Nochmals über das Beharrungsgesetz.

Von

Ludwig Lange.

Die an einer früheren Stelle dieser Zeitschrift (S. 266—297) von mir vorgeschlagene Definition des »Inertialsystemes« bekundete sich als ein Versuch, einen gewissen dunkeln Punkt in dem herkömmlichen Ausspruche des Beharrungsgesetzes durch Anwendung eines allgemeinen methodologischen Verfahrens, des »Princips der particularen Determination« aufzuklären. Einer brieflichen Mittheilung des Herrn Professor Aurel Voss in München verdanke ich die Einsicht, dass dieser Versuch nach seiner mathematischen Seite hin missglückt ist, indem er auf einem phoronomischen Irrthume beruht, welchen ich mir in allzu festem Vertrauen auf die bekanntlich so trügerische phoronomische Anschauung habe zu Schulden kommen lassen. Demungeachtet darf ich zu meiner Freude hervorheben, dass die seiner Zeit entwickelten methodologischen Ideen nicht nur nicht durch diese Erkenntniss aufgehoben werden, sondern im Gegentheil nunmehr weitere willkommene Bestätigung erlangen. Zufolge einer neuen Untersuchung mit den Hülfsmitteln der Analysis findet nämlich das methodologische Princip der particularen Determination, weit entfernt, an dem räumlichen Theile des Beharrungsgesetzes Schiffbruch zu leiden, vielmehr gerade hier eine fast unerwartet schöne Anwendung, allerdings etwas anders, als ich zuvor vermeinte. In welcher Weise, wird sich auch ohne speciellere mathematische Hülfsmittel verdeutlichen lassen. [1])

1) Eine streng mathematische Darstellung derselben Sache werde ich an einem anderen Orte veröffentlichen.

Zuvor aber einige Worte über den phoronomischen Grundfehler meiner früheren Definition des Inertialsystemes (S. 274). Auf nur zwei sich selbst überlassene Punkte P_1, P_2 lässt sich eine wirkliche Definition des Inertialsystemes gar nicht gründen. Denn wenn man diesen Punkten auch bestimmte Bewegungen in einem Systeme vorschreibt und über das System so verfügt, dass die gegebene Vorschrift erfüllt wird, so ist darum doch — ganz im Gegensatze zu dem Raisonnement S. 273 — das System noch kein bestimmtes. Man kann ja um die Verbindungslinie $P_1 P_2$ herum das System ganz beliebig verdrehen. Schon die Analogie lässt übrigens vermuthen, dass 3 die nothwendige und hinreichende Anzahl der Fundamentalpunkte des dreidimensionalen Inertialsystemes sein dürfte, ganz so wie es 1 Fundamentalpunkt ist, worauf sich die eindimensionale Neumann'sche Inertialzeitscala stützt. Diese Vermuthung wird denn auch vollkommen bestätigt durch die folgenden phoronomischen Betrachtungen, in welchen, wie ich bemerken will, vorerst noch nicht von materiellen sich selbst überlassenen, sondern nur von beweglichen geometrischen Punkten die Rede ist.

Man stelle sich zunächst einen einzelnen solchen Punkt P_1 und ein willkürliches Coordinatensystem A vor, in Bezug auf welches derselbe irgendwie, einerlei ob geradlinig oder krummlinig, bewegt ist. Gegen das System A sei bewegt ein zweites System B; so ist die von P_1 in Bezug auf B zurückgelegte Bahn im allgemeinen eine Curve und zwar von anderer Gestalt, als die Bahn, welche P_1 in in Bezug auf A beschreibt. Nun lässt sich erkennen, dass man durch passende Bewegung des Systemes B gegen das System A stets bewirken kann, dass die Bahn von P_1 im Systeme B geradlinig ausfällt. Man braucht nur einfach in diesem Systeme eine Gerade G_1 zu markiren und das System jederzeit so zu halten, das P_1 mit irgend einem Punkte von G_1 zusammenfällt. Man übersieht leicht, dass dies auf unendlich viele verschiedene Arten angeht.

