	V „ VI	0,757
20	I „ II	0,672	20	I „ II	0,679
„	III „ IV	0,735	„	III „ IV	0,682
„	V „ VI	0,783	„	V „ VI	0,748
30	I „ II	0,725	30	I „ II	0,749
„	III „ IV	0,722	„	III „ IV	0,777
„	V „ VI	0,735	„	V „ VI	0,731
40	I „ II	0,741	40	I „ II	0,781
„	III „ IV	0,752	„	III „ IV	0,745
„	V „ VI	0,766	„	V „ VI	0,747

Tabelle VII.

Werthe von ε für die Mittelwerthe H der Tabelle V.

(Hauptmittelwerthe.)

h	H	ε	Corr. ε	h	H	ε	Corr. ε
	$P/p = {}^{50}/_{25}$				$P/p = {}^{25}/_{12,5}$		
10	26,7	0,703	0,71	10	26,66	0,706	0,71
20	52,1	0,723	0,73	20	53,53	0,706	0,72
30	77,7	0,728	0,75	30	75,52	0,750	0,73
40	100,1	0,747	0,76	40	99,93	0,760	0,74
50	123	0,770	0,78	50	124	0,763	0,76

In Bezug auf die beiden Gewichtspaare verhält sich ε so, wie es von Tischer gefunden wurde, mit wachsenden Gewichten nimmt ε etwas zu; für das Gewichtspaar ${}^{25}/_{12,5}$ ist das Mittel aller ε der Tab. VI 0,719; für das Gewichtspaar ${}^{50}/_{25}$ 0,729. Zu einer Verallgemeinerung reichen diese Versuche nicht aus; dazu müssten dieselben durch Versuche mit noch anderen Gewichtspaaren ergänzt werden.

Wenn wir uns im Vorhergehenden an die Hauptmittelwerthe der einzelnen ε gehalten haben, so geschah es, weil eine Betrachtung derselben das nächstliegende war. Dieselben sind jedoch noch nicht die besten Werthe, die man erhalten kann; vielmehr ist es richtiger, zunächst aus den Höhen H aller Reihen das Mittel zu nehmen und mit diesem die Werthe ε zu berechnen. In Tab. VII ist dies geschehen und sind noch die Werthe von H und ε für $h = 50$ cm hinzugefügt worden, die wir des Folgenden wegen noch nachträglich bestimmt haben. Die so erhaltenen Werthe zeigen wie die früheren Mittelwerthe eine Zunahme mit wachsenden Höhen.

Fassen wir die Bestimmungsweise der ε nochmals in's Auge, so ersieht man, wie sich für ein gegebenes Gewichtsverhältniss bei gegebenen absoluten Gewichten und einer gegebenen Höhe h in eindeutiger Weise ein Werth H durch den Versuch finden lässt, bei dem der Schall der kleineren Kugel gleich dem der größeren ist. Jedem solcher Höhenpaare entspricht aber bei Anwendung derselben Gewichte eine bestimmte Schallstärke, welche, wie wir annehmen wollen, sich durch pH^ε oder Ph^ε ausdrückt, wo ε aus der Formel

$$\varepsilon = \frac{\log \frac{P}{p}}{\log \frac{H}{h}}$$

sich bestimmt. Wenn man daher mit zwei gegebenen Gewichten Versuche anstellt, wobei die kleinere Kugel von einer bestimmten Höhe H fällt, und man die Schallstärke dieser Kugel berechnen will, so hat man durch den Versuch zu der Höhe H die Höhe h zu ermitteln, nach obiger Formel ε zu berechnen und den Ausdruck pH^ε zu bilden, dessen Zahlenwerth die Schallstärke der von der Höhe H gefallenen Kugel vom Gewichte p angibt. Umgekehrt muss man für die andere Kugel vom Gewicht P zur Fallhöhe h die zugehörige Höhe H suchen und ganz analog die Schallstärke Ph^ε berechnen. Um Weitläufigkeiten zu entgehen, beschränkten wir uns auf die Bestimmung einer geringen Zahl solcher Höhenpaare h und H, die desto genauer ausgeführt wurden; die anderen Werthe wurden dann durch ein Interpolationsverfahren bestimmt. Man trage dazu in einem rechtwinkeligen Coordinatensysteme die vier bei dem Versuche benutzten h-Werthe als Abscissen, die zugehörigen H-Werthe als Ordinaten auf und verbinde die Endpunkte derselben durch einen stetigen Curvenzug. Die gegebenen Ordinaten H dieser Curve entsprechenden Abscissen stellen dann die zu H gehörigen Werthe h vor. Nachdem man so h gefunden, bestimmt man ε nach der bekannten Formel. Dieses Verfahren, anfänglich von uns benutzt, gewährt eine hinlängliche Genauigkeit, wie ein Vergleich mit Ergebnissen der Lagrange'schen Interpolationsformel gezeigt hat. Indem sich aber bei unseren Versuchen eine sehr geringe Variabilität des ε herausstellte, konnten wir die Interpolirung ohne Beeinträchtigung für das Resultat noch einfacher durch proportionale Abstufung der ε-Werthe entsprechend den Höhenänderungen von ε bewirken.

Von diesen Resultaten der Bestimmung von ε machen wir nun bei der Berechnung der Reizunterschiede D Gebrauch, wie sie den verschiedenen Höhen H entsprechend bei den Versuchen nach der Methode der richtigen und falschen Fälle zur Verwendung gekommen sind. Indessen benutzen wir nicht direct die nach der Methode der Minimaländerungen gefundenen Werthe, sondern berechnen die ε aus den Höhenpaaren, wie sie sich für die Gleichheitspunkte nach der Methode der richtigen und falschen Fälle ergeben haben. Wollten wir die ε jener Methode für diese benutzen, so würden wir insofern einen Fehler begehen können, als ja die Gleichheitspunkte nach beiden Methoden nicht zusammenzufallen brauchen. Nur der Sinn und die Größe der Aenderungen von ε, so nehmen wir an, werden für beide Methoden dieselben sein. Diese Annahme macht sich nöthig, weil wir nach der Methode der richtigen und falschen Fälle wegen der nöthigen Begrenzung der Versuche nur bei den Höhen $h = 20$ cm und $h = 30$ cm experimentirt haben, woraus aber noch keine Resultate über die Aenderungen von ε mit h zu gewinnen waren. Berechnen wir nun die der Methode der richtigen und falschen Fälle entsprechenden ε-Werthe, indem wir den Tabellen I—IV die Höhenwerthe H für den Gleichheitspunkt entnehmen, so ergibt sich Folgendes:

Tab. VIII.

Tabelle der ε für die Gleichheitsp. n. d. Meth. d. r. u. f. F.

P/p	h	H I ↓	H I ↑	H II ↓	H II ↑	H	ε
$^{50}/_{25}$	20	45	43	56	57	50,3	0,752
,,	30	69	70	77	80	74	0,768
$^{25}/_{12,5}$	20	45	50	60	60	54	0,695
,,	30	69	73	86	80	77	0,735

Auch die nach dieser Methode gefundenen ε-Werthe zeigen ein ähnliches Verhalten wie die früheren. Von den obigen Werthen ausgehend und unter der gemachten Annahme, dass das Verhalten der Werthe von ε auch für andere Höhen ein analoges sein werde, construiren wir nun eine ε-Tabelle. Für die Höhen $h = 20$, $h = 30$ sind die ε-Werthe die oben angegebenen durch den Versuch erhaltenen (außer für 25/12,5 und 20 cm). Für die übrigen Höhen sind die ε-Werthe festgestellt worden, indem man unter Benutzung der bei der Methode der Minimaländerungen gemachten Erfahrungen eine der Aenderung der Höhe und des Gewichtes entsprechende Aenderung der aus der Beobachtung stammenden Werthe eintreten ließ.

Tab. IX.

Tabelle der ε zur Berechnung der D.

P/p	h	H	ε	P/p	h	H	ε
50/25	10	25,8	0,731	25/12.5	10	26,5	0,711
,,	20	50,3	0,752	,,	20	52	0,725
,,	30	73,5	0.768	,,	30	77	0,735
,,	40	97,5	0,778	,,	40	100,5	0,752
,,	50	120	0,792	,,	50	123	0,770

Erwägt man, dass die Genauigkeit des Versuchsverfahrens nicht so groß ist, um die Tausendstel der ε eindeutig zu erhalten, sondern dies höchstens bezüglich der beiden ersten Decimalstellen gefordert werden kann, so erhellt, dass aus unserem interpolatorischen Verfahren für das Resultat keine Fehler erwachsen können, die sich hätten vermeiden lassen, wenn Alles auf besondere Versuche gegründet worden wäre.

Somit sind alle Mittel gewonnen, um für die verschiedenen bei der Methode der richtigen und falschen Fälle verwendeten Höhen die Werthe des Reizunterschiedes D zu berechnen. Fällt die größere Kugel P von der Höhe h, die kleinere p von der Höhe H, so ist der Reizunterschied der beiden hierdurch erzeugten Schallstärken:

$$\pm (pH^{\varepsilon_1} - Ph^{\varepsilon_2}),$$

wo das + Zeichen gilt, wenn H größer ist als diejenige Höhe, welche dem Gleichheitspunkte für h entspricht, das negative Zeichen aber im entgegengesetzten Falle anzuwenden ist. Die Werthe von ε_1 und ε_2 aber sind den Gewichten und Höhen entsprechend der obigen Tab. IX zu entnehmen. Wie das zu geschehen hat, sei an einem Beispiele gezeigt. Falle die Kugel $P = 50$ g von der Höhe 20 cm, so ist nach der

Tab. $\varepsilon = 0{,}751$; d ie Kugel $p = 25$ g aber falle von der Höhe $H = 62$ cm. Für $H = 50{,}3$ ist $\varepsilon = 0{,}751$; für $H = 73{,}5 = 0{,}768$; darum wird für $H = 62$ cm, weil mitten inneliegend zwischen 50,3 und 73,5, der Werth von $\varepsilon = 0{,}759$ sein. Der Reizunterschied D ist also in diesem Falle:

$$25 \,.\, 62^{0{,}759} - 50 \,.\, 20^{0{,}751}.$$

In Tabelle X sind die Werthe von pH^ε, Ph^ε, wie daraus folgend von D, für unsere Versuche nach der Methode der richtigen und falschen Fälle zusammengestellt. Außerdem sind die Werthe von ε, die zur Berechnung benutzt wurden, auf Grundlage der Tab. IX genauer angegeben.

Tabelle X.

Tabelle der verwendeten Schallstärken sowie ihrer Unterschiede.

