Kant's Lehre von den synthetischen Urtheilen a priori in ihrer Bedeutung für die Mathematik.

Von

Wilibald Reichardt.

I. Einleitung: Stellung der Lehre Kant's von den synthetischen Urtheilen a priori innerhalb seines Systems der kritischen Philosophie.

Der erste Ausblick auf eine kritische Philosophie, die mit voller Entschiedenheit der Metaphysik des Leibniz-Wolff'schen Dogmatismus entgegentreten sollte, eröffnete sich für Kant mit der Einsicht, dass die Metaphysik zunächst nur eine Wissenschaft von den Grenzen menschlicher Vernunft sein könne. Nachdem einmal die Unmöglichkeit einer jeden Erkenntniss des Uebersinnlichen feststand, blieb in der That diese Auffassung als die allein haltbare übrig, wenn anders die Metaphysik nicht vollständig mit der Erfahrung zusammenfallen sollte.

Fundamentale Forderung einer Metaphysik, deren Absicht auf die Untersuchung der Grenzen der menschlichen Vernunft ging, war es ohne Zweifel, sich Klarheit zu verschaffen von der Leistung dieses Geistesvermögens, d. h. von dem Begriff der Erkenntniss; sie musste sich also allererst die Frage vorlegen: Worin besteht das, was wir Erkenntniss nennen? oder kurz: Was ist Erkenntniss?

Jede Erkenntniss spricht sich aus in einem Urtheil. Soll ein solches Urtheil eine wirkliche Erkenntniss enthalten, so wird es weder ein bloßes Resultat der Logik noch Ausdruck einer directen Wahrnehmung sein dürfen. Im ersteren Falle wäre sein Inhalt selbstverständlich, im zweiten nur zufällig. In der Sprache Kant's lautet die so gewonnene Einsicht: Alle wirkliche Erkenntniss besteht in synthetischen Urtheilen a priori. So wird Kant's Lehre von den synthetischen Urtheilen a priori grundlegend für seine gesammte kritische Philosophie.

Aber auch für die Gliederung des ganzen Baues derselben ist sie von hoher Bedeutung. Ist nämlich einmal der Begriff der Erkenntniss genau bestimmt und begrenzt, so wird noch eine weitere Frage vorbereitender Art zu beantworten sein: Ist auch wirklich die Existenz einer solchen Erkenntniss möglich, oder ist vielleicht der Begriff derselben ein bloßes Product unserer Einbildungskraft?

Die Beantwortung dieser Frage geschieht durch die thatsächliche Aufdeckung (berechtigter oder unberechtigter) synthetischer Urtheile a priori. Das damit erlangte Resultat gibt aber sofort Anlass zu einer specielleren Fragestellung: Wo, innerhalb welcher Wissenschaften finden sich dergleichen synthetische Urtheile a priori vor? Kant nennt als diese Wissenschaften auf der einen Seite die Mathematik, auf der anderen Seite die Metaphysik, und zwar sowohl die Metaphysik der Erscheinungen (die Naturwissenschaft), als auch die Metaphysik des Uebersinnlichen, der Dinge an sich.

Die Sätze der Mathematik und die Lehren der Metaphysik sind nun aber synthetische Urtheile a priori von wesentlich verschiedener Art. Sie unterscheiden sich hinsichtlich der Synthese, die in ihnen vollzogen wird. Diese Verknüpfung nämlich hängt von der Beschaffenheit der Begriffe ab, die im Urtheile zu einer Erkenntniss verbunden werden. Die Begriffe der Mathematik betreffen nur die anschauliche Form der wirklichen Dinge, wie sie uns erscheinen; die Gegenstände der Metaphysik dagegen sind die wirklichen Dinge oder doch die Erscheinungen derselben selbst. Die Mathematik gewinnt demgemäß ihre Urtheile durch eine Synthese in der Anschauung, durch eine anschauliche Construction; die Metaphysik dagegen kann die Verknüpfung ihrer Gegenstände nur durch das Denken vollziehen. Das eine Mal geschieht die Synthese durch das Anschauungsvermögen, die Sinnlichkeit, das andere Mal durch das begriffliche Vermögen, den Verstand. Der Eintheilung der synthetischen Urtheile a priori in mathematische und metaphysische geht also die Trennung des Erkenntnissvermögens in zwei wohl zu unterscheidende Formen parallel: Sinnlichkeit (anschauliches Erkenntnissvermögen) und Verstand (begriffliches Erkenntnissvermögen). Augenscheinlich beruht diese Eintheilung der Erkenntnissvermögen auf einem Artunterschiede, nicht bloß auf einem Unterschiede hinsichtlich des Grades der Deutlichkeit; auf einer Verschiedenheit hinsichtlich der Qualität und nicht auf einer Differenz quantitativer Art; die gedachte Vorstellung ist ebensowenig ein schwacher sinnlicher Eindruck (wie die englische Erfahrungsphilosophie behauptet), als sich umgekehrt die sinnliche Wahrnehmung aus dunklen, verworrenen Vorstellungen zusammensetzt (wie dies die Leibniz-Wolff'sche Metaphysik lehrt). Für die kritische Untersuchung der menschlichen Vernunft, die von einer kritischen Philosophie verlangt wird, schließt der so gefasste Unterschied von Sinnlichkeit und Verstand die erste werthvolle Einsicht in sich: Diese Vernunftkritik muss einmal sein eine Untersuchung der Sinnlichkeit und danach eine Untersuchung des Verstandes.

Worin nun aber muss jede dieser beiden kritischen Untersuchungen bestehen, welche Aufgabe hat jede von ihnen zu lösen?

Die Sinnlichkeit bethätigt sich bei der Bildung der mathematischen, der Verstand bei der Entstehung der metaphysischen synthetischen Urtheile a priori. Die allgemeine Aufgabe der Vernunftkritik wird daher so formulirt werden können: Wie sind synthetische Urtheile a priori möglich? Welches sind die einzig möglichen Bedingungen für die Gewinnung wirklicher Erkenntnisse? Diese Hauptfrage der Vernunftkritik spaltet sich nach der über die doppelte Art des menschlichen Erkenntnissvermögens gewonnenen Einsicht sofort in die beiden nach einander zu beantwortenden Unterfragen: Wie sind die synthetischen Urtheile a priori der Mathematik, wie diejenigen der Metaphysik möglich? oder in kürzerer Fassung: Wie ist reine Mathematik, wie Metaphysik möglich? Die Antwort auf die erstere dieser Fragestellungen gibt die transcendentale Aesthetik; die Beantwortung der zweiten Frage macht den Inhalt der transcendentalen Logik aus.

Die Gegenstände der Metaphysik sind nun theils die Erscheinungen, theils die Dinge an sich. Mit den ersteren befasst sich die Naturwissenschaft, mit den letzteren die Metaphysik im engeren Sinne, die Metaphysik des Uebersinnlichen. An Stelle der letzteren der beiden obengenannten Fragen treten also die folgenden beiden anderen: Wie sind naturwissenschaftliche, wie metaphysische (im engeren Sinne) synthetische Urtheile a priori möglich? oder kürzer: Wie ist reine Naturwissenschaft, wie Metaphysik des Uebersinnlichen möglich? Indem die transcendentale Logik diese beiden Fragen successive beantwortet, wird sie zunächst zur transcendentalen Analytik und darauf zur transcendentalen Dialektik.

Letztes Ziel der Vernunftkritik wird sein, durch gegenseitige Abwägung der nothwendigen Bedingungen, die durch transcendentale Aesthetik, Analytik und Dialektik für die Erkenntnisse der reinen Mathematik, der reinen Naturwissenschaft und der Metaphysik des Uebersinnlichen aufgedeckt werden, die Rechtmäßigkeit dieser dreierlei Erkenntnisse zu erschließen. Am wenigsten bestreitbar erscheint von vornherein die Berechtigung der reinen Mathematik und darnach die der reinen Naturwissenschaft. Wenn sich also am Schlusse der genannten Untersuchung herausstellen sollte, dass die Bedingungen der reinen Mathematik (und die der reinen Naturwissenschaft) auf dem Boden der menschlichen Vernunft unvereinbar sind mit denen der Metaphysik, so wird es kaum mehr zweifelhaft sein, dass die metaphysische Erkenntniss der Berechtigung entbehrt. Der letzte Zweifel darüber wird gehoben werden, wenn man zu der Einsicht gelangt, dass die reine Mathematik zwar die Thatsache einer (wenn auch unberechtigten) Metaphysik erklärt, nicht aber umgekehrt die Metaphysik die Thatsache der reinen mathematischen Erkenntniss. Der richtige Einblick in die innere Natur der mathematischen Erkenntnisse wird also zum Regulativ für alle weitere Kritik der reinen Vernunft.

Diese wenigen Bemerkungen über das Verhältniss der Lehre Kant's von den synthetischen Urtheilen a priori zum ganzen Bau seiner Kritik der reinen Vernunft mögen genügen, die hohe Bedeutung derselben für seine Vernunftkritik außer allen Zweifel zu stellen. Sie bildet für letztere den Ausgangspunkt und verhilft zu einer genauen Fassung ihres Gesammtproblems sowohl wie der einzelnen Aufgaben, die in diesem enthalten sind. Es lohnt daher wohl an sich schon der Mühe, diese Lehre Kant's von den synthetischen Urtheilen a priori einer eingehenden Darstellung und Prüfung zu unterziehen; und dabei wird es in Folge der fundamentalen Wichtigkeit einer richtigen Auffassung der wissenschaftlichen Natur der Mathematik für die gesammte Vernunftkritik vollkommen gerechtfertigt erscheinen, wenn die kritische Untersuchung der mathematischen Urtheile eine besondere Berücksichtigung erfährt. Zweierlei aber ist es, wodurch die Kantische Lehre, zumal soweit sie sich auf die Axiome und Lehrsätze der Mathematik bezieht, noch erhöhtes Interesse gewinnt: einmal der Charakter der Neuheit, den sie gegenüber der vorkantischen Philosophie trägt, und der sich insbesondere in ihrer entschiedenen Gegensätzlichkeit zum metaphysischen Dogmatismus eines Leibniz und Wolff und zu Hume's Skepticismus kundgibt; dann aber die lebhafte Beurtheilung und eingehende Kritik, welche dieselbe in der neueren Erkenntnisstheorie gefunden hat.

I. Kapitel.

Kant's Eintheilung der Urtheile in analytische und synthetische und in Urtheile a priori und a posteriori; insbesondere seine Begründung des synthetischen und apriorischen Charakters der mathematischen Urtheile.

Die Lehre Kant's von den synthetischen Urtheilen a priori ist, wie wir sahen, grundlegend für seine gesammte kritische Philosophie. Es kann daher nicht verwundern, wenn Kant dieselbe da zum Ausgangspunkte wählt, wo er eine zusammenhängende Darstellung seiner Vernunftkritik gibt: in der »Kritik der reinen Vernunft«[1]) und in den »Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik«[2]).

Zwei wohl zu unterscheidende Eintheilungsgründe sämmtlicher

1) Kant's Werke, Gesammtausgabe von Rosenkranz und Schubert, Bd. 2.

2) Ebenda, Bd. 3, p. 1.

Urtheile sind es, welche die dort entwickelte Lehre voraussetzt: einmal das Verhältniss des Prädicatbegriffes zum Subjectbegriffe, zweitens aber der Ursprung, die Quelle des Urtheils und der davon abhängige, dem Inhalte des Urtheils zugeschriebene Grad der Gewissheit. Der erste Eintheilungsgrund bedingt die Unterscheidung analytischer und synthetischer Urtheile; nach dem zweiten Eintheilungsgrunde richtet es sich, ob ein Urtheil a priori oder a posteriori gilt. Durch Verbindung der beiden Dichotomien, zu denen man hiernach gelangt, entsteht eine Tetratomie, deren eines Glied allerdings sogleich als unmöglich fortgelassen werden muss; denn jeder analytische Satz ist ein Urtheil a priori, analytische Urtheile a posteriori gibt es nicht.

Unter den drei Urtheilsformen, die somit als einzig möglich nachbleiben, nimmt eine hinsichtlich ihres Erkenntnisswerthes eine hervorragende Stellung ein: Es sind im Grunde genommen nur die synthetischen Urtheile a priori, die eine wirkliche Erkenntniss enthalten. Diesen Urtheilen muss daher eine besonders eingehende und aufmerksame Untersuchung gewidmet werden.

II. Analytische und synthetische Urtheile.

Unsere erste Frage wird sein: Was versteht Kant unter einem analytischen, was unter einem synthetischen Urtheil? Durch welche Merkmale unterscheidet sich das analytische Urtheil vom synthetischen?