Ein zweiter in Gedanken hinzugefügter Punkt P_2, welcher im Systeme A beliebig bewegt sein mag (also im allgemeinen einen veränderlichen Abstand von P_1 besitzen wird), beschreibt im Systeme B jetzt wieder irgend eine im allgemeinen krummlinige Bahn. Ertheilt man aber dem Systeme B eine passende Bewegung gegen A, so wird sich dadurch bewirken lassen, dass nicht nur, nach wie vor,

P_1 im Systeme B auf der Geraden G_1, sondern auch P_2 in demselben Systeme auf einer Geraden fortschreitet. Markirt man nämlich in B eine zweite zu G_1 windschiefe Gerade G_2, jedoch so, dass der kürzeste Abstand beider Geraden nicht größer ist, als der Minimalabstand, welchen im Laufe der Zeit P_1 und P_2 einmal besitzen[1]): so gibt es jederzeit eine mit $\overline{P_1 P_2}$ gleich lange Verbindungsstrecke eines Punktes auf G_1 mit einem Punkte auf G_2; und indem man ersteren mit P_1, letzteren mit P_2 zur Deckung bringt, und dieses Anpassungsverfahren immerwährend anwendet, verfügt man über B dermaßen, dass P_1 und P_2 darin bez. auf G_1 und G_2 fortschreiten. Dass diese Verfügung über B noch immer eine ganz unbestimmte ist, folgt schon aus der Möglichkeit einer Drehung um $\overline{P_1 P_2}$.

Jetzt stelle man sich aber noch einen dritten Punkt P_3 vor. Außerdem markire man im Systeme B eine dritte Gerade G_3 und zwar eine solche, dass das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ jederzeit, welche Gestalten es immer annehmen mag, ein mit ihm congruentes Verbindungsdreieck dreier bez. auf G_1, G_2, G_3 gelegener Punkte vorfindet[2]). Dann braucht man nur in jedem Augenblicke letzteres mit $P_1 P_2 P_3$ zur wirklichen Deckung zu bringen, um zu bewirken, dass mit Bezug auf B die Punkte P_1, P_2, P_3 bez. auf G_1, G_2, G_3 fortschreiten. Es fragt sich nun, ob diejenige Bewegung von B, durch welche erreicht wird, dass P_1, P_2, P_3 beständig auf den vorgeschriebenen Geraden G_1, G_2, G_3 fortschreiten, ob diese Bewegung noch — wie bei nur einem oder zwei Punkten — verschieden sein kann. Darauf ist diese Antwort zu geben: Wenn P_1, P_2, P_3 in einer Geraden liegen oder wenn G_1, G_2, G_3 Parallellinien sind, so gibt es unendlich viele verschiedene Arten der

1) Der Mathematiker bedarf dieser Einschränkung nicht. Zieht man die »imaginären Punkte« der beiden Geraden in den Kreis analytischer Betrachtung — geometrische Bedeutung beanspruchen solche »Punkte« natürlich nicht — so gibt es auf G_1 und G_2 »Punkte« von beliebig kleinem, ja sogar von negativem »Abstande«.

2) Für den Mathematiker ist auch diese Beschränkung überflüssig. Wie das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ immer gestaltet sein mag, stets gibt es ein mit ihm congruentes reelles oder imaginäres Verbindungsdreieck dreier bez. auf G_1, G_2, G_3 liegender »Punkte«, ganz ohne dass man über die Lage dieser Geraden besondere Voraussetzungen zu machen hätte. Der Nichtmathematiker darf hieran keinen Anstoß nehmen. Er müsste sonst z. B. auch der einstimmigen Behauptung aller Mathematiker widersprechen, dass zwei beliebig gelegene Kreise sich allemal schneiden. Sie thun dies selbst dann, wenn sie concentrisch sind, freilich sind dann ihre »Schnittpunkte« nicht reell, sondern imaginär.

Bewegung von B, wodurch der gegebenen Vorschrift genügt wird; weil man dann eine beliebige Drehung um $\overline{P_1 P_2 P_3}$ oder eine beliebige Verschiebung längs der gemeinsamen Richtung von G_1, G_2, G_3 eintreten lassen kann. Wenn aber keins von beiden der Fall ist, so gibt es zufolge gewisser hier nebensächlicher analytischer Erwägungen zwar mehrere, aber nicht unzählige solche Arten der Bewegung von B.

Während es nach dem vorigen für einen, zwei oder drei beliebig gegeneinander bewegte Punkte unter allen Umständen möglich ist, ein solches Coordinatensystem zu construiren, mit Bezug auf welches dieselben geradlinig bewegt sind, so gehören ganz besondere Bedingungen dazu, dass das gleiche für mehr als drei Punkte gilt. Der Beweis mag hier übergangen werden. Zur Erläuterung will ich nur auf ein geometrisches Analogon hinweisen. Während es für drei Ebenen im Raume unter allen Umständen einen gemeinsamen Punkt gibt, so ist es ein bloßer Zufall oder richtiger eine Folge besonderer Bedingungen, wenn ein gemeinsamer Punkt für mehr als drei Ebenen existirt.