$P/p = {}^{50}/_{25}$

H	ε	Ph^ε	pH^ε	D (h=20)	D (h=30)
125	0,793	(h=20)	1150	675	469
120	0,792	475	1108	633	427
115	0,791	(h=30)	1066	591	385
110	0,789	681	1025	550	344
105	0,785		965	490	284
100	0,781		912	437	231
95	0,777		859	374	178
90	0,775		817	342	136
85	0,772		772	297	91
80	0,770		730	255	49
75	0,768		688	213	7
70	0,765		644	169	—57
65	0,763		602	127	—79
60	0,759		559	84	—122
55	0,755		515	40	—166
50	0,751		474	—1	—207
45	0,747		429	—46	—252
40	0,743		387	—88	—294
35	0,739		346	—129	—335
30	0,735		304	—171	—377
25	0,731		263	—212	—428
20	0,727		221	—254	—460
15	0,723		180	—295	—511
10	0,719		138	—347	—543

$P/p = {}^{25}/_{12,5}$

H	ε	Ph^ε	pH^ε	D (h=20)	D (h=30)
130	0,779	(h=20)			
125	0,774	219	526	307	222
120	0,769	(h=30)	496	277	192
115	0,765	304	471	252	167
110	0,759		443	224	139
105	0,755		419	200	115
100	0,751		397	178	93
95	0,747		375	156	71
90	0,743		354	135	50
85	0,740		335	116	31
80	0,736		314	95	10
75	0,733		296	77	—8
70	0,731		279	60	—25
65	0,729		264	45	—40
60	0,728		246	27	—58
55	0,726		229	10	—75
50	0,724		212	—7	—92
45	0,720		195	—24	—109
40	0,717		178	—41	—126
35	0,714		160	—59	—144
30	0,710		142	—77	—162
25	0,710		123	—96	—181
20	0,707		104	—115	—200
15	0,704		84	—135	—220
10	0,701		66	—153	—238

Die Schallstärkenwerthe der nächsten Tabellen sind gefunden worden, indem man als Höhe des Gleichheitspunktes der beiden Schalle das Mittel aus den Höhen für die Gleichheitspunkte der vier Hauptfälle auffasste; darum gelten diese Werthe genau nur, wenn man in den Rechnungen die vier Hauptfälle I↓, I↑, II↓, II↑ zusammennimmt. Doch da die Abweichungen in pH^ε und Ph^ε ziemlich gering sind, wenn man die Gleichheitspunkte der einzelnen Fälle zu Grunde legt, so werden wir im Folgenden, auch bei gesonderter Berechnung der vier Hauptfälle, diese wenn auch etwas abweichenden Werthe von pH^ε und Ph^ε verwenden; hingegen ist D bei gesonderter Berechnung der vier Hauptfälle unserer Methode ebenfalls gesondert berechnet, indem hierbei für die Bestimmung des Nullwerthes von D der Werth $\frac{r'}{n} = 0{,}50$ benutzt wurde. So ist, um ein Beispiel anzuführen, für $P/p = {}^{25}/_{12,5}$, $h = 20$ I↑ bei $H = 45$ $\frac{r'}{n} = 0{,}50$; hier ist also $D = 0$ zu nehmen; der entsprechende Werth pH^ε ist aber nach Spalte I↑ 195; indem man nun zwischen den Werthen pH^ε für die übrigen Höhen und 195 die Differenzen bildet, erhält man die zu benutzenden Werthe D der Spalte I↑. Und so in allen übrigen Fällen. Wenn sich durch den Versuch $\frac{r'}{n} = 0{,}50$ nicht ergeben hat, sondern nur ein nahe dabei gelegener Werth, so ist durch Interpolation der dem Falle $\frac{r'}{n} = 0{,}50$ entsprechende Werth bestimmt und sind mit diesem die Differenzen D gebildet worden. Bei dieser Interpolation ist immer auf den allgemeinen Gang der Versuchszahlen Rücksicht genommen.

F. Werthe des Fechner'schen Präcisionsmaßes nach unsern Versuchen nach Rechnung und Construction.

1. Versuchstabellen.

In den folgenden Tabellen XI—XIV ist die nach den vier Hauptfällen der Methode gesonderte Berechnung der Werthe des Fechner'schen Präcisionsmaßes nach unseren Versuchen gegeben. Jedem Werthe h liegen 100 Einzelversuche unter. Nach dem Früheren besteht das Kriterium für die Gültigkeit der Fechner'schen Formel darin, ob der Werth von h für die verschiedenen Reizunterschiede D bei Anwendung desselben Hauptreizes constant ist. Dabei ist für D die beschränkende Bestimmung hinzuzufügen, dass der Werth desselben im Verhältniss zu dem von P klein sei.[1]

1] Es wird hoffentlich keine Schwierigkeit haben, das h in seiner Bedeutung als Präcisionsmaß zu unterscheiden von dem h in seiner Bedeutung als untere Höhe. Es schien aus verschiedenen Gründen misslich, eine dieser beiden stehend gewordenen Bezeichnungen zu ändern. Daran, dass h als Höhe immer in zweistelligen ganzen Zahlen, h als Präcisionsmaß in mehrstelligen Decimalen ausgedrückt ist, sind übrigens beide leicht kenntlich.

Tabelle XI. Werthe des Präcisionsmaßes h, berechnet nach Fechner aus Tabelle I.

$P/p = {}^{25}/_{12,5}$; $h = 20$.

H	I ↓ r'/n	I ↓ t	I ↓ pH^{ε}	I ↓ D	I ↓ h	I ↑ r'/n	I ↑ t	I ↑ D	I ↑ h
100			397			100	∞		
95			375			95	1,1631	180	0,00646
90	100	∞	354			91	0,9481	159	596
85	93	1,0436	335	135	0,00773	87	7965	140	642
80	88	0,8308	314	114	729	86	7639	119	472
75	86	7639	296	96	796	75	4769	101	441
70	78	5460	279	79	691	70	3708	84	423
65	75	4769	264	64	745	66	2917	69	424
60	69	3506	246	46	762	62	2160	51	314
55	60	1791	229	29	618	56	1068	34	628
50	58	1428	212	12	1190	50	0000	0	—
45	51	0177	195	5	354	56	1068	17	828
40	61	1975	178	22	898	65	2725	35	779
35	71	3913	160	40	978	70	3708	53	699
30	78	5460	142	58	940	73	4333	72	610
25	85	7329	123	76	967	79	5702	91	627
20	89	8673	104	96	903	87	7965	111	718
15	92	9936	84	116	856	94	1,0997	132	833
10	100	∞	63	137					
				M. W.:	0,00747			M. W. =	0,00592

H	II ↓ r'/n	II ↓ t	II ↓ D	II ↓ h	II ↑ r'/n	II ↑ t	II ↑ D	II ↑ h
105	100	∞			100	∞		
100	94	1,0994	159	0,00691	95	1,1631	151	0,00770
95	90	9062	137	661	89	8673	129	672
90	85	7329	115	637	84	7032	108	651
85	81	6208	94	660	79	5702	90	633
80	77	5224	75	697	75	4769	68	701
75	75	4769	54	883	67	3111	50	622
70	69	3506	36	974	62	2160	33	675
65	62	2160	19	1137	58	1428	18	654
60	53	0532	4	1340	50	0	0	—
55	55	0890	21	423	55	0890	17	524
50	63	2347	38	618	71	3913	34	1151
45	71	3912	55	711	77	5224	51	1024
40	76	4994	90	781	80	5951	68	814
35	84	7032	110	906	86	7639	86	888
30	90	9062	128	842	92	9936	104	955
25	92	9936	147	849	100	∞		
20	95	1,1631						
			M. W.:	0,00801			M. W. =	0,00771

Tabelle XII. Werthe des Präcisionsmaßes, berechnet nach Fechner aus Tabelle II.

$P/p = {}^{25}/_{12,5}\,;\ h = 30.$

H	I↓ r'/n	I↓ t	I↓ pH^{ε}	I↓ D	I↓ h	I↑ r'/n	I↑ t	I↑ D	I↑ h
			526						
120			496			100	∞		
115			471			95	1,1631		
110	100		443			91	0,9481		
105	97	1,3297	419	144	0,00923	85	7329	139	0,00527
100	85	0,7329	397	122	601	83	6747	117	576
95	78	5460	375	100	546	78	5460	95	575
90	74	4549	354	79	576	76	4994	74	675
85	67	3111	335	60	518	74	4594	55	827
80	67	3111	314	39	798	65	2725	34	801
75	59	1609	296	21	766	57	1247	16	779
70	52	0355	279	4	887	50	0	0	—
65	59	1609	264	11	1463	58	1428	16	892
60	63	2347	246	29	809	67	3111	34	915
55	69	3506	229	46	762	71	3913	51	767
50	73	4333	212	53	818	77	5224	68	768
45	71	3913	195	80	559	80	5951	85	767
40	75	4769	178	97	492	85	7329	102	718
35	79	5702	160	115	496	91	9481	120	790
30	89	8673	142	133	652	93	1,0436	138	756
25	91	9481	123	142	668	100			
20	93	1,0436	104	171	610				
				M. W.:	0,00669			M. W.:	0,00742

H	II↓ r'/n	II↓ t	II↓ D	II↓ h	II↑ r'/n	II↑ t	II↑ D	II↑ h
130	100	∞			97	1,3297	226	0,00888
125	96	1,2379	181	0,00684	88	0,8308	196	424
120	97	1,3297	161	826	81	6208	171	363
115	95	1,1631	136	855	79	5702	143	398
110	81	0,6208	108	575	74	4549	119	382
105	74	4549	84	555	73	4333	97	447
100	65	2725	62	439	70	3708	75	494
95	60	1791	40	448	72	4121	54	763
90	59	1609	19	847	69	3506	35	1,002
85	50	0	0	—	66	2917	14	208
80	58	1428	21	680	50	0	0	—
75	64	2535	39	650	57	1247	4	1081
70	67	3111	56	555	62	2160	21	818
65	66	2917	71	411	67	3111	36	864
60	77	5224	89	587	75	4769	54	883
55	89	8673	106	818	82	6473	71	906
50	90	9962	123	731	86	7639	88	868
45	95	1,1631	140	831	90	9062	105	863
40	98	1,4522	157	925	92	9936	122	814
35	100				95	1,1634	140	831
			M. W.:	0,00692			M. W.:	0,00589

Tabelle XIII. Werthe des Präcisionsmaßes h, berechnet nach Fechner aus Tabelle III.

$P/p = {}^{50}/_{25}$; $h = 20$.

H	I↓ $\frac{r'}{n}$	I↓ t	I↓ pH^{ε}	I↓ D	I↓ h	I↑ $\frac{r'}{n}$	I↑ t	I↑ D	I↑ h
95			889			100	∞		
90	100	∞	817			97	1,3297	397	0,00335
85	96	1,2379	772	342	0,00318	93	1,0496	352	296
80	89	0,8673	730	300	289	93	1,0496	310	337
75	84	7032	688	258	272	90	0,9062	268	338
70	81	6208	644	214	290	82	6473	224	289
65	75	4769	602	172	278	81	6208	182	341
60	72	4121	559	129	320	70	3708	139	267
55	70	3708	515	85	436	70	3708	95	412
50	61	1975	474	44	449	64	2535	54	469
45	50	0	429	0	—	56	1068	9	1187
40	65	2725	387	43	634	64	2535	33	768
35	73	4333	346	84	516	72	4121	74	557
30	83	6747	304	126	535	86	7639	116	658
25	90	9062	263	167	543	93	1,0436	157	665
20	98	1,4522	221	209	694				
15	100								
				M. W.:	0,00429			M. W.:	0,00494

H	II↓ $\frac{r'}{n}$	II↓ t	II↓ D	II↓ h	II↑ $\frac{r'}{n}$	II↑ t	II↑ D	II↑ h
					100	∞		
105	100	∞			93	1,0436	425	0,00246
100	95	1,1631	392	0,00297	90	0,9062	372	244
95	92	0,9936	369	293	88	0,8308	319	260
90	85	7329	297	247	86	7639	277	276
85	80	5951	252	236	85	7329	232	316
80	77	5224	210	249	80	5951	190	313
75	74	4549	168	271	73	4333	148	293
70	70	3708	124	299	67	3111	104	299
65	70	3708	82	452	63	2347	62	386
60	64	2535	39	650	54	0710	19	374
55	50	0	0	—	54	0710	25	284
50	66	2917	46	540	61	1915	66	243
45	65	2725	90	299	69	3506	111	316
40	72	4121	133	310	76	4994	153	326
35	79	5702	174	328	77	5224	194	269
30	86	7639	216	354	86	7639	236	324
25	95	1,1631	257	453	93	1,0436	277	377
20	100	∞			100	∞		
			M. W.:	0,00352			M. W.:	0,00291

Tabelle XIV. Werthe des Präcisionsmaßes, berechnet nach Fechner aus Tabelle IV.

$$P/p = {}^{50}/_{25}\,;\; h = 30.$$

H	I↓ r'/n	I↓ t	I↓ pH^{ε}	I↓ D	I↓ h	I↑ r'/n	I↑ t	I↑ D	I↑ h
125			1148			97	1,3297	446	0,00298
120			1107			92	0,9936	402	247
115	100	∞	1066			89	8637	365	238
110	97	1,3297	1025	365	0,00364	85	7329	312	235
105	94	1,0994	965	312	352	83	6747	259	260
100	88	0,8308	912	259	321	75	4769	217	220
95	80	5951	859	217	274	72	4121	172	240
90	76	4994	817	172	290	69	3506	130	270
85	72	4121	772	130	317	62	2160	88	245
80	62	2160	730	88	245	56	1068	44	1037
75	60	1791	688	44	407	50	0	0	—
70	53	0532	644	4	133	62	2160	41	254
65	62	2160	602	36	214	66	2917	85	910
60	65	2725	559	76	321	71	3913	126	141
55	69	3506	515	117	278	77	5224	171	196
50	74	4549	474	157	266	80	5951	213	243
45	77	5224	429	199	245	92	9936	254	346
40	85	7329	387	140	281	95	1,1631	296	432
35	87	7965	346	181	269	100	∞		
30	100	∞	304						
				M. W.:	0,00286			M. W.:	0,00294

H	II↓ r'/n	II↓ t	II↓ D	II↓ h	II↑ r'/n	II↑ t	II↑ D	II↑ h
130	100	∞			100	∞		
125	95	1,1631	464	0,00251	95	1,1631	422	0,00251
120	95	1,1631	422	276	85	0,7329	371	174
115	89	0,8673	371	234	76	0,4994	321	135
110	81	6208	321	193	72	4121	268	129
105	80	5951	268	222	65	2725	205	102
100	69	3506	205	171	65	2725	173	133
95	66	2917	173	170	62	2160	128	126
90	61	1975	128	154	60	1791	86	140
85	57	1247	86	145	59	1609	44	187
80	52	0355	44	807	50	0	0	—
75	50	0	0	—	51	0177	42	297
70	51	0177	42	421	57	1247	85	211
65	55	0890	85	1047	60	1791	129	241
60	59	1609	129	1247	67	3111	170	255
55	67	3111	170	183	73	4333	215	266
50	73	4333	215	201	79	5702	257	337
45	85	7329	257	285	89	8673	298	487
40	91	9481	298	318	98	1,4522		402
35	100	∞	340		100	∞		
			M. W.:	0,00260			M. W.:	0,00216

Die Betrachtung der obigen Tabellen zeigt statt der erwarteten Constanz des Präcisionsmaßes eine bedeutende Variabilität desselben. In der Nähe des Gleichheitspunktes sind die Werthschwankungen außerordentlich groß; meist überragen die dort auftretenden h-Werthe alle übrigen. Bekanntlich entzieht sich aber der Gleichheitspunkt dem Princip unserer Methode, da für denselben $\frac{r}{n} = 0{,}50$ ist, welchem $hD = 0$ entspricht; daher könnte man diese extremen Werthe durch den Umstand veranlasst halten, dass ebenso wie beim Gleichheitspunkt Versuche in der Nähe des Gleichheitspunktes nicht geeignet sind, brauchbare Werthe zu liefern. Aber von diesen Werthen abgesehen, hat sich auch im Uebrigen nicht die gewünschte Constanz von h ergeben. Allerdings zeigen vom Gleichheitspunkte zu oberen Höhen hin in einer mehr oder minder großen Breite des Reizunterschiedes D die Werthe von h eine gewisse Constanz. So hat man z. B. für $P/p = {}^{25}/_{12,5}$ $H = 20$ II $\uparrow$ von $H = 70$ bis $H = 95$ die Werthe des Präcisionsmaßes 675, 622, 672, 633, 633, 652 (in Hunderttausendtheilen). Aber dies sind nur Ausnahmen gegen die starken Schwankungen im Uebrigen. Diese letzteren illustriren etwa die Werthe des Präcisionsmaßes bei $P/p = {}^{25}/_{12,5}$ $h = 30$ I $\downarrow$ von $H = 70$ bis 105, welche lauten: 887, 766, 798, **518**, 576, 546, 601, **923**. Hier weicht der größte Werth 923 vom kleinsten 518 in bedeutender Weise ab. Und zieht man erst die Werthe von h für Höhen unterhalb des Gleichheitspunktes in Betracht, so sind die Schwankungen noch weit größer, wie die Zahlenwerthe 555, **411**, 587, **818** für $P/p = {}^{25}/_{12,5}$ $h = 30$ II $\downarrow$, $H = 70$ bis 55 beweisen, trotzdem dass für D die Bedingung erfüllt ist, klein gegen P zu sein. Ja oft greifen im Einzelnen die Werthe für die beiden Gewichtspaare in einander ein; das würde aber in Untersuchungen über die Unterschiedsempfindlichkeit bei Wachsthum und Abnahme der Reize zu gerade entgegengesetzten Resultaten führen, falls man letztere nur aus Versuchen bei einem einzigen D zöge.

Folgendes sind die Hauptmittel aus allen Werthen h jeder Tabelle:

P/p	Höhen h	M.-W. des Präcisionsmaßes h
${}^{25}/_{12,5}$	20	0,00727
	30	0,00674
${}^{50}/_{25}$	20	0,00391
	30	0,00216

Da das Präcisionsmaß ein Maß der Unterschiedsempfindlichkeit sein soll, so würde das in diesen Mittelwerthen ausgesprochene Verhalten eine Abnahme der Unterschiedsempfindlichkeit bei Zunahme der Reize bedeuten. Nach unserer Schallstärkenberechnung betragen die von uns verwendeten Schallstärken 219, 304, 475, 681; ihr Verhältniss ist also 1 : 1,388 : 2,169 : 3,109. Die zugehörigen Hauptmittelwerthe von h verhalten sich aber wie 1 : 0,932 : 0,541 : 0,299, d. h. mit steigenden Reizen würde die Unterschiedsempfindlichkeit abnehmen.

Dass wir diese Mittelwerthe h bei so verschiedenen D überhaupt in Rücksicht gezogen haben, kann vielleicht Bedenken erregen, allein wenn man sich erinnert, dass jede Versuchsreihe in derselben Weise begrenzt ist und immer nach jeder Seite hin ihren Abschluss da gefunden hat, wo sich lauter richtige Fälle ergaben, so sieht man, dass jenen Werthen eine für jede Versuchsreihe eigenthümliche Bedeutung zukommt.

Zieht man aber andererseits die Mittelwerthe für die vier Hauptfälle aus den 4 Tabellen in Betracht, so folgen sich dieselben in der Ordnung:

$$\mathrm{I}\downarrow : \mathrm{I}\uparrow : \mathrm{II}\downarrow : \mathrm{II}\uparrow .$$

Mit einer Ausnahme zeigt sich hier eine Abnahme von I $\downarrow$ zu folgenden Fällen. Es würde dies mit dem vorigen Resultate übereinstimmen, dass die Unterschiedsempfindlichkeit bei steigenden Reizen abnimmt; denn da für jeden folgenden Hauptfall, wie wir früher gesehen, der Gleichheitspunkt immer höher als für den vorangehenden liegt, so sind die Hauptreize P, für welche die Unterschiedsempfindlichkeit bestimmt wird, immer größer bei den folgenden Fällen.

2. Graphische Veranschaulichung der Ergebnisse.

Zu den in den beigegebenen Zeichnungen (Taf. V) enthaltenen Curven für $\frac{r'}{n}$ in ihrer Abhängigkeit von hD haben wir nicht alle Werthe der Versuchstabellen benutzt, sondern nur die eingeklammerten Werthe h und D der Tabellen XI—XIV, um ihnen entsprechend hD zu bilden, welchem bestimmte $\frac{r'}{n}$ zugehören. Wie früher erörtert worden, haben wir für h in dem Producte hD einen Mittelwerth der h für die einzelnen D's benutzt. Die benutzten Werthe liegen sämmtlich oberhalb des Gleichheitspunktes und entsprechen den Fällen, bei denen die geringsten Schwankungen des Präcisionsmaßes sich ergaben. Dadurch gestalten sich die Verhältnisse für die Vergleichung der beiden Curven — der mathematischen und der Versuchscurve — sehr günstig, indem man von dem Mittelwerthe der h den Einfluss extremer Fälle fernhält. Aus diesem Grunde sind auch die außerordentlich großen Werthe h in der Nähe des Gleichheitspunktes ausgeschlossen worden, welche wahrscheinlich nur durch eine sehr große Anzahl von Versuchsfällen und durch eine noch genauere Bestimmung der Schallstärken auf ihren wahren Werth zu bringen sind; ebenso die allzusehr abweichenden Werthe für die Fälle, wo $\frac{r'}{n} > 0{,}96$. Für die Anwendung der Methode fallen diese Werthe ebenfalls außer Betracht, da man immer die Versuche mit einem mittleren D anstellen wird. Zur sonstigen Erläuterung der Zeichnungen sei bemerkt, dass die aus der Formel resultirende Curve immer ausgezogen, die Versuchscurven aber punktirt gezeichnet sind; die üblichen Signaturen zeigen an, welchem Gewichtspaare, welcher unteren Höhe, sowie welchem Hauptfall der Methode die betreffende Curve entspricht.

Der Anblick dieser Zeichnungen lehrt nun, dass die Versuchscurven nicht mit der mathematischen zusammenfallen, wie es annähernd der Fall sein müsste; auch zeigen dieselben keine unregelmäßigen Schwankungen von einer Seite zur andern. Der Charakter ihres Verlaufs ist vielmehr der, dass im Allgemeinen für kleine Abscissenwerthe die Ordinaten der Versuchscurven größer als die der Formel entsprechenden Curven sind; die Versuchscurven überschreiten dann im Mittel bei $\frac{r'}{n} = 19$ die mathematische Curve, um unterhalb derselben zu verlaufen. Mit wachsenden Abscissen wachsen darauf die Ordinaten für eine größere Abscissenbreite nur sehr wenig bis zu einem größeren Abscissenwerthe, von welchem ab ein stärkeres Wachsthum der Ordinaten der Versuchscurven statt hat, infolge dessen die Formelcurve wieder überschritten wird. Diesen Verlauf zeigen von den 16 Curven 11 in prägnanter Weise, bei den andern finden mehr oder minder abweichende Verhältnisse statt. Aber einen derartig unregelmäßigen Verlauf, welcher auf ein Entsprechen der Versuchscurven mit den andern schließen ließe, bemerkt man nur bei zwei Curven, bei $^{25}/_{12,5}$ 20 I↓ und bei $^{50}/_{25}$ 30 I↓, allenfalls noch bei $^{50}/_{25}$ 30 I↑.

Sollte die Fechner'sche Berechnungsweise unsern Versuchen angepasst sein, so müsste anfänglich, d. h. für kleinere Reizunterschiede D, die Zahl der r' geringer sein, weiterhin aber für eine große Breite von Reizunterschieden größer, endlich aber bei größeren Reizunterschieden wiederum kleiner. Ob diese Abweichungen unserer Curven von beiden fraglichen Factoren der Fechner'schen Auffassungsweise, von der Anwendung des Gauß'schen Fehlergesetzes oder der Fechner'schen Vertheilungsweise der z, herrühren, bleibe dahingestellt. Sollte das Fehlergesetz anwendbar, die Vertheilungsweise unrichtig sein, so würden unsre Versuche darauf hindeuten, dass in der Nähe des Gleichheitspunktes zu viel zweifelhafte (Gleichheitsfälle bei unsern Versuchen) zu den richtigen zugezählt worden, dass dagegen bei größerem D mehr zweifelhafte, als Fechner dies thut, zuzurechnen seien. Die schließliche Abweichung nach oben endlich würde nicht der Vertheilung zur Last zu legen sein, sondern vielmehr der unzureichenden Zahl der Versuche.

Denn wenn die Versuchscurve congruent der andern sein sollte, so dürfte erst für einen unendlich großen Abscissenwerth, also für $D = \infty$, $\frac{r}{n} = 1{,}00$ werden; in der That aber tritt dieser Fall bei einer endlichen Anzahl von Versuchen schon bei einem endlichen D ein. Eine schließliche Abweichung nach oben wird man also bei der beschränkten Anzahl zu gewinnender Versuchszahlen stets zugestehen müssen. Jedenfalls aber, mag man die Anwendung des Fehlergesetzes oder die Vertheilungsweise für falsch halten, leuchtet aus dem Bisherigen ein, dass für unsere Versuche die Fechner'sche Vertheilungsweise unrichtig ist.

G. Werthe für den Gleichheitspunkt und die Unterschiedsschwelle nach Fechner resp. nach Müller.

Wir untersuchen hier, inwieweit eine aus den Formeln gezogene Consequenz nach unsern Versuchen sich bestätigt. Der zu Grunde liegende Gedanke ist S. 421 u. f. auseinandergesetzt worden. In folgender Tabelle XV sind einmal die Werthe des Ausdrucks $\frac{D_2 \alpha - D_1 \beta}{\alpha - \beta}$ angegeben. Sollten die Fechner'schen Formeln richtig sein, so müsste dieser Ausdruck immer gleich Null sein. Dann aber sind die

Werthe der Unterschiedsschwelle S angegeben, wie sich dieselbe aus Versuchen bei zwei verschiedenen Reizdifferenzen D berechnet hat. Zu diesen Tabellen sind nicht alle Versuchszahlen, sondern nur diejenigen verwendet worden, welche schon bei den früheren Zeichnungen Verwendung gefunden haben. Es genügen dieselben für unsre Zwecke, die übrigen nicht benutzten Zahlen liefern gleiche Resultate.

Fassen wir zunächst die aus der Fechner'schen Berechnungsweise resultirenden Tabellen ins Auge (S. 457), so ersieht man, wie nur wenige der Zahlen der Columne $\frac{D_2\alpha - D_1\beta}{\alpha - \beta}$ der Forderung genügen, Null oder nahe Null zu sein; vielmehr sind die in dieser Columne enthaltenen Abweichungen recht bedeutend. Es finden sich sowohl positive wie negative Abweichungen, aber vergleicht man die Summe aller positiven Abweichungen mit derjenigen aller negativen in Bezug auf die Versuchszahlen aus den einzelnen Gewichten bei den verschiedenen Höhen, so findet man folgende Zahlen:

P_1/P_0	h	Σ + Abweichungen	Σ — Abweichungen
$^{25}/_{12,5}$	20	261,11	298,07
	30	430,49	1251,19
$^{50}/_{25}$	20	254,27	1197,63
	30	747,85	569,40

Es überwiegen demnach die negativen Abweichungen; für alle Gewichtspaare und Höhen hat man in Summa für die positiven Abweichungen die Zahl 1713,72, für die negativen 3316,24; also kommen von allen Abweichungen nur 34 % auf die positiven, 66 % aber auf die negativen. Dieser einseitige Charakter der Abweichungen weist darauf hin, dass die Fechner'schen Formeln nicht gültig sind. Gleichgroße Abweichungen nach beiden Seiten hätte man den Fehlervorgängen zuschreiben müssen; aber so constant nach einer Seite hin auftretende Abweichungen können nur von der Anwendung einer falschen Formel herrühren. Um über die Größe dieser Abweichungen eine deutliche Vorstellung zu gewinnen, haben wir dieselben zu den Reizgrößen in Beziehung gesetzt, welche dem Gleichheitspunkte entsprechen. Nennen wir die Abweichungen vom Gleichheitspunkte Δ_g, die Reizstärke für den Gleichheitspunkt R_g, so gibt der Quotient $\frac{\Delta_g}{R_g}$ an, welchen Theil von R die Abweichung beträgt

Tabelle XV. Werthe von $\frac{D_2\alpha - D_1\beta}{\alpha - \beta}$ nach Fechner.

$P/p = {}^{25}/_{12,5}$; $h = 20$.

Fall-höhen.	D_1	D_2	α	β	$\frac{D_2\alpha - D_1\beta}{\alpha - \beta}$
			I ↓		
75 85	96	135	0,7639	0,1791	— 10,43
70 80	79	114	5460	3506	— 11,94
65 75	64	96	4769	4769	+ 10,81
60 70	46	79	3506	5460	— 13,39
55 65	29	64	1791	7639	+ 7,98
50 60	12	46	1428	8308	— 11,36
45 55	5	29	0177	1,0436	+ 2,31
			I ↑		
85 95	140	180	0,796	1,163	+ 25,99
80 90	119	159	764	948	— 48,58
75 85	101	140	477	796	+ 42,66
70 80	84	119	371	764	+ 50,96
65 75	69	101	292	477	+ 18,49
60 70	51	84	216	371	+ 5,00
55 65	34	69	101	292	+ 15,47
50 60	17	51	107	216	— 16,38
			II ↓		
90100	115	159	0,733	1,099	+ 26,88
85 95	94	137	621	906	+ 0,31
80 90	75	115	522	733	— 23,95
75 85	54	94	477	621	— 73,64
70 80	36	75	351	522	— 48,38
65 75	79	54	216	477	— 9,96
60 70	4	36	053	357	— 1,57
			II ↑		
90 80	111	155	0,703	1,163	+ 43,76
85 75	90	133	570	867	+ 7,47
80 70	71	111	477	703	— 13,42
75 65	50	90	311	570	+ 3,20
70 60	32	71	216	477	— 0,27
65 55	15	50	143	311	— 14,80

$P/p = {}^{25}/_{12,5}$; $h = 30$.

Fall-höhen.	D_1	D_2	α	β	$\frac{D_2\alpha - D_1\beta}{\alpha - \beta}$
			I ↓		
90 100	79	122	0,455	0,733	+ 8,59
80 90	39	79	311	455	— 47,39
70 80	4	39	035	311	— 0,44
			I ↑		
95 105	95	139	0,546	0,733	— 33,41
85 95	55	95	455	546	—145,00
75 85	16	55	125	455	+ 2,89
			II ↓		
110 100	108	161	0,621	1,329	— 60,47
100 90	62	108	0,272	0,621	+ 26,14
90 80	19	62	0,161	0,272	— 43,36
			II ↑		
115 125	143	196	0,570	0,831	+412,87
105 115	97	143	433	570	— 48,38
95 105	54	97	412	433	—789,61
85 95	14	54	292	412	— 83,33

$P/p = {}^{50}/_{25}$; $h = 20$.

Fall-höhen.	D_1	D_2	α	β	$\frac{D_2\alpha - D_1\beta}{\alpha - \beta}$
			I ↓		
70 80	214	300	0,621	0,867	— 3,09
60 70	129	214	412	621	— 38,56
50 60	44	129	197	412	— 32,95
			I ↑		
80 90	310	397	1,044	1,330	— 7,58
70 80	224	310	0,647	1,044	+ 83,84
60 70	139	224	0,371	0,645	+ 23,90
50 60	54	139	0,253	0,371	—136,72
			II ↓		
85 95	252	339	0,595	0,994	+119,75
75 85	168	252	455	595	—105,00
65 75	82	168	371	455	—297,82
			II ↑		
95 105	319	425	0,831	1,033	—117,06
85 95	232	319	0,733	0,831	—418,72
75 85	148	232	0,433	0,733	+ 26,78
65 75	62	148	0,235	0,433	— 40,07

Werthe $\frac{D_2\alpha - D_1\beta}{\alpha - \beta}$
nach Fechner.
$P/p = {}^{50}/_{25}$; $h = 30$.

Fall-	höhen.	D_1	D_2	α	β	$\frac{D_2\alpha - D_1\beta}{\alpha - \beta}$
			I↓			
95	85	217	312	0,595	1,099	+104,84
85	75	130	217	412	595	—121,84
75	65	44	130	179	412	— 22,86
			I↑			
110	120	365	446	0,865	1,330	—215,85
100	110	259	365	675	867	—113,65
90	100	172	259	412	675	+ 31,90
80	90	88	172	216	412	— 4,57
			II↓			
115	105	371	464	0,867	1,163	+ 98,59
105	95	268	371	595	867	+ 41,06
95	85	173	268	292	595	+ 82,10
85	75	86	173	125	292	+ 20,87
			II↑			
115	105	371	464	0,733	1,163	+212,69
105	95	268	371	412	733	+135,80
95	85	173	268	272	412	— 10,77
85	75	81	173	179	272	— 70,70

Werthe $S = \frac{D_2\alpha - D_1\beta}{\alpha - \beta}$
nach Müller.
$P/p = {}^{25}/_{12,5}$; $h = 20$.

Fall-	höhen.	D_1	D_2	α	β	$\frac{D_2\alpha - D_1\beta}{\alpha - \beta}$
			I↓			
75	85	96	135	0,433	0,764	+ 44,98
70	80	79	114	107	522	+ 69,97
65	75	64	96	0,000	433	+ 64,00
60	70	46	79	216	107	+152,00
55	65	29	64	570	0,000	+ 64,00
50	60	12	46	546	216	+ 68,25
45	55	—5	29	958	570	+ 78,94
			I↑			
85	95	140	180	0,455	0,906	+ 99,64
80	90	119	159	412	703	+ 62,37
75	85	101	140	006	455	+101,00
70	80	84	119	161	412	+ 61,13
65	75	69	101	292	0,000	+101,0
60	70	51	84	331	161	+115,2
55	65	34	69	546	292	+109,2
50	60	17	51	796	331	+ 75,04
			II↓			
90	100	115	159	0,371	0,831	+ 35,97
85	95	94	137	216	647	+ 72,43
80	90	75	115	071	371	+ 53,13
75	85	54	94	017	216	+ 50,58
70	80	36	75	216	071	+ 94,07
65	75	19	54	455	017	+ 57,63
60	70	4	36	831	216	+ 47,20
			II↑			
90	100	111	155	0,331	0,906	+ 85,65
85	95	90	133	0,179	595	+ 71,77
80	90	71	111	017	331	+ 68,82
75	85	50	90	292	179	+153,4
70	80	32	71	455	017	+ 72,50
65	75	15	50	703	292	+ 74,87

oder wie groß der Fehler ist, welcher in Bestimmung des Gleichheitspunktes bezogen auf den Reiz R begangen worden ist. Für das Gewichtspaar ${}^{25}/_{12,5}$ und $h = 20$ haben wir diese Quotienten berechnet und in folgender Tabelle XVI zusammenstellt.

Tab. XVI.

$\frac{\Delta g}{R g}$ für $P/p = {}^{25}/_{12{,}5}$; $h = 20$ cm.

I↓	I↑	II↓	II↑
$-\frac{1}{21}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{5}$
$-\frac{1}{19}$	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{706}$	$+\frac{1}{29}$
$+\frac{1}{20}$	$+\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{16}$
$-\frac{1}{16}$	$+\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2{,}9}$	$+\frac{1}{68}$
$+\frac{1}{27}$	$+\frac{1}{11}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{811}$
$-\frac{1}{19}$	$+\frac{1}{43}$	$-\frac{1}{21}$	$-\frac{1}{14}$
$+\frac{1}{102}$	$+\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{138}$	
	$-\frac{1}{13}$		

So gefasst, sind von den 28 Werthen dieser Tabelle 10 kleiner als $^1/_{20}$, 9 liegen zwischen $^1/_{20}$ und $^1/_{10}$, 5 zwischen $^1/_{10}$ und $^1/_4$ und 4 zwischen $^1/_4$ und $^1/_2$ oder mit andern Worten: in 35 % der Fälle betrug der Fehler in Bestimmung der Reizstärke für den Gleichheitspunkt weniger als 5 % derselben, in weiteren 33 % schwankte er von 5 % bis 10 %, in 18 % berechnete sich der Gleichheitspunkt mit einem Fehler von 10 % bis 25 %, über 25 % betrug dieser Fehler in 14 % der Fälle. Berücksichtigt man, dass die Unterschiedsschwelle nach unserer Schallstärkenberechnung für das obige Gewichtspaar und die Höhe $h = 20$ im Mittel 71 beträgt oder, da $R_g = 219$ ist, dass dieselbe gleich $\frac{1}{3} R_g$ ist, so lehrt obige Tabelle, dass die Fehler in der Bestimmung von R_g in einigen Fällen die Größe der Unterschiedsschwelle erreichen und übersteigen, d. h. $\frac{\Delta_g}{R_g}$ beträgt $^1/_3$ und darüber. Anstatt also durch unsere Berechnung den wirklichen Gleichheitspunkt zu finden, kommt man auf den Ebenmerklichkeitspunkt, der ja der Schwelle entspricht. Dieser Erfolg bedeutet aber, dass die Fechner'schen Formeln nicht brauchbar sind; denn obwohl in unseren Versuchen vereinzelte Fälle eintraten, wo trotz Vermehrung von D die Zahlen r dieselben blieben oder sich gar verminderten, was ebenfalls die genannten Abweichungen mitbedingt, so unterschieden sich doch immer die in der Nähe des Gleichheitspunktes auftretenden Zahlen von den in der Nähe des Ebenmerklichkeitspunktes liegenden und griffen nicht derart in einander über, dass man einmal hätte geneigt sein können, den Ebenmerklichkeitspunkt mit dem Gleichheitspunkt zusammenfallen zu lassen. Wenn aber sich nach unsern Rechnungen statt des Gleichheitspunktes der Ebenmerklichkeitspunkt ergibt, so kann dies nur an den Fechner'schen Formeln, nicht an den Versuchszahlen liegen. Zum mindesten steht fest, dass die rechnungsweise Verwendung der Versuche für nur zwei verschiedene D's, und damit zusammenhängend, wie Fechner es thut, für nur ein D, fehlerhaftere Resultate liefert, als wenn man direct aus den Versuchen für eine größere Anzahl D's Schlüsse zieht, d. h. den Ebenmerklichkeitspunkt und damit die Unterschiedsschwelle bestimmt.

Welches Resultat liefert aber unsre auf die Müller'sche Formel gegründete Berechnung der Unterschiedsschwelle?

Was die Mittelwerthe von S für die vier Zeitfolgen betrifft, so sind dieselben nach der Tabelle, welche für $P/p = {}^{25}/_{12{,}5}$, $h = 20$ berechnet worden, folgende: Für

$$\mathrm{I}\downarrow : S = 78; \quad \mathrm{II}\downarrow : S = 59$$
$$\mathrm{I}\uparrow : S = 94; \quad \mathrm{II}\uparrow : S = 88,$$

während sie sich nach unsern Versuchen unter mehrfacher Bestimmung zu 64 resp. 104, 54, 71 ergeben haben; das Hauptmittel dieser Werthe ist also nach der Berechnung 79,7, das nach dem Versuch 71,4. Obwohl diese Zahlen bei der zu Grunde liegenden nicht ganz exacten Schallstärkenberechnung als fast übereinstimmend betrachtet werden dürfen und demnach dieselben für die Gültigkeit der Müller'schen Formeln sprechen würden, so weichen doch die Werthe von S im Einzelnen stark von dem wahren Werthe ab, wie die folgende Tabelle zeigt. Diese enthält die Differenzen der nach der Formel berechneten und der mittelst des Versuchs direct bestimmten Unterschiedsschwelle $S_r - S_v$; außerdem sind, um eine deutliche Vorstellung von der Größe der Abweichungen zu erhalten, diese Differenzen in Beziehung zu dem durch den Versuch bestimmten Schwellenwerth gesetzt.

Tabelle XVII.

Werthe $S_r - S_v$ und $\frac{S_r - S_v}{S_v}$.

$S_r - S_v$	$\frac{S_r - S_v}{S_v}$	$S_r - S_v$	$\frac{S_r - S_v}{S_v}$	$S_r - S_v$	$\frac{S_r - S_v}{S_v}$	$S_r - S_v$	$\frac{S_r - S_v}{S_v}$
I ↓		I ↑		II ↓		II ↑	
$-19{,}02$	$-\frac{1}{3{,}36}$	$-1{,}36$	$-\frac{1}{74{,}26}$	$+18{,}03$	$+\frac{1}{2{,}99}$	$-14{,}65$	$-\frac{1}{4{,}85}$
$+5{,}97$	$+\frac{1}{10{,}7}$	$-49{,}63$	$-\frac{1}{2{,}35}$	$-18{,}43$	$-\frac{1}{2{,}93}$	$-0{,}77$	$-\frac{1}{0{,}92}$
$0{,}00$	0	$0{,}00$	0	$+0{,}87$	$+\frac{1}{62{,}07}$	$+2{,}18$	$+\frac{1}{32{,}57}$
$+88{,}00$	$+\frac{1}{0{,}73}$	$-49{,}87$	$-\frac{1}{2{,}02}$	$+3{,}42$	$+\frac{1}{15{,}79}$	$-82{,}40$	$-\frac{1}{0{,}86}$
$0{,}00$	0	$+31{,}80$	$+\frac{1}{3{,}18}$	$-50{,}07$	$-\frac{1}{1{,}07}$	$-1{,}50$	$-\frac{1}{47{,}33}$
$-4{,}25$	$-\frac{1}{15{,}06}$	$+14{,}20$	$+\frac{1}{7{,}11}$	$-3{,}63$	$-\frac{1}{14{,}87}$	$-3{,}87$	$-\frac{1}{18{,}34}$
$-18{,}90$	$-\frac{1}{3{,}39}$	$+8{,}20$	$+\frac{1}{12{,}32}$	$+6{,}80$	$+\frac{1}{7{,}94}$		
		$-25{,}94$	$-\frac{1}{3{,}89}$				

Fasst man die Abweichungen $S_r - S_v$ ihrem Vorzeichen nach in's Auge, so erhält man für die vier Hauptfälle:

	$\Sigma + \Delta$	$\Sigma - \Delta$
I ↓	93,97	42,17
I ↑	54,20	126,80
II ↓	29,12	73,13
II ↑	2,18	103,19

woraus ersichtlich ist, dass wiederum, wie bei den Fechner'schen Formeln, die Summe der negativen Abweichungen größer ist als die der positiven; für alle vier Hauptfälle insgesammt hat man für die + und —Abweichungen

179,47 und 345,29

d. i. fast eine doppelt so große Summe für die negativen Abweichungen. Demnach stellen unsere Versuche auch die Gültigkeit der Müller'schen Formel in Frage; sollte dieselbe gelten, so müssten die sich ergebenden Abweichungen des durch die Rechnung und des durch den Versuch gefundenen Schwellenwerthes gleich stark nach positiver und negativer Seite vertheilt sein. Aber da sich vielmehr eine bedeutende Abweichung nach einer Seite hin zeigt, für welche keine andere Erklärung von uns gefunden werden konnte, wird durch diese Ergebnisse auch die Gültigkeit der Müller'schen Formel verneint.

Sieht man übrigens zu, welche Größe die Abweichungen des berechneten Schwellenwerthes in Bezug auf den durch den Versuch festgestellten besitzen, so kommen in 10,8 % von Fällen Abweichungen von der Größe 0 % des Schwellenwerthes, in weiteren 10,8 % von Fällen solche zwischen 5 und 10 %, in 10,8 % solche von 10—25 % des Schwellenwerthes vor, ferner in 28,8 % hat man Abweichungen von 25—50 % und in 14,4 % sind die Abweichungen sogar noch größer. Solche bedeutende Differenzen können nicht dem schwankenden Charakter der Versuchszahlen allein zugeschrieben werden, sondern haben sicher zum Theil ihren Grund in den fehlerhaften Voraussetzungen der Rechnungen. Denn, welche ungefähren Schwankungen bei der Bestimmung des Schwellenwerthes eintreten, haben wir durch unsere Versuche kennen gelernt; wenn wir auf Höhen Bezug nehmen, von welchen man die obere Kugel fallen ließ, so gingen die Schwankungen bei mehrfacher Bestimmung des Schwellenwerthes über eine Breite von 10 cm nicht hinaus; wenn aber die obigen Rechnungen Werthe von S liefern, die um mehr als 50 % des durch den Versuch gefundenen Schwellenwerthes sich von demselben unterscheiden, so entspricht das einer weit größeren Aenderung der Fallhöhen der kleineren Kugel. Das Gleiche, wie für die dem Verhältnisse $\frac{r}{n} = 0,50$ entsprechenden Höhen, wird für die einem andern Verhältnisse $\frac{r}{n}$ entsprechenden gelten; auch hier wird das Intervall von Höhen, in denen ein bestimmtes $\frac{r}{n}$ vorkommen kann, ein eng begrenztes sein; so bedeutende Unterschiede des aus den erhaltenen $\frac{r}{n}$ berechneten Schwellenwerthes könnten nur, falls die Versuchszahlen allein dazu Anlass gegeben haben sollten, von einem weit größeren Spielraum von Höhen für dasselbe $\frac{r}{n}$ bedingt sein, als ihn die thatsächliche Beobachtung kennen gelehrt hat. Diese Gründe sprechen sehr dafür, dass die Müller'sche Formel zur Repräsentation der bei unseren Versuchen in Frage kommenden Verhältnisse nicht geeignet ist.

Dass sie, abgesehen von der Gültigkeit, nicht unmittelbar so brauchbar ist, wie Müller angegeben, geht aus unseren ersten Versuchen hervor, bei denen sich nur selten falsche Fälle ergaben, was, wie schon erwähnt, ein unendlich großes t_{II} und damit die Unmöglichkeit der Schwellenbestimmung nach sich zieht. Damit schien die Beachtung der Müller'schen Formel für unsere Versuche überflüssig. Aber mit der erläuterten Modification war die Hoffnung gegeben, doch noch in derselben einen brauchbaren Mechanismus zu besitzen. Die Untersuchung hat das Gegentheil gelehrt.

H. Vorschlag zu einer geänderten Verwendungsweise d. M. d. r. u. f. F.

Es bleibt nun in Bezug auf unser Schallgebiet nur noch die Frage übrig, ob nach diesen Ergebnissen die Methode der richtigen und falschen Fälle für die Psychophysik werthlos ist, oder ob sie sich nicht in anderer Weise benutzen lasse, um ein Maß der Unterschiedsempfindlichkeit zu gewinnen. Diese Frage ist nach unserer Ansicht in letzterem Sinne zu bejahen. Denn da unsere früheren Betrachtungen über die Gleichheits- und Ebenmerklichkeitspunkte ergeben haben, dass in den Versuchszahlen eine bestimmte Gesetzmäßigkeit sich ausspricht, so muss wohl auch eine zweckmäßige Verwendung derselben über die gesetzmäßigen Verhältnisse von Empfindung und Reiz Aufschluss geben können. Eine solche Verwendungsweise scheint uns die zu sein, dass man sich auf den principiellen Standpunkt Fechner's stellt und verfährt, wie im Folgenden auseinandergesetzt ist.

Bekanntlich ist allgemein die Unterschiedsempfindlichkeit der Größe desjenigen Reizunterschiedes reciprok zu setzen, der in den zu vergleichenden Fällen dasselbe Resultat liefert, in Bezug auf unsere Methode der Größe desjenigen Reizunterschiedes, welcher dieselben Zahlen r, f, z, g liefert. Darnach hat man, wie schon früher erwähnt, durch den Versuch jene Reizunterschiede festzustellen, welche in den zu vergleichenden Fällen dieselben r, f, z, g oder, was dasselbe ist, das gleiche Verhältniss $\frac{r'}{n}$ liefern. Den Weitläufigkeiten, die sich der directen Durchführung dieser Aufgabe entgegenstellen, zu entgehen, ersann Fechner seine Formeln, die nur Versuche bei einem einzigen D erfordern. Leider haben diese Formeln sich als untriftig erwiesen; ihre Verwendung führt zu größeren Fehlern, als die directe Benutzung der Versuchsreihen, die für verschiedene D gewonnen worden sind. Gleiches gilt für die Müller'sche Formel. Darum bleibt, solange man nicht die Function kennt, welche die Abhängigkeit zwischen $\frac{r}{n}$ und D darstellt, nichts anderes übrig, als den sichern, wenn auch etwas weitläufigen Weg einzuschlagen, dass man die den gleichen $\frac{r}{n}$ entsprechenden D's direct aufsucht. — Obwohl nun theoretisch jedes beliebige $\frac{r}{n}$ gleich geeignet zum Maß der Unterschiedsempfindlichkeit ist, so möchten wir doch das Verhältniss $\frac{r'}{n} = \frac{r + \frac{z}{2}}{n} = \frac{1}{2}$ allen übrigen vorziehen. Denn dasselbe entspricht dem Schwellenwerthe, der ja die Grenzscheide zwischen über- und untermerklichen Reizunterschieden bildet, also da liegt, wo in der einen Hälfte der Fälle der Unterschied nach der einen Seite der Empfindung fällt und die Fälle $r + \frac{z}{2}$ liefert, in der andern Hälfte der Fälle sich nach der andern Seite geltend macht, wodurch die Fälle $g + f + \frac{z}{2}$ erwachsen; in Folge dessen hat man in denjenigen D's, welche $\frac{r'}{n} = \frac{1}{2}$ ergeben, zugleich die Werthe gefunden, welche auch bei der Methode der eben merklichen Unterschiede zum Maß der Unterschiedsempfindlichkeit dienen. Eine Vergleichung beider Methoden ist hiermit möglich gemacht.

In Rücksicht auf diese Bemerkungen wird sich das einzuschlagende Versuchsverfahren so stellen: Man ermittelt zunächst in angenäherter Weise den Schwellenwerth, welchen man am ehesten nach der Methode der eben merklichen Unterschiede wird bestimmen können; mit einem D, welches dem Werthe desselben entspricht, führe man dann Versuche nach der Methode der richtigen und falschen Fälle aus; hierauf mit den Reizunterschieden $\frac{m-1}{m} D$, $\frac{m-2}{m} D \ldots$, $\frac{m+1}{m} D$, $\frac{m+2}{m} D \ldots$ (m eine beliebige ganze Zahl); dies wird Verhältnisse $\frac{r'}{n}$ unter- und oberhalb 0,50 liefern, woraus man nun durch geeignete Interpolation dasjenige D wird gewinnen können, welches $\frac{r'}{n} = 0{,}50$ entspricht. Zur Interpolation kann man mit Nutzen die Lagrange'sche Interpolationsformel verwenden; was aber Schallversuche anbelangt, wird man sich mit hinreichender Genauigkeit des graphischen Verfahrens bedienen können, indem man die Reizunterschiede D als Abscissen, die bei ihnen erhaltenen $\frac{r'}{n}$ als Ordinaten aufträgt. Die Ordinate $\frac{r'}{n} = 0{,}50$ der durch Verbindung der Ordinatenendpunkte entstehenden Curve ist das dem Unterschiedsschwellenwerthe entsprechende D.

Durch dieses Verfahren, das wir als combinirte Methode bezeichnen wollen, entledigt man sich aller Voraussetzungen, welche zu den betrachteten Formeln nöthig, und gewinnt Resultate, die keinem Zweifel unterworfen sind.

I. Vergleichung der Methode der richtigen und falschen Fälle mit der Methode der Minimaländerungen.

Auf S. 423 haben wir zu weiterer Prüfung der Müller'schen Formel noch Versuche in Aussicht gestellt, bei denen die Größe des Reizunterschiedes D gleich dem Unterschiedsschwellenwerthe ist. Es sollte dadurch die der Müller'schen Formel entsprechende und auch aus anderweiten Gründen einleuchtende Beziehung geprüft werden, dass für $D = S$ $\frac{r'}{n} = \frac{r + \frac{z}{2}}{n} = \frac{1}{2}$ werde. Offenbar muss ja die Anzahl der Fälle, in denen durch die zufälligen Fehlervorgänge eine Vergrößerung des Reizunterschiedes D stattfindet, eben so groß sein, wie die Zahl der Fälle, in denen eine Verminderung erfolgt. Indem aber der Schwellenwerth die Scheidegrenze zwischen unter- und übermerklichen Reizunterschieden darstellt, werden sich bei der Vergrößerung des D durch die Fehlervorgänge die richtigen, durch die Verminderung und scheinbare Umkehrung des Unterschieds der beiden Reize P und $P + D$ die Gleichheitsfälle und falschen Fälle ergeben. Die zweifelhaften Fälle aber, weil entstanden durch mangelnde Aufmerksamkeit und mangelhafte Versuchseinrichtungen, die darum unabhängig von der Größe des D sind, werden zur Hälfte den richtigen, zur Hälfte den übrigen Fällen zuzuzählen sein.

Wenn nun die in dieser Richtung angestellten Versuche die Beziehung $\frac{r'}{n} = \frac{1}{2}$ bestätigen sollten, so ist damit zn Gunsten der Müller'schen Formeln nichts weiter gesagt, als dass einer ihrer Ausgangspunkte ein richtiger ist; bei allen Versuchen, die hier in Frage kommenden Verhältnisse durch eine Formel zu repräsentiren, würde man es so einzurichten haben, dass für $D = S \frac{r'}{n} = \frac{1}{2}$ wird. Im Uebrigen sollen diese Versuche eine Vergleichung der beiden Methoden, der Methode der richtigen und falschen Fälle und der Methode der Minimaländerungen, ohne Rücksicht auf die Müller'sche Formel gewähren. — Die folgende Tabelle gibt das Resultat dieser Versuche; die Bezeichnungen P/p und h sind dieselben wie früher. Darnach bedeutet H_{0_1} diejenige Höhe, von welcher unter Einhaltung der ersten Zeitfolge die kleinere Kugel fiel, um einen eben merklichen Empfindungsunterschied hervorzubringen. Genau ist die Höhe H_{0_1} ein Mittelwerth, gewonnen aus zwei Höhen, H'_{0_1} und H''_{0}, von denen die erste dadurch gewonnen wurde, dass man, von der Gleichheit der beiden Schalle ausgehend, die Fallhöhe H der kleineren Kugel bis auf eine Höhe H'_{0_1} vergrößerte, bei welcher der Schall der kleineren Kugel der stärkere war, und darauf wieder bis zu einer Höhe H''_{01} zurückging, für welche die beiden Schalle gleich stark erschienen; ganz analog sind die übrigen Bezeichnungen zu deuten. Für die obere und untere Unterschiedsschwelle haben wir die Zahlen r, f, g, z besonders gruppirt. Wir haben diese Versuche doppelseitig angestellt, sodass die erste der beiden folgenden Tabellen den Urtheilen des Herrn Merkel entspricht, die andere den meinigen. Die Ergebnisse sind befriedigende; die Summenzahlen der verschiedenen Arten von Fällen für alle Gewichtspaare sowie die zugehörigen Procentzahlen der r, f, g, z sind aus den Tabellen selbst zu ersehen.

Tabelle XVIII.

Versuche nach der Methode d. r. u. f. Fälle für $D = S$.

Reagirender: Merkel.

P/p	h	H_{o_2}	H_{o_1}	r	f	z	g	H_{u_1}	H_{u_2}	r	f	z	g
200/100	20	80,5		22	—	4	24	30		19	—	2	29
	„		57,5	24	—	4	22		38	22	—	4	24
	30	118		19	—	6	25	43		20	—	2	28
	„		80	24	—	2	24		63	19	—	6	25
100/50	20	85		19	—	11	20	31		23	—	7	20
	„		55	22	1	9	18		39	18	1	13	18
	30	122		17	—	11	22	35		25	—	4	21
	„		75	28	—	1	21		69	21	—	9	20
50/25	20	83,5		19	2	9	20	32		22	3	9	16
	„		56,5	22	3	9	16		36	26	1	5	18
	30	118		22	—	9	19	43		18	1	12	19
	„		82	20	—	13	17		67	22	2	7	19
25/12,5	20	86		20	—	7	23	33		20	—	7	23
	„		60,5	15	6	8	21		43	23	—	1	26
	30	117		20	4	8	18	53		19	—	12	19
	„		87	19	—	12	19		60	22	—	5	23
12,5/6,25	20	85		22	2	4	22	31,5		18	—	2	30
	„		65	21	—	3	26		50	21	2	2	25
	30	108,5		21	1	7	21	44		19	—	6	25
	„		96,5	27	—	2	21		62	22	—	—	28
6,25/3,125	20	89		23	—	2	25	30		22	—	4	24
	„		65,5	24	—	—	26		46	20	3	13	14
	30	116		20	3	13	14	42,5		21	—	7	22
	„		90	24	—	3	23		69	27	—	1	22

514. 22. 157. 507. 509. 13. 140. 538.

% : 42,83. 1,59. 13,08. 42,25. % : 42,33.1,08.11,67.44,92.

$$\frac{r'}{n} = \frac{r + \frac{z}{2}}{n} = \begin{cases} 42,83 \\ + 6,04 \end{cases} = 48,87. \quad \frac{r'}{n} = \frac{r + \frac{z}{2}}{n} = \begin{cases} 42,33 \\ + 5,83 \end{cases} = 48,16.$$

Tabelle XIX.

Versuche nach der Methode d. r. u. f. Fälle für $D = S$.

Reagirender: Lorenz.

P/p	h		r	f	z	g		r	f	z	g
$^{200}/_{100}$	20		16	—	11	23		18	2	12	18
	„		19	1	12	18		22	—	9	19
	30		14	2	11	23		15	3	9	23
	„		28	—	5	17		22	1	9	18
$^{100}/_{50}$	20		17	1	9	23		15	4	17	15
	„		20	—	15	15		21	3	9	17
	30		18	4	9	19		15	—	16	19
	„		19	—	13	18		23	1	8	17
$^{50}/_{25}$	20		19	2	4	25		18	2	5	25
	„		23	—	13	14		23	1	7	19
	30		18	1	7	24		19	—	13	18
	„		19	1	7	23		22	—	7	21
$^{25}/_{12,5}$	20		17	2	14	17		16	5	11	18
	„		19	1	13	17		22	2	9	17
	30		18	1	7	24		25	2	4	19
	„		26	2	7	15		24	—	10	16
$^{12,5}/_{6,25}$	20		23	1	3	23		17	—	6	27
	„		19	1	5	25		18	1	6	25
	30		13	1	9	27		17	1	8	24
	„		24	1	3	22		13	—	7	30
$^{6,25}/_{3,125}$	20		29	—	2	19		15	1	5	29
	„		23	—	3	24		17	—	4	29
	30		14	—	6	30		20	—	4	26
	„		24	—	2	24		16	1	8	25
			479.	22.	190.	509.		453.	30.	203.	514.

%: 39,92.1,82.15,84.42,42. 37,75.2,50.16,92.42,82.

$$\frac{r'}{n} = \frac{r + \frac{z}{2}}{n} = \begin{cases} 39,92 \\ + 7,92 \end{cases} = 47,84\%. \qquad \frac{r'}{n} = \begin{cases} 37,75 \\ + 8,92 \end{cases} = 46,67\%.$$

Was die Beziehung $\frac{r'}{n} = \frac{r + \frac{z}{2}}{n} = \frac{1}{2}$ anlangt, so hat sich ergeben:

für Merkel in Bezug auf die obere Unterschiedsschwelle $\frac{r'}{n} = 48{,}87$

„ „ „ „ „ „ untere „ $\frac{r'}{n} = 48{,}16$

„ Lorenz „ „ „ „ obere „ $\frac{r'}{n} = 47{,}84$

„ „ „ „ „ „ untere „ $\frac{r'}{n} = 46{,}67$

Die Merkel'schen Zahlen erreichen hiernach nahe den gewünschten Werth; bei mir hingegen bleibt $\frac{r'}{n}$ weiter unter 0,50. Diese Abweichung hat vielleicht ihren Grund darin, dass den Merkel'schen Versuchen nochmalige Bestimmungen von H_0 und H_u zu Grunde liegen, die zum Zweck der Bestätigung des Weber'schen Gesetzes ausgeführt wurden, während die zu meinen Versuchen benutzten H's nur von einer einmaligen Bestimmung herrührten. Zum Theil kann dieser Unterschied aber auch darin begründet sein, dass die Beurtheilung meinerseits eine weniger gute als die Merkel'sche gewesen ist, weil bei mir sich mehr zweifelhafte Fälle ergeben haben: 16,66 % resp. 16,99 % gegenüber 13,08 resp. 11,67 %. Es dürften bei dieser Beurtheilungsweise die richtigen Fälle zu kurz weggekommen sein. Dass meine Beurtheilungsweise eine weniger gute war, geht auch daraus hervor, dass sich mit fortschreitender Uebung die zweifelhaften Fälle verringerten. In den obigen Versuchsreihen beträgt die Anzahl derselben immer über 11 %; diese Versuche waren aber die ersten von uns nach der Methode der richtigen und falschen Fälle ausgeführten; die späteren Versuche, welche in den Tabellen I—IV angeführt sind, haben weit weniger zweifelhafte Fälle ergeben. Seinen Grund hat dieses Ergebniss in dem schon früher erwähnten Umstande, dass für die Beurtheilung anfänglich die Klangfarbenungleichheit der verschieden großen Kugeln Schwierigkeiten bereitete und außerdem unsere Uebung, die Kugeln stets genau auf denselben Punkt des Schallbretts fallen zu lassen, noch nicht so groß war.

Nimmt man also für die Abweichung in meiner Versuchsreihe diese Erklärungsgründe an, so kann man in Bezug auf diese Schallversuche behaupten, dass der nach der Methode der Minimaländerungen gefundene Schwellenwerth, als Reizunterschied D in der Methode der richtigen und falschen Fälle verwendet, $\frac{r'}{n} = \frac{1}{2}$ ergibt.

K. Das Weber'sche Gesetz.

Die Bestätigung desselben wurde einmal nach der Methode der Minimaländerungen versucht und dann dadurch, dass man nach den Tabellen I—IV S. 428 der Methode der richtigen und falschen Fälle die Ebenmerklichkeitspunkte bestimmte. Es war von Interesse zu vergleichen, welche von beiden Methoden eine bessere Bestätigung liefert. Bezüglich der Methode der richtigen und falschen Fälle standen uns nur die Zahlen der Versuchstabellen I—IV mit den Gewichtspaaren $^{50}/_{25}$ und $^{25}/_{12,5}$ zu Gebote, während wir nach der andern Methode zur Prüfung des Weber'schen Gesetzes weit mehr Versuche zur Verfügung hatten, die anfänglich ohne Rücksicht auf die Methode der richtigen und falschen Fälle von uns ausgeführt worden waren. Wenngleich von unserer Aufgabe direct nicht gefordert, unterlassen wir doch nicht, die Resultate dieser Versuche mitzutheilen.

Wir verwendeten für die Versuche nach der Methode der Minimaländerungen die folgende Scala von Gewichtspaaren: $^{200}/_{100}$, $^{100}/_{50}$, $^{50}/_{25}$, $^{25}/_{12,5}$ $^{12,5}/_{6,25}$, $^{6,25}/_{3,125}$, $^{3,125}/_{0,78}$ g/g, welche also sämmtlich das Gewichtsverhältniss $^{2}/_{1}$ besitzen. Zunächst war den Versuchen zur Bestätigung des Weber'schen Gesetzes eine empirische Ermittelung der Schallstärken vorauszuschicken, indem man in der früher angegebenen Weise die Gleichheitspunkte bestimmte und darnach ε berechnete. Die Versuche wurden genau in derselben Weise wie früher unter Trennung nach der Zeitfolge ausgeführt und methodisch einmal in aufsteigender Folge der h ($h = 10, 20, 30, 40, 50$ cm) und das andere Mal in absteigender Folge verfahren. So ist die nächste Tab. entsprungen, welche ihrer Einrichtung nach verständlich sein wird. Unter *M-W* sind die Mittelwerthe der ε angeführt, unter Corr. ε solche Werthe, welche sich den durch den Versuch erhaltenen möglichst anschmiegen, aber keine sprungweisen Aenderungen zeigen, sondern stetig mit den Höhen h wachsen. Wir haben diese Werthe zu den folgenden Rechnungen benutzt.

Tabelle XX. Werthe der ε für die Versuche nach der Methode der Minimaländerungen.

Reagirender: Merkel.

	$P : p = 200 : 100$				$100 : 50$			
h	H_g	ε	$M. W.$	Corr. ε	H_g	ε	$M. W.$	Corr. ε
10	26	0,725		0,74	26	0,725		0,73
20	49,5	0,764		0,75	49	0,773		0,74
30	72	0,792	0,761	0,76	72	0,792	0,769	0,75
40	103	0,733		0,77	97	0,782		0,76
50	120	0,792		0,78	122	0,775		0,77
	$P : p = 50 : 25$				$25 : 12,5$			
h	H_g	ε	$M. W.$	Corr. ε	H_g	ε	$M. W.$	Corr. ε
10	26,6	0,708		0,73	27	0,698		0,71
20	50,9	0,742		0,74	53,5	0,704		0,72
30	74,3	0,764	0,747	0,75	75,75	0,748	0,730	0,73
40	100,3	0,754		0,76	102	0,740		0,74
50	123	0,770		0,77	124	0,763		0,75

	$P : p = 12,5 : 6,25$				$6,25 : 3,125$			
10	26,5	0,711		0,71	26	0,725		0,71
20	52,1	0,723		0,725	54,5	0,691		0,72
30	75,5	0,750	0,74	0,74	76	0,744	0,728	0,73
40	100,6	0,758		0,75	103	0,733		0,74
50	124	0,763		0,76	126	0,750		0,75
	$P : p = 3,125 : 1,56$				$1,56 : 0,78$			
10	27,5	0,654		0,70	28,5	0,661		0,70
20	56	0,673		0,71	50	0,769		0,72
30	75,75	0,748	0,711	0,72	77	0,735	0,708	0,72
40	103	0,733		0,73	105	0,718		0,72
50	126	0,750		0,74	126,5	0,747		0,73

Die Tabelle XXI enthält die Resultate der Prüfung des Weber-schen Gesetzes. Die Höhen H_o und H_u sind Mittelwerthe aus den vier den beiden Zeitfolgen und dem auf- und absteigenden Verfahren entsprechenden Höhen. Als Kriterium für die Bestätigung des Weber'schen Gesetzes haben wir die Constanz der Quotienten $\frac{r_o}{r}$ und $\frac{r}{r_u}$ benutzt, wenn r, r_o, r_u in bekannter Weise die Reizstärken für den Gleichheitspunkt und Ebenmerklichkeitspunkt nach oben und unten bezeichnen. Nach unserer Annahme über das Schallstärkenmaß berechnen sich die Quotienten folgendermaßen: Der Schall der größeren Kugel P, die immer von einer constanten Höhe h fällt, wird sein Ph^{ε}, wo ε derjenige Werth ist, welcher dadurch gewonnen wurde, dass man diejenige Höhe H aufsuchte, von welcher die andere, halb so schwere Kugel einen gleich starken Schall lieferte, und dann aus der Beziehung $Ph^{\varepsilon} = pH^{\varepsilon}$ den Exponenten ε berechnete. Wir haben dieses zu dem Gewichte P und der Höhe h oder, was dasselbe ist, zu dem halb so großen Gewichte p und der Höhe H gehörige ε mit ε_g (ε der Gleichheit) bezeichnet. Die Intensität des über- oder untermerklichen Schalles der kleineren Kugel aber, die von der Höhe H_0 oder H_u fällt, wird gleich sein $pH_0^{\varepsilon_0}$, oder $pH_u^{\varepsilon_u}$, wo ε_0 so bestimmt werden muss, dass man diejenige Fallhöhe der doppelt so großen Kugel P ausmittelt, für welche die Schallstärke dieser Kugel gleich derjenigen der kleineren ist, und dann die Formel berücksichtigt $pH_0^{\varepsilon_0} = Ph_0^{\varepsilon_0}$. Wollte man diese Bestimmung für jedes einzelne H_0 und H_u ausführen, so würde das große Weitläufigkeiten verursachen. Man kann aber kürzer und ebenso genau zum Ziele gelangen, wenn man sich an die bei der Bestimmung von ε gefundenen allgemeinen Resultate hält. Jeder bestimmten Höhe h entsprach bei einem bestimmten Gewichtspaare eine Höhe H, sodass man bei Aenderung von h eine ganze Scala zusammengehöriger Höhenpaare (h, H) erhielt, für welche wir die ε-Werthe berechneten. Ist nun ein anderer, nicht in jener Scala begriffener Werth von H gegeben, für den es das zugehörige h zu finden gilt, so kann man nach jener Scala durch Interpolation diesen Werth finden und dann ε berechnen. Da aber die Aenderungen der Werthe von ε mit den Höhen nicht sehr bedeutend sind, so kann man ohne Nachtheil die Interpolation an den ε-Werthen direct ausführen. Hat man so ε_0 oder ε_u gefunden, so ist die Schallstärke der kleineren Kugel, die von der Höhe H_0 oder H_u fällt, gleich $pH_0^{\varepsilon_0}$ oder $pH_u^{\varepsilon_u}$. Darnach haben die Quotienten $\frac{r_0}{r}$ und $\frac{r}{r_u}$ die Bedeutung.

$$\frac{r_0}{r} = \frac{pH_0^{\varepsilon_0}}{Ph^{\varepsilon_g}}; \qquad \frac{r}{r_u} = \frac{Ph^{\varepsilon_g}}{pH_u^{\varepsilon_u}}$$

Tabelle XXI. Prüfung des Weber'schen Gesetzes nach der Methode der Minimaländerungen.

Reagirender: Merkel.

P/p	h	H_o	ε_o	H_u	ε_u	H_g	ε_g	$\frac{r_o}{r}$	$\frac{r}{r_u}$
$^{200}/_{100}$	20	72	0,76			49,5	0,75	1,382	
	"			32	0,74	"	"		1,432
	30	102	0,77			72	0,76	1,368	
	"			51	0,75	"	"		1,351
$^{100}/_{50}$	20	70	0,75			49	0,74	1,359	
	"			35	0,735	"	"		1,306
	30	101	0,76			72	0,755	1,322	
	"			52	0,74	"	"		1,357
$^{50}/_{25}$	20	70	0,75			50,9	0,74	1,321	
	"			37	0,745	"	"		1,215
	30	101,7	0,76			74,3	0,75	1,325	
	"			52	0,74	"	"		1,304
$^{25}/_{12,5}$	20	76	0,73			52,1	0,72	1,369	
	"			41	0,715	"	"		1,212
	30	104	0,75			75,5	0,73	1,386	
	"			56,5	0,725	"	"		1,261
$^{12,5}/_{6,25}$	20	75	0,73			53,5	0,72	1,332	
	"			40	0,715	"	"		1,261
	30	103	0,74			75,75	0,73	1,301	
	"			55	0,72	"	"		1,320
$^{6,25}/_{3,125}$	20	74	0,73			54,5	0,72	1,301	
	"			38	0,715	"	"		1,318
	30	103	0,74			76	0,73	1,308	
	"			55,5	0,72	"	"		1,310
$^{3,125}/_{1,56}$	20	75	0,72			56	0,71	1,288	
	"			39	0,705	"	"		1,317
	30	104,5	0,73			75,75	0,72	1,332	
	"			54	0,71	"	"		1,317
$^{1,56}/_{0,78}$	20	75	0,72			55	0,72	1,250	
	"			41	0,71	"	"		1,282
	30	103	0,72			77	0,72	1,259	
	"			57	0,72	"	"		1,241

Der Ueberblick über die Tabelle XXI zeigt eine ziemlich befriedigende Constanz der fraglichen Quotienten. Zwar finden Schwankungen bis in die Zehntel hinein statt, aber selbst bei großer Sorgfalt ist eine vollkommene Genauigkeit in der Bestimmung der Schallstärken nicht zu erreichen; ebenso ist die Bestimmung der Ebenmerklichkeitspunkte nicht fehlerfrei auszuführen. Darnach dürften die Zahlen der Tabelle XXI trotz ihrer Schwankungen für eine Bestätigung des Weber'schen Gesetzes gelten können. In gleicher Weise wie oben sind die Quotienten $\frac{r_o}{r}$ und $\frac{r}{r_u}$ berechnet worden aus unsern Versuchen nach der Methode der richtigen und falschen Fälle; unter Zugrundelegung der Gleichheits- und Ebenmerklichkeitspunkte aus den Tabellen I—IV und derjenigen Werthe von ε, die der Methode der richtigen und falschen Fälle entsprechen, ist die Tabelle XXII berechnet worden.

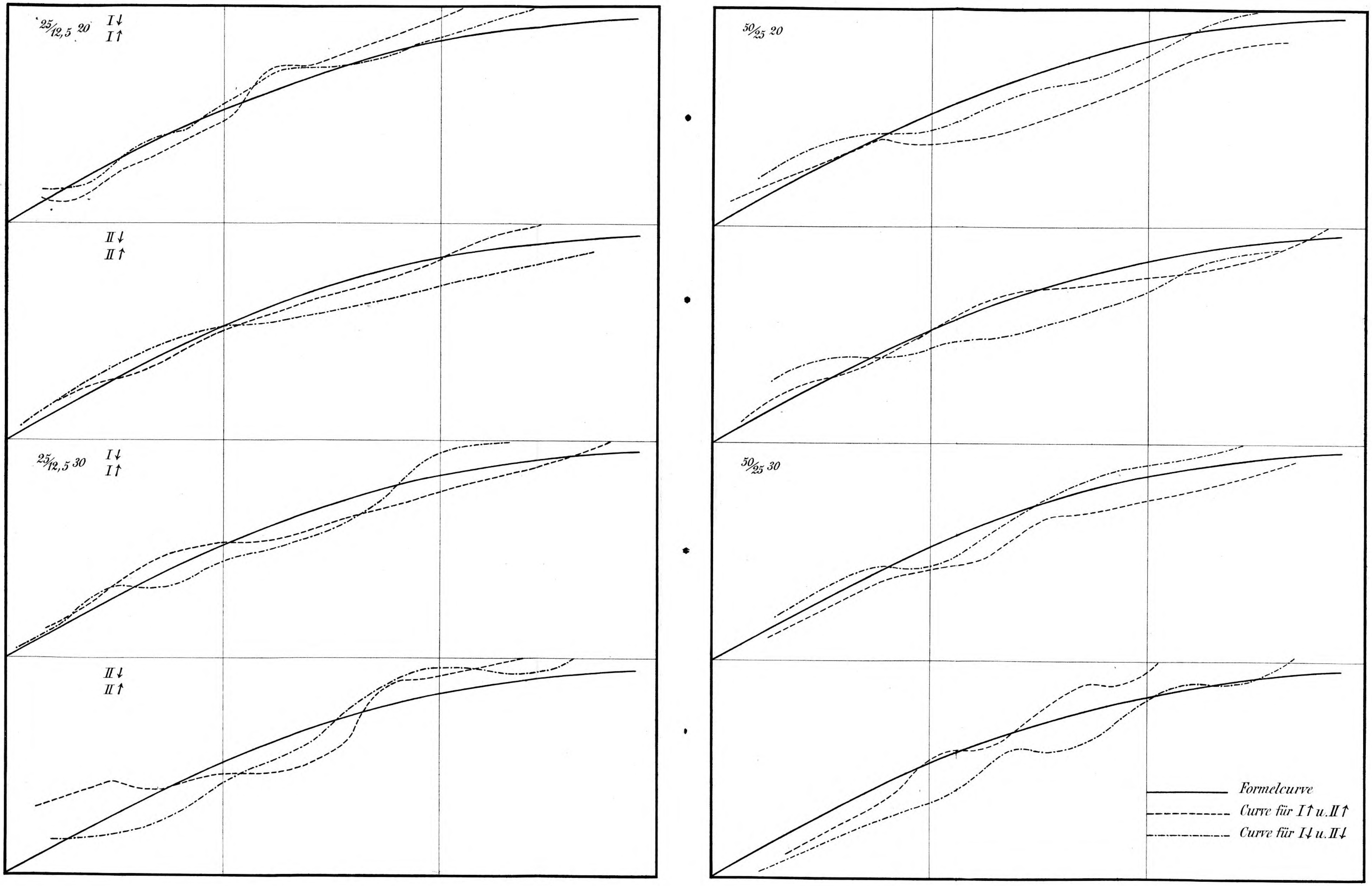
Tabelle XXII.

Bestimmung der Quotienten $\frac{r_o}{r}$ und $\frac{r}{r_u}$ nach der Methode der richtigen und falschen Fälle.

P/p	h	H_o				H_o	ε_1	H_g	ε_g	$\frac{r_o}{r}$	$\frac{r}{r_u}$
		I↓	I↑	II↓	II↑						
$25/12,5$	20	65	75	75	80	73,7	0,730	52	0,725	1,32	
	30	90	90	105	110	98,7	0,751	77	0,735	1,29	
$50/25$	20	62	63	77	79	70,2	0,765	50,1	0,752	1,37	
	30	90	95	103	113	100,2	0,777	73,5	0,768	1,32	
		H_u				H_u					
		I↓	I↑	II↓	II↑						
$25/12,5$	20	33	35	41	41	37,5	0,716	52	0,725		1,31
	30	51	53	63	60	55,5	0,731	77	0,735		1,29
$50/25$	20	35	35	39	40	37,2	0,740	50,1	0,752		1,32
	30	50	50	50	55	51,2	0,751	73,5	0,768		1,30

Auch für diese Methode ergibt sich hiermit eine ziemliche Constanz der in Rede stehenden Quotienten. Vergleicht man aber diese Ergebnisse mit denen der Methode der Minimaländerungen, so fällt der Vergleich nicht zu Ungunsten der Methode der richtigen und falschen Fälle aus. Selbstverständlich ist übrigens die Constanz der Quotienten sowohl in dieser Tabelle wie in der vorigen mitbedingt durch die gleichmäßige Abstufung, welcher die aus der Beobachtung abgeleiteten ε-Werthe vermöge der Voraussetzung eines stetigen Ganges derselben unterworfen wurden.

Curven für $\frac{\pi'}{\pi}$ nach Formel und Versuch. (Fechner)



G. Lorenz del.

Verlag von Wilh. Engelmann, Leipzig.

Lith. Anst. v. J. G. Bach, Leipzig.