Das psychophysische Grundgesetz in Bezug auf Schallstärken.

Von

Dr. Julius Merkel.

Mit Tafel II.

Die bis jetzt veröffentlichten Versuche zur Prüfung der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes auf dem Gebiete der Schallempfindungen sind deshalb noch keineswegs als abschließende zu betrachten, weil die Ermittlung der Schallstärken selbst eine einwurfsfreie nicht genannt werden kann. Dieselben wurden nach der von Oberbeck aufgestellten Formel:

$$i = cph^{\varepsilon}$$

berechnet, indem man entweder, wie es von Volkmann[1]) und Nörr[2]) geschehen ist, ein constantes ε für verschiedene Höhen anwandte, oder, indem man sich vorher experimentell ermittelter ε-Werthe bediente, welche eine mehr oder weniger starke Zunahme mit der Höhe zeigten, wie bei den Versuchen von Tischer[3]) und Lorenz[4]).

Da indessen die bisher vorliegenden Versuche über Schallstärkemessung einerseits weder die Constanz des Exponenten ε mit Sicherheit verbürgen noch die Größe desselben mit Genauigkeit feststellen, und da andererseits diejenigen Bestimmungen des ε, welche zu einer Constanz desselben nicht geführt haben, vielfachen Anfechtungen unterliegen, so erscheint eine abermalige experimentelle Prüfung des Weber'schen Gesetzes geboten. Dieselbe wird sich bei den Vorunter-

---

1) Fechner, Elem. I, S. 178.
2) Zeitschrift für Biologie, Bd. XV. S. 297.
3) Wundt, Philos. Studien, I, S. 508.
4) Wundt, Philos. Studien, II, S. 472.

suchungen über die Bestimmungen der Schallstärken selbst wie auch bei der eigentlichen Prüfung des Weber'schen Gesetzes nicht allein auf die Methode der Minimaländerungen beschränken, sondern in beiden Fällen die auf dem Gebiete der Schallstärken bisher vernachlässigten Fehlermethoden eingehend berücksichtigen.

I. Methoden zur Bestimmung der Schallstärke fallender Kugeln.

A. Methode der Minimaländerungen.

Die Versuche über Schallstärkemessung, welche als Grundlage für Versuche zur Prüfung des Weber'schen Gesetzes gedient haben, wurden bisher zumeist nach der Methode der Minimaländerungen ausgeführt. Dabei wurden zwei Schalle, welche von verschiedenen Gewichten p und p_1 herrührten, die von den Höhen h und h_1 auf eine schwingungsfähige Platte fielen, solange gegen einander verändert, bis sie als vollkommen gleich geschätzt wurden. Der Berechnung wurde dann die Oberbeck'sche Formel:

$$p\,h^{\varepsilon} = p_1\,h_1{}^{\varepsilon}$$

zu Grunde gelegt. Dieselbe setzt nicht allein Proportionalität der Schallstärke mit dem Gewicht voraus, sondern sie nimmt auch von vorn herein für verschiedene Höhen gleiche ε an. Daher wird diese Formel nur dann einwurfsfrei angewandt werden können, wenn die Versuche die Proportionalität mit dem Fallgewicht und die Constanz von ε thatsächlich ergeben. Letzteres kann indessen von den meisten nach der Oberbeck'schen Formel behandelten Versuchen nicht behauptet werden. Die zweite Unvollkommenheit der früheren Versuche liegt in der Methode zur Bestimmung desjenigen Höhenpunktes, bei dem der Schall einer kleinen Kugel dem einer größeren von constanter Höhe herabfallenden gleich wird. Geht man nämlich von einem übermerklichen Schalle aus, um sich dem Gleichheitspunkte zu nähern, so wird man von demselben eine größere Anzahl von Centimetern entfernt bleiben, als wenn man sich von einem untermerklichen Schalle dem Gleichheitspunkte nähert. Das muss consequenter Weise eintreten, wenn das Weber'sche Gesetz gilt, es hat sich aber auch durch den Versuch in überraschender Weise bestätigt. Vergleicht man nämlich nach der Methode der Minimaländerungen zwei Schalle, die von gleich schweren Kugeln herrühren, so erhält man durch Mittelziehung stets einen größeren Werth für h_1 als die constante Höhe h, von der man die eine Kugel fallen lässt.

Die von Starke[1]) veröffentlichten neuesten Versuche über Schallstärken haben zwar in einwurfsfreier Weise die Proportionalität für die Schallstärke mit der lebendigen Kraft nachgewiesen. Berechnet man aus ihnen den Exponenten ε bei Elimination des oben erwähnten durch das Weber'sche Gesetz bedingten Fehlers, so erhält man im Mittel den Werth 1. Da indessen auch bei diesen Versuchen die Deformation und vor allem der Rückprall einen jedenfalls beträchtlichen Schallverlust bedingten, so geben die Starke'schen Versuche kein allgemeingültiges Maß für die Schallstärken.

Die nachstehenden Versuche gehen nun von folgenden Gesichtspunkten aus. Jede Schallstärke i, welche durch Herabfallen einer Kugel p von bestimmtem Gewicht aus einer gewissen Höhe h erzeugt wird, lässt sich ausdrücken durch:

I) $$i = p^{\eta} h^{\varepsilon}.$$

Die lebendige Kraft ph der fallenden Kugel setzt sich im allgemeinen zum Theil in Schall, zum Theil in elastischen Rückprall und Deformation um. Die letzteren Transformationen der lebendigen Kraft bedingen, dass ein mehr oder weniger großer Theil der lebendigen Kraft für den Schall verloren geht. Daher werden die Exponenten η und ε für ganze p und h kleiner als 1 anzunehmen sein.

Neben der Ermittlung der absoluten Werthe für η und ε handelt es sich vor allem darum zu untersuchen, wie die Schallstärke mit der Höhe und dem Gewicht wächst. Vergleicht man zu diesem Zwecke mit dem Schalle I einen zweiten, der durch das Fallen einer leichteren Kugel p_1 erzeugt wird, so kann man letzteren dem ersteren gleich machen, wenn man die Kugel p_1 von einer größeren Höhe h_1 herabfallen lässt. Der Schall dieser Kugel wird dann ausgedrückt werden können durch:

II) $$i_1 = p_1^{\eta_1} h_1^{\varepsilon_1}.$$

Für $i = i_1$ ergeben die Formeln I und II die Beziehung:

---

1) Wundt, Philos. Studien, III, S. 264.

III) $$p^{\eta} h^{\varepsilon} = p^{\eta_1} h_1^{\varepsilon_1},$$

welche für ε_1 aufgelöst den Werth liefert:

III') $$\varepsilon_1 = \frac{(\eta \log p - \eta_1 \log p_1) + \varepsilon \log h}{\log h_1}.$$

Diese Formel würde die Berechnung von ε_1 gestatten, wenn man ε_1 sowie die Exponenten η und η_1 auf irgend einem Wege ermitteln könnte. Auf Grund des so gewonnenen ε_1 könnte man ε_2 für eine größere Höhe h_2 ermitteln auf Grund der Formel:

$$\varepsilon_2 = \frac{(\eta \log p - \eta_1 \log p_1) + \varepsilon_1 \log h_1}{\log h_2},$$

unter Benutzung dieses ε-Werthes sodann ε_3 für h_3 nach einer analogen Formel u. s. w.

Verzichtet man darauf, aus den Werthen η allein schon auf das Wachsen der Schallintensität mit dem Gewicht Schlüsse ziehen zu wollen, sondern geht man zu dem Zwecke jederzeit auf die Werthe $i = p^{\eta} h^{\varepsilon}$ zurück, so kann man für ein gewisses p und h die Annahme $\eta = \varepsilon$ machen, also etwa an Stelle von I setzen:

I') $$i = (p h)^{\varepsilon}.$$

Die Kenntniss von ε würde in der That zur Bestimmung dieser einen Schallintensität hinreichen. Für weitere Gewichte p_1, p_2 u. s. w. empfiehlt sich indessen die Einführung der η, namentlich wenn sie in einer und derselben Formel mit p auftreten, wie es bei den Formeln III der Fall ist. Es macht sich sonach außer der Bestimmung des Werthes für $\eta = \varepsilon$ noch die Ermittelung von η_1 erforderlich.

Die Bestimmung des ε in Formel I' geschah auf folgende Weise.

Mit einer Messingkugel p wurde eine beinahe gleich schwere Elfenbeinkugel P verglichen. Die Höhe wurde so gewählt, dass die Deformation der außerordentlich elastischen Elfenbeinkugel und der elastischen Unterlage als verschwindend klein angesehen werden konnte, der elastische Rückprall wurde experimentell ermittelt. Erweisen sich die Schallintensitäten bei der Fallhöhe H der Elfenbeinkugel und der Höhe h der Messingkugel als gleich und ist H_1 der elastische Rückprall der Elfenbeinkugel bei der Höhe H, so hat man:

$$(p h)^{\varepsilon} = P (H - H_1),$$

woraus für ε der Werth:

IV) $$\varepsilon = \frac{\log P + \log (H - H_1)}{\log p + \log h}$$

sich ergibt.

Zur Kenntniss des Werthes η_1 gelangten wir sodann auf folgendem Wege.

Zunächst wurden die ε auf Grund der Formeln III für eine Reihe von h unter der Annahme $\eta = \eta_1$ berechnet. Auf Grund dieser wurden sodann für einige neue Gewichte die η nach der Formel:

V) $$\eta_x = \frac{\eta_1 \log p_1 + \varepsilon_1 \log h_1 - \varepsilon_x \log h_x}{\log p_x}$$

bestimmt. Für dieselben Gewichte wurden die Verluste der Schallintensität durch Rückprall ermittelt.

Bildet man dann die Verhältnisse $A = \frac{p^\eta h^\varepsilon}{p h}$ für die durch obige Versuche ermittelten Schallintensitäten und diejenigen, welche sich nur nach Abzug des Rückpralls ergeben, so kann man den Werth von η_1 so genau, als es nur verlangt werden kann, bestimmen unter der Voraussetzung, dass der Verlust durch Deformation vom Gewicht p bis p_1 ebenso verläuft, wie vom größten untersuchten Gewicht bis p.

So ergaben sich beispielsweise bei den Versuchen für die Gewichte 3,5; 4,95; 9,93 und 19,74 g die folgenden Werthe:

$A = \frac{p^\eta h^\varepsilon}{p h}$	3,5	4,95	9,93	19,74
Nach Abzug des Rückpralls	0,497	0,508	0,537	0,564
Nach Abzug des Rückpralls und der Deformation.	x	0,455	0,430	0,390
Verlust durch Deformation.	y	0,053	0,107	0,174

Entwirft man eine Curve, deren Abscissen die p und deren Ordinaten die Werthe der letzten Horizontalreihe sind, und setzt man dieselbe bis 3,5 fort, so ergibt sich der Werth $y = 0,035$ für $p = 3,5$ und x berechnet sich aus der Gleichung $x + y = 0,497$ zu 0,462.

Aus $\frac{p_1^{\eta_1} h^\varepsilon}{p_1 h} = 0,462$ und $\frac{p^\eta h^\varepsilon}{p h} = 0,455$ berechnet sich aber:

VI) $$\frac{p^\eta}{p_1^{\eta_1}} = \frac{p}{p_1} \cdot \frac{0,455}{0,462}.$$

Hieraus könnte man η_1 berechnen, da $\eta = \varepsilon$ bekannt ist. Indessen ist diese Berechnung zur endgültigen Ermittlung der ε nicht nöthig, da die Formeln III den Logarithmus des Ausdruckes VI enthalten. In den meisten Fällen liefert die nochmalige Berechnung der ε auf Grund des Werthes VI ε-Werthe, die einer weiteren Correctur nicht bedürfen. Im entgegengesetzten Falle müssen auf Grund dieser ε die η nochmals berechnet und x beziehentlich y genauer ermittelt werden.

In dem angegebenen Verfahren wurde ich, nach vielen vergeblichen Bemühungen den Werth VI zu ermitteln, durch folgende Versuchsergebnisse bestärkt. Unter der Annahme, dass für die Aenderung des p von 3,5 bis 4,95 g die Variabilität von η jedenfalls vernachlässigt werden könne, hatte ich die ε für die Höhen 10 bis 140 cm bei dem Gewichtspaare 3,5 und 4,95 g und sodann die η für die Gewichtspaare 7,34 und 9,93 g sowie 14,80 und 19,74 g ermittelt, und für beide Gewichtspaare die ε für das oben genannte Höhenintervall experimentell bestimmt. Dabei zeigte sich, dass ein immer rascheres Ansteigen der ε mit den Höhen eintrat. Als ich dann auf dieselben Versuche die oben dargestellte Methode zur Bestimmung von $\log\left(\frac{p^\eta}{p_1^{\eta_1}}\right)$ anwandte und die ε auf Grund dieses Werthes berechnete, ergaben sich bei allen 3 Gewichtspaaren sehr gut übereinstimmende ε-Werthe für dieselben Höhen. Für die Berechnung der Weber'schen Versuche waren die letzteren ε ebenfalls geeigneter, wiewohl auch die auf Grund der Annahme $\eta = \eta_1$ gefundenen das Gesetz noch gut bestätigten. Die technische Ausführung der Versuche gestaltete sich nun in folgender Weise.

Zunächst wurde der Rückprall der verschiedenen Kugeln durch je 100 Versuche ermittelt. Ueber das unter einer Neigung von etwa 10° stehende Fallbrett wurde eine horizontal liegende Platte geschoben, auf welcher übereinandergelegt 1 Bogen weißes und 1 Bogen leicht abfärbendes Papier befestigt waren. Die Kugeln fielen durch Rückprall auf diese Unterlage und zeichneten den Punkt auf, bis zu welchem sie zurückgeworfen wurden. Hieran schlossen sich die Versuche zur Bestimmung der grundlegenden Werthe $\eta = \varepsilon$ und des Ausdruckes $\frac{p^\eta}{p_1^{\eta_1}}$, und daran wieder je 100 Rückprallversuche für die einzelnen Kugeln. Die Wurfweiten wurden durch Abmessung mittels eines drehbaren, im Aufschlagepunkte der Kugeln durch einen feinen Stift befestigten Maßstabes bestimmt und das Mittel aus je 200 Versuchen als Wurfweite w angenommen.

Bezeichnet α (Fig. 1, Taf. II) die Neigung des Fallbretts gegen die Horizontale, β den Winkel, unter welchem die Kugel das Fallbrett trifft und unter dem sie von demselben zurückgeworfen wird, und schließlich γ den Winkel, unter dem die Kugel zur Horizontalebene zurückprallt, so ist:

$$\beta = 90 - \alpha; \quad \gamma = 90 - 2\alpha.$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel zurückgeworfen wird, berechnet sich nach der Formel:

$$v = \sqrt{\frac{w \cdot g}{\sin 2\gamma}}.$$

Daraus bestimmt sich die Höhe, bis zu welcher sie durch diese Geschwindigkeit senkrecht emporsteigen würde, aus $h' = \frac{v^2}{2g}$ zu:

VII) $$h' = \frac{w}{2 \sin 2\gamma}.$$

Die Methode der Minimaländerungen, durch welche die h_1, h_2 u. s. w. gewonnen wurden, war folgender Art.

Die Kugel p wurde zunächst von der Höhe $h = 10$ cm fallen gelassen und damit die Schallstärken der kleineren Kugel p_1 verglichen. Man geht zu dem Zwecke zunächst von einem untermerklichen Reize aus und erhöht ihn soweit, bis beide Schallstärken eben sicher als gleich beurtheilt werden, und dann langsam soweit zurück, bis sich beide Schallintensitäten eben wieder mit Sicherheit unterscheiden lassen. Beide Punkte werden notirt.

In gleicher Weise verfährt man von einem übermerklichen Reize ausgehend. Beide Versuchsgattungen werden für beide Zeitfolgen ausgeführt, d. h. einmal, wenn p, und sodann, wenn p_1 zuerst fällt. Zur größeren Sicherheit wurden die nämlichen Versuche nach einer Pause nochmals durchgeführt und dabei erst von einem übermerklichen und dann von einem untermerklichen Reize ausgegangen und gleichzeitig ein Wechsel der Zeitlagen vorgenommen. Nach Berechnung des ε für h_1 fiel die Kugel p von dieser Höhe und man ermittelte das entsprechende h_2 für p_1 u. s. w. Hatte man die ε für die Höhen 10 bis 140 cm gewonnen, so wurden die Versuche rückwärts ausgeführt, p_1 fiel alsdann von der Höhe $h_1 = 140$ cm, und man bestimmte h für die schwerere Kugel p durch die Methode der Minimaländerungen in oben angegebener Weise. Zur Berechnung der ε diente jetzt die Formel:

$$\text{III}'') \qquad \varepsilon = \frac{\varepsilon_1 \log h_1 - (\eta \log p - \eta_1 \log p_1)}{\log h}.$$

Aus beiden Reihen von ε-Werthen wurden die arithmetischen Mittel genommen und bei Berechnung der Schallstärken für die Weber-schen Versuche angewandt.

Mit diesen Versuchen wurden Versuche verbunden, welche die Elimination des durch das Weber'sche Gesetz bedingten Fehlers in der Bestimmung des Gleichheitspunktes bezweckten. Dieselben wurden in gleicher Weise wie die mit den Gewichten p und p_1 angestellten Versuchsreihen mit zwei gleich schweren Kugeln p ausgeführt.

Bezeichnen wir das Mittel aller 8 Aufzeichnungen beim Ausgange von einem untermerklichen Unterschiede durch h_u und das Mittel beim Ausgange von einem übermerklichen durch h_o, so ergaben sich bei $h = 20$ z. B. für h_u und h_o die Werthe 16 cm und 26 cm. Das arithmetische Mittel dieser Größen ist 21, demnach h um 1 cm oder 5 % falsch bestimmt. Wollte man den Werth 21 corrigiren, so würde das am besten durch Verkleinerung von h_o geschehen, das offenbar infolge der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes zu groß gefunden worden ist. Die Verminderung von h_o geschieht durch Multiplication mit einem Reductionsfactor, der sich bestimmt aus:

$$Rh_o = h + (h - h_u),$$

wo linker Hand derjenige Werth von h_o steht, der mit h_u zum Mittel vereinigt das richtige h geben würde. Für den Reductionsfactor erhält man sonach:

$$\text{VIII}) \qquad R = \frac{2h - h_u}{h_o},$$

d. h. für obigen speciellen Fall 0,92.

Multiplicirt man mit diesem Factor auch das h_0 des Gewichts p_1, so gibt das arithmetische Mittel aus diesem Werthe und h_u den richtigen Gleichheitspunkt oder den Werth h_1. Die Reductionsfactoren erwiesen sich für die einzelnen Reihen sowohl, wie überhaupt für alle Versuche als gut übereinstimmend. Damit bereits ist die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes als wahrscheinlich nachgewiesen; denn der Werth R lässt sich darstellen durch:

$$R = \frac{1}{a}\left\{2 - \frac{1}{b}\right\},$$

worin die Größen a und b $\left\{\frac{h_o}{h} \text{ und } \frac{h}{h_u}\right\}$ abgesehen von dem Einfluss des ε constant sein müssen.

Die η wurden auf Grund der ε-Werthe ebenfalls in doppelter Weise ermittelt. Einmal fiel das größere Gewicht p von der Höhe 20 cm und es wurde die Höhe h_1 für p_1 gesucht, bei welcher die Schallstärken gleich stark wurden; das andere Mal fiel dagegen p_1 von der Höhe 30 cm und man bestimmte die Höhe h des Gewichts p. Die Elimination des Zeitfehlers und des durch das Weber'sche Gesetz bedingten Fehlers geschah wie bei den ε-Bestimmungen, zur Berechnung der η diente die früher angegebene Formel V, in welcher η_1 nach der früher angegebenen Weise ermittelt worden war. Für jedes folgende Gewicht bildete das jeweils zuletzt ermittelte η die Grundlage. Für die Bestimmung der η für kleinere Gewichte als p_1 war die Formel:

$$\text{IX)} \qquad \eta_y = \frac{\eta_1 \log p_1 + \varepsilon_1 \log h_1 - \varepsilon_y \log h_y}{\log p_y}$$

anzuwenden, in welcher $h_y > h_1$, während in Formel V $h_x < h_1$ gefunden wurde.

Bei den ε- und η-Bestimmungen der ersten Gruppe wurden die grundlegenden Werthe $\varepsilon = \eta$ noch nicht mit Benutzung von Elfenbeinkugeln ermittelt, sondern aus dem Rückprall der Messingkugeln selbst. Daher sind die Schallstärken dieser Gruppe sämmtlich etwas zu groß bestimmt. Für die Weber'schen Versuche ist dieser Umstand von keiner störenden Einwirkung, weshalb von der Mittheilung dieser Versuche nicht Abstand genommen wurde.

Die ε- und η-Bestimmungen der Gruppen II und IIIa sind vollständig nach den im vorstehenden entwickelten Grundsätzen erfolgt, bei den analogen Bestimmungen der Gruppe IIIb wurden die Gleichheitspunkte mittels der Fechner'schen Methode der richtigen und falschen Fälle gewonnen. Da diese Methode in der von uns angewandten Weise überhaupt noch nicht zur Verwendung gekommen ist und zuweilen die Meinung Ausdruck gefunden hat, sie stehe auf dem Gebiete des Schalles hinter derjenigen der Minimaländerungen zurück, so müssen wir eine eingehendere Darstellung und experimentelle Begründung dieser Methode vorausschicken.

B. Methode der richtigen und falschen Fälle.

Die folgende Darstellung der Fechner'schen [1]) Methode der richtigen und falschen Fälle soll sich speciell nur auf die Versuche im Ge-

1) Fechner, Revision der Hauptpunkte der Psychophysik, S. 84.

biete der Schallempfindungen stützen; sie wird in einzelnen Punkten auch die Müller'sche[1]) Kritik und die von Müller herrührenden Ergänzungen berühren und die noch zweifelhaften Punkte theoretisch und experimentell beleuchten.

1. Zur Theorie der Methode.

Wir gehen von der Annahme aus, dass die Versuche nach der Methode der richtigen und falschen Fälle zunächst mit zwei objectiv vollständig gleichen Reizen i und i_1 angestellt werden, von denen dann der zweite vergrößert werden soll. Im Sinne der Fechner'schen Methode wird bei Vergleichung der Reize verlangt, womöglich stets einen Unterschied herauszufinden oder, mit andern Worten, bald das Urtheil $i > i_1$, bald $i < i_1$ abzugeben. Da wo ein Unterschied absolut nicht zu bemerken, oder wo uns die Richtung desselben nicht klar zum Bewusstsein kommt, wird das Urtheil zweifelhaft lauten. Das Urtheil $i_1 > i$ wird als richtig, das Urtheil $i_1 < i$ als falsch bezeichnet. Obwohl die Constatirung eines Unterschiedes zwischen zwei objectiv gleichen Reizen durch falsche Auffassung jedes der beiden Reize sich erklärt, so können wir doch die Annahme machen, es würde i richtig aufgefasst, nur bei Beurtheilung von i_1 würden bald größere, bald kleinere, bald nach dieser Richtung, bald nach jener Richtung gehende Fehler begangen.

Werden die Reize i und i_1 durch den Fall gleicher Kugeln p von der nämlichen Höhe h erzeugt, ist also $i = i_1$ so wird man daher annehmen können, es sei eine gleiche Anzahl richtiger und falscher Fälle vorhanden, weshalb die zweifelhaften in diesem Falle ohne Bedenken halb den richtigen und halb den falschen zugezählt werden können. Man erhält dann:

$$\text{I)} \qquad \left\{\begin{aligned} r' &= r + \frac{z}{2}, \\ f' &= f + \frac{z}{2}. \end{aligned}\right\}$$

Vergleichen wir zwei Reize, deren Intensitäten wir nicht kennen, so wird daher das Criterium der Gleichheit bei n Versuchen lauten:

1) Müller, Zur Grundlegung der Psychophysik, S. 11.

$$\text{II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} r' &= \frac{1}{2} n, \\ f' &= \frac{1}{2} n. \end{aligned} \right\}$$

Lassen wir nunmehr $i_1 > i$ werden, so werden sich die Fehler, welche wir bei Beurtheilung von i_1 begehen, in ähnlicher Weise darstellen lassen, nur wird sich der Spielraum über ein größeres Höhenintervall ausdehnen, da der mittlere wahrscheinliche Fehler bei Beurtheilung eines Reizes diesem proportional zu setzen ist. Die Zeichnungen I und II (Fig. 2), unter denen I dem Fall $i_1 = i$ und II dem Fall $i_1 > i$ entspricht, lassen erkennen, dass die Urtheile richtig so lange auf Kosten der falschen zunehmen, als überhaupt noch falsche Fälle vorhanden sind. Die Anzahl der zweifelhaften Fälle wird mit der Zunahme von i_1 abnehmen, da die Fehler in der Nähe von i_1 in größerer Zahl liegen. Auch hier empfiehlt sich die Halbirung der zweifelhaften Fälle, da die verhältnissmäßige Theilung jedenfalls nach der andern Seite größere Fehler bedingen würde. Doch bezieht sich dies streng genommen nur auf die Gleichheitsfälle, die eigentlich zweifelhaften dürften theoretisch die proportionale Vertheilung erfordern. Indessen kommen derartige Fälle so selten vor, dass ihre besondere Beachtung völlig überflüssig erscheint.

Die Größe C der Zunahme der richtigen Fälle r' im Vergleich zu den falschen f' wird von der Größe der Zunahme D der beiden Reize i und i_1 abhängen. Sie berechnet sich nach Fechner durch:

$$C = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{mD = t_0} e^{-t^2} dt.$$

Alsdann ergeben sich die Formeln:

$$\text{III)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{r'}{n} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{mD = t_0} e^{-t^2} dt, \\ \frac{f'}{n} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{mD = t_0} e^{-t^2} dt, \end{aligned} \right\}$$

welche durch Addition $\frac{r'}{n} + \frac{f'}{n} = 1$ geben und für $D = 0$ sich in die Formeln II verwandeln.

Bezeichnen wir das Gebiet, innerhalb welches die Urtheile zweifelhaft lauten, durch S und die unter und über dem wahren Gleichheitspunkte gelegenen Theile von S durch S_1 und S_2, so bestimmen sich diese Schwellen nach Fechner in folgender Weise. Die Formel I gibt, wenn wir von dem Werthe r' die Größe $\frac{z}{2}$ abziehen, offenbar den Werth r. Die Fälle $\frac{z}{2}$ entsprechen aber dem Gebiet S_1. Daher wird aus der ersten Formel III:

$$\text{IV)} \qquad \frac{r}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m(D - S_1) = t_I} e^{-t^2}\, dt.$$

Fügen wir aber zu r' noch $\frac{z}{2}$ hinzu, so ergibt sich $r + z$ und diese Fälle entsprechen der Zulage $D + S_2$. Daher wird:

$$\text{IV')} \qquad \frac{r+z}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m(D + S_2) = t_{II}} e^{-t^2}\, dt.$$

Mit Rücksicht auf die Fundamentaltabelle wird:

$$\text{V)} \qquad \left\{ \begin{matrix} m\,(D - S_1) = t_I \\ m\,(D + S_2) = t_{II} \end{matrix} \right\},$$

während die erste Formel III liefert:

$$\text{VI)} \qquad m\,D = t_0.$$

Die Gleichungen V und VI geben:

$$\text{VII)} \quad m = \frac{t_0}{D};\ S_1 = \left(\frac{t_0 - t_I}{t_0}\right) D;\ S_2 = \left(\frac{t_{II} - t_0}{t_0}\right) D.$$

Da $S = S_1 + S_2$, so wird: $S = \frac{t_{II} - t_I}{t_0}\ D = \frac{t_{II} - t_I}{m}$.

Müller[1]) stellt von vorn herein für die Intervalle $D - S_1$ und $D + S_2$ den Formeln IV entsprechende Formeln auf und setzt dabei $S_1 = S_2 = \frac{S}{2}$. Dadurch erhält er:

$$\text{VIII)} \qquad \left\{ \begin{matrix} M = \frac{t_1 + t_2}{2D} \sqrt{2 + 2\vartheta + \vartheta^2} \\ S = 2\,D \cdot \frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1} \end{matrix} \right\}$$

Von verschiedenen Seiten wurde geglaubt, dass das Müller'sche $\frac{S}{2}$ oder die Fechner'schen Werthe S_1 und S_2 mit den Unterschieds-

1) Müller, Zur Grundlegung der Psychophysik, S. 20.

schwellen der Methode der Minimaländerungen identisch seien, was jedoch deshalb nicht der Fall sein kann, weil die Beurtheilung der Schallstärken bei der Fechner'schen Methode der richtigen und falschen Fälle eine wesentlich andere ist, als bei der Methode der Minimaländerungen. Die Schwellen S_1 und S_2 werden jedenfalls wesentlich kleiner als diejenigen der Methode der Minimaländerungen, den letzteren jedoch höchst wahrscheinlich proportional sein. Daher verdient auch die Fechner'sche Bestimmung dieser Größen vor der Müller'schen den Vorzug, denn sie liefert $S_2 > S_1$ [1]. Da indess die Werthe S_1 und S_2 nur klein ausfallen können, ist dieser Differenz zwischen Fechner und Müller eine besondere Bedeutung nicht beizumessen.

Bei Fechner bedeutet m [2] das Maß der Genauigkeit, mit welcher man den Unterschied zweier Reize auffasst, Müller dagegen führt in seine Formeln die Präcisionsmaße der einzelnen Reize selbst ein. Bezeichnen wir die Präcisionsmaße der Reize i und i_1 durch M und M_1, so findet zwischen dem Fechner'schen m und den Müller'schen M und M_1 folgende Beziehung statt:

$$\text{IX)} \qquad m = \frac{M M_1}{\sqrt{M^2 + M_1^2}}.$$

Die Größe δ in der ersten Formel VIII hat den Werth: $\delta = \frac{M - M_1}{M_1}$. Müller erwähnt, dass δ bei nicht zu großem $D = i_1 - i$ gleich 0 gesetzt werden könne. Dann stellt sich die Beziehung zwischen dem Fechner'schen und Müller'schen Präcisionsmaße dar durch:

$$\text{IX}') \qquad m = \frac{M}{\sqrt{2}}.$$

Da der bei Beurtheilung eines Reizes begangene wahrscheinliche Fehler F umgekehrt proportional dem Präcisionsmaße ist, so ergibt sich für das Müller'sche M noch die Relation:

$$\text{X)} \qquad F = \frac{1}{M\sqrt{\pi}},$$

---

1) Vgl. hierzu Fechner, Revision der Hauptpunkte der Psychophysik, S. 72.

2) Da von uns h zur Bezeichnung der Fallhöhen angewandt worden ist, bezeichnen wir das Fechner'sche Präcisionsmaß h durch m, das Müller'sche durch M bez. M_1, M_2 u. s. w.

während sich für den mittleren wahrscheinlichen Fehler bei Beurtheilung der Differenz $D = i_1 - i$ ergibt:

$$\text{X}') \qquad F' = \frac{1}{m\sqrt{\pi}} = \frac{M}{m} F.$$

Demnach ist F' durch Multiplication des Fehlers F mit $\frac{M}{m}$ leicht abzuleiten.

Der Haupteinwand, den Fechner gegen die Einführung der Präcisionsmaße M und M_1 erhoben hat, gipfelt in dem Vorwurf, dass Müller zwar zu der Beziehung:

$$\text{XI}) \qquad \frac{i}{i_1} = \frac{M_1}{M},$$

aber nicht bis zum erforderlichen Ziele, nämlich nicht bis zur Gewinnung eines als Maß der Unterschiedsempfindung brauchbaren Präcisionsmaßes gelangt sei. Hiergegen lässt sich folgendes erwidern.

Unter Voraussetzung der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes wird offenbar der wahrscheinliche Fehler, den man bei Beurtheilung einer Schallstärke begeht, proportional der Schallstärke sein, mithin das Präcisionsmaß für die Auffassung dieser Schallstärke umgekehrt proportional derselben. Sonach ist die Müller'sche Relation XI eine unmittelbare Folge des Weber'schen Gesetzes. Bestimmt man jedoch die Fechner'schen Präcisionsmaße m_1 und m_2 für zwei verschiedene D, so führt die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes nicht etwa zur Constanz der Präcisionsmaße, wie vielfach vorausgesetzt worden ist, sondern es muss infolge der Relationen IX und XI die Beziehung:

$$\text{XII}) \qquad \frac{\sqrt{i^2 + i_1^2}}{\sqrt{i^2 + i_2^2}} = \frac{m_2}{m_1}$$

erfüllt sein. Sonach müssen sich nach Müller die Werthe iM, $i_1 M_1$, $i_2 M_2$ u. s. w. als constant erweisen, nach Fechner die Ausdrücke $m_1 \sqrt{i^2 + i_1^2}$, $m_2 \sqrt{i^2 + i_2^2}$, $m_3 \sqrt{i^2 + i_3^2}$ u. s. w., wenn die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes erwiesen sein soll. Dieses Criterium gilt nicht nur für das nämliche i bei verschiedenen D, beziehentlich i_1, i_2, i_3 u. s. w., sondern auch für verschiedene i, also ganz allgemein.

Müller hält jedoch das Präcisionsmaß durchaus für ungeeignet zur Prüfung des Weber'schen Gesetzes. Er gründet dieselbe vielmehr auf die Ermittelung der Unterschiedsschwelle S, die er derjenigen der Methode der Minimaländerungen schlechthin identisch annimmt. Abgesehen davon, dass diese Identität keineswegs anzunehmen, ist sowohl die Fechner'sche als auch die Müller'sche Ableitung der Schwellenwerthe nur unter der Voraussetzung streng richtig, dass sich m mit dem Werthe D nicht ändert. Nach Fechner würde man streng genommen haben:

$$\text{VII}')\qquad S_1 = D - \frac{t_{\text{I}}}{m_{\text{I}}};\ S_2 = \frac{t_{\text{II}}}{m_{\text{II}}} - D.$$

Nun besteht, wie die vorausgehenden Entwicklungen gezeigt haben, die Beziehung:

$$m_{\text{I}} > m > m_{\text{II}},$$

weshalb für die den Formeln VII zu Grunde liegende Voraussetzung $m_{\text{I}} = m = m_{\text{II}}$ die Größen S_1 und S_2 zu klein gefunden werden. Aehnliches gilt natürlich auch für den Müller'schen Schwellenwerth S.

Das Müller'sche Criterium für die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes ist abgesehen von der Unmöglichkeit einer exacten Bestimmung von S vor allem auch deshalb unsicher, weil es sich lediglich auf die Anzahl der vorkommenden z gründet, d. h. gerade auf diejenigen Urtheile, welche unserer Meinung nach eine unliebsame Beigabe dieser Methode sind. Es würde übrigens nichts hindern, bei den Versuchen zu verlangen, nur die Urtheile richtig und falsch abzugeben. Die Fechner'sche Methode der richtigen und falschen Fälle mit ihren Schlüssen auf Grund des Präcisionsmaßes würde dabei bestehen bleiben, das Müller'sche Criterium für die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes sich dagegen als völlig nutzlos erweisen.

Fechner hingegen verlangt für den Nachweis der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes die Constanz von $m_1 D$ für ein verhältnissgleiches D, d. h. für den Fall, dass D immer denselben Bruchtheil des jeweils verwandten Hauptreizes i betrage. Das von uns aufgestellte allgemeine Criterium $m_1 \sqrt{i^2 + i_1{}^2} =$ const. für veränderliche Werthe von i und i_1 geht jedoch, wenn wir für i_1 den Werth $i \pm D$ einführen, über in:

$$m_1 \sqrt{i^2 + (i \pm D)^2} = m_1 \sqrt{2i^2 \pm 2iD + D^2} = \text{const.}$$

Setzen wir nunmehr die Beziehung $D = \frac{i}{\gamma}$ fest, in welcher γ eine ganze Zahl darstellt, die nach Fechner constant bleiben soll, so ist $i = D\gamma$ und man erhält:

$$m_1 D \sqrt{2\gamma^2 \pm 2\gamma + 1} = \text{const.}$$

Dieser Ausdruck ist bei constantem γ für $m_1 D = \text{const.}$ ebenfalls constant, weshalb die Fechner'sche Methode der Prüfung des Weberschen Gesetzes eine einwurfsfreie genannt werden kann.

Für die Berechnung der Müller'schen Präcisionsmaße M und M_1 aus dem durch die erste Formel VII definirten Fechner'schen Präcisionsmaße m ergeben sich aus IX und XI die Formeln:

$$\text{XIII)} \qquad \left\{ \begin{aligned} M &= m \sqrt{\left(\frac{i_1}{i}\right)^2 + 1}, \\ M_1 &= M \cdot \frac{i}{i_1} = m \sqrt{\left(\frac{i}{i_1}\right)^2 + 1}. \end{aligned} \right\}$$

Hat man diese Werthe bestimmt, so bildet die Constanz der Producte Mi, $M_1 i_1$, wie wir gesehen haben, das allgemeine Criterium für die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes. Falls aber die nach den Formeln VII bestimmten Schwellen den Schwellen der Methode der Minimaländerungen wenigstens proportional sind, so müssen die Verhältnisse $\frac{S_1}{i}$ und $\frac{S_2}{i}$ unter sich constant sein. Da aber auch die Mi constant sich ergeben müssen, so folgen noch die Bedingungen:

$$\text{XIV)} \qquad MS_1 = \text{const. und } MS_2 = \text{const.}$$

Das Zutreffen dieser Relationen hat Müller im Bezug auf die Fechner'schen Gewichtsversuche bestätigt gefunden.

Die der Beziehung $\frac{i_0}{i} = \frac{i}{i_u}$ bei Prüfung des Weber'schen Gesetzes durch die Methode der Minimaländerungen analoge würde lauten:

$$\text{XV)} \qquad \frac{i + S_2}{i} = \frac{i}{i - S_1} = \text{const.},$$

oder:

$$\frac{S_1 S_2}{S_2 - S_1} = i.$$

Die Fechner'schen und Müller'schen Formeln der Methode der richtigen und falschen Fälle setzen die Kenntniss der benutzten Reizstärken, beziehentlich die Möglichkeit einer genauen Bestimmung der D voraus. Diese Bestimmung wurde bei den früheren Schallversuchen mit Hülfe der Methode der Minimaländerungen ausgeführt. Indessen bietet die Methode der richtigen und falschen Fälle die Mittel zu einer genauen Bestimmung der Schallstärken selbst dar, indem sie möglichst genau die Gleichheit zweier Schalle zu ermitteln gestattet. Um dies zu zeigen, benutzen wir als Hauptschall den durch die Kugel p beim Fall von der Höhe h erzeugten Schall und als Vergleichsschalle die durch dieselbe Kugel beim Fall von den Höhen h_1 und h_2 erzeugten Schallstärken. Dann gibt die Methode der richtigen und falschen Fälle:

$$\text{XVI)} \qquad m_1 = \frac{t_1}{D_1}; \quad m_2 = \frac{t_2}{D_2},$$

worin $D_1 = p^\eta (h_1^{\varepsilon_1} - h^\varepsilon)$ und $D_2 = p^\eta (h_2^{\varepsilon_2} - h^\varepsilon)$ ist.

Es handelt sich nunmehr darum, aus $i_1 = p^\eta h_1^{\varepsilon_1}$ und $i_2 = p^\eta h_2^{\varepsilon_2}$ und den durch die Versuche ermittelten Werthen t_1 und t_2 den Werth $i = p^\eta h^\varepsilon$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke ist die Untersuchung des Verhältnisses:

$$\text{XVII)} \qquad \frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{i^2 + i_2^2}{i^2 + i_1^2}}$$

erforderlich. Da man i selber erst ermitteln will, empfiehlt es sich die Abhängigkeit von $\frac{m_1}{m_2}$ von den bekannten Größen i_2 und i_1 zu untersuchen, d. h. etwa:

$$\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{i_2}{i_1}\right)^\delta$$

zu setzen und δ zu berechnen aus:

$$\text{XVIII)} \qquad \delta = \frac{\log m_1 - \log m_2}{\log i_2 - \log i_1}.$$

Bezeichnet man zur Abkürzung $\left(\frac{i_2}{i_1}\right)^\delta$ durch A, so erhält man aus XVI zur Bestimmung von i den Werth:

$$\text{XIX)} \qquad i = \frac{t_2 i_1 A - t_1 i_2}{t_2 A - t_1},$$

oder für h^ε ergibt sich:

$$\text{XX)} \qquad h^\varepsilon = \frac{t_2 h_1^{\varepsilon_1} A - t_1 h_2^{\varepsilon_2}}{t_2 A - t_1}.$$

Ueber die Größe von δ lässt sich theoretisch folgendes entwickeln.