Fassen wir die gewonnenen Ergebnisse kurz zusammen: Für drei oder weniger als drei Punkte ist die geradlinige Bewegung in Bezug auf ein Coordinatensystem Sache einer bloßen Convention; erst für mehr als drei Punkte ist sie mehr als Convention, ist sie Forschungsergebniss. Drei Punkte brauchen nicht sich selbst überlassen zu sein, um in Bezug auf ein gewisses Coordinatensystem geradlinig bewegt zu sein. Die physikalische Bedingung des Unbeeinflusstseins hat nur den einen allerdings höchst merkwürdigen geometrischen (phoronomischen) Erfolg, dass es für beliebig viele ihr unterworfene Punkte ein Coordinatensystem gibt, worin dieselben sämmtlich geradlinig bewegt sind.

Von hier scheint es nur noch ein Schritt zur Definition des Inertialsystemes zu sein. Man wird etwa erwarten, dass ein jedes Coordinatensystem, in Bezug worauf drei beliebige, nur nicht in einer Geraden liegende sich selbst überlassene Punkte auf drei beliebigen, nur nicht parallelen Geraden bewegt sind, ein Inertialsystem sein, d. h. dass mit Bezug auf ein solches Coordinatensystem auch jeder vierte sich selbst überlassene Punkt irgendwie geradlinig fortschreiten werde.

Das ist aber nicht der Fall; wenn die Punkte gegeben sind, so dürfen die ihnen vorzuschreibenden geradlinigen Bahnen nicht mehr so ganz beliebig sein. Ihre gegenseitige Lage muss vielmehr einer gewissen Bedingung unterliegen. Und was für einer Bedingung, das ist nur in einem besonders einfachen Falle leicht anzugeben, wenn nämlich die drei sich selbst überlassenen Punkte einmal zu gleicher Zeit am gleichen Orte gewesen sind, wenn sie gleichzeitig von einem Raumpunkte aus projicirt wurden. Jedes System nämlich, in welchem drei solche Punkte P_1, P_2, P_3 (die aber nicht in einer geraden Linie liegen dürfen) auf drei nicht ganz beliebigen, sondern von einem Raumpunkte aus divergirenden Geraden G_1, G_2, G_3 stetig dahinschreiten, ist ein Inertialsystem. Der Beweis hierfür bietet kein besonderes methodologisches Interesse und mag daher übergangen werden. Man kann auch sagen: Wenn die drei in einem Punkte zusammenlaufenden im allgemeinen krummlinigen Bahnen, welche von P_1, P_2, P_3 in Bezug auf ein beliebiges System stetig zurückgelegt werden, im besonderen geradlinig sind, so ist das System ein Inertialsystem.

Die ideale Construction des Inertialsystemes würde also etwa folgendermaßen auszuführen sein. Drei materielle Punkte P_1, P_2, P_3 werden gleichzeitig vom selben Raumpunkte ausgeschleudert und dann sich selbst überlassen. Sobald man sich vergewissert hat, dass sie nicht in einer geraden Linie gelegen sind, verbindet man sie einzeln mit einem ganz beliebigen vierten Raumpunkte Q. Die Verbindungslinien, welche bez. G_1, G_2, G_3 heißen mögen, bilden zusammen eine dreiseitige Ecke. Lässt man nun diese Ecke in unveränderlicher Starrheit ihre Gestalt bewahren und verfügt man über ihre Lage beständig so, dass P_1 auf der Kante G_1, P_2 auf G_2, P_3 auf G_3 stetig fortschreitet[1]), so ist ein Coordinatensystem, worin die Ecke ihre Lage beibehält, ein Inertialsystem. Die drei Kanten können auch gleich selbst als Achsen eines Inertialsystemes benutzt werden, nur dürfen sie dann nicht in einer Ebene liegen. Da Q

---

1) Die immerwährende Möglichkeit, durch reelle Constructionen so zu verfügen, erhellt daraus, dass das Dreieck der gleichzeitig vom gleichen Raumpunkte aus projicirten Punkte P_1, P_2, P_3 nothwendig sich selbst ähnlich bleibt. Diese letztere Erkenntniss, eine Consequenz des Beharrungsgesetzes, braucht bemerkenswerther Weise der Definition des Inertialsystemes nicht vorausgeschickt zu werden.

ein ganz beliebiger Raumpunkt ist und der Raum ∞^3 Punkte enthält, so lassen sich auf die angegebene Art ∞^3 dreiseitige Ecken, also auch ∞^3 Inertialsysteme construiren, in vollkommener Uebereinstimmung mit S. 274 (Anmerkung). Diese Construction ist, wie angezeigt, eine völlig ideale, Niemand ist im Stande, sie unmittelbar zu bewerkstelligen. Darum ist aber ihr Werth kein geringerer. Die (angenäherten) realen praktischen Constructionsmethoden des Inertialsystemes fließen aus seiner primären idealen Construction genau in der nämlichen Weise, wie z. B. alle realen Methoden der (angenäherten) Vergleichung elektrischer Kräfte zuletzt aus einer völlig idealen Grundmethode fließen, welche nun und nimmermehr unmittelbare Anwendung finden könnte.

Inwiefern die hier gegebene Definition des Inertialsystemes mit weit besserem Rechte als die frühere vermeintliche verdient, eine Uebertragung der Neumann'schen Zeitmessungsconvention auf den dreidimensionalen Raum genannt zu werden, bedarf kaum der Ausführung. Genau ebenso, wie Neumann die Inertialzeitscala definirt durch die Convention, ein sich selbst überlassener Punkt solle mit Bezug auf sie längs ihrer einen einzigen Dimension gleichförmig bewegt sein, genau so definiren wir das Inertialsystem durch die Convention, drei (gleichzeitig vom gleichen Raumpunkte projicirte, nicht in einer Geraden liegende) sich selbst überlassene Punkte sollen mit Bezug darauf längs drei verschiedenen Dimensionen geradlinig bewegt sein. Die merkwürdige Analogie ließe sich noch weiter verfolgen, allein ich darf es mit diesen Andeutungen genug sein lassen und will nur im Anschlusse daran hervorheben, dass sich durch Einführung des Begriffes »Inertialzeitscala« die S. 276 gegebene Fassung des Beharrungsgesetzes auch in formeller Beziehung vervollkommnen lässt. Was unter einer »Zeitscala« überhaupt zu verstehen ist, braucht nicht zuvor definirt zu werden. Meine neue verbesserte Fassung des Gesetzes ist nun diese:

Beharrungsgesetz.

Definition I: »Inertialsystem« heißt ein jedes Coordinatensystem von der Beschaffenheit: dass mit Bezug darauf die in einem Punkte zusammenlaufenden stetig beschriebenen Bahnen dreier gleichzeitig von demselben Raumpunkte projicirter und dann sich selbst überlassener Punkte (die aber nicht in einer Geraden liegen sollen) sämmtlich geradlinig sind.

Theorem I: In Bezug auf ein Inertialsystem ist auch die Bahn eines jeden vierten sich selbst überlassenen Punktes geradlinig.

Definition II. »Inertialzeitscala« heißt eine jede Zeitscala, in Bezug auf welche irgend ein sich selbst überlassener Punkt in seiner Inertialbahn gleichförmig bewegt ist.

Theorem II. Rücksichtlich einer Inertialzeitscala ist auch jeder andere sich selbst überlassene Punkt in seiner Inertialbahn gleichförmig bewegt.

Was außer S. 273 f. in meinem ersten Aufsatze durch diesen zweiten hinfällig wird, ist fast unnöthig hervorzuheben. Wo dort von zwei Fundamentalpunkten des Inertialsystemes die Rede ist, hat natürlich die Zahl drei einzutreten. Uebrigens bleibt ziemlich alles beim alten. Nur noch einige Worte über die S. 281 beiläufig erwähnte Definition des Inertialsystemes. Ich habe dieselbe seiner Zeit verworfen, weil sie unnöthig viele Fundamentalpunkte beanspruche. Gegenwärtig fällt dieser Einwurf von selbst hinweg. Gleichwohl aber verdient die vorhin vorgeschlagene Definition vor der S. 281 erwähnten unbedingt den Vorzug, denn von anderen Gründen abgesehen vermeidet sie einen methodologischen Fehler, von welchem die letztere sich nicht reinigen lässt. Das Inertialsystem wurde a. a. O. versuchsweise definirt als ein System von der Art, dass mit Bezug darauf ein sich selbst überlassener Punkt ruhen und seine Verbindungen mit zwei anderen gleichzeitig vom gleichen Raumpunkte projicirten sich selbst überlassenen Punkten feste Richtungen einnehmen sollen. Voraussetzung ist hierbei offenbar, dass die beiden Verbindungslinien miteinander einen unveränderlichen Winkel einschließen, sonst wäre ja die Construction ersichtlich geometrisch unausführbar. Diese Voraussetzung wäre also in Gestalt eines Theoremes der Definition des Inertialsystemes und mithin dem Ausspruche des Beharrungsgesetzes voranzuschicken. Sie ist aber offenbar nichts als eine Consequenz dieses Gesetzes, und die S. 281 erwähnte Definition enthielte sonach einen ganz ähnlichen Fehler, wie die Streintz'sche Definition des Fundamentalsystemes. Dass aber der vorhin gegebenen Definition des Inertialsystemes kein Fehler dieser Art innewohnt, liegt auf der Hand.