Werden zwei Vorstellungen zu einem Urtheile verbunden, so kann das Verhältniss dieser beiden Vorstellungen zu einander von zweifacher Art sein. Entweder nämlich ist in der Subjectvorstellung die Prädicatvorstellung als wesentliches Merkmal enthalten, oder nicht; entweder also wird im Subjecte der Prädicatbegriff nothwendig mitgedacht, oder er fügt zum Subjectbegriffe etwas hinzu, was keinen wesentlichen Bestandtheil desselben ausmacht. Im ersteren Falle heißt das Urtheil analytisch, im zweiten synthetisch. Die Ausdehnung ist ein wesentliches Merkmal aller Körper, man kann sich keinen Körper denken, der nicht ausgedehnt wäre. Urtheile ich also: »Alle

Körper sind ausgedehnt«[1]), so setzt dies nur voraus, dass ich den Begriff »Körper« analysirt, in seine specifischen Merkmale aufgelöst, und eines dieser Kennzeichen namhaft gemacht habe. Das Urtheil ist also analytisch. Synthetisch dagegen ist der Satz: »Alle Körper sind schwer«; denn mit dem Begriffe eines Körpers denke ich nicht nothwendig gleichzeitig den Begriff der Schwere. Es sind also zwei Begriffe verbunden worden, von denen es nicht gilt, dass der eine als wesentliches Merkmal in dem anderen enthalten ist. In dem Urtheile: »Das Quadrat hat vier Seiten« ist der Prädicatbegriff im Subjecte mit enthalten; die Vierzahl der Seiten wird in dem Begriffe »Quadrat« nothwendig mitgedacht; dieses Urtheil ist also analytisch. Der Satz: »Die Diagonalen eines Quadrates stehen senkrecht auf einander« ist dagegen sicherlich synthetisch. Denn ich mag die Zergliederung des Begriffes »Quadrat« (oder des Begriffes der Diagonalen des Quadrates) beliebig weit fortführen, so werde ich doch niemals zur Einsicht des genannten Urtheils gelangen. Für die Richtigkeit des ersteren (bejahenden, analytischen) Urtheils bietet der Satz des Widerspruches volle Gewähr. Denn die Behauptung, dass die Anzahl der Seiten des Quadrates nicht gleich vier wäre, würde ja mit dem Begriffe des Quadrates in Widerspruch stehen. Ebenso ist die Wahrheit des folgenden Satzes, der als verneinendes analytisches Urtheil bezeichnet werden muss, eine directe Folge des Satzes vom Widerspruche: »Das Quadrat hat nicht fünf Seiten«. Die Fünfzahl der Seiten würde ja dem Begriffe des Quadrates zuwiderlaufen.

Ueberhaupt ist der Satz vom Widerspruche Grundprincip aller analytischen Urtheile[2]). Denn da der Prädicatbegriff in einem bejahenden analytischen Urtheile bereits im Subjectbegriffe als Merkmal enthalten ist, so würde die Verneinung dieses Merkmales einen Widerspruch in sich schließen, und ebenso erfolgt die Erkenntniss der Richtigkeit eines verneinenden analytischen Urtheils nach diesem logischen Grundsatze; denn ein verneinendes Urtheil wird ja gerade dann analytisch genannt werden müssen, wenn seinem Subjecte ein Merkmal abgesprochen wird, das mit dem Begriffe desselben in Widerspruch steht.

---

1) Krit. p. 21; Prol. p. 17.

2) Krit. 2. Ausgabe, a. a. O. p. 700; Prol. p. 17.

Welches ist nun aber das Grundprincip der synthetischen Urtheile? Der Satz des Widerspruches jedenfalls nicht allein. Oder könnte mir etwa dieses Princip zu der Erkenntniss verhelfen, dass ich allen Körpern das Prädicat der Schwere, jedem Winkel zwischen den Diagonalen eines Quadrates die Größe eines Rechten zuschreibe? Sicherlich nicht. Die Beantwortung der gestellten Frage, der Frage also nach den Bedingungen, unter denen synthetische Urtheile zu Stande kommen können, ist vielmehr (abgesehen von einem besonderen Falle, von dem später [unter III.] die Rede sein wird) mit weitaus größeren Schwierigkeiten verbunden, als die Gewinnung des Grundaxioms aller analytischen Urtheile; und zwar bildet, wie schon einleitungsweise bemerkt wurde, die Aufdeckung und kritische Untersuchung dieser Grundlagen der synthetischen Urtheile, soweit dieselben Vernunfterkenntnisse enthalten, die Hauptaufgabe der Kritik der reinen Vernunft.

Der verschiedenen Art der Bedingungen, unter denen die Bildung analytischer und synthetischer Urtheile vor sich geht, entspricht ein verschiedener Grad ihrer Bedeutung für die Gewinnung wissenschaftlicher Erkenntnisse. Ein analytisches Urtheil enthält nur eine logische, eine selbstverständliche Wahrheit und verfolgt keinen anderen Zweck, als eine der wesentlichen Eigenschaften des Subjectes besonders hervorzuheben oder die wesentlichen Elemente seines Begriffes klar vor Augen zu stellen. Jedes synthetische Urtheil dagegen schließt eine neue Einsicht in sich, wenigstens für denjenigen, der von dem Subjecte nur die primitive, zur Umgrenzung seines Begriffes eben ausreichende Vorstellung besitzt. Das analytische Urtheil erläutert[1]) einen Begriff durch Auflösung desselben in seine Bestandtheile; das synthetische Urtheil erweitert eine Vorstellung durch Angabe neuer, außerhalb desselben liegender Merkmale. Alle eigentlichen Erkenntnissurtheile sind also sicherlich synthetisch.

Eine Classe von Urtheilen gibt es, deren synthetischer Charakter augenscheinlich völlig außer Zweifel steht. Es sind dies die sämmtlichen Erfahrungsurtheile[2]) (im weitesten Sinne), solche Urtheile

1) Krit. p. 21; Prol. p. 16.

2) Krit. 2. Ausgabe, p. 700; Prol. p. 18.

also, deren Inhalt entweder selbst den Gegenstand einer directen Erfahrung bildet — wie es im Wahrnehmungsurtheile[1]) geschieht — oder doch wenigstens in einer Verknüpfung wahrgenommener Erscheinungen besteht. Denn jedes Urtheil ist entweder analytisch oder synthetisch. Wie aber könnte ein analytisches Urtheil sich auf Erfahrung gründen? Ist es nicht vielmehr ein rein formal-logischer, von jedem empirischen Motive vollständig unabhängiger Act, wenn ich aus den Merkmalen eines Begriffes eines herausgreife, um es zum Prädicate eines Urtheils zu machen, dessen Subject jener Begriff ist? Im Erfahrungsurtheile werden zwei Thatsachen verknüpft, die Gegenstände unserer sinnlichen Wahrnehmung sind. Welchen Anlass sollte unser ursprüngliches Denken haben, die eine derselben als unerlässliches Merkmal der anderen aufzufassen? Sage ich z. B.: »Wenn die Sonne den Stein bescheint, so wird er warm«[2]), so gebe ich damit keineswegs einer aus logischen Gründen selbstverständlichen Wahrheit Ausdruck. Die Thatsache, dass der Stein von der Sonne beschienen wird, enthält an sich nichts, was mit der zweiten Thatsache der Erwärmung dieses Steines übereinstimmte. Das genannte Erfahrungsurtheil ist also in der That synthetisch.

III. Erkenntnisse a priori und Erkenntnisse a posteriori.

Jede wirkliche Erkenntniss kann, wie wir sahen, nur in einem synthetischen Urtheile ihren Ausdruck finden. Es sind nun aber nicht umgekehrt alle synthetischen Urtheile auch eigentliche Erkenntnissurtheile. Es gehört dazu vielmehr noch ein weiteres Merkmal, nämlich — um den Kantischen Ausdruck zu gebrauchen — das Merkmal der Apriorität. Synthetische Urtheile sind also nur dann wirkliche Erkenntnissurtheile, wenn sie gleichzeitig a priori feststehen[3]). Welche Bedeutung hat nun aber dieses Kantische Apriori? Wie unterscheidet sich eine Erkenntniss a priori von einem nicht apriorischen Urtheil, oder, wie Kant sagt, von einer

1) Prol. p. 58.
2) Prol. p. 62.
3) Krit. p. 23; Prol. p. 28.

Erkenntniss a posteriori? Welches also ist das zweite charakteristische Merkmal eines eigentlichen Erkenntnissurtheils?

Werden zwei verschiedene Vorstellungen zu einem Urtheil verbunden, so kann die Verknüpfung derselben entweder eine nothwendige sein oder eine nur zufällige, d. h. die Annahme, diese Verbindung bestände nicht, enthielte nichts Unmögliches. Entweder ferner kann diese Verknüpfung in allen Fällen ohne Ausnahme, also allgemein, oder nur in particularen, durch Hinzutreten gewisser Sonderbedingungen ausgezeichneten Fällen stattfinden. Nothwendigkeit und strenge Allgemeinheit und ebenso Zufälligkeit und Particularität sind aber stets an einander gebunden[1]). Jedes Urtheil ist also entweder nothwendig und allgemein oder zufällig und particular. Im ersteren Falle heißt das Urtheil a priori[2]), im zweiten Falle enthält es eine Erkenntniss a posteriori.

Diese Namen beziehen sich auf die verschiedenen Quellen dieser beiden Arten von Erkenntnissen. Alles menschliche Wissen stammt nämlich entweder aus der Erfahrung, oder es ist unabhängig von aller Erfahrung vor derselben vorgebildet. Alle Erfahrung aber trägt den Charakter der Zufälligkeit an sich und bezieht sich immer nur auf einzelne Fälle. Nothwendigkeit und Allgemeinheit können also unmöglich einzig aus der Erfahrung hergeleitet, unmöglich erst a posteriori gewonnen sein; nothwendige und allgemeine Sätze müssen vielmehr schon vor aller Erfahrung, sie müssen a priori feststehen.

Jede wirkliche Erkenntniss wird nun jedenfalls den Charakter der Nothwendigkeit und Allgemeinheit besitzen müssen. Denn wie könnte etwas Zufälliges und Particulares Inhalt einer Erkenntniss von irgend welchem Werthe sein? Wahre Erkenntniss muss also in Sätzen a priori bestehen und wird sich dadurch unterscheiden von denjenigen Einsichten, für die erst durch die Erfahrung eine Bürgschaft gewonnen wird, und die deshalb als Erkenntnisse a posteriori bezeichnet werden können.

Zu dem synthetischen Charakter der eigentlichen Erkenntniss-

---

1) Krit. 2. Ausgabe, p. 697.
2) Krit. p. 17; 2. Ausgabe, p. 697.

urtheile kommt somit als zweites wesentliches Merkmal die Apriorität ihres Inhalts: Alle wahre Erkenntniss besteht in synthetischen Urtheilen a priori.

Ist ein Satz nicht synthetisch, sondern analytisch, so ist er zwar sicher nothwendig und allgemein, also ein Urtheil a priori — denn man kann, ohne sich auf die Erfahrung zu berufen, einen Begriff zergliedern und ein in demselben enthaltenes Merkmal angeben[1]) — aber er enthält eine nur selbstverständliche logische Wahrheit und keine wirkliche Erkenntniss. Ist umgekehrt ein Satz zwar synthetisch, aber ein Urtheil a posteriori, so ist er ein einfaches Wahrnehmungsurtheil[2]), das ebenfalls keine werthvolle Erkenntniss enthält, deshalb nämlich, weil dieselbe nur zufällig und particular, nicht aber nothwendig und allgemeingültig ist.

Das Grundaxiom der analytischen Urtheile (a priori) ist der Satz vom Widerspruch (vergl. II.); in einem synthetischen Satze a posteriori (in einem Wahrnehmungsurtheile) geschieht die Verknüpfung des Subjectbegriffes mit der außerhalb desselben liegenden Prädicatvorstellung durch die Erfahrung[3]); bei den synthetischen Urtheilen a priori dagegen kann diese Synthese sicher nicht durch die Erfahrung allein zu Stande kommen, weil diese Verknüpfung den Charakter des Nothwendigen und Allgemeinen an sich trägt, der aus der Erfahrung niemals abgezogen werden kann; es muss vielmehr die Vernunft an sich die Verbindung der Vorstellungen vollziehen und damit dem Inhalte der Erkenntniss eine Form geben. Dies setzt voraus, dass die Vernunft gewisse formgebende Vermögen besitzt, deren Function es eben ist, Vorstellungen zu verknüpfen. Die Frage: »Wie sind synthetische Urtheile a priori möglich?« — die als die Grundfrage der gesammten kritischen Philosophie zu betrachten ist (vergl. I.) — wird also ihre Antwort finden, wenn man diese formgebenden Vermögen in der menschlichen Vernunft nachweist und den Umfang und die Grenzen derselben durch sorgfältige Untersuchung bestimmt.

Abgesehen von den analytischen Urtheilen sind es die Sätze der reinen Mathematik, deren apriorischer Charakter am ehesten

1) Prol. p. 17.
2) Prol. p. 58.
3) Krit. p. 22; 2. Ausgabe p. 700; Prol. p. 28.

in die Augen fällt[1]). Denn jeder mathematische Satz hat die Eigenschaft, dass sein Gegentheil entschieden falsch ist; sein Inhalt ist also nothwendig; jeder Satz der Mathematik besteht aber auch zu jeder Zeit und unter allen Umständen und besitzt also auch das charakteristische Merkmal der Allgemeinheit. Damit stimmt es dann überein, dass die Mathematik nicht eine empirische, sondern eine exacte, eine demonstrative Wissenschaft ist.