Für $i = i_2 - D_2$ und $i = i_1 - D_1$ kann die Relation XVII übergeführt werden in:

$$\frac{m_1}{m_2} = B \cdot \sqrt{\frac{i_2}{i_1}},$$

worin B zur Abkürzung für den Ausdruck:

$$B = \sqrt{\frac{(i_2 - D_2) + \frac{D_2^2}{2 i_2}}{(i_1 - D_1) + \frac{D_1^2}{2 i_1}}} = \sqrt{\frac{i + \frac{D_2^2}{2 i_2}}{i + \frac{D_1^2}{2 i_1}}}$$

gesetzt worden ist.

Sind D_1 und D_2 positiv und betragen sie etwa 10 bez. 20 % von i, so erhält B den Werth 1,0063, für zwei negative D von entsprechender Größe ist $B = 1,0096$ und schließlich für ein negatives und ein positives D von je 10 % gleich 0,9995. Für 20 und 40 % sind die entsprechenden Werthe von B: 1,0195; 1,0515 und 0,99592.

Der Exponent δ bestimmt sich aus:

$$\left(\frac{i_2}{i_1}\right)^{\delta} = B \sqrt{\frac{i_2}{i_1}}$$

zu:

$$\delta = \frac{\log B}{\log i_2 - \log i_1} + 0,5,$$

d. h. je näher der Werth B der Einheit kommt, um so näher rückt δ dem Werthe 0,5. Die Größe von $\frac{\log B}{\log i_2 - \log i_1}$ ist für die oben genannten Werthe von D beziehentlich: 0,072 und 0,126 bei 2 positiven D, — 0,081 und — 0,175 bei zwei negativen D und — 0,003 und — 0,010 bei einem positiven und einem negativen D. Demnach ist die Abweichung des δ von 0,5 im letzteren Falle so unbedeutend, dass sie im Hinblick auf die Variationen, welchen die δ bei experimenteller Bestimmung jedenfalls unterworfen sind, vollständig vernachlässigt werden kann. Auch in den übrigen Fällen liefert die Annahme $\delta = 0,5$ genauere Resultate als etwa die Annahme $\delta = 1$ oder $\delta = 0$.

Die Formel XX kann zur Prüfung der mittels der Methode der Minimaländerungen bestimmten ε-Werthe angewandt werden, wenn man die Versuche mit zwei verschiedenen p ausführt. Will man mittels der Methode der richtigen und falschen Fälle die ε selbst bestimmen, so muss man etwa p constant von der Höhe h fallen lassen und das kleinere Gewicht p_1 von den größeren Höhen h_1' und h_1'' und die Anzahl der r, f und z ermitteln. Der Werth h_1, für welchen $p^{\eta} h^{\varepsilon} = p_1^{\eta_1} h_1^{\varepsilon_1}$ ist, bestimmt sich alsdann aus der Gleichung:

XXI) $$h_1 = \frac{t_2 h_1' A - t_1 h_1''}{t_2 A - t_1},$$

in welcher $A = \sqrt{\frac{h_1''}{h_1'}} = \left(\frac{h_1''}{h_1'}\right)^{\frac{\delta_1}{2}}$ ist, worin δ_1 aus:

XXII) $$\delta_1 = \frac{\log m_1' - \log m_2'}{\log h_1'' - \log h_1'}$$

zu berechnen ist. Die in letzterer Formel auftretenden Präcisionsmaße sind unter Benutzung der Werthe $D_1 = h_1' - h_1$ und $D_2 = h_1'' - h_1$ zu bestimmen. Wählt man übrigens ein positives und ein negatives D, was leicht ausführbar, wenn man vorher eine Beobachtungsreihe nach der Methode der Minimaländerungen gewonnen hat, so liefert die Annahme $\delta = 0,5$ Resultate, wie sie exacter kaum zu wünschen sind.

Wir haben vor der Mittheilung der Versuchsergebnisse, welche sich auf die Prüfung der Anwendbarkeit der Fechner'schen Methode der richtigen und falschen Fälle im Gebiete der Schallempfindungen beziehen, noch einen überaus wichtigen Punkt zu besprechen. Derselbe betrifft die Elimination constanter Fehler, namentlich die Elimination des durch die Zeitfolge der zu vergleichenden Schallstärken bedingten Fehlers.

Angenommen, die zu vergleichenden Schallintensitäten seien i_1 und i und zwar $i_1 > i$. Folgt i_1 auf i, so erscheint der Unterschied D um einen Werth p vergrößert, folgt hingegen i auf i_1, so ist D um einen Werth p_1 verkleinert. Infolge des Weber'schen Gesetzes wird nicht etwa $p = p_1$ anzunehmen sein, sondern vielmehr $p > p_1$, d. h. einen stärkeren Schall i_1 werden wir dann, wenn er an zweiter Stelle einwirkt, um verhältnissmäßig mehr überschätzen, als einen schwächeren i, der an zweiter Stelle vernommen wird.

Die Fechner'sche Methode[1]) der vollständigen Elimination constanter Fehler setzt $p = p_1$ und berechnet den Werth t beziehentlich mD aus der Relation:

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{m(D+p) + m(D-p)}{2} = mD,$$

in welcher t_1 und t_2 die den Verhältnissen $\frac{r'}{n}$ für beide Zeitfolgen entsprechenden Werthe der Fundamentaltabelle sind. Für $p > p_1$ ergibt sich aber:

1) Fechner, Revision der Hauptpunkte der Psychophysik, S. 130.

$$t = mD + \frac{p - p_1}{2},$$

oder:

$$mD = t - \left(\frac{p - p_1}{2}\right),$$

d. h. mD wird kleiner als vorher.

Dieser Forderung trägt aber das Verfahren der unvollständigen Elimination constanter Fehler, nach welchem die Fälle r' der beiden Zeitfolgen einfach addirt werden und t für den Mittelwerth bestimmt wird, Rechnung, da es in der That etwas kleinere Werthe für mD liefert. Es lässt sich auch auf Grund des Weber'schen Gesetzes theoretisch zeigen, dass eine etwas größere Vermehrung von D stattfinden muss, um eine bestimmte Anzahl richtiger Fälle mehr zu bekommen, als die Verminderung beträgt, welche dieselbe Anzahl richtiger Fälle weniger liefert. Daher haben wir uns der sogenannten Methode der unvollständigen Elimination constanter Fehler bedient, welche auch aus praktischen Gründen einzig und allein Anwendung finden konnte. Denn bei der Methode der vollständigen Elimination würden sich schon bei verhältnissmäßig kleinen D Fehlschläge ergeben haben. Aehnliches fand auch Fechner[1], als er auf die Nörr'schen Versuche das letztere Verfahren anwenden wollte.

Wir geben im nächsten Abschnitt die experimentellen Ergebnisse derjenigen Versuche, welche überhaupt die Anwendbarkeit der Fechner'schen Methode der richtigen und falschen Fälle bei Prüfung des Weber'schen Gesetzes und zur Bestimmung des Gleichheitspunktes einer Prüfung unterziehen sollten. Es genügt hierbei, für die wesentlichsten Fälle nur eine beschränkte Gruppe von Versuchen mitzutheilen, welche die in Frage kommenden Verhältnisse hinreichend illustriren. Wir schließen an diese Versuche zugleich die Betrachtungen, welche die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes betreffen, vor allem auch deshalb an, weil die zur Prüfung des Weber'schen Gesetzes angestellten Versuche insofern anderer Natur sind, als sie zur Kenntniss der Unterschiedsschwelle der Methode der Minimaländerungen führen.

1) Fechner, Revision der Hauptpunkte der Psychophysik, S. 385.

2. Experimentelle Prüfung der Methode.

Die Kugeln, welche bei den Versuchen zur Prüfung der Fechner'schen Methode verwandt wurden, waren von Messing und hatten die Gewichte: 4,95 und 9,93 g. Dieselben fielen auf eine quadratische Platte aus festem, harten Holz, welche 25 cm lang und 3 cm stark war. Dieselbe wurde auf Tuchpölsterchen ruhend in einer Neigung von 10° auf einem überaus standhaften Experimentirtische aufgestellt. Daneben erhob sich in senkrechter Stellung ein an 3 Punkten an der Wand befestigter Stab von 2 m Länge. An diesem konnten die Apparate zum Fallenlassen der Kugeln, die kurz als Fallzangen bezeichnet werden sollen, mit Leichtigkeit auf und abwärts bewegt werden. Parallel dem Stabe war ein genaues, in Millimeter eingetheiltes Maß in die Höhe gezogen, über welchem sich an den Fallzangen befestigte Zeiger auf und abwärts bewegten. Dieselben gestatteten eine sehr genaue Ablesung der Fallhöhe der Kugeln.

Ueber das untere Drittel der Holzplatte war ein hoher, durchaus mit Watte gepolsterter, nach oben und vorn offener Kasten geschoben, welcher das Fallbrett in keinem Punkte berührte, also die Schwingungen desselben nicht dämpfte. Derselbe fing die zurückprallenden Kugeln vollständig geräuschlos auf und ge tattete, da er mit dunklem, weichem Stoff überzogen war, ein sofortiges Auffinden derselben.

Die Fallzangen sollten ohne Anwendung der Elektricität ähnliches leisten, wie der von Wundt construirte Fallapparat, dessen genaue Beschreibung die Starke'sche[1]) Abhandlung gibt. Figur 3 stellt eine derartige Fallzange in möglichst übersichtlicher Stellung dar. Dieselbe ist im Punkte A drehbar befestigt und kann sich in der Richtung des Pfeiles bewegen, bis der Stift B an den Träger der Zange anstößt. Die beiden Arme C und C' sind in den Punkten D und D' an einem Querstab befestigt, und zwar so, dass der Punkt D den Drehpunkt der Zange bildet. Der Hebelarm C' kann längs der Strecke $e\ e'$ verschoben und durch Schrauben an den Querbalken unbeweglich befestigt werden. Die Rinne E dient zum Aufnehmen der Fallkugeln, die alsdann von den ebenen Platten F und F' festgehalten werden und zwar durch die Feder G. Die zweite Fallzange hatte dieselbe Einrichtung, nur wurde dieselbe in anderer Lage an dem

1) Wundt, Philos. Studien, III, S. 270.

horizontalen Stab befestigt und in entgegengesetzter Richtung gedreht, um das Fallenlassen der Kugeln zu bewirken. Letzteres musste geschehen, um die Kugeln bequem zwischen die Platten F und F' bringen zu können, wenn die Fallapparate nahe zusammen kamen. Sollten die Kugeln von gleicher Höhe fallen, so musste eine dritte Fallzange benutzt werden, welche sich an einem besonderen Stabe auf und abwärts bewegte. Letztere kam nur zur Verwendung, wenn die beiden andern sich nicht gleichzeitig gebrauchen ließen.

Diese Einrichtung gestattete, die Versuche in weitaus genügend schneller Aufeinanderfolge zur Ausführung zu bringen. Beide Zangen wurden durch einen Druck geöffnet und die Kugeln in die Rinne E geworfen. Dieselben wurden dann so festgeklemmt, dass die Platten F parallel waren. Um die Versuche auszuführen, wurden die Zangen nach einander um etwa 30° gedreht und durch einen Druck das Fallen der Kugeln bewirkt. Die Zurückführung geschah durch die Feder H, einmal um dieselbe gleichmäßig zu gestalten, sodann um ein etwaiges Vergessen zu verhindern. Es war nach Möglichkeit Sorge getragen, dass die Apparate möglichst geräuschlos arbeiteten, namentlich das Zurückdrehen musste völlig geräuschlos erfolgen.

Diese von Wundt zum ersten Male eingeführte Einrichtung begründet einen wesentlichen Fortschritt auf dem Gebiete der Schallstärkemessung. Bei den Versuchen nach der Methode der Minimaländerungen ergibt sich eine geringere mittlere Variation der einzelnen Beobachtungen, ja einzelne wichtige Ergebnisse dieser Abhandlung haben sich erst auf Grund der Versuche herausgestellt, welche mit Benutzung der Fallzangen angestellt wurden. Wir werden vielfach Gelegenheit nehmen, die Versuchsresultate mit und ohne Anwendung der Fallzangen einer Vergleichung zu unterwerfen, weil sich dabei einzelne wichtige Thatsachen ergeben, deren directe und eingehendere Untersuchung von Interesse sein dürfte.

Die ersten Versuche bestanden in der Prüfung der der Fechner'schen Methode zu Grunde liegenden Voraussetzung, dass sich bei gleichen Schallstärken gleichviel richtige und falsche Fälle ergeben. Sodann wurden bei drei verschiedenen h (20, 50 und 90 cm) mit einer größeren Anzahl D Versuche ausgeführt, schließlich reihten sich daran Versuche, bei denen stets nur für zwei D die Anzahl der richtigen, falschen und zweifelhaften Fälle ermittelt wurde. Bei jeder Zeit-, beziehentlich Raumlage wurden 50 Versuche ausgeführt, die Zeitlage, bei welcher der constant bleibende Schall zuerst erregt wurde, werde durch I, die Zeitlage, in welcher derselbe an zweiter Stelle einwirkt, durch II bezeichnet; beginnt man bei dem kleineren D (h'), um sodann zu größeren vorzuschreiten, so werde dies durch einen abwärts zeigenden Pfeil (↓), im umgekehrten Falle durch einen aufwärts zeigenden (↑) angedeutet.

Als richtige Fälle sind ausnahmslos die bezeichnet worden, bei welchen der variable Schall als stärker geschätzt, als falsch diejenigen, bei welchen der constante Schall für stärker gehalten wurde. Diese consequente Bezeichnung bedingt, den Unterschied D da, wo der constante Schall absolut genommen der stärkere ist, negativ in Rechnung zu ziehen. Unter dieser Voraussetzung haben alle Formeln allgemeine Gültigkeit. Die Benutzung positiver und negativer D wird sich gerade für unsere Zwecke als überaus fruchtbar erweisen.

Es ist überflüssig, die Resultate der ersten Versuchsgattung im einzelnen mitzutheilen. Mit geringen nach beiden Seiten gehenden Schwankungen zeigte sich Gleichheit der richtigen und falschen Fälle bei gleichen Schallstärken; bei der ersten Zeitlage überwog die Anzahl der richtigen Fälle diejenige der falschen um ebensoviel, als bei der zweiten Zeitlage die Anzahl der falschen diejenige der richtigen. Bei den Versuchen, bei denen die Kugeln aus bloßer Hand fielen, ergaben sich bei der ersten Zeitlage 41 richtige, 5 falsche und 4 zweifelhafte Fälle, bei der zweiten Zeitlage dagegen 3 richtige, 41 falsche und 6 zweifelhafte Fälle; bei Benutzung der Fallzangen war jedoch der Einfluss der Zeitfolge wesentlich geringer, da für I 25 r, 14 f und 11 z, für II 16 r, 25 f und 9 z zu verzeichnen waren. Die Anzahl der zweifelhaften, richtiger der gleichen Fälle war hier jedenfalls deshalb größer, weil die Schallstärken objectiv sehr gut gleich gemacht werden konnten.

Von den Versuchen der zweiten Gattung wollen wir nur die für die Höhe $h = 50$ cm und das Gewicht $p = 9,93$ gefundenen Zahlen bei den Höhen $h' = 25, 30, \ldots 85$ cm mittheilen. (Tab. I.) Für die dritte und wichtigste Gruppe dagegen theilen wir für drei Höhen (25, 50 und 90 cm) die Versuchsergebnisse bei zwei Gewichten und A (2 positiven

D); B (2 negativen D und C) einem positiven und einem negativen D mit (Tab. II und III A, II und III B, II und III C).

Für die zweite Gruppe berechnen wir nur die Werthe für das Fechner'sche und Müller'sche Präcisionsmaß, den mittleren wahrscheinlichen Fehler und das Product iM beziehentlich $i_1 M_1$, aus dessen Constanz die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes resultirt. Für die dritte Gruppe berechnen wir zum Theil die Fechner'schen Schwellen S_1 und S_2 und die daraus sich ergebenden Ausdrücke für den Nachweis der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes, dann aber vor allem die Größen δ und δ_1 (Tab. IV) und h (Tab. V), letztere einmal mit Benutzung des δ_1, dann ohne Anwendung desselben (d. h. für $\delta_1 = 0$) berechnet (h_{δ_1} und h). Zur Vergleichung bringen wir auch für die Versuche II und III C die mittels der Methode der vollständigen Elimination constanter Fehler berechneten h bez. h_{δ_1} zur Mittheilung (Tab. VI).

Um namentlich den Einfluss der Zeitfolge einer genaueren Prüfung zu unterziehen, haben wir in den Tabellen VII bis X die den Versuchen II und III C entsprechenden Versuche zusammengestellt, welche ohne Anwendung der Fallzangen angestellt wurden. Dabei spielten die durch die Versuchstechnik bedingten Fehler eine größere Rolle. Die Zwischenzeiten zwischen der Einwirkung der zu vergleichenden Reizstärken waren kürzer als bei Anwendung der Fallzangen, das Verhältniss mochte etwa 2 : 3 sein.

Der mittlere wahrscheinliche Fehler F' für die Auffassung der Differenzen D berechnet sich durch eine der beiden Formeln: $F' = \frac{M}{m} F$ oder $F' = \frac{M_1}{m} \cdot F_1$, er ist je nach der Größe von D : 1,3 bis 2 mal so groß als F. Von der Mittheilung dieser Werthe ist abgesehen worden, da sie leicht aus den Werthen M, m und F zu entnehnen sind.

Tabelle I.

$h = 50\,\text{cm},\ p = 9{,}93\,\text{g}.$

h'	r I ↓	r II ↓	r II ↑	r I ↑	f I ↓	f II ↓	f II ↑	f I ↑	z I ↓	z II ↓	z II ↑	z I ↑
25	0	0	0	0	50	50	50	50	0	0	0	0
30	0	0	0	0	49	49	50	49	1	1	0	1
35	0	0	0	0	44	47	48	45	6	3	2	5
40	6	0	0	5	36	43	45	37	7	8	6	7
45	15	6	4	13	25	35	38	27	10	9	8	10
50	25	16	14	23	14	25	26	14	11	9	10	13
55	36	27	24	35	4	14	17	7	10	9	9	8
60	42	35	34	41	0	7	9	2	8	8	7	7
65	46	41	41	45	0	2	3	0	4	7	6	4
70	48	46	45	47	0	0	1	0	2	4	4	3
75	50	48	47	48	0	0	0	0	0	2	3	2
80	50	49	48	50	0	0	0	0	0	1	2	0
85	50	50	50	50	0	0	0	0	0	0	0	0

Eintheilung der Fälle r, f, z in r' und f'.

Tabelle Ia.

h_1	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
r'	0,75	4	12,5	28,25	49,75	70	83,5	91,75	96,25	98,25	99,25
f'	99,25	96	87,5	71,75	50,25	30	16,5	8,25	3,75	1,75	0,75

Tabelle Ib.

$i = 177{,}2.$

h_1	i_1	D	t_o	m	M	M_1	iM	F	F_1
30	107,8	— 69,4	— 1,7203	0,0248	0,0290	0,0477	5,144	19,42	11,82
35	123,4	— 53,8	— 1,2379	0,0230	0,0280	0,0402	4,966	20,13	14,02
40	140,2	— 37,0	— 0,8134	0,0220	0,0281	0,0355	4,971	20,11	15,91
45	157,7	— 19,5	— 0,4069	0,0209	0,0280	0,0314	4,958	20,17	17,94
50	177,2	0	— 0,0044	∞	~	~	~	~	20,32
55	197,2	+ 20	+ 0,3708	0,0185	0,0277	0,0249	4,905	20,38	22,68
60	216,9	+ 39,7	+ 0,6888	0,0174	0,0275	0,0225	4,873	20,52	25,11
65	237,5	+ 60,3	+ 0,9818	0,0163	0,0273	0,0203	4,830	20,70	27,74
70	257,9	+ 80,7	+ 1,2590	0,0156	0,0275	0,0189	4,881	20,48	29,81
75	279,3	+ 102,1	+ 1,4909	0,0146	0,0273	0,0173	4,829	20,70	32,63
80	301,1	+ 123,9	+ 1,7203	0,0139	0,0274	0,0161	4,856	20,59	34,98

Tabelle II A.

$p = 4{,}95$ g.

h	h'	r: I ↓	r: II ↓	r: II ↑	r: I ↑	f: I ↓	f: II ↓	f: II ↑	f: I ↑	z: I ↓	z: II ↓	z: II ↑	z: I ↑
25	28	35	26	27	38	11	19	18	5	4	5	5	7
	31	41	34	35	44	5	12	10	3	4	4	5	3
50	55	36	25	28	35	9	18	16	10	5	7	6	5
	60	43	34	36	42	3	13	11	2	4	3	3	6
90	98	35	28	29	34	8	16	16	10	7	6	5	6
	105	42	35	36	41	4	11	9	5	4	4	5	4

Eintheilung der Fälle r, f, z in r' und f'.

Tabelle II A a.

h'	28	31	55	60	98	105
r'	68,25	81	67,75	81,5	69	81,25
f'	31,75	19	32,25	18,5	31	18,75

Tabelle II A b.

$i = 48{,}9;\ 94{,}1;\ 189{,}8.$

h_1	i_1	D	t_o	m	M	M_1	iM	F	F_1
28	54,1	5,2	0,3357	0,0646	0,0966	0,0873	4,722	5,84	6,46
31	59,1	10,2	0,6208	0,0609	0,0955	0,0790	4,672	5,91	7,14
55	104,3	10,2	0,3258	0,0319	0,0476	0,0474	4,482	11,85	11,90
60	115,2	21,1	0,6340	0,0300	0,0474	0,0387	4,463	11,89	14,58
98	211,5	21,7	0,3506	0,0162	0,0243	0,0218	4,604	23,26	25,88
105	230,8	41	0,6274	0,0153	0,0241	0,0198	4,572	23,42	28,49

Tabelle II A c.

i	S_1	S_2	$S_1 M$	$S_2 M$	$\frac{i + S_2}{i}$	$\frac{i}{i - S_1}$
48,9	1,57	1,68	0,152	0,162	1,034	1,033
	1,62	1,83	0,155	0,175	1,037	1,034
94,1	3,44	3,70	0,164	0,176	1,039	1,038
	3,29	3,84	0,156	0,182	1,041	1,036
189,8	7,17	7,82	0,174	0,190	1,041	1,039
	6,86	7,90	0,165	0,190	1,042	1,038

Tabelle III A.

$p = 9{,}93\,\text{g}.$

		r				f				z			
h	h'	I ↓	II ↓	II ↑	I ↑	I ↓	II ↓	II ↑	I ↑	I ↓	II ↓	II ↑	I ↑
25	28	37	27	25	35	7	18	19	8	6	5	6	7
	31	44	33	33	42	3	11	12	4	3	6	5	4
50	55	34	27	28	36	10	15	16	9	6	8	6	5
	60	41	35	34	43	3	13	10	2	6	2	4	5
90	98	37	28	27	36	6	17	18	6	7	5	5	8
	105	44	35	36	42	2	10	10	4	4	5	4	4

Eintheilung der Fälle r, f, z in r' und f'.

Tabelle III A a.

h'	28	31	55	60	98	105
r'	68	80,5	68,75	81,75	70,25	82,75
f'	32	19,5	31,25	18,25	29,75	17,25

Tabelle III A b.

$i = 91,8;\ 177,2;\ 389,3.$

h_1	i_1	D	t_o	m	M	M_1	iM	F	F_1
28	101,5	9,7	0,3307	0,0341	0,0508	0,0460	4,667	11,11	12,27
31	110,8	19	0,6079	0,0320	0,0502	0,0416	4,605	11,25	13,56
55	197,2	20	0,3457	0,0173	0,0258	0,0233	4,596	21,85	24,21
60	216,9	39,7	0,6406	0,0161	0,0254	0,0208	4,509	22,17	27,12
98	389,3	41,7	0,3759	0,0090	0,0135	0,0121	4,697	41,76	46,63
195	426,4	78,8	0,6678	0,0085	0,0134	0,0110	4,676	41,94	51,29

Tabelle III A c.

i	S_1	S_2	$S_1 M$	$S_2 M$	$\frac{i+S_2}{i}$	$\frac{i}{i-S_1}$
91,8	3,37	3,64	0,171	0,185	1,039	1,038
	3,41	3,90	0,171	0,196	1,042	1,039
177,2	6,98	7,57	0,180	0,195	1,043	1,041
	6,52	7,75	0,165	0,197	1,044	1,038
347,6	13,53	15,07	0,183	0,203	1,043	1,045
	13,15	14,91	0,176	0,200	1,043	1,039

Aus den folgenden Versuchsgruppen sollen nun des Raumes wegen nur die Schlusstabellen mitgetheilt werden. Nach der Analogie mit Tab. II A b und III A b seien sie mit II B b, III B b u. s. w. bezeichnet.

Tabelle II B b.

$i = 48,9;\ 94,1;\ 189,8.\ (p = 4,95;\ h = 25;\ 50;\ 90.)$

h_1	i_1	D	t_o	m	M	M_1	iM	F	F_1
19	38,6	— 10,3	— 0,6747	0,0655	0,0834	0,1057	4,080	6,76	5,46
22	43,7	— 5,2	— 0,3209	0,0617	0,0828	0,0926	4,047	6,82	6,09
40	75,0	— 19,1	— 0,6541	0,0342	0,0437	0,0549	4,115	12,90	10,28
45	84,4	— 9,7	— 0,3111	0,0321	0,0431	0,0481	4,057	13,09	11,74
74	148,3	— 41,5	— 0,6678	0,0161	0,0204	0,0261	3,878	27,61	21,58
82	169,9	— 20,9	— 0,3209	0,0154	0,0207	0,0231	3,923	27,30	24,44

Tabelle IIIBb.

$i = 91{,}8;\ 177{,}2;\ 347{,}6.\ (p = 9{,}93;\ h = 25;\ 50;\ 90.)$

h_1	i_1	D	t_o	m	M	M_1	iM	F	F_1
19	72,4	— 19,4	— 0,6610	0,0341	0,0434	0,0551	3,987	12,99	10,25
22	81,9	— 9,9	— 0,3160	0,0319	0,0427	0,0479	3,924	13,20	11,77
40	140,2	— 37,0	— 0,6610	0,0179	0,0228	0,0288	4,045	24,72	19,56
45	157,7	— 19,5	— 0,3307	0,0170	0,0227	0,0256	4,033	24,79	22,06
74	274,8	— 72,8	— 0,6889	0,0095	0,0121	0,0153	4,209	46,59	36,73
82	310,2	— 37,4	— 0,3406	0,0091	0,0122	0,0137	4,239	46,26	41,29

Tabelle IICb.

$i = 48{,}9;\ 94{,}1;\ 189{,}8.\ (p = 4{,}95;\ h = 25;\ 50;\ 90.)$

h_1	i_1	D	t_o	m	M	M_1	iM	F	F_1
22	43,7	— 5,2	— 0,3506	0,0674	0,0904	0,1012	4,421	6,24	5,58
28	54,1	+ 5,2	+ 0,3111	0,0598	0,0892	0,0806	4,360	6,33	7,00
45	84,4	— 9,7	— 0,3307	0,0341	0,0458	0,0511	4,310	12,32	11,05
55	104,3	+ 10,2	+ 0,3111	0,0305	0,0455	0,0411	4,285	12,39	13,73
82	168,9	— 20,9	— 0,3209	0,0154	0,0206	0,0202	3,913	27,37	24,35
98	211,5	+ 21,7	+ 0,2917	0,0135	0,0202	0,0181	3,837	27,91	31,10

Tabelle IIICb.

$i = 91{,}8;\ 177{,}2;\ 347{,}6.\ (p = 9{,}93;\ h = 25;\ 50;\ 90.)$

h_1	i_1	D	t_o	m	M	M_1	iM	F	F_1
22	81,9	— 9,9	— 0,3556	0,0359	0,0481	0,0527	4,315	11,73	10,71
28	101,5	+ 9,7	+ 0,3111	0,0321	0,0479	0,0433	4,394	11,79	13,03
45	157,7	— 19,5	— 0,3607	0,0185	0,0248	0,0278	4,388	22,78	20,27
55	197,2	+ 20	+ 0,3307	0,0165	0,0247	0,0222	4,374	22 85	25,43
82	310,2	— 37,4	— 0,3506	0,0094	0,0126	0,0141	4,379	44,78	39,96
98	389,3	+ 41,7	+ 0,3406	0,0082	0,0124	0,0111	4,307	45,53	51,00

Tabelle IV.

	II A, B, C.			III A, B, C.			MW	MV
δ	0,667	0,618	0,655	0,725	0,755	0,628	0,675	0,044
δ_1	0,767	0,322	0,677	0,827	0,863	0,786	0,707	0,138
δ	0,482	0,537	0,327	0,541	0,439	0,355	0,447	0,073
δ_1	0,336	0,426	0,381	0,310	0,000	0,114	0,261	0,136
δ	0,560	0,527	0,585	0,521	0,512	0,601	0,551	0,031
δ_1	0,497	0,303	0,528	0,553	0,433	0,169	0,414	0,118

Tabelle V.

h	$h_{(\delta_1)}$	II A	III A	II B	III B	II C	III C	MV
25	h	24,46	24,42	24,72	24,75	25,18	25,20	0,34
	h_{δ_1}	25,08	24,97	24,93	24,96	25,03	25,05	0,05
50	h	49,71	49,14	49,53	50,01	50,15	50,22	0,33
	h_{δ_1}	50,38	49,91	49,80	50,33	49,94	50,01	0,18
90	h	89,13	88,98	89,40	89,82	90,38	90,12	0,53
	h_{δ_1}	90,03	89,91	89,80	90,25	90,08	89,82	0,14

Tabelle VI.

	25		50		90	
h	h	h_{δ_1}	h	h_{δ_1}	h	h_{δ_1}
II C	25,18	25,04	50,13	49,93	90,34	90,06
III C	25,21	25,08	50,21	50,01	90,12	89,84

Tabelle VII b.

$i = 48{,}9;\ 94{,}1;\ 189{,}8.\ (p = 4{,}95;\ h = 25;\ 50;\ 90.)$

h_1	i_1	D	t_o	m	M	M_1	iM	F	F_1
22	43,7	— 5,2	— 0,2821	0,0542	0,0727	0,0813	3,555	7,76	6,94
28	54,1	+ 5,2	+ 0,2752	0,0529	0,0789	0,0713	3,857	7,15	7,91
45	84,4	— 9,7	— 0,2583	0,0266	0,0357	0,0398	3,362	15,79	14,16
55	104,3	+ 10,2	+ 0,2347	0,0230	0,0343	0,0310	3,231	16,43	18,21
82	168,9	— 20,9	— 0,2535	0,0121	0,0162	0,0182	3,074	34,83	31,00
98	211,5	+ 21,7	+ 0,2347	0,0108	0,0162	0,0145	3,069	34,89	38,88

Tabelle VIII b.

$i = 91{,}8;\ 177{,}2;\ 347{,}6.\ (p = 9{,}93;\ h = 25;\ 50;\ 90.)$

h_1	i_1	D	t_o	m	M	M_1	iM	F	F_1
22	81,9	— 9,9	— 0,3111	0,0315	0,0422	0,0473	3,874	13,37	11,93
28	101,5	+ 9,7	+ 0,2677	0,0276	0,0412	0,0372	3,778	13,71	15,16
45	157,7	— 19,5	— 0,3209	0,0165	0,0221	0,0248	3,950	25,54	22,73
55	197,2	+ 20	+ 0,2821	0,0141	0,0211	0,0190	3,738	26,74	29,76
82	310,2	— 37,4	— 0,3357	0,0090	0,0121	0,0135	4,193	46,77	41,74
98	389,3	+ 41,7	+ 0,3014	0,0072	0,0109	0,0097	3,782	51,86	58,08

Tabelle IX.

$\delta_{(1)}$	VII.			VIII.			MW	MV
δ	0,114	0,687	0,505	0,610	0,703	0,982	0,600	0,194
δ_1	0,101	0,725	0,638	0,548	0,783	1,252	0,675	0,229

Tabelle X.

	25		50		90	
h	h	h_{δ_1}	h	h_{δ_1}	h	h_{δ_1}
VII	25,04	24,79	50,24	49,90	90,31	89,83
VIII	25,22	24,98	50,32	49,98	90,43	89,95

Die auf Grund der in Tabelle Ia mitgetheilten Versuchszahlen berechneten Werthe in Tabelle Ib lassen zunächst erkennen, dass das Fechner'sche Präcisionsmaß m nicht constant ist, sondern mit der Zunahme von D abnimmt. Gleiches gilt von dem Müller'schen Präcisionsmaße M_1, welches das Maß der Genauigkeit darstellt, mit welcher der Schall i_1 beurtheilt wird. Der wahrscheinliche mittlere Fehler F_1 hingegen wächst proportional der Schallstärke i_1, was aus der ziemlich genauen Constanz der Producte iM, welchen ja die Producte $i_1 M_1$ gleich sind, zu erkennen ist.

Dass das Fechner'sche Präcisionsmaß dem entsprechenden i_1 nicht umgekehrt proportional ist, gibt die Berechnung der δ für diese Versuche zu erkennen, der Mittelwerth ist für je zwei negative D: 0,447 (MV 0,073), für je zwei positive D : 0,676 (MV 0,079) und für je ein positives und ein negatives D: 0,535 (MV 0,007). Im übrigen zeigt die Vergleichung des Fechner'schen m und Müller'schen M_1 beziehentlich M keineswegs die große Uebereinstimmung, wie bei den von Fechner angestellten Vergleichungen dieser Präcisionsmaße. Bei großen D kann M_1 (M) beinahe den doppelten Betrag von m erreichen. Jedenfalls hat Fechner bei den Umrechnungen neben δ auch den Factor $\sqrt{2}$ in der ersten Formel VIII, S. 128 vernachlässigt.

Die Werthe von M, beziehentlich F müssten streng genommen für alle D dieselben sein. Dieselben zeigen jedoch eine geringe Zunahme beim Uebergange von den negativen zu den positiven D. Demnach wird der Hauptreiz mit etwas geringerer Präcision aufgefasst, wenn der Vergleichsreiz stärker, als wenn er schwächer ist. Die verhältnissmäßig geringen Schwankungen der F bei den negativen beziehentlich positiven D werden hinreichend durch den Umstand erklärt, dass die Aufmerksamkeit während der Versuche gewissen Variationen unterworfen ist. Construirt man eine Curve, in welcher die D die Abscissen und die entsprechenden Verhältnisse $\frac{r'}{n}$ die Ordinaten darstellen, so lässt dieselbe die exacteste Uebereinstimmung mit der Curve des Gauß'schen Integrales erkennen (Fig. 4).

Die nach der Methode der Minimaländerungen von uns angestellten Versuche haben für die Werthe i_o und i_u in der Beziehung $\frac{i_o}{i} = \frac{i}{i_u}$ stets Werthe zwischen 237,5 und 257,9 (Höhen 65 und 70) und 123,4 und 140,2 (Höhen 35 und 40) ergeben; die Tabelle I zeigt, dass innerhalb dieser Werthe die Anzahl der falschen oder richtigen Fälle keineswegs $\frac{n}{2}$ beträgt, sondern dass dieses Verhältniss zwischen 45 und 50 einerseits und 50 und 55 cm andrerseits statthat. Demnach kann von einer Identität der Schwellen der Methode der Minimaländerungen und der Fechner'schen bez. Müller'schen Methode der richtigen und falschen Fälle keine Rede sein.

Wenn sonach die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie auf psychophysische Versuche in dem Falle erwiesen ist, in welchem die Versuche bei vielen D und in vollständig stufenmäßigem Gange unter Elimination der constanten Fehler ausgeführt werden, so fragt sich, ob sich dasselbe bei Ausführung der Versuche bei jeweils nur einem oder 2 D zeigt. Die Tabellen II und III geben auch hierauf eine bejahende Antwort.

Die Anzahl der richtigen Fälle r' (Tabelle III A a) ist zwar bei demselben h_1 eine etwas andere, als in der Tabelle I a, allein die Aenderungen finden für die beiden h_1 in demselben Sinne statt. Die wahrscheinlichen mittleren Fehler F_1 sind durchgängig etwas größer, wenn die Versuche nur bei 2 D ausgeführt werden, als wenn dies bei allen D geschieht, die noch richtige und falsche Fälle geben. Allerdings gilt dies nicht von allen größeren Beobachtungsreihen, welche von uns angestellt worden sind. Im vorliegenden Falle ist zu erkennen, dass bei der Beobachtungsreihe I die Aufmerksamkeit mehr angestrengt wurde, als bei den Beobachtungsreihen II und III. Ueber den Gang des Fechner'schen und Müller'schen Präcisionsmaßes ist dasselbe zu sagen, wie im Anschluss an Tabelle I b.

Der wahrscheinliche mittlere Fehler F für den Hauptreiz ist mit einer einzigen Ausnahme bei einem absolut genommen größeren D ebenfalls um ein unbedeutendes größer als bei einem kleineren D, für positive D wieder etwas größer als für gleich große negative D. Demnach wird ein Reiz mit größerer Präcision aufgefasst, wenn er mit einem wenig von ihm verschiedenen verglichen wird, als wenn die Differenz bedeutender ist, und ebenso mit größerer Genauigkeit beurtheilt, wenn er mit einem schwächeren, als wenn er mit einem stärkeren verglichen wird. Ein derartiges Resultat dürfte eher zu erwarten sein, als befremdend erscheinen.

Für die Producte iM, welche bei Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes sich als constant erweisen müssen, ergibt sich für die sämmtlichen Versuche mit 2 positiven D der Mittelwerth 4,605 mit der mittleren Variation 0,068, für die Versuche mit 2 negativen D sowie einem negativen und einem positiven D sind die entsprechenden Werthe: 4,045 und 0,081 sowie 4,274 und 0,129. Da die Versuche jeder dieser Gruppen natürlich zeitlich auseinanderliegen, so ist eine völlige Constanz nicht zu erwarten.

Die Tabellen II A c und III A c zeigen für die nämlichen i sowohl eine hinreichende Uebereinstimmung der Werthe S_1 als auch der Werthe S_2, die Werthe $S_1 M$ und $S_2 M$ zeigen jedoch eine geringe Zunahme mit dem Wachsen von i, die sich auch in den Verhältnissen $\frac{i + S_2}{i}$ und $\frac{i}{i - S_1}$ ausspricht. Da die Werthe S_1 und S_2 durch die Anzahl der zweifelhaften Fälle bestimmt sind, so ist damit ausgedrückt, dass mit dem Wachsen von i die Anzahl der zweifelhaften Fälle relativ etwas ansteigt. Die Anzahl der zweifelhaften Fälle muss mit Zunahme der Zulage D deshalb etwas abnehmen, weil der wahrscheinliche mittlere Fehler mit Zunahme von D wächst. Indessen wird dadurch die bedeutende Abnahme der z nur zum Theil erklärt.

Aus der Abnahme der z kann man sich ein ungefähres Bild über die Vertheilung der Fälle r, f und z machen. In Fig. 2, I und II, geben die einzelnen Zahlen die Anzahl der Fälle an, welche Schätzungsfehlern von aus der Zeichnung zu entnehmenden Höhendifferenzen entsprechen. Die Zahlen stellen nur den ungefähren Verlauf dar, sie bringen zur Anschauung, dass die Anzahl der geringeren Schätzungsfehler bedeutender ist, als die Zahl der größeren Fehler.

Die Anzahl der zur Vertheilung kommenden z ist für $D = 0 : 10$, für $D = D_1 : 5$. Nach Fechner ist beide Male die Hälfte der z den richtigen, beziehentlich falschen Fällen zuzuertheilen, also im ersten Falle 5, im zweiten 2,5; bei verhältnissmäßiger Vertheilung würden 4,5 zu den richtigen, 0,5 zu den falschen kommen. Das einzig richtige wäre indessen, im Verhältniss der neben 5 stehenden Zahlen zu theilen, wonach 3 Fälle zu den richtigen und 2 zu den falschen kommen würden. Da man indessen den genauen Gang der Abnahme der Fehler nicht kennt, so bleibt nichts anderes übrig, als bei der Halbirung stehen zu bleiben. Die Unterschiede sind bei der verhältnissmäßig geringen Anzahl der vorkommenden z jedenfalls von untergeordneter Bedeutung. Wählt man übrigens zwei nahezu absolut gleiche, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftete D, so ist die Halbirung ohne jedes Bedenken gerechtfertigt, wenn es sich um die Bestimmung des Gleichheitspunktes handelt, und die Vertheilung im Verhältniss der r und f ist in diesem Falle zu verwerfen.

Die Gebiete S_1 und S_2, innerhalb welcher übrigens die zweifelhaften Urtheile liegen, sind im Vergleich zu den Schwellen der Methode der Minimaländerungen klein zu nennen. Während die Verhältnisse $\frac{i_o}{i} = \frac{i}{i_u}$ bei der Methode der Minimaländerungen sich zwischen 1,3 und 1,36 bewegen, sind die entsprechenden Verhältnisse bei der Methode der richtigen und falschen Fälle zwischen 1,03 und 1,05 gelegen.

Vergleichen wir nunmehr den Unterschied der r der ersten und zweiten Zeitfolge bei den Versuchen II C und VII sowie III C und VIII, so ist dieselbe bei II und III C etwa 10, bei VII und VIII hingegen etwa 20. Demnach ist der Einfluss der Zeitfolge wesentlich stärker, wenn die Schallintensitäten rascher folgen, als wenn ein etwas größerer Zwischenraum vorliegt. Gleichzeitig sind auch bei den ohne Anwendung der Fallzangen angestellten Versuchen die mittleren Fehler durchgängig größer als bei den Versuchen mit den Fallzangen, jedenfalls infolge der Mängel, welche im ersteren Falle der Versuchstechnik anhaften.

Diese Verschiedenheit der Versuchsergebnisse bei rascherem und langsamerem Aufeinanderfolgen der Schallreize spricht sich vor allem auch bei Anwendung der Fechner'schen vollständigen Elimination constanter Fehler aus. Wir wollen in der folgenden Tabelle die m zusammenstellen, welche sich nach beiden Methoden ergeben. Die bei vollständiger Elimination constanter Fehler resultirenden Fechnerschen Präcisionsmaße seien zum Unterschied von den von uns berechneten durch m_v bezeichnet. Die letzte Verticalcolumne enthält die Mittelwerthe der Größen m und m_v.

Tabelle XI.

II C (b)	m	0,0674	0,0598	0,0341	0,0305	0,0154	0,0135	0,0368
	m_v	0,0700	0,0620	0,0354	0,0319	0,0160	0,0141	0,0382
VII (b)	m	0,0542	0,0529	0,0266	0,0230	0,0121	0,0108	0,0299
	m_v	0,0752	0,0653	0,0336	0,0283	0,0163	0,0135	0,0390
III C (b)	m	0,0359	0,0321	0,0185	0,0165	0,0094	0,0082	0,0201
	m_v	0,0372	0,0330	0,0190	0,0170	0,0097	0,0085	0,0207
VIII (b)	m	0,0315	0,0276	0,0165	0,0141	0,0090	0,0072	0,0176
	m_v	0,0437	0,0389	0,0231	0,0199	0,0124	0,0124	0,0247

Hiernach würde die Präcision gerade bei den Versuchen, welche mit der Hand ausgeführt wurden, am genauesten gewesen sein, ein Umstand, der natürlich gegen die Anwendung der Fechner'schen Methode der vollständigen Elimination constanter Fehler spricht. Im übrigen mag noch darauf hingewiesen sein, dass sich die Mittelwerthe von m und m_v bei Anwendung der Fallzangen nur unwesentlich unterscheiden, während die Differenz bei den Versuchen mit bloßer Hand sehr bedeutend ist.

In Bezug auf die δ und δ_1 ist zu sagen, dass die Mittelwerthe bei den Versuchen mit bloßer Hand größere sind als bei denen mit der Fallzange, und dass erstere vor allem wesentlich größere Variationen aufweisen.

Die Abweichungen der berechneten h betragen bei II A und III A höchstens 2,32 % für h und 0,76 % für h_{δ_1}, bei II B und III B höchstens 1,12 % für h und 0,66 % für h_{δ_1} und schließlich bei II C und III C 0,80 % für h und 0,20 % für h_{δ_1}. Bei den, den Versuchen II und III C entsprechenden Versuchen VII und VIII gehen die Abweichungen bis 0,88 % für h und 0,84 % für h_{δ_1}. Die entsprechenden mittleren Variationen sind:

Tabelle XII.

$h_{(\delta_1)}$	II A und III A	II B und III B	II C und III C	VII und VIII
h	0,69	0,30	0,21	0,26
h_{δ_1}	0,12	0,18	0,07	0,09

Hieraus geht ohne jeden Zweifel hervor, dass die Fechner'sche Methode der richtigen und falschen Fälle sich sehr wohl zur Bestimmung des Gleichheitspunktes eignet, selbst dann noch, wenn auf die Bestimmung von δ_1 keine Rücksicht genommen wird. Am weitaus besten eignet sich freilich 1 positives und 1 negatives D und die Annahme $\delta_1 = 0,5$, da die für δ_1 erhaltenen Werthe alle diesem Werthe ziemlich nahe liegen. Es lässt sich übrigens auch auf anderem Wege, als früher geschehen, zeigen, dass der Werth 0,5 zur Bestimmung des Gleichheitspunktes bei einem positiven und einem negativen D sehr wohl angewandt werden kann.

Für zwei verschiedene D ergaben sich zwischen den Fechner-schen Präcisionsmaßen m_1 und m_2 und den Müller'schen M, M_1 und M_2 bekanntlich die Beziehungen:

$$\text{I)} \quad \left\{\begin{aligned} m_1 &= \frac{M M_1}{\sqrt{M^2 + M_1^2}}, \\ m_2 &= \frac{M M_2}{\sqrt{M^2 + M_2^2}}. \end{aligned}\right\}$$

Macht man überdies die Annahme:

$$\text{II)} \quad \frac{M_1}{M_2} = \frac{i_2}{i_1},$$

welche infolge der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes berechtigt ist, falls die Versuche bei beiden D mit annähernd gleicher Aufmerksamkeit ausgeführt werden, so erhält man:

$$\text{III)} \quad \left\{\begin{aligned} M_1 &= \frac{m_1 m_2}{i_1}\sqrt{\frac{(i_2+i_1)(i_2-i_1)}{(m_1+m_2)(m_1-m_2)}} = \frac{A}{i_1}, \\ M_2 &= \frac{A}{i_2}, \\ M &= \frac{m_1 M_1}{\sqrt{(M_1+m_1)(M_1-m_1)}} = m_1 m_2 \sqrt{\frac{(i_2+i_1)(i_2-i_1)}{(i_2 m_2 + i_1 m_1)(i_2 m_2 - i_1 m_1)}}, \end{aligned}\right\}$$

Im allgemeinen eignen sich diese Formeln nicht in dem Grade zur Bestimmung von M, M_1 und M_2, wie die früheren, weil die Gleichung II weniger gut erfüllt ist, als die früher benutzte Relation $\frac{M_1}{M} = \frac{i}{i_1}$. Im letzteren Falle handelt es sich nämlich um die Präcisionsmaße von Reizen, welche in derselben Beobachtungsreihe verglichen werden, im ersten Falle um die Präcisionsmaße von Reizen, die in verschiedenen Beobachtungsreihen benutzt werden.

Für die Annahme $\frac{m_1}{m_2} = \frac{i_2}{i_1}$ oder $\delta = 1$ würde M den Werth ∞ erhalten und die Werthe M_1 und M_2 würden gleich den Werthen m_1 und m_2 werden. Für $m_1 i_1 > m_2 i_2$ oder $\delta > 1$ würde M sogar imaginär werden. Für die Annahme: $\frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{i_2}{i_1}}$, also $\delta = 0{,}5$ wird:

$$M = \frac{m_1 m_2}{\sqrt{i_1 i_2}} \sqrt{\frac{(i_2 + i_1)(i_2 - i_1)}{(m_1 + m_2)(m_1 - m_2)}},$$

d. h. M erhält einen zwischen M_1 und M_2 gelegenen Werth. Letzteres aber muss bei Benutzung eines positiven und eines negativen D in der That der Fall sein, es hat sich auch bei allen Versuchen bestätigt. Daher empfiehlt sich diese Annahme theoretisch, falls eine empirische Ermittelung des δ unmöglich ist. Für die Annahme $m_1 = m_2$ oder $\delta = 0$ wird sowohl M_1 als auch M_2 unendlich; für $m_1 < m_2$ oder $\delta < 0$ würden M_1 und M_2 imaginär werden.

Die erstere Annahme $\delta = 1$, welche bei 2 positiven D in einzelnen Fällen nahezu erreicht wurde, würde hiernach bedeuten, dass der Hauptschall mit völliger Exactheit aufgefasst wird und die etwaigen Fehler sich auf den Vergleichsschall beschränken. Die Annahme $\delta = 0$ hingegen, welche bei 2 negativen D vereinzelt beinahe erreicht wurde, würde darauf hinweisen, dass die Vergleichsschalle völlig genau aufgefasst werden, in beiden Fällen also die schwächeren Schallintensitäten.

Nach unserer Meinung treffen diese Voraussetzungen für unsere Versuche nicht zu; vielmehr werden die großen Variationen von M, M_1 und M_2, falls diese Werthe aus den Formeln III berechnet werden, bedingt durch die Variationen von m_1 und m_2, welche Größen als Differenz im Nenner auftreten und einen sehr kleinen Werth repräsentiren. Wir möchten vielmehr vermuthen, dass jeweils der zweite Schall relativ genauer aufgefasst wird als der erste, derartige Fehler aber werden durch die Beachtung der Zeitfolge compensirt.

Wir theilen zum Schluss noch eine größere Anzahl früherer Versuchsergebnisse mit, welche ohne Berücksichtigung des δ_1 gewonnen und aus Versuchen berechnet sind, die mit bloßer Hand ausgeführt wurden. Die Werthe h sollen 25, 50 und 90 cm sein, die Werthe h_1 und h_2 entsprechen den beiden angewandten D, die in der Tabelle mitgetheilten h sind die durch den Versuch ermittelten. Diese Versuche zeigten die regelmäßige Abnahme des Präcisionsmaßes m mit der Zunahme von D noch nicht, wiewohl sie den Gleichheitspunkt noch mit genügender Exactheit zu berechnen gestatteten.

Tabelle XIII.

$h = 25$			50			90		
h_1	h_2	h	h_1	h_2	h	h_1	h_2	h
21	29	25,31	42	58	50,12	78	102	91,89
23	27	25,09	46	54	50,28	84	96	90,96
21	23	25,32	42	46	49,29	78	84	89,66
27	29	25,33	54	58	51,29	96	102	90,38
29	31	23,78	58	62	50,11	102	108	92,10

Die größte Abweichung beträgt bei $h = 25 : 4{,}88\,\%$, bei $h = 50 : 1{,}42\,\%$ und bei $h = 90 : 2{,}33\,\%$; für je ein positives und ein negatives D sind die maximalen Abweichungen nur : 1,24; 0,56 und 2,1 %. Wendet man die Bestimmung von δ nicht an oder setzt man es gleich 0, so erhält man bei 2 mit gleichen Vorzeichen behafteten D gewöhnlich einen zu kleinen Werth, bei einem positiven und einem negativen D hingegen einen etwas zu großen Werth.

Was die Prüfung des Weber'schen Gesetzes durch die Fechner'sche Methode der richtigen und falschen Fälle anlangt, so verdient vor allem die Untersuchung der Aufmerksamkeitsverhältnisse eine besondere Beachtung. Es ist möglich, dass bei dieser Methode eine Steigerung beziehentlich Abschwächung der Aufmerksamkeit die Anzahl der richtigen, falschen und zweifelhaften Fälle wesentlich beeinflusst. Bei den hier mitgetheilten Versuchen wurden die Schallstärken nach Möglichkeit mit normaler Aufmerksamkeit beurtheilt, doch werden sich auch bei diesen Versuchen Schwankungen der Aufmerksamkeit bis zu einem gewissen Grade geltend gemacht haben.

Wir haben schließlich noch auf einen überaus wichtigen Umstand hinzuweisen, der aus der Vergleichung der mittleren Fehler der Versuche mit und ohne Fallzangen folgt. Da wo der mittlere Fehler klein ist, wo also die durch die Mangelhaftigkeit der Versuchstechnik bedingten Fehler nach Möglichkeit in Wegfall kommen, ist die Anwendung des Gauß'schen Integrales eine überaus sichere, im anderen

Falle eine weniger exacte zu nennen. Daraus ist zu schließen, dass die zufälligen Fehlervorgänge vorwiegend innere sein müssen, wenn die mittleren Fehler den entsprechenden Reizen proportional sein sollen, also das Gauß'sche Gesetz streng anwendbar sein soll. Dagegen werden zu diesen inneren Fehlervorgängen noch äußere in vielleicht überwiegender Zahl hinzutreten, wenn sich die strenge Anwendbarkeit nicht herausstellt, die Präcisionsmaße für kleine D sich vielleicht gar als constant erweisen. Gerade dem Ueberwiegen äußerer Fehlervorgänge ist es jedenfalls mit zuzuschreiben, dass die Anwendung des Gauß'schen Integrales auf die Fechner'schen Gewichtsversuche zu Resultaten geführt hat, welche erheblichen Schwankungen unterworfen sind.

II. Bestimmung der Exponenten ε und η zur Ermittlung der Schallstärken.

Die Versuche über die Prüfung des Weber'schen Gesetzes zerfallen in 3 Gruppen; die Ausführung derselben erstreckt sich über einen Zeitraum von 2 Jahren. Die Versuche jeder Gruppe wurden ohne Unterbrechung in 5—8 Monaten beendet. Dabei wurde an etwa 5 Tagen in jeder Woche Vormittags experimentirt und zwar niemals über $1^1/_2$ Stunde. Bei den Versuchen der Gruppen I und II wurden die Kugeln noch mit bloßer Hand fallen gelassen, bei denen der Gruppe III wurden jedoch die Fallzangen benutzt. Als Fallbrett wurde bei I und II eine quadratische Platte aus Rothbuche angewandt, deren Dimensionen dieselben waren, wie bei der im vorigen Abschnitt genannten Platte aus gleichem Holze, die bei Gruppe III benutzt wurde. Bei Gruppe I wurde die Platte benutzt, wie sie vom Tischler hergestellt worden war; bei Gruppe II wurde sie durch vorherige Pressung wieder vollständig geebnet. Dadurch war sie elastischer geworden als zuvor, auch konnte sie wegen ihrer größeren Härte und Elasticität zu einer wesentlich größeren Reihe von Versuchen verwandt werden. In gleicher Weise wurde auch die bei der dritten Versuchsgruppe verwandte Platte durch vorherige Pressung widerstandsfähiger gemacht.

Für jede Gruppe ging die Bestimmung der ε und η den Versuchen über die Prüfung des Weber'schen Gesetzes voran. Die Resultate über die Schallstärken, die sich hierbei ergaben, müssen jedoch einer besonderen Veröffentlichung vorbehalten bleiben, und noch nach verschiedenen Richtungen ergänzt werden. Mit den Starke'schen Versuchen sind nur die der Gruppe I vergleichbar, weil bei diesen die Holzplatte unverändert angewandt wurde, wiewohl die verschiedenen Dimensionen noch Unterschiede bedingen könnten.

Die ε-Bestimmung geschah bei Gruppe I bei 5 Gewichtspaaren, deren Verhältniss etwa $^4/_3$ war. Die Schallstärken ließen sich sehr gut vergleichen, da ihre Klangverschiedenheit nur sehr unbedeutend war. Die Ergebnisse wurden graphisch dargestellt und sodann die ε für die Höhen 10, 20, 30, 40 .... bis 130 cm als Mittel aus 5 verschiedenen, wenig abweichenden ε-Bestimmungen berechnet. Die so gewonnenen ε sind in Tabelle I unter I zusammengestellt und liegen den Berechnungen der Schallstärken für Gruppe I der Weber'schen Versuche zu Grunde.

Für Gruppe II wurden die ε bei 7 Gewichtspaaren, bei Gruppe III bei nur 3 Gewichtspaaren ermittelt. (Tabelle I, II und III a, b.) Die Werthe III a sind mittels der Methode der Minimaländerungen, die Werthe III b mittels der Fechner'schen Methode der richtigen und falschen Fälle bestimmt worden. Die Abweichungen sind nur unbedeutend.

Die η wurden bei Gruppe I für Gewichte zwischen 5 und 160 g (Tabelle II, I), bei Gruppe II für Gewichte zwischen 0,2 und 160 g (Tabelle II, II) und endlich bei Gruppe III wieder mit Hülfe der Methode der Minimaländerungen und der Methode der richtigen und falschen Fälle für Gewichte zwischen 3 und 160 g ermittelt. (Tabelle II, III a und b.) Auch hier sind die Unterschiede nicht beträchtlich.

Auffallend dürften die η-Werthe für die Gewichte 0,2 bis 0,98 sein; berechnet man indessen die $i = p^{\eta} h^{\varepsilon}$ nach denselben, so ergeben sich ganz einwurfsfreie Werthe. Die verhältnissmäßig großen Werthe erklären sich aus dem Umstande, dass in der Formel für η der Logarithmus des entsprechenden p als Nenner auftritt. Daher würde für $p = 1$ der Werth von η unendlich groß werden.

Um bei den Versuchen mittels der Methode der richtigen und falschen Fälle stets ein positives und ein negatives D anwenden zu können, wurden die Vergleichshöhen der kleineren Kugel mit Rücksicht auf die Ergebnisse der Methode der Minimaländerungen gewählt. Fiel etwa bei der Höhe $h = 20$ cm der schwereren Kugel p die kleinere p_1 von der Höhe $h_1 = 27$ cm bei Gleichheit der Schallstärken, so wurden die Versuche nach der Methode der richtigen und falschen Fälle in der Weise angestellt, dass die Kugel p stets von der Höhe 20, die Kugel p_1 erst von der Höhe 24, dann von der Höhe 30 cm fiel und sodann umgekehrt. Bei jeder Höhe fiel erst p an erster Stelle, dann in ebensovielen Versuchen p_1. Nach einer Pause wurde eine zweite analoge Versuchsreihe angestellt, in der sowohl die Zeitlage als auch die Raumlage der Versuche genau entgegengesetzt war. Die Verhältnisse $\frac{r'}{n}$ gaben dann unter Benutzung der Fundamentaltabelle t_1 und t_2.

Die Werthe m_1 und m_2 waren:

$$m_1 = \frac{t_1}{D_1}, \quad m_2 = \frac{t_2}{D_2},$$

worin: $D_1 = p_1\ (24 - x)$ und $D_2 = p_1\ (30 - x)$ zu setzen. Bei Einführung dieser Werthe in das Verhältniss:

$$\frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{i_2}{i_1}} = \sqrt{\frac{30}{24}} = A,$$

fällt p_1 fort und die Höhe x, bei welcher der Schall der Kugel p_1 demjenigen der Kugel p gleich wird, berechnet sich aus der früher abgeleiteten Formel:

$$x = \frac{24\, t_2 A - 30\, t_1}{t_2 A - t_1}.$$

Der Vortheil der Methode der richtigen und falschen Fälle liegt vor allem in dem Umstande, dass die Fallhöhen von vornherein bestimmt sind, und der fortwährende Wechsel der einen Fallhöhe sich nicht nöthig macht. Wenngleich die Methode der richtigen und falschen Fälle zur Bestimmung eines Gleichheitspunktes mehr Zeit erfordert, als die Methode der Minimaländerungen, die durch Bestimmung des Reductionsfactors sich ebenfalls complicirter gestaltet hat, so ist doch die Bestimmung mittels der ersteren Methode wesentlich genauer, sodass eine mehrmalige Bestimmung desselben h nicht in dem Grade erforderlich ist, wie bei der letzteren Methode. Vor allen Dingen bei größeren h ist die Anwendung der Methode der Minimaländerungen schwierig, während die Methode der richtigen und falschen Fälle auch hier bequem zu handhaben ist. Wollte man zum Beispiel bei der Höhe 130 cm noch Versuche anstellen, so müsste man bei der Methode der Minimaländerungen bei der einen Zeitfolge etwa bei 250 cm anfangen und dann herabgehen, um die obere Grenze zu bestimmen; bei der Methode der richtigen und falschen Fälle wählt man etwa $h_1 = 150$ und $h_2 = 170$ cm, und die Versuche können dann ohne Störung ausgeführt werden. Dass die Aufmerksamkeit bei der Methode der richtigen und falschen Fälle bei weitem nicht in dem Grade angestrengt wird, wie bei der Methode der Minimaländerungen, kann durch unsere Erfahrungen nur bestätigt werden.

Durch die feste Einstellung der Fallzangen wird auch erreicht, dass beide Kugeln immer dieselbe Stelle des Fallbrettes treffen, was bei fortwährendem Verschieben der einen Fallzange nicht in dem Grade erreicht werden kann. Das Auffallen auf nahezu dieselbe Stelle ist aber vor allem deshalb wichtig, weil sich die Schallstärken nicht unerheblich ändern, wenn man die Kugeln mehr und mehr nach der Seite hin auffallen lässt.

Wir geben in den folgenden Tabellen nur für diejenigen Höhen und Gewichte, welche bei den Weber'schen Versuchen in Betracht kommen, die Werthe ε und η. Bei Berechnung der Weber'schen Versuche müssen die ε aus einer graphischen Darstellung entnommen werden. Die ε für $h < 5$ cm, welche bei einzelnen Versuchen benöthigt wurden, sind in Proportion zu den vorangegangenen Werthen bestimmt worden. Vor Beginn der Versuchsgruppen III wurden die benutzten Messingkugeln einer Revision unterzogen, und mehr oder weniger polirt. Dadurch sind die Gewichte etwas verändert worden, weshalb in Tabelle II zwei Columnen für p auftreten.

Tabelle I.

ε-Werthe.

h	I	II	III a	III b
5 cm	—	0,844	—	—
10	0,868	0,847	0,796	0,796
20	0,871	0,853	0,807	0,808
30	0,875	0,861	0,814	0,816
40	0,881	0,872	0,823	0,826
50	0,889	0,881	0,834	0,837
60	0,895	0,891	0,845	0,848
70	0,901	0,900	0,856	0,859
80	0,906	0,910	0,867	0,870
90	0,911	0,919	0,877	0,880
100	0,915	0,927	0,887	0,889
110	0,920	0,935	0,897	0,898
120	0,924	0,942	0,906	0,908
130	0,927	0,949	0,914	0,916

Tabelle II.

η-Werthe.

p	I	II	p	III a	III b
0,2 g	—	1,399	—	—	—
0,5	—	1,745	—	—	—
0,98	—	22,682	—	—	—
2,46	—	0,614	2,45 g	0,750	0,755
4,96	—	0,818	4,95	0,796	0,796
9,96	0,881	0,869	9,93	0,828	0,831
19,75	0,892	0,890	19,74	0,845	0,849
40	0,904	0,891	39,94	0,852	0,860
79,85	0,900	0,887	79,83	0,846	0,852
159,9	0,883	0,868	159,89	0,840	0,846

(Schluss folgt im nächsten Hefte.)

Fig. 1.

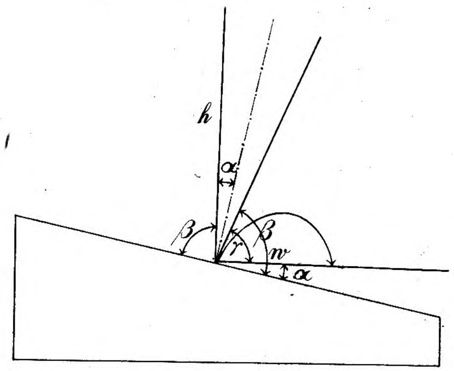

Fig. 3.

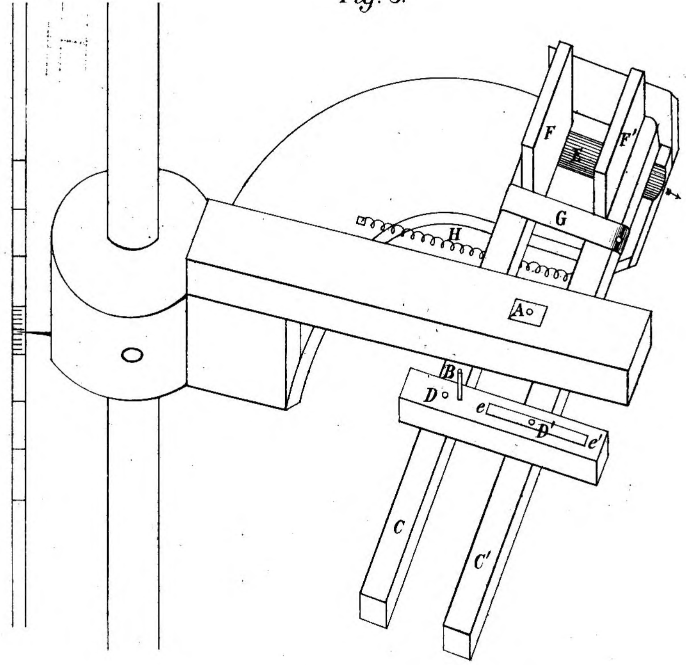

Fig. 4.

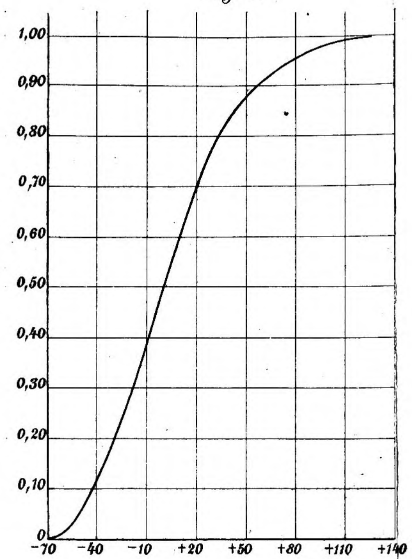

Fig. 5.

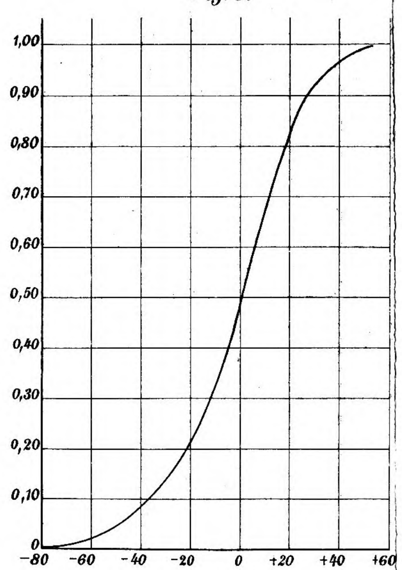

Fig. 2.