IV. Synthetische Urtheile a priori.

Nachdem einmal (bei Kant) der synthetische Charakter aller Erfahrungsurtheile (vergl. II.) und die Apriorität aller mathematischen Sätze (vergl. III.) feststeht, gelangt man auf zwei Wegen zu synthetischen Urtheilen a priori: einmal, indem man sich überzeugt, dass gewisse Erfahrungsurtheile a priori gültig sind, und zweitens, indem man zeigt, dass alle eigentlichen Sätze der Mathematik synthetische Urtheile sind. Gelingt dieser doppelte Nachweis, so liegt es nahe zu untersuchen, ob es außer den apriorischen Erfahrungsurtheilen und außer den Sätzen der Mathematik noch weitere (berechtigte oder unberechtigte) synthetische Urtheile a priori gibt. Dabei wird sich herausstellen, dass auch alle eigentlichen metaphysischen Sätze synthetische Urtheile a priori sind.

Jedes Erfahrungsurtheil ist entstanden durch die Erfahrung; es ist daher anfänglich nicht abzusehen, wie ein derartiges Urtheil gleichzeitig hervorgegangen aus der bloßen Vernunft, d. h. a priori, sein soll. Näher liegt vielmehr die Einsicht synthetischer Urtheile a priori von Seiten der reinen Vernunfturtheile, der Beweis also, dass die mathematischen Sätze — deren apriorischer Charakter feststeht — synthetische Urtheile sind. Zu diesem Ende prüfe man die Definitionen und Axiome sowie die fundamentalen Zahlformeln der Mathematik und sehe zu, ob sich dieselben als synthetische Urtheile erweisen. Denn dass alle aus diesen Grundsätzen abgeleiteten Urtheile der Mathematik synthetisch sind, dafür bietet schon die Thatsache Gewähr, dass dieselben überhaupt eines Beweises bedürfen.

---

1) Krit. p. 19; 2. Ausgabe, p. 698 und 702; Prol. p. 19.

Ein Grundsatz der reinen Geometrie lautet: »Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten«.[1] Ist dieser Satz synthetisch oder analytisch? Wäre er analytisch, so müsste die Vorstellung der kürzesten Entfernung in dem Begriffe der geraden Linie bereits als nothwendiges Merkmal gedacht werden. Nun mag ich aber in meiner Zergliederung des Begriffes des Geraden beliebig weit fortgehen, nie werde ich in demselben den Begriff des Kürzesten antreffen. Das Urtheil ist vielmehr synthetisch. Es ist ein synthetisches Urtheil a priori. Wie aber kann es geschehen, dass ich die als verschiedenartig erkannten Begriffe des Geraden und des Kürzesten derart verbinde, dass ich dieser Verknüpfung Nothwendigkeit und Allgemeinheit zuschreibe? Eine Verbindung dieser Art muss, wie wir sahen, in der reinen Vernunft ihren Grund finden, und zwar ist dasjenige ursprüngliche Vermögen der bloßen Vernunft, das in dem vorliegenden Falle die Verknüpfung von Subject und Prädicat erzeugt, anschaulicher Natur; es ist die reine Anschauung. Ich muss mir die gerade Verbindungslinie der beiden Punkte construiren, muss mir also den Begriff der geraden Linie erst versinnlichen, ihn in Anschauung verwandeln, ehe ich den fraglichen Grundsatz als wahr erkennen kann. Erst die räumliche Construction, erst die Anschauung macht also dieses synthetische Urtheil a priori möglich[2]. Genau dasselbe wird für diejenigen beiden Axiome des Euklid gelten, die von rein geometrischem Charakter sind, also für den Satz, dass zwei Gerade niemals einen Raum einschließen, sowie für seinen 11. Grundsatz, das sogenannte Parallelenaxiom. Auch sie sind synthetische Urtheile a priori, deren Synthese durch räumliche Anschauung vollzogen wird.

Wie verhält es sich nun aber weiterhin mit den Zahlformeln der Arithmetik, wie endlich mit den allgemeinen Regeln und Axiomen des Zahlen- und Buchstabenrechnens? Ist nicht beispielsweise die arithmetische Formel $7 + 5 = 12$[3] ein bloß analytischer Satz, zu dem ich durch Zergliederung des Begriffes einer Summe von Sieben und Fünf gelange? Keineswegs. Der Subjectbegriff enthält vielmehr nichts weiter als die Forderung, die

1) Krit. 2. Ausg. p. 703; Prol. p. 20.
2) Prol. p. 39.
3) Krit. 2. Ausg. p. 702; Prol. p. 19.

Zahl 7 und die Zahl 5 in eine Zahl zu vereinigen; welches aber diese letztere Zahl, welches also das Prädicat ist, dazu kann eine bloße Zergliederung des Begriffes $7 + 5$ niemals führen. Das Prädicat ist vielmehr aufzufassen als Lösung einer Aufgabe, die im Subjecte formulirt ist. Die Lösung einer Aufgabe ist aber in derselben niemals als Merkmal enthalten. Die Aufgabe würde ja dann einer Lösung gar nicht bedürfen. Der Satz $7 + 5 = 12$ ist also synthetisch; er ist ein synthetisches Urtheil a priori. Es ist wiederum die reine Anschauung, durch welche die nothwendige und allgemeingültige Verknüpfung von Subject und Prädicat in diesem Urtheile hergestellt wird. Erst indem ich wenigstens eine der Zahlen 7 und 5 mir anschaulich mache, etwa die 5 durch die fünf Finger der Hand oder durch fünf Punkte, kann ich die im Subjecte geforderte Addition wirklich ausführen, und zwar so, dass ich zu dem Begriffe der Sieben die Einheiten der sinnlich dargestellten Fünf nach und nach hinzufüge. Ebenso ist es in allen anderen Zahlformeln der Arithmetik jederzeit die reine Anschauung, welche die in denselben stattfindende Synthese vollzieht und es dadurch ermöglicht, dass diese arithmetischen Sätze synthetische Urtheile a priori sind.

Weniger aber wird man zunächst geneigt sein, den allgemeinen Grundsätzen der Größenlehre (Arithmetik und Algebra) synthetischen Charakter zuzuschreiben[1]). Ist z. B. das Axiom vorgelegt: »Das Ganze ist größer als sein Theil« ($a + b > a$), so wird man nach dem Satze des Widerspruches unmittelbar die Richtigkeit desselben einsehen, und es erscheint also, will man bloß nach diesem Kriterium gehen, wohl berechtigt, das Urtheil analytisch zu nennen. Man darf aber dabei nicht außer Acht lassen, dass im Denken des Subjectes $a + b$ das Prädicat $> a$ gar nicht mitgedacht zu werden braucht. Wenn wir also daran festhalten, dass ein Urtheil dann analytisch heißen soll, wenn der Prädicatbegriff im Subjectbegriffe nothwendig mitgedacht wird, synthetisch aber, wenn dies nicht der Fall ist, so dürfen wir uns durch die Thatsache, dass das genannte Axiom auf dem Satze des Widerspruches beruht, nicht irre leiten lassen und müssen dasselbe für

1) Krit. 2. Ausg. p. 704; Prol. p. 20.

ein synthetisches Urtheil erklären. Das Gleiche gilt von den verwandten Grundsätzen der allgemeinen Größenlehre.

Alle diese fundamentalsten Axiome der Mathematik dienen übrigens, indem sie Aussagen über allgemeinste Begriffe enthalten, gleichzeitig zur Definition derselben und stehen deshalb in naher Beziehung zu denjenigen Begriffsdefinitionen, deren Einführung sich im Verlaufe der mathematischen Untersuchung nöthig macht. Diese Begriffsdefinitionen aber können ebenfalls als synthetische Urtheile aufgefasst werden, sofern die Zulässigkeit derselben erst erkannt wird, indem man in der Anschauung die definirte Vorstellung nach den in der Definition angegebenen Merkmalen erzeugt, zusammensetzt, construirt. So erhält die Definition: »Ein Quadrat ist eine von vier gleichen Seiten begrenzte ebene Figur, deren Winkel sämmtlich Rechte sind« ihre Berechtigung erst dadurch, dass man sich in der Anschauung von der Möglichkeit der Construction eines ebenen Vierecks mit vier gleichen Seiten und vier rechten Winkeln überzeugt. Sofern nun die Möglichkeit des Quadrates, die durch die Definition desselben behauptet wird, in dem bloßen Begriffe des Quadrates keineswegs nothwendig mitgedacht, sondern erst durch die Anschauung erkannt werden kann, ist man wohl berechtigt, diese Definition als ein synthetisches Urtheil zu bezeichnen.

Die Constatirung der Thatsache synthetischer Urtheile a priori in der Mathematik regt dazu an, die Sätze der Naturwissenschaft (die Erfahrungsurtheile) erneut der Untersuchung zu unterwerfen und nachzusehen, ob denn in der That der empirische Charakter der in solchen Urtheilen verbundenen Vorstellungen die Apriorität ihrer Verknüpfung vollständig ausschließt. Es sei beispielsweise der Satz vorgelegt: »Alles, was geschieht, hat seine Ursache«[1], oder: »In allen Veränderungen der körperlichen Welt bleibt die Quantität der Materie unverändert«[2], oder etwa der weitere: »Bei aller Mittheilung der Bewegung sind Wirkung und Gegenwirkung einander gleich«[2]. Diese Sätze werden als nothwendig gedacht; ihr Gegentheil erklärt man für unrichtig. Es kommt ihnen ferner strenge Allgemeinheit zu; man hält sie zu jeder Zeit, an jedem Orte, unter allen Umständen für

1) Krit. p. 23.
2) Krit. 2. Ausg. p. 704.

wahr. Dazu kommt, dass es vollständig ungereimt wäre, diese Behauptungen einzig auf Erfahrung zu gründen, ihren Ursprung einzig aus der Erfahrung herzuleiten. Denn die Erfahrung bezieht sich immer nur auf einzelne Fälle, während die genannten Sätze etwas aussagen von »Allem, was geschieht«, von »der Quantität der Materie bei allen Veränderungen der körperlichen Welt« und von »der Wirkung und Gegenwirkung bei aller Mittheilung der Bewegung«. Die angegebenen Sätze sind also Urtheile a priori, synthetische Urtheile a priori.

Die Möglichkeit dieser Erfahrungsurtheile a priori kann nur erklärt werden durch Betheiligung gewisser ursprünglicher Begriffe des reinen Verstandes (Kategorien), unter denen von hervorragender Bedeutung ist die Kategorie der Causalität.

Auch jede metaphysische Erkenntniss (wenn es eine gibt), sofern sie sich erstreckt auf das Uebersinnliche und auf das Wesen der Dinge, muss in synthetischen Urtheilen a priori bestehen [1]). Die Bildung analytischer Urtheile, die bloße Zergliederung ihrer Begriffe, kann für die Metaphysik nur eine vorbereitende, nicht die endgültige Aufgabe sein. Die Metaphysik will vielmehr ihre Begriffe erweitern, ihnen etwas hinzufügen, was in ihnen noch nicht enthalten ist. Dies trifft insbesondere alle Existenzsätze der Metaphysik. Jedes ihrer Objecte ist ja ein bloßes Gedankending. Behaupte ich die Existenz desselben, so gehe ich über seinen Begriff hinaus. Alle eigentlichen metaphysischen Sätze, insbesondere alle Existenzsätze derselben, sind also synthetische Urtheile, und zwar synthetische Urtheile a priori, denn sie können sicher nie in der Erfahrung ihren Ursprung finden.

Wie nun aber könnte die Möglichkeit solcher eigentlicher metaphysischer Urtheile erklärt werden? Da dieselben apriorisch sind, müsste die Verknüpfung der in sie eingehenden Begriffe Aufgabe der reinen Vernunft sein. Der reinen Vernunftvermögen sind aber zwei: Sinnlichkeit und Verstand. Nichts kann Gegenstand menschlicher Erkenntniss sein, das nicht der Sinnlichkeit und dem Verstande zugänglich wäre. Dies hat aber zur Folge, dass alle unsere Erkenntniss sich nur beziehen kann auf Erscheinungen, die

---

1) Krit. 2. Ausg. p. 705; Prol. p. 25.

nichts anderes sind als unsere subjectiven Vorstellungen. Gegenstände der Metaphysik bilden aber nicht die Erscheinungen, sondern die Dinge an sich. Damit ist die Möglichkeit einer Metaphysik des Uebersinnlichen widerlegt.

II. Kapitel.

Die Kantische Auffassung der mathematischen Urtheile im Gegensatze zum Leibniz-Wolffischen Dogmatismus und zum Skepticismus Hume's.

Für das negative Ergebniss der transcendentalen Dialektik, dass aller Metaphysik im Sinne der dogmatischen Philosophie als Erkenntnisswissenschaft jede Berechtigung abgesprochen werden muss, erscheint als erster Ausgangspunkt die richtige Einsicht in die wahre Natur aller wirklichen Erkenntniss. Hierzu aber ist mit der Kantischen Entdeckung, dass die mathematischen Sätze synthetische Urtheile seien, der erste Schritt gethan. Dieser Einblick Kant's in das innere Wesen aller mathematischen Wahrheiten ist aber noch in anderer Beziehung von hoher Bedeutung. Er führt zu der Ueberzeugung, dass es wirkliche und berechtigte Erkenntniss thatsächlich gibt — denn alle Sätze der Mathematik enthalten solche wirkliche und berechtigte Erkenntniss — und beseitigt damit jeden Zweifel an der Unmöglichkeit menschlichen Wissens. Die Kantische Aufdeckung des synthetischen Charakters der mathematischen Sätze zerstört also beides: die dogmatische Metaphysik, wie sie zuletzt vertreten wurde von Leibniz und Wolff, und den Skepticismus David Hume's. Dogmatische Metaphysik sowohl wie Skepticismus müssen an der These festhalten: Die mathematischen Sätze sind analytische Urtheile; die Annahme und der weitere Verfolg der Kantischen Antithese würde sie in unausgleichbare Widersprüche verwickeln. Erst verhältnissmäßig spät ist Kant zum deutlichen Bewusstsein von der Unbestreitbarkeit dieser Antithese gelangt; in einem langen Entwicklungsgange ist dieselbe in ihm zu voller Klarheit gereift. In Wahrheit hatte er den Boden der metaphysischen Dogmatik schon geraume Zeit verlassen, ehe er seine Entdeckung machte. Dieselbe konnte ihn also in seinem Abfall vom Dogmatismus höchstens bestärken, nicht aber ihn allererst dazu führen. Wohl aber hatte sie direct eine andere hochwichtige Umgestaltung seiner philosophischen Auffassung zur Folge: Sie führte ihn vom Humeschen Skepticismus zu seiner Kritik der reinen Vernunft.

V. Philosophischer Charakter der Mathematik nach Leibniz und Wolff.

Bei Leibniz und Wolff hängt die Auffassung der mathematischen Sätze eng zusammen mit ihrer allgemeinen Erkenntnisslehre. Dieselbe kennt überhaupt nur zwei Arten von Erkenntnissurtheilen: solche a priori und solche a posteriori, Urtheile durch Vernunft und Urtheile durch Erfahrung[1]). Die einen enthalten nothwendige und allgemeine, die anderen zufällige und particulare Wahrheiten. Die ersteren gründen sich auf deutliche, die letzteren auf verworrene Vorstellungen oder Ideen[2]); d. h. die einen beziehen sich auf nur mögliche, auf nur denkbare Dinge oder auf Begriffe, deren Merkmale man überdenken, im Geiste prüfen kann, die anderen auf wirkliche, in der Natur gegebene Dinge, auf Vorstellungen also, die eine derartige Prüfung nicht zulassen[3]). Das oberste Princip der Vernunftwahrheiten ist der Satz der Identität und des Widerspruches[4]), als oberstes Axiom aller Erfahrungswahrheiten aber muss der Satz des zureichenden Grundes, das Gesetz der Causalität, betrachtet werden. Denn von allen möglichen Dingen gilt, dass sie mit sich selbst übereinstimmen, dass sie aber auch nur sich selbst gleich sind; von allen wirklichen Dingen dagegen, dass sie in der Natur ihre Bedingungen finden müssen. Der Satz der Identität erklärt, dass ein Ding gleichgesetzt werden darf sich selbst, d. h. der Summe seiner Merkmale. Wenn also ein Urtheil das Gesetz der Identität

1) Leibniz, »Nouveaux essais sur l'entendement humain« IV, 2. Ausg. von Raspe, p. 326; Wolff, »Vernünftige Gedanken von den Kräften des menschlichen Verstandes« III, 11—13, p. 75.

2) Leibniz, Nouv. ess. 1, 1, p. 37.

3) Wolff, »Elementa matheseos universae« Bd. I, p. 4, §§ 8—9.

4) Leibniz, »Monadologie« 31—38. Ausg. von Erdmann, p. 707 f.

als Grundsatz hat, so wird es seinem Subjecte nur ein solches Prädicat beilegen können, das schon als wesentliches Merkmal im Subjectbegriffe enthalten ist. Sofern nun die Urtheile durch Vernunft nur solche Prädicatbegriffe zulassen, die einen Bestandtheil des Subjectes ausmachen, die also mit diesem in gewissem Sinne eins sind, können sie als identische Urtheile bezeichnet werden. Legt man darauf Gewicht, dass diese Urtheile nichts als eine Analyse des Subjectbegriffes voraussetzen, so wird man sie analytische Urtheile nennen können. Es werden aber — so behauptet wenigstens Leibniz, während Wolff sogar eine rationalistische Auffassung der Erfahrungswahrheiten seitens der Philosophie für möglich hält, womit dann übereinstimmt, dass er den Satz des zureichenden Grundes als einen Specialfall des Satzes vom Widerspruche ansieht — die Vernunftwahrheiten auch die einzigen sein, die in solchen analytischen Urtheilen ihren Ausdruck finden können. Heißen daher diejenigen Urtheile, die Erfahrungswahrheiten enthalten, zum Unterschiede von den durch Vernunft gewonnenen analytischen Urtheilen synthetisch, so lässt sich das erlangte Ergebniss so zusammenfassen: Alle Erkenntnisse a priori drücken sich aus in analytischen Urtheilen, oder nur anders formulirt: Alle synthetischen Urtheile können nur Erkenntnisse a posteriori enthalten.

Dieses Resultat entscheidet über die Stellung, die den mathematischen Sätzen angewiesen werden muss. In die Deutlichkeit, Nothwendigkeit und Allgemeinheit der mathematischen Wahrheiten kann keinerlei Zweifel gesetzt werden; ihre Begriffe sind ja nicht bloß deutlich, sondern zumeist sogar adäquat, d. h. die Merkmale derselben sind nicht bloß vollständig, sondern auch im Einzelnen klar bezeichnet[1]). Die mathematischen Sätze enthalten also Erkenntnisse a priori, sie sind analytische (identische) Urtheile.

Als Aufgabe der Mathematik erscheint so die Erläuterung und die Analyse der Figuren und der Größen; die Figuren werden gleich ihren Merkmalen und Elementen, die Größen gleich ihren Theilen gesetzt.

---

1) Wolff, Elem. math. Bd. I, p. 4, §§ 10 und 13.

Wenn man von den mathematischen Vorstellungen sagt, sie seien deutlich und adäquat, so kann dies freilich nur Geltung haben von den eigentlichen mathematischen Begriffen, d. h. von denjenigen Ideen, die Eigenthum ausschließlich der Vernunft sind, und die wir als unserem Geiste angeboren, als Naturanlage desselben, als ursprüngliche, zunächst allerdings nur in virtueller Form vorhandene Vorstellung ansehen müssen[1]. Nicht aber kann den sinnlichen Bildern, die wir uns von den Gegenständen der Mathematik machen, der Charakter der Deutlichkeit zugeschrieben werden. Diese sind vielmehr verworren, wie alles, dessen Ursprung in den Sinnen liegt. Was mir zur Gewinnung mathematischer Sätze über das regelmäßige Neuneck, Zehneck, Tausendeck verhilft, sind nicht die sinnlichen Bilder dieser Figuren, sondern die deutlichen Begriffe, die sich in Gestalt angeborener Ideen in meinem Geiste präformirt vorfinden. Ebenso muss der Begriff »99« von der sinnlichen Vorstellung »99 Pfunde« wohl unterschieden werden, wie überhaupt die Zahl von den gezählten Objecten[2]. Die Figuren und die gezählten Objecte, wie sie Gegenstände unserer Sinne sind, geben nur die Gelegenheit, dass wir uns ursprünglich in uns liegender Begriffe bewusst werden[3]. Nicht also die sinnlichen Bilder und Vorstellungen, die wir uns von den Gegenständen der Mathematik bilden können, sondern die in unserem Geiste von Anfang her als Naturanlage ruhenden Begriffe ermöglichen es, dass sich die Mathematik ausschließlich in analytischen Urtheilen bewegt. Würde sich die Mathematik auf die sinnlichen Bilder und Vorstellungen berufen und stützen, so würde ihr der Charakter der Deutlichkeit verloren gehen. Darum darf man der Versuchung, die namentlich in der Geometrie nahe liegt, die sinnlichen Bilder, die anschaulichen Figuren als Ausgangspunkt der Untersuchung zu nehmen, keinesfalls Folge leisten[4]. Denn man gelangt alsdann zu einer empirischen Geometrie, wie es diejenige der Egypter thatsächlich war[5]. Die Figuren der Geometrie haben

1) Leibniz, Nouv. ess. I, 1, p. 33.
2) Leibniz, Nouv. ess. II, 29, p. 219—220.
3) Leibniz, Nouv. ess. I, 1, p. 30.
4) Leibniz, Nouv. ess. IV, 1, p. 325—326.
5) Leibniz, Nouv. ess. IV, 12, p. 419.

vielmehr nur den Zweck, die Einsicht in das zu Beweisende zu erleichtern und die Aufmerksamkeit zu fixiren[1]; es ist aber nicht bloß möglich, sondern sogar nützlich, auf die Benutzung gezeichneter geometrischer Figuren überhaupt vollständig Verzicht zu leisten[2] und rein begrifflich, nur gestützt auf den Verstand, die geometrischen Einsichten zu gewinnen.

Alle mathematischen Sätze beruhen auf ihrer durch rein logische Operationen vermittelten Herleitung aus Definitionen und Axiomen[3]. Sollen also die eigentlichen mathematischen Sätze analytische Urtheile sein, so muss dasselbe zunächst von den Definitionen und Axiomen gelten. In der That sind dieselben analytische oder identische Sätze im reinsten Sinne; hier enthält das Prädicat thatsächlich nur ein solches Merkmal, das nothwendig zum Wesen des Subjectbegriffes gehört. Den Definitionen wird niemand diesen Charakter absprechen; und dieselbe Auffassung wird man von den Grundsätzen gewinnen, sobald man dieselben auf die primitivsten Axiome zurückgeführt hat; denn diese letzten unbeweisbaren Wahrheiten sind unmittelbar (intuitiv) gewiss und sicher identische Urtheile[4], keineswegs aber erst durch Induction aus Beispielen gewonnen oder durch Vermittelung der sinnlichen Anschauung[5]. Aus diesem Grunde kann den Versuchen, die Thales, Proclus, Apollonius und in neuerer Zeit Roberval gemacht haben, die Axiome Euklids zu beweisen, d. h. sie auf Definitionen und primitive identische Grundsätze zurückzuführen, die Berechtigung nicht abgesprochen werden[6]. Leibniz selbst versucht, die Grundlagen der Mathematik im Allgemeinen und der Euklidischen Geometrie im Besonderen in diesem Sinne weiter auszubauen und zu befestigen[7]. Allerdings ist nach Leibniz'

1) Leibniz, Nouv. ess. IV, 1, p. 325—326.

2) Wolff, Briefwechsel zwischen Leibniz und Wolff, herausgeg. von Gerhardt, Halle 1866, p. 41.

3) Wolff, Elem. math. Bd. I, p. 10, §. 45.

4) Leibniz, Nouv. ess. IV, 7, p. 372—373; Wolff, Elem. math. Bd. I, p. 7, §§. 30, 31, 33.

5) Leibniz, Nouv. ess. IV, 12, p. 416, 418—419; Wolff, Elem. math. Bd. I, p. 7, §. 34.

6) Leibniz, Nouv. ess. I, 1, p. 30; I, 3, p. 64; IV, 7, p. 372.

7) Leibniz, »Initia rerum mathematicarum metaphysica«, »Initia mathematica«, »Specimen geometriae luciferae«; Math. Schriften, herausgeg. von Gerhardt, Bd. VII, p. 17—28; 29—49; 260—299.

Meinung diese Zurückführung der mathematischen Axiome auf Definitionen und identische Grundsätze eine keineswegs leichte Aufgabe, und namentlich stellen sich dem Beweise der rein geometrischen Grundsätze außerordentliche Schwierigkeiten entgegen[1]. Damit stimmt es überein, wenn Leibniz behauptet, die geometrischen Wahrheiten ständen den Thatsachen der Arithmetik und Algebra an Deutlichkeit, Nothwendigkeit und Allgemeinheit nach, und es verdienten daher diese letztgenannten Theile der Mathematik vor der Geometrie den hervorragenden Platz[2].

Besondere Beachtung widmet Leibniz ebenso wie Kant den unmittelbaren Specialisirungen der Axiome, insbesondere den primitiven Zahlformeln. Der Satz: $2 + 1 = 3$ ist ein identisches Urtheil, denn er enthält im Grunde genommen nichts weiter als die Definition der Zahl 3[3]. Ebenso ist es auch ein analytisches Urtheil, wenn ich sage $2 + 2 = 4$; denn dieser Satz folgt auf rein logischem Wege aus den Definitionen der Zahlen 2, 3 und 4 und aus dem primitiven identischen Axiome: Gleiches für Gleiches gesetzt, gibt Gleiches[4].

Die Leibniz-Wolff'sche Lehre von der Natur der mathematischen Urtheile lässt sich kurz so resumiren: Die mathematischen Ideen, wie sie den ursprünglichen Besitzstand unseres Geistes bilden, sind rein begrifflicher Natur; die mathematischen Sätze entstehen durch Auflösung, durch Analyse dieser Begriffe, sie sind also sämmtlich analytische Urtheile. Dieser Auffassung wird das Fundament genommen, sobald die anschauliche Natur der mathematischen Ideen erkannt ist: dies aber geschieht in der Kantischen Vernunftkritik.

VI. Hume's Lehre von den Sätzen der Mathematik.

In einem Punkte stimmen hinsichtlich ihrer philosophischen Auffassung der Mathematik Leibniz und Wolff mit der Kanti-

1) Leibniz, Nouv. ess. IV, 2, p. 334; IV, 7, p. 380; IV, 12, p. 419—420.

2) Leibniz, »De resolutionibus aequationum« etc., »De constructione«, Math. Schriften, herausgeg. von Gerhardt, Bd. VII, p. 151 und 249.

3) Leibniz, Nouv. ess. I, 1, p. 38.

4) Leibniz, Nouv. ess. IV, 7, p. 379.

schen Lehre überein: sie schreiben wie Kant den mathematischen Ideen in unserem Geiste reale Existenz zu und gründen auf diese Ansicht die Evidenz und die Allgemeingültigkeit der mathematischen Sätze; sie vertreten also ebenso wie Kant den Standpunkt eines mathematischen Realismus [1]). Der Nominalismus in der Mathematik betrachtet im Gegensatze hierzu jene Ideen als erst entstanden aus empirischen Elementen, und zwar vermittelst willkürlicher Processe, so dass Abweichungen dieser Vorstellungen von den Erfahrungsobjecten als nicht ausgeschlossen erscheinen. Eine derartige nominalistische Auffassung der Mathematik bietet sich uns dar in der Philosophie David Hume's. Wenn auch Hume schließlich mit Leibniz zu dem Resultate gelangt, dass alle mathematischen Sätze analytische Urtheile sind, so muss sich also doch seine Begründung dieses Resultates streng unterscheiden von dem Wege, auf dem Leibniz (und Wolff) zu demselben gelangt.

Alle Urtheile, die wir bilden, lehrt Hume, kommen zu Stande durch Verbindung der Ideen, jener Vorstellungen von geringer Intensität, die sich in uns durch Zurückerinnerung an vorangegangene lebhafte Impressionen, also an directe äußere oder innere Wahrnehmungen bilden [2]). Je nach der Beziehung, in der die zum Urtheil verbundenen Ideen zu einander stehen, zerfallen alle Sätze in zwei Classen [3]). Diese Verbindung kann sich nämlich einmal vollständig begründen in den Ideen selbst, die verknüpft werden, oder sie ist von diesen Ideen an sich völlig unabhängig und kann sich ändern, ohne dass die Ideen einen Wechsel erfahren. Im ersteren Falle vollzieht sich diese Verknüpfung in uns selbst, in unserer Vernunft, und ist also ein Product unserer Willkür; im letzteren Falle ist sie uns in der Wahrnehmung als Verbindung von Impressionen gegeben und wird in unserem Geiste nur reproducirt. Die Urtheile der ersteren Art werden durch die bloße Denkthätigkeit gebildet, unabhängig davon, was als Thatsache existirt; die Urtheile der zweiten Gruppe dagegen sagen aus, wie irgend zwei Thatsachen, zwei empirische Dinge oder

1) Wundt, »Logik« Bd. II, p. 85.

2) Hume, »Treatise of human nature«. London 1739. Bd. I, p. 11 und 26; »Essays and treatises on several subjects«. Basel 1793. Bd. III, p. 16 und 22.

3) Hume, Hum. nat. Bd. I, p. 125; Ess. and treat. Bd. III, p. 24.

Ereignisse, in Verbindung oder Beziehung stehen. Die Sätze der ersten Classe wird man also in gewissem Sinne Urtheile a priori, die der zweiten Classe Urtheile a posteriori nennen können. Die einen werden Vernunftwahrheiten, die anderen thatsächliche Wahrheiten enthalten.

Welcher Art aber wird die Thätigkeit der Vernunft sein müssen, wenn sie Ideen verknüpfen und dabei doch nicht über diese Ideen hinausgehen soll? Ihre Function wird nur darin bestehen können, die Ideen durch Zergliederung in ihre Merkmale aufzulösen, sie zu analysiren. Ein Urtheil durch Vernunft wird also daran kenntlich sein, dass die eine der in ihm verknüpften Ideen einen wesentlichen Bestandtheil der anderen ausmacht; denn sonst könnte der Satz unmöglich allein durch Vernunft eingesehen werden. Setzt ferner das Urtheil wirklich nur auseinander, was in einer gegebenen Idee enthalten ist, so muss in ihm die Verknüpfung von Subject und Prädicat mit logischer Nothwendigkeit erfolgen, und seinem Inhalt wird demnach demonstrative Gewissheit zukommen. Diese logische Nothwendigkeit beruht auf dem Satze der Identität und des Widerspruches: Kehrt man eine Vernunftwahrheit um in ihr Gegentheil, so wird dasselbe als unmöglich, als undenkbar erkannt. Das Gegentheil einer thatsächlichen Wahrheit dagegen bleibt noch immer denkbar, sie findet also in dem Satze der Identität und des Widerspruches keine genügende Begründung; schreibt man ihr dennoch Nothwendigkeit zu, so ist dies nicht auf Vernunfteinsicht, sondern auf die regelmäßige Wiederkehr der Verknüpfung der nämlichen Vorstellungen zurückzuführen, vermöge deren wir uns gewöhnen, mit der einen Idee immer gleichzeitig eine andere zu setzen, und so diese beiden Ideen als durch Causalität verbunden aufzufassen. Eine solche thatsächliche Wahrheit spricht sich also in einem Urtheile aus, bei dessen Bildung Motive sich geltend machen, die nicht in den verknüpften Ideen allein ihre Quelle finden. Uebersetzt man also die Lehre Hume's in die Sprache Kant's, so wird sie lauten: Alle Urtheile, die Vernunftwahrheiten enthalten, sind analytisch, alle Urtheile dagegen, die sich auf thatsächliche Wahrheiten beziehen, synthetisch. Hume gelangt also wie Leibniz zu der Ansicht, dass es nur zwei Arten von

Urtheilen gibt: Analytische Urtheile a priori und synthetische Urtheile a posteriori.

Ist einmal diese Unterscheidung getroffen, so kann es nicht lange zweifelhaft sein, welcher der beiden Classen die mathematischen Urtheile zuzurechnen sind. Die Sätze der Mathematik erfreuen sich ebenso wie die rein logischen Axiome intuitiver oder demonstrativer Gewissheit und verdanken der Thätigkeit der bloßen Vernunft, keineswegs aber der geistigen Reproduction eines empirisch gegebenen Thatbestandes ihre Entstehung. Der Satz, dass das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gleich ist der Summe der Quadrate über den beiden Katheten, würde immer seine Nothwendigkeit und Evidenz beibehalten, auch wenn es in Wirklichkeit nirgendwo ein rechtwinkeliges Dreieck oder ein Quadrat gäbe[1]). Alle Sätze der Mathematik sind also analytische Urtheile[2]).

Wodurch aber kommt diese demonstrative Gewissheit, diese Evidenz der mathematischen Sätze zu Stande? Wie ist es möglich, dass die mathematischen Wahrheiten durch reine Geistesthätigkeit gewonnen werden können? Einzig dadurch, dass die mathematischen Ideen bis zu einem gewissen Grade ein Product sind unserer Willkür, unserer willkürlichen Construction. Freilich nur bis zu einem gewissen Grade; denn auch die Thätigkeit des Geistes ist nicht völlig frei von empirischen Motiven; sie kann immer nur darin bestehen, das uns durch die Sinne und die Erfahrung gelieferte Material zu verbinden, umzuformen, zu erweitern und einzuschränken[3]). Empirischer Natur sind nun aber bei den mathematischen Ideen nur die Elemente: Die mathematischen Punkte sind zugleich physische Punkte; sie sind die letzten untheilbaren Bestandtheile, zu denen eine Analyse unserer Wahrnehmungen führen kann[4]). Aus diesen letzten Elementen, aus diesen sicht- und fühlbaren Punkten, werden nun aber die mathematischen Ideen durch willkürliche Erzeugung gewonnen[5]).

1) Hume, Ess. and treat. Bd. III, p. 24.

2) Vergl. Kant, Prol. Bd. III, p. 24.

3) Hume, Ess. and treat. Bd. III, p. 17.

4) Hume, Hum. nat. Bd. I, p. 73—74; Ess. and treat. Bd. III, p. 438, Note O.

5) Hume, Hum. nat. Bd. I, p. 80 ff.

So construirt unsere Vernunft durch wiederholte Setzung eines Punktes irgend eine Zahl und durch stetige Aneinanderreihung von Punkten geometrische Curven, Flächen und Körper. Die mathematischen Vorstellungen sind daher keineswegs genereller oder abstracter Art, sondern immer particular. Die Vorstellung eines allgemeinen Dreiecks kann nie zu Stande kommen, denn die Construction in unserem Geiste, vermöge deren die Dreiecksvorstellung allererst erzeugt wird, muss stets ein Dreieck mit bestimmten Seitenlängen, stets ein festes, concretes Dreieck hervorbringen[1]).

Dies ist dann die Summa der Hume'schen Lehre von den Sätzen der Mathematik: Die mathematischen Ideen entstehen durch willkürliche Wiederholung und Aneinanderfügung letzter (empirischer) Elemente oder Punkte. Diese bei ihrer Erzeugung herrschende Willkür sichert ihnen diejenige Deutlichkeit und Constanz, die für die Evidenz der sich auf sie beziehenden Urtheile unerlässlich ist. Indem die Vernunft diese mathematischen Vorstellungen auflöst und ihre Merkmale auseinandersetzt, entstehen die mathematischen Sätze, dieselben sind also analytische Urtheile. Diese Lehre wird unhaltbar, sobald man das bei der Erzeugung der mathematischen Ideen auftretende willkürliche Moment leugnet und im Gegentheil dazu die Construction derselben als wesentlich bedingt und geleitet durch ein unserem Geiste innewohnendes ursprüngliches Erkenntnissvermögen ansieht. Zu dieser Auffassung aber gelangt Kant in seiner Kritik der reinen Vernunft.

VII. Entwicklungsgang der Kantischen Lehre von den synthetischen Urtheilen a priori, insbesondere von denjenigen der Mathematik[2]).

Die Kantische Lehre von den synthetischen Urtheilen a priori und die sich daran knüpfende Auffassung der Mathematik entsteht erst nach und nach und in stetiger Stufenfolge wie die gesammte kritische Philosophie; und ihr Entwicklungsgang steht in inniger Wechselbeziehung mit der Ausbildung der Vernunftkritik. Drei

1) Hume, Hum. nat. Bd. I, p. 130—131.
2) Vergl. hierzu Kuno Fischer, »Geschichte der neueren Philosophie« Bd. III.

Hauptperioden lassen sich in der Kantischen Philosophie überhaupt unterscheiden, und drei Hauptstadien in der Auffassung der Urtheilsfunctionen gehen diesen Perioden parallel, beeinflussen dieselben und werden selbst durch sie bestimmt und geleitet. So lange Kant noch auf dem Boden der Wolffischen Schulphilosophie steht, erklärt er alle wahren Erkenntnissurtheile für analytisch. Seine dann erfolgende Annäherung an die englische Erfahrungsphilosophie und insonderheit an Hume führt ihn dazu, aus der Gesammtheit dieser zuerst als analytisch bezeichneten Erkenntnissurtheile insbesondere eine wichtige Classe, die Urtheile durch Causalität, als synthetisch auszuscheiden. Den Uebergang zu seiner kritischen Philosophie endlich vermittelt die Entdeckung synthetischer Urtheile a priori, zunächst auf dem Gebiete der reinen Mathematik und danach in dem Bezirke der reinen Naturwissenschaft.

Der dogmatischen Periode der Kantischen Philosophie gehört nur eine einzige Abhandlung an, die Fragen der Erkenntnisstheorie zum eigentlichen Gegenstande der Untersuchung nimmt. Es ist dies die Habilitationsschrift vom Jahre 1755[1]. Ueberall, so lehrt hier Kant, wo ein Subject mit einem Prädicate zu einem Urtheile verbunden wird, existirt für diese Verknüpfung ein bestimmender Grund (ratio determinans), dessen charakteristisches Merkmal ist, dass er das Gegentheil des Urtheils ausschließt. Die Folge kann nicht mehr in sich fassen, als was im Grunde bereits enthalten ist[2]. Das Verhältniss von Grund und Folge erklärt sich also jederzeit durch den Satz der Identität und des Widerspruches. Durch sorgfältige Zergliederung des Grundes gelangt man ohne Weiteres zu der Folge, durch genaue Analyse der Begriffe zu allen Erkenntnissen. Deshalb besteht alles Erkennen in analytischen Urtheilen.

Diese Auffassung erfährt eine wesentliche Umgestaltung in drei oder vier Schriften, in denen sich Kant merklich der Humeschen Lehre nähert. In der Abhandlung über »die falsche Spitzfindig-

1) »Principiorum primorum cognitionis metaphysicae nova dilucidatio«. Ausg. von Rosenkranz und Schubert Bd. I, p. 3.

2) Princ. etc. Bd. I, p. 9—10 u. 31.

keit der vier syllogistischen Figuren«[1]) vom Jahre 1762 gelangt er zu der Einsicht, dass alles logische Erkennen in analytischen Urtheilen bestehe, dass es aber eben deshalb im Grunde genommen unserem Wissen etwas Neues nicht hinzufügen könne[2]). Jedes logische Urtheil begründet sich in einem ursprünglichen Vermögen, dem Verstand (der Vernunft), dessen Function darin besteht, den Unterschied der Dinge zu erkennen. Diesem logischen Erkenntnissvermögen steht die Sinnlichkeit als der Art nach verschieden gegenüber: Die Sinne haben nur das Vermögen, die Dinge von einander zu unterscheiden; das Erkennen dieses Unterschiedes aber ist erst Sache der Vernunft[3]). Zu der eigentlichen Einsicht der Thatsache synthetischer Erkenntnissurtheile gelangt Kant erst ein Jahr später in seiner Schrift über »den einzig möglichen Beweisgrund zu einer Demonstration des Daseins Gottes«[4]), in dem »Versuch, den Begriff der negativen Größen in die Weltweisheit einzuführen«[5]) und endlich in der »Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und Moral[6]). In der ersten dieser Schriften erkennt Kant, dass die Existenz nie logisches Merkmal eines Subjectes sein könne, dass also Existenzialsätze niemals bloß analytische Urtheile seien[7]). Die zweite Abhandlung unterscheidet den logischen Grund streng von dem Realgrunde, der Causalität. Der logische Grund begreift sich ohne Weiteres mittelst des Satzes der Identität und des Widerspruches; hinsichtlich des Realgrundes aber drängt sich die Frage auf: Wie soll ich es verstehen, dass, weil Etwas ist, etwas Anderes sei?[8]) In der dritten Untersuchung endlich findet sich der erste Hinweis auf die synthetische Erzeugungsweise der mathematischen Begriffe, die ermöglicht wird durch deren anschauliche Natur[9]). Die erste

---

1) Bd. I, p. 57.

2) Bd. I, p. 68—70; vergl. aber auch Cohen, »Die systematischen Begriffe in Kant's vorkritischen Schriften etc.» Berlin 1873, p. 16 ff.

3) Bd. I, p. 72.

4) Bd. I, p. 163.

5) Bd. I, p. 115.

6) Bd. I, p. 77.

7) Bd. I, p. 171—172.

8) Bd. I, p. 157—160.

9) Bd. I, p. 79—82.

der genannten Schriften leugnet die Möglichkeit der bisher üblichen Form ontologischer Beweisführungen, die zweite enthält die Fassung des Humeschen Problems; die letzte trägt den ersten Keim zur Kantischen Lösung desselben in sich. Einen deutlicheren Ausdruck noch findet die Betonung der Möglichkeit synthetischer Erkenntnissurtheile in Kant's Abhandlung vom Jahre 1766: »Träume eines Geistersehers, erläutert durch Träume der Metaphysik«[1]; und hier ist es auch, wo Kant dem Humeschen Skepticismus am nächsten steht. Alle reale Erkenntniss, so lehrt hier Kant, fließt aus der Erfahrung, alle Erfahrung beruht auf Causalität, Causalität aber kann durch bloße Vernunft nicht begriffen werden. Alle reale Erkenntniss ist also enthalten in synthetischen Urtheilen. Was speciell die Auffassung der wissenschaftlichen Natur der Mathematik angeht, so erfahren die in der oben genannten Schrift über »die Deutlichkeit der Grundsätze« etc. gewonnenen Einsichten weitere Ausbildung und Vertiefung in der Schrift über den Raum[2], die bereits hart an der Grenze der vorkritischen Periode der Kantischen Philosophie steht und den Uebergang zu seiner Vernunftkritik vermittelt. Wenn alle geometrischen Begriffe anschaulich sind und in der räumlichen Anschauung ihre Entstehung und ihren Grund finden, so muss der Raum selbst anschaulicher, und zwar fundamentaler, ursprünglicher Art sein. Weiter aber lehrt Kant in dieser letzten vorkritischen Abhandlung, der Raum sei nicht selbst bloße Anschauung, sondern er sei Gegenstand einer äußeren Anschauung, und es komme ihm also eine eigene Realität zu. Dies ist der Punkt, in dem sich diese Schrift noch vom Kriticismus unterscheidet. Sobald dem als ursprünglich und anschaulich aufgefassten Raume Idealität statt Realität zugesprochen wird, ist der Uebergang zur kritischen Philosophie vollendet.

Der thatsächliche Vollzug dieses Schrittes wird herbeigeführt durch das sich geltend machende Bedürfniss, den apriorischen Charakter der mathematischen Sätze — der doch vollständig einleuchtend und augenfällig scheint — zu erklären und zu stützen.

---

1) Bd. VII, p. 33.

2) »Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume« (1768), Bd. V, p. 29.

Welche andere Raumauffassung schiene wohl auch zulässig, wenn man die Urtheile der Mathematik für synthetisch erklärt und gleichwohl an ihrem apriorischen Charakter festhält? Erst nachträglich jedenfalls findet Kant sein zweites Argument für die Idealität oder Apriorität des Raumes, dass nämlich die Vorstellungen räumlicher Objecte die allgemeine Vorstellung des Raumes als Bedingungen voraussetzen. — Nachdem durch die neugewonnene Auffassung der Natur des Raumes und der damit sich gleichzeitig ausbildenden neuen Lehre von der Zeit der synthetische und apriorische Charakter der mathematischen Sätze Erklärung und Begründung gefunden hat, ist der Skepticismus, zu dem sich Kant in entschiedener Uebereinstimmung mit Hume bekannt hatte, von Grund aus zerstört. Sind die Sätze der Mathematik synthetische Urtheile a priori, so heißt das, es gibt wirkliche Erkenntniss durch reine Vernunft, und eben dies leugnet die Skepsis Hume's, eben dies hat auch Kant eine Zeit lang in Zweifel gezogen. Kant selbst hat zu wiederholten Malen die Erklärung abgegeben, dass es die Entdeckung der synthetischen Urtheile a priori der Mathematik gewesen sei, die ihn veranlasst habe, dem Humeschen Skepticismus für immer den Rücken zu kehren, und dass Hume selbst niemals zu seinem Zweifel an der Möglichkeit wirklicher Erkenntniss durch reine Vernunft gelangt wäre, wenn er die Sätze der Mathematik nicht für analytisch gehalten und deshalb von vornherein von seiner Untersuchung ausgeschlossen hätte[1]).

Von der Begründung der transcendentalen Aesthetik bis zu der vollständigen kritischen Auflösung des Humeschen Problems war aber noch ein weiter Schritt. Ueber ein Decennium verging seit der Auffindung synthetischer Urtheile a priori in dem Gebiete der Mathematik, ehe Kant ebensolche Vernunfterkenntnisse, deren Gegenstände aber empirischer Natur sind, entdeckte und ihre Möglichkeit begründete: Seine Inauguralschrift vom Jahre 1770[2]) enthält bereits die erste Darstellung der transcendentalen Aesthetik; ihr folgt erst im Jahre 1781 die erste Veröffentlichung der transcendentalen Analytik in der »Kritik der reinen Vernunft«.

1) Krit. Bd. II, p. 706; Prol. Bd. III, p. 24.
2) »De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis« Bd. I, p. 303.

III. Kapitel.

Beurtheilung der Kantischen Lehre von den synthetischen Urtheilen a priori der Mathematik vom Standpunkte der neueren Erkenntnisstheorie.

Es erklärt sich leicht, dass eine Lehre von so weitgehender philosophischer Bedeutung, wie die Kantische Behauptung des synthetischen und apriorischen Charakters der mathematischen Sätze, in der nachkantischen Philosophie Gegenstand einer eingehenden und sorgfältigen Beurtheilung werden musste. Diese Kritik ging naturgemäß nach zwei verschiedenen Richtungen: Einmal mussten die Argumente geprüft werden, mit denen Kant seine Behauptung, die Mathematik bestehe aus synthetischen Urtheilen, stützt und rechtfertigt; außerdem aber wurde die Kantische Lehre des apriorischen Charakters der mathematischen Sätze der Gegenstand lebhafter und strenger Kritik. Die erstere Untersuchung gelangt zu Einwürfen gegen die Kantische Lehre, die allerdings zumeist seine Unterscheidung analytischer und synthetischer Urtheile im Allgemeinen und damit erst indirect seine Behauptung der synthetischen Natur der mathematischen Urtheile treffen. Was weiter die Apriorität der mathematischen Sätze angeht, so sind zahlreiche und gewichtige Beweisgründe gegen dieselbe oder doch gegen die Kantische Begründung derselben ins Feld geführt worden. In der Hauptsache vereinigen sich die Gegner dieser Lehre Kant's in der Auffassung, dass die fundamentalen Begriffe und die Grundsätze der Mathematik nicht aus bloßen Constructionen innerhalb eines ursprünglichen Anschauungsvermögens herzuleiten, sondern auf Inductionen zurückzuführen seien, mit denen sich ein Abstractionsverfahren verbindet[1]). Inner-

1) Es soll hier unterbleiben, ausführlich die Einwürfe zu besprechen, die von Seiten der Mathematik selbst (vergl. Riemann, »Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen«, Habilitationsschrift 1854, Abhandl. der Kgl. Gesellsch. der Wissensch. Bd. XIII, oder Gesammelte Werke, herausgeg. von H. Weber, p. 254; und Helmholtz, »Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome«, Populäre wissenschaftliche Vorträge III, p. 21) gegen ihre aprioristische Natur erhoben worden sind; es mag vielmehr genügen, auf die Widerlegung dieser Einwürfe bei Wundt (»Logik« Bd. I, p. 445 ff) und Lasswitz (»Die Lehre Kant's von der Idealität des Raumes und der Zeit etc.« Berlin 1883, p. 141 ff.) hinzuweisen.

halb dieser Auffassung aber gehen die Lehren gegen das Kantische Apriori der mathematischen Urtheile und gegen die Begründung desselben in bedeutsamen Punkten auseinander. So behauptet John Stuart Mill die vollständige Uebereinstimmung der mathematischen Induction und Abstraction mit dem auf physikalischem Gebiete gebräuchlichen Inductions- und Abstractionsverfahren und gelangt so zu der Auffassung der Mathematik als einer bloß empirischen Wissenschaft. Demgegenüber betont Wilhelm Wundt den charakteristischen Unterschied der Methode, der sich bei der Gewinnung fundamentaler mathematischer und physikalischer Sätze geltend macht, und wahrt auf Grund dieser Darlegungen den mathematischen Sätzen eine Apriorität, deren Ursprung allerdings wesentlich anders gedacht werden muss als die Entstehung des Kantischen Apriori.

VIII. Einwendungen gegen die Kantische Behauptung der synthetischen Natur mathematischer Urtheile.

Gegen die Kantische Unterscheidung analytischer und synthetischer Urtheile hat Schleiermacher in seiner »Dialektik«[1]) geltend gemacht, dass an diesem Unterschiede nicht festgehalten werden könne, weil er nur relativer und fließender Art sei. Diese Behauptung begründet er durch den Hinweis auf die Entwicklungsfähigkeit der Begriffe. Je weiter diese Entwicklung fortschreitet, je vollkommener also ein Begriff wird, eine desto grössere Anzahl von Urtheilen, die diesen Begriff zum Subjecte haben, wird analytischer Natur sein. So ist der Satz von der Winkelsumme im Dreieck nur so lange ein synthetischer Satz, als die Behauptung desselben noch nicht in den Begriff eines Dreiecks mit aufgenommen ist, also nur auf der untersten Stufe mathematischer Einsicht. Sobald man dieses Stadium der Unvollkommenheit verlassen hat, sobald man sich also beim Begriffe eines Dreiecks stets der Größe seiner Winkelsumme bewusst wird, oder doch durch Analyse des vervollkommneten Begriffes bewusst werden kann, hört

1) Schleiermacher, Sämmtl. Werke, Bd. IV, Abtheil. 2, p. 88—89, 264 u. 563.

der Satz, der diese Eigenschaft zum Ausdruck bringt, auf, synthetisch zu sein; er wird vielmehr zum analytischen Urtheile. Schleiermacher verfolgt diese seine Auffassung, der Unterschied analytischer und synthetischer Urtheile sei nur relativ, nach beiden Richtungen hin bis zu ihren äußersten Consequenzen: Nach seinen Ausführungen befindet sich jeder Begriff ursprünglich in einem solchen Stadium, dass es in Bezug auf denselben keine rein analytischen Urtheile gibt. So wird ursprünglich in dem Begriffe »Mensch« das Prädicat »sterblich« noch nicht mit gesetzt gewesen sein. Umgekehrt ist es denkbar, dass jeder Begriff schließlich eine Stufe der Vollkommenheit erreicht, auf der sich in dem Begriffe sogar das »Zufällige seiner Möglichkeit und seinem Umfange nach« enthalten findet. Wenn dieses ideale Stadium der Erkenntniss erreicht ist, werden daher rein synthetische Urtheile nicht mehr möglich sein.

Lässt man es dahingestellt, inwieweit diese letzten Folgerungen Schleiermacher's berechtigt sind, so scheint doch schon der Hinweis auf die thatsächlich stattfindende Entwicklung der Begriffe einer Unterscheidung analytischer und synthetischer Urtheile und insbesondere der Auffassung der mathematischen Sätze als synthetischer Urtheile ihre Berechtigung zu rauben. Man darf aber nicht übersehen, dass der Kantische Eintheilungsgrund nicht darauf gerichtet ist, was von dem einzelnen Urtheilenden mit dem Subjecte zusammen gedacht wird, sondern dass die Frage Kant's dahin geht, ob das Prädicat in dem Subjecte als nothwendiger Bestandtheil enthalten ist, oder nicht. Um mir eine Vorstellung von einem Dreieck zu machen, brauche ich nothwendig das Merkmal der drei Ecken: Der Satz: »Jedes Dreieck hat drei Ecken« ist also sicher ein analytisches Urtheil. Andererseits werde ich mir von dem Dreieck eine vollkommen deutliche Vorstellung machen können, auch wenn ich nicht an das seine Winkelsumme betreffende Merkmal denke. Der Satz: »Die Summe der Winkel im Dreieck ist gleich zwei Rechten« ist also im Kantischen Sinne jederzeit ein synthetisches Urtheil, unabhängig davon, ob dem Urtheilenden die Aussage dieses Satzes vorher schon bekannt war oder nicht.

Nach einer anderen Richtung geht die Kritik Trendelenburg's über die Kantische Lehre von den analytischen und synthetischen Urtheilen. Er tadelt die Eintheilung Kant's deshalb, weil dieselbe »nach mechanischen Gesichtspunkten« vollzogen würde, während doch »im Organischen alles Entwicklung und nur im Handwerk Zusammensetzung« sei[1]). Dieser Vorwurf würde in der That der Berechtigung nicht entbehren, wenn es sich mit dem Kantischen Eintheilungsgrunde so verhielte, wie Trendelenburg annimmt, wenn derselbe nämlich mit dem Entstehungsgrunde des Urtheils zusammenfiele[2]). Wenn sich in der That die Kantische Unterscheidung auf die Entstehung der Urtheile bezöge, wenn also wirklich das analytische Urtheil zu Stande käme »durch Zerfällung eines Ganzen in seine Theilbegriffe«, das synthetische dagegen »durch Hinzufügung von Neuem zu dem Alten oder durch Zusammensetzung eines neuen Ganzen«, so könnte thatsächlich der Grund dieser Eintheilung als mechanisch bezeichnet werden. Aber auf die Entstehung des Urtheils gründet sich die Kantische Unterscheidung nicht, sondern einzig und allein auf das Verhältniss des Prädicatbegriffes zum Subjectbegriffe[3]). Damit verliert auch die Behauptung Trendelenburg's, jedes Urtheil könnte nach Belieben als analytisch oder als synthetisch aufgefasst und die mathematischen Urtheile demnach ebensogut analytisch wie synthetisch genannt werden, die Bedeutung einer sich gegen Kant richtenden Kritik. Wenn freilich die Ausdrücke »analytisch« und »synthetisch« auf die Entstehung des Urtheils bezogen werden, dann kann man wirklich alle Urtheile ebensowohl synthetisch wie analytisch nennen; denn der Gedanke, der Inhalt des Urtheils entsteht synthetisch; andererseits aber ist es die Analyse dieses Gedankens, durch die das Urtheil selbst zu Stande kommt.

Dass die Kantische Unterscheidung analytischer und synthetischer Urtheile unabhängig ist von dem Entstehungsgrunde derselben, hat Sigwart — der übrigens diesem letzteren Eintheilungsgrunde den Vorzug einräumt — richtig erkannt[4]), wenn man auch seiner Auffassung der Kantischen Eintheilung nicht vollkommen

---

1) Trendelenburg, »Logische Untersuchungen« 3. Aufl. Bd. II, p. 264.

2) Zu einer ähnlichen Auffassung neigt auch Rehmke in seiner Schrift: »Die Welt als Wahrnehmung und Begriff«. Berlin 1880, p. 162—173.

3) Vergl. zu diesem Einwande gegen Trendelenburg auch Cohen, »Kant's Theorie der Erfahrung« Berlin 1871, p. 195 f.

4) Sigwart, »Logik« Bd. I, p. 103.

beipflichten kann[1]). Nach Sigwart nämlich sind die analytischen Urtheile Kant's solche, in denen der Inhalt des Subjectbegriffes durch das Prädicat explicirt wird; in einem synthetischen Urtheile dagegen würden verschiedene Objecte der Anschauung zu einander in Beziehung gesetzt. Die einen seien erklärend, die anderen erzählend. Dagegen lässt sich einwenden, dass diejenigen erklärenden Urtheile, in denen der Subjectbegriff durch seine Beziehung zu anderen selbständigen Begriffen explicirt wird, sicherlich den Kantischen synthetischen Urtheilen zuzuzählen sind. Man wird zugeben müssen, dass der Satz: »Das Quadrat ist unter allen Vierecken dasjenige, welches den höchsten Grad von Symmetrie besitzt« ein erklärendes Urtheil ist; gleichwohl ist es synthetisch; denn es setzt den Subjectbegriff (Quadrat) in Beziehung zu anderen Vorstellungen (Vierecken); das Prädicat kann also unmöglich nothwendiges Merkmal des Subjectes sein.

Ernstlicher als durch diese mehr auf die Kantische Unterscheidung analytischer und synthetischer Urtheile im Allgemeinen gehenden Einwürfe scheint der von Kant behauptete synthetische Charakter der mathematischen Grundsätze in Frage gestellt zu werden durch das nicht ohne Erfolg gebliebene Bemühen der neueren Mathematik, die mathematischen Axiome oder doch wenigstens diejenigen der Arithmetik und Algebra vollständig durch Definitionen zu ersetzen, aus denen sich dann die Grundsätze als selbstverständliche Folgerungen, als analytische Sätze ergeben[2]). In Wirklichkeit aber wird damit der Kantischen Behauptung keinerlei Eintrag gethan. Nimmt man nämlich Definitionen als Ausgangspunkt der mathematischen Untersuchung und nicht mehr Axiome, so ist dieser Veränderung nur eine formelle Bedeutung beizumessen. Immer noch bilden synthetische Urtheile die Grundlage der Mathematik; dieselben haben nur nicht mehr die Gestalt von Axiomen, sondern die Form von Definitionen. Diese Definitionen sind synthetische Urtheile, weil sie zugleich die Möglichkeit der definirten Begriffe aussagen, die nur durch die Anschauung eingesehen werden kann.

---

1) Vergl. Wundt, »Logik« Bd. I, p. 150.

2) Vergl. Grassmann, »Lineale Ausdehnungslehre von 1844« 2. Aufl. 1878, p. XXI.

IX. Die Auffassung der mathematischen Sätze bei John Stuart Mill.

In die synthetische Natur der mathematischen Sätze kann nach den Ausführungen Kant's kaum noch berechtigter Zweifel gesetzt werden. Dagegen ist der zweite Theil der Kantischen Behauptung, dass nämlich die Mathematik bestehe aus Urtheilen a priori, im Buchstaben seiner Philosophie nur ungenügend begründet oder, wenn man will, überhaupt nicht bewiesen worden. Es wird zunächst als unbestreitbare Thatsache hingestellt, dass Nothwendigkeit und Allgemeinheit nur durch reine Vernunft, nur durch ursprüngliche Geistesvermögen erzeugt werden können. Weil dann die Sätze der Mathematik sicherlich nothwendig und allgemein sind, müssen dieselben Urtheile a priori sein. Die Thatsache der synthetischen Urtheile a priori der Mathematik wird dadurch zu einem Beweisgrunde für die Apriorität der Anschauungsformen; und sofern für diese noch weitere Argumente geltend gemacht werden können, soll sie umgekehrt den apriorischen Charakter der mathematischen Sätze stützen. Außer der Nothwendigkeit und Allgemeinheit der Sätze der Mathematik gibt aber Kant nur noch den einen Grund für das Apriori der Anschauungsformen an, dass ohne die allgemeinen Vorstellungen von Raum und Zeit alle Vorstellungen einzelner räumlicher und zeitlicher Objecte unmöglich wären. Diesen Beweisgrund aber kann man keineswegs gelten lassen. Denn schließt denn die Thatsache, dass Raum und Zeit unerlässliche Bedingungen des einzelnen Räumlichen und Zeitlichen sind, die Entwicklung derselben durch diese Einzelvorstellungen aus? Ebensowenig kann man zugeben, dass der apodiktische Charakter der mathematischen Sätze sichere Gewähr leistet für ihren Ursprung a priori und damit für die Apriorität der Anschauungsformen. Derselbe findet vielmehr darin genügende Erklärung, dass es nur die constanten Elemente der Erfahrung sind, auf die sich die Behauptungen der Mathematik erstrecken [1]).

1) Nach Rehmke (l. c. p. 177) ist Kant's Anschauung a priori nur »Begriff in der empirischen Anschauung«; und die Allgemeinheit und Nothwendigkeit der mathematischen Sätze kommt allein dadurch zu Stande, dass die Begriffe der Mathematik in dieser empirischen Anschauung gegeben, also anschaulich sind.

Wenn sonach die Kantische Kritik über den synthetischen Charakter der mathematischen Sätze kaum noch einen Zweifel lässt, wenn sie dagegen für die Apriorität derselben nur ungenügende Beweisgründe geltend macht, so schließt sie keineswegs die Möglichkeit aus, dass man die Wahrheiten der Mathematik auf gleiche Stufe stellt mit synthetischen Sätzen a posteriori, mit Thatsachen der bloßen Erfahrung. Dieser Schritt wird vollzogen in dem Positivismus eines Auguste Comte; ihren schärfsten Ausdruck aber findet diese neue Auffassung bei John Stuart Mill.

Ganz entschieden leugnet Mill die aprioristische Wahrheit der mathematischen Axiome. Er bezeichnet sie vielmehr als inductive Wahrheiten, die nur auf Inductionen »per enumerationem simplicem« beruhen, auf der Thatsache, »dass sie fortwährend richtig und nicht ein einziges Mal unrichtig gefunden wurden«[1]. Denn welche Beweisgründe, so fragt Mill, führt man zur Unterstützung der Behauptung einer Mathematik a priori an? Aus welchem Grunde beispielsweise schreibt man dem Satze: »Zwei gerade Linien können keinen Raum einschließen« einen Ursprung a priori zu?[2] Man sagt, diese Eigenschaft der geraden Linien könne schon erkannt werden, indem man sich dieselben nur im Geiste vorstelle, deshalb könne der Grund unserer Ueberzeugung von der Wahrheit dieses Satzes nicht das Zeugniss der Sinne oder die Erfahrung sein, sondern unbedingt sei dieser Grund in etwas Geistigem zu suchen. Wie aber könnte dieser Einwurf die Apriorität der mathematischen Axiome oder auch nur speciell des angegebenen einen Grundsatzes außer Zweifel stellen? Wir haben keine Veranlassung, die Linien, die wir in uns durch unsere Einbildungskraft erzeugen können, als verschieden von denen der Wirklichkeit vorauszusetzen, und zwar wissen wir es durch lange fortgesetzte Erfahrung, dass die Eigenschaften des Urbildes in dem geistigen Abbilde getreu wiedergegeben sind. Wenn es nun wahr ist, dass wir uns durch die bloße geistige Erzeugung zweier Geraden darüber vergewissern können, dass sie keinen Raum einschließen, so geschieht dies nur auf Grund dieser durch die Erfahrung gewonnenen Einsicht, dass die Geraden im

---

1) Mill, »System der deductiven und inductiven Logik«. Ges. Werke, deutsch von Gomperz, Bd. III, p. 340 (Cap. XXIV).

2) l. c. Bd. II, p. 246 ff. (Cap. V).

Geiste mit denen der sinnlichen Wahrnehmung genau übereinstimmen. Ob wir also durch Beobachtung der Wirklichkeit oder durch Betrachtung der inneren Bilder eine Wahrheit gewinnen, ist im Grunde gleichgültig: immer hat dieselbe einzig in der Erfahrung ihren Grund.

Man hat als Argument für die Apriorität der mathematischen Axiome auch wohl die Nothwendigkeit und die Allgemeinheit derselben in's Feld geführt; man hat die Behauptung aufgestellt, diese Sätze besäßen, da ihr Gegentheil etwas Unbegreifliches enthielte, einen höheren Grad von Evidenz, als die Erfahrung jemals gewähren könne. Aber auch diesen Beweisgrund kann man nicht gelten lassen. Denn sollte wirklich der apodiktische Charakter mathematischer Urtheile aus bloßer Erfahrung unmöglich erklärt werden können? Wenn mir schon durch die ersten Sinneseindrücke und ebenso bei jeder späteren Beobachtung bezeugt wird, dass zwei Gerade niemals einen Raum abgrenzen, und wenn meine Erfahrung auch nicht eine einzige Thatsache oder auch nur eine Analogie liefert, die dieser Vorstellung widerstreitet, wie könnte ich es da begreiflich finden, dass zwei gerade Linien jemals einen Raum einschlössen? Uebrigens besitzen im Grunde genonmmen die Wahrheiten der Mathematik gar nicht den hohen Grad von Nothwendigkeit und Gewissheit, den man ihnen zuzuschreiben pflegt[1]. Denn keinesfalls darf man annehmen, dass es die Mathematik mit etwas Nichtseiendem zu thun habe; sie handelt vielmehr von solchen Linien, Figuren und Größen, wie sie in Wirklichkeit vorhanden sind. Gleichwohl beziehen sich ihre Definitionen und Axiome auf bloße hypothetische Gebilde, die man durch Verallgemeinerung, durch Abstraction, aus realen Dingen gewinnt, und die deshalb mit diesen realen Gegenständen nur annäherungsweise übereinstimmen. So sind der Punkt ohne Ausdehnung, die Gerade ohne Breite, der Kreis, dessen Halbmesser sämmtlich gleich sind, nur Fictionen, die mit den sinnlichen Punkten, Geraden und Kreisen nur bis zu einem gewissen Grade übereinstimmen. Die Sätze der Mathematik besitzen deshalb nur angenäherte Gültigkeit; wie groß der Grad ihrer Gewissheit ist, hängt davon ab, inwieweit die realen Objecte sich mit den hypothetischen Voraussetzungen decken. Diese

1) l. c. Bd. II, p. 239 ff. (Cap. V).

Aussagen haben keineswegs nur Bezug auf die Geometrie, sondern auf das ganze Gebiet der Mathematik, auch auf die Arithmetik und Algebra: Auch deren letzte Grundsätze sind Verallgemeinerungen aus der Erfahrung; demzufolge beruht die ihnen zugeschriebene Nothwendigkeit nur auf Fiction; sie sind nur Annäherungen an die Wirklichkeit; denn auch ihren Voraussetzungen fehlt das hypothetische Element nicht[1]). Zahlen an sich gibt es nicht, sondern nur Zahlen von Etwas. Der Satz 3 = 2 + 1 sagt daher keineswegs bloß die Einerleiheit der Bedeutung zweier Namen aus und kann also nicht eine a priori gewonnene Definition der Zahl 3 sein; dieses Urtheil enthält vielmehr die Einsicht a posteriori, dass jede Sammlung von Gegenständen, die auf die Sinne den Eindruck •.• hervorbringt, auch in zwei Theile zerlegt werden kann, und zwar in folgender Weise •• •. Diese Wahrheit kann in der That nur durch wiederholte Beobachtung, nur durch Erfahrung, nur a posteriori gewonnen werden. Zu den hypothetischen Elementen, die in alle Sätze über Zahlen eingehen, ist die Voraussetzung zu rechnen, dass allen Zahlen, die in ein und derselben Rechenaufgabe vorkommen, genau gleiche Einheiten zu Grunde liegen. Diese Voraussetzung ist aber nur annäherungsweise erfüllt; in Wirklichkeit werden z. B. zwei Gewichtspfunde niemals einander vollkommen genau gleich sein.

Die Mathematik — dies ist in kurzen Worten der Inhalt der Lehre Mill's — ist keine Wissenschaft a priori; denn überhaupt besitzt sie gar nicht das hohe Maß von Gewissheit, das man ihren Sätzen zuzuschreiben pflegt; und derjenige Grad von Evidenz, welcher denselben billigerweise zugestanden werden muss, wird durch die Behauptung ihres Ursprungs durch Induction und Abstraction aus der Erfahrung keineswegs aufgehoben. Mit der Widerlegung der Behauptung, dass die Gewinnung mathematischer Einsichten aus bloßen geistigen Abbildern wirklicher Figuren und Größen nur auf eine ursprüngliche innere Anschauung zurückgeführt werden könnte, wird der letzte Rechtsanspruch aufgehoben, der für die Apriorität der mathematischen Sätze geltend gemacht werden kann.

---

1) l. c. Bd. II, p. 273 ff. (Cap. VI).

Der Mangel dieser empirischen Auffassung der Mathematik, wie sie von Mill vertreten wird, liegt auf der Hand. Sie legt das Hauptgewicht auf die äußeren Gelegenheitsursachen, die uns zu mathematischen Definitionen und Sätzen führen können, und verabsäumt darüber vollständig, dem logischen Elemente, das doch bei der Bildung mathematischer Einsichten ein ebenso wesentliches Erforderniss ist, die gebührende Beachtung zu schenken. So wirft Mill die Mathematik zusammen mit den Erfahrungswissenschaften, die mathematische Abstraction und Induction mit demjenigen Abstractions- und Inductionsverfahren, wie es bei der Gewinnung allgemeiner Erfahrungsbegriffe und allgemeiner Naturgesetze seine Anwendung findet. Damit steht Mill im strengsten Gegensatze zu derjenigen Auffassung der Mathematik, nach welcher die Voraussetzungen dieser Wissenschaft in einem ursprünglichen Anschauungsvermögen ihre Begründung finden, zu einer Auffassung, die vielmehr umgekehrt der Bedeutung der äußeren und inneren Erfahrung für die Gewinnung mathematischer Einsichten nicht nach Gebühr gerecht wird: im vollsten Gegensatze also zur Kantischen Lehre von den synthetischen Urtheilen a priori der Mathematik.

X. Der Charakter der mathematischen Sätze nach Wundt's Logik der Mathematik.

Ein klarer Einblick in die innere Natur der Mathematik kann nur gewonnen werden, wenn die empirischen Momente und die logischen Functionen, die bei der Bildung der mathematischen Begriffe und Sätze betheiligt sind, gleichmäßige Berücksichtigung finden, wenn man also die Kantische Lehre in der Weise modificirt, dass der derselben eigene Standpunkt, auf dem die Mathematik als eine Vernunfterkenntniss aus der Construction der Begriffe erscheint, sich ermäßigt durch den Hinweis auf den Einfluss der inneren und äußeren Erfahrung. Zahlreich sind die Versuche, die eine Umgestaltung der Kantischen Auffassung von der Natur der Mathematik nach dieser Seite hin anstreben[1]). Es

1) Vergl. z. B. Sigwart, »Logik« Bd. II, p. 54 ff., 187 ff. und 257.

mag genügen, an dieser Stelle die Lehre Kant's in Vergleich zu ziehen mit derjenigen Beurtheilung, welche der Charakter der mathematischen Sätze in neuester Zeit gefunden hat in der Logik Wilhelm Wundt's[1]).

Zweierlei Motive sind es hauptsächlich, lehrt Wundt, die uns bestimmen müssen, die hohe Bedeutung der Erfahrung bei der Gewinnung mathematischer Wahrheiten anzuerkennen: einmal die kaum bestreitbare Thatsache, dass die Mathematik auf dem primitivsten Standpunkte ihrer Entwicklung eine rein inductive Wissenschaft gewesen ist; insbesondere aber der Hinweis auf den inductiven Charakter ihrer fundamentalsten Sätze.

Alles, was uns über den ersten Ursprung der mathematischen Erkenntnisse überliefert worden ist, erschließt als Quelle derselben die Induction aus der Erfahrung. So hat sicherlich zur Entstehung der vier arithmetischen Fundamentaloperationen die Wahrnehmung verschiedenartiger Anordnungen einzelner Objecte, zur Bildung von Stammbrüchen die im praktischen Leben erwachsene Forderung der Angabe des Verhältnisses eines Theiles zum Ganzen den ersten Anlass gegeben. Ebenso kann über den inductiven Ursprung der frühesten geometrischen Sätze kaum ein Zweifel entstehen. Den Inhalt eines Quadrates, eines Rechteckes fand man durch Zerlegung desselben in Quadrate von der Seitenlänge 1 und durch nachherige einfache Addition derselben; und ebenso ist der Satz von der Winkelsumme im Dreieck, der pythagoreische Lehrsatz etc. jedenfalls zunächst durch directe Wahrnehmung, durch Versuche, durch Induction aus der Erfahrung, gefunden worden.

Wenn es nun auch kaum geleugnet werden kann, dass die Mathematik ursprünglich eine Wissenschaft der Induction gewesen ist, so ist es doch viel bedeutsamer für ihren wissenschaftlichen Charakter und insbesondere von weit größerer Wichtigkeit für die Kritik der von Kant behaupteten apriorischen Natur der mathematischen Urtheile, dass die fundamentalsten dieser Sätze auf Abstraction aus der Erfahrung und auf gewisse bleibende Formen der Induction zurückgeführt werden

1) Wundt, »Logik« Bd. II, p. 96 ff.

müssen. Zu diesen fundamentalsten Sätzen der Mathematik sind alle Definitionen und Axiome, sowie alle unmittelbaren Specialisirungen der Axiome zu rechnen.

Sämmtliche Definitionen der Mathematik entstehen einzig durch Abstraction aus der Erfahrung oder doch durch Bildung von Analogien zu Abstractionen aus der Erfahrung. Dieser Abstractionsprocess ist aber wohl zu unterscheiden von dem bei der Gewinnung von Erfahrungsbegriffen angewandten Verfahren. Wir gelangen zu einer mathematischen Geraden, indem wir bei den in der Erfahrung gegebenen geraden Linien von ihrer verschiedenen Dicke und Breite, sowie von ihren größeren und kleineren Abweichungen vom Geraden abstrahiren. Wenn dieser Process auf gleicher Stufe stände mit dem in den Erfahrungswissenschaften üblichen Abstractionsverfahren, so müsste die Eigenschaft der Geraden in abstracto, eindimensional und gerade zu sein, allen empirischen geraden Linien gemeinsam sein.

Erst indem sich mit der Abstraction noch die Induction verbindet, sind die Bedingungen zur Gewinnung mathematischer Axiome gegeben. Aber auch dieses mathematische Inductionsverfahren trägt einen eigenartigen Charakter an sich und ist wohl zu unterscheiden von der Induction in den Naturwissenschaften. Aufgabe des Physikers ist es, durch Induction abstracte Naturgesetze zu gewinnen, die sich den Thatsachen der Erfahrung mit möglichster Genauigkeit annähern. Die Gegenstände des Mathematikers dagegen sind nicht die Objecte der Erfahrung, sondern nur seine Vorstellungen, die durch die empirischen Dinge nur angeregt und verdeutlicht werden; ihn kümmert es also nicht, ob seine Voraussetzungen und Resultate mit diesen nur als Hülfsmittel benutzten äußeren Objecten genau verträglich sind oder nicht.

Es sind aber nicht die ursprünglichsten Inductionen, die zu den mathematischen Axiomen führen. Letztere sind vielmehr aufzufassen als die allgemeinsten Abstractionen aus denjenigen mathematischen Sätzen, die man als unmittelbare Specialisirungen der Axiome bezeichnen kann. Alle Zahlformeln, wie $7 + 5 = 12$, $5 \cdot 6 = 30$ u. dergl., sowie die allgemeinsten Sätze der synthetischen Geometrie, z. B. dass sich zwei gerade Linien der Ebene in einem Punkte, zwei Ebenen in einer Geraden schneiden, sind hierher zu rechnen. Alle diese Sätze können nur durch wiederholtes Experimentiren und Beobachten in der inneren oder äußeren Erfahrung zu Stande kommen; sie sind nur durch Induction, nur durch den Hinweis auf die empirische Anschauung erweisbar.

Durch Generalisation gehen aus diesen Inductionen primitivster Form verwickeltere Inductionen hervor, deren Werth für die Gewinnung mathematischer Resultate anerkanntermaßen außer allem Zweifel steht. Inductionen dieser Art führen z. B. zur Aufstellung der Regel, nach welcher die Primfactoren einer Zahl sich bestimmen lassen, zur Auffindung der Anzahl der Combinationen einer bestimmten Anzahl von Elementen, zur Ermittelung des Gesetzes einer durch empirische Entwickelung gefundenen Reihe etc. Ebenso führen alle Versuche, die allgemeinen Gesetze der Zahlenverknüpfung, also das Associations-, Commutations- und Distributionsgesetz, zu beweisen, schließlich auf Generalisationen einzelner Thatsachen der mathematischen Anschauung als letzte Gründe zurück.

Wenn es nun aber auch unzweifelhaft feststeht, dass der Ursprung der mathematischen Grundlagen zunächst in der Induction aus der Erfahrung gesucht werden muss, so schließt diese Einsicht doch keineswegs die Auffassung der Mathematik als einer aprioristischen Wissenschaft aus. Die Sätze der Mathematik sind vielmehr sicherlich Urtheile a priori. Die Möglichkeit hierzu begründet sich in dem eigenthümlichen Charakter des für alle Mathematik unerlässlichen Abstractionsverfahrens, auf dessen bedeutsamen Unterschied von der naturwissenschaftlichen Abstraction schon oben aufmerksam gemacht wurde.

Die Elemente, die zur Bildung der Vorstellung eines Gegenstandes erforderlich sind, haben theils in dem empirischen Objecte selbst ihre Quelle, theils gehören sie unserer eigenen Gedankenthätigkeit an. Die Auffassung der mathematischen Abstraction wird nun eine verkehrte, sobald man die letzteren Vorstellungselemente völlig unbeachtet lässt. Dann nämlich wird man veranlasst, das Wesen des Abstractionsverfahrens in dem Ausscheiden eines Theiles und dem Zurückbehalten des anderen Theiles der empirischen Vorstellungselemente zu suchen, wenn anders nicht ein bloßes Nichts als Resultat der Abstraction sich einstellen soll. Andererseits kann man sich der Ueberzeugung nicht erwehren, dass die mathematischen

Begriffe, zu denen man durch solche Abstraction gelangt, keinerlei empirische Elemente in sich schließen. Diese Schwierigkeiten schwinden, sobald man den subjectiven Bedingungen der Vorstellung eines empirischen Thatbestandes die gebührende Beachtung schenkt. Dann wird man durch nichts gehindert, den eigenthümlichen Charakter der mathematischen Abstraction darin zu suchen, dass sie von sämmtlichen nur aus dem empirischen Object stammenden Vorstellungselementen — nicht bloß von einem Theil derselben — absieht und als wesentlichen Bestandtheil nur die bei der Bildung mathematischer Vorstellungen wirksame Gedankenthätigkeit zurückbehält. So können die Zahlen zwar nur entstehen durch Vermittelung zählbarer empirischer Objecte; den eigentlichen Begriff der Zahl aber gewinnt man erst nach Elimination aller der wechselnden aus diesen Objecten herrührenden Elemente durch ausschließliche Beachtung der die einzelnen Denkacte verbindenden Thätigkeit. Von dem physischen gelangt man zum mathematischen Punkte, indem man von allen physischen Eigenschaften des ersteren abstrahirt und nur die ortbestimmende Gedankenthätigkeit zurückbehält. Aehnlich ist der Process, der von der sinnlichen Vorstellung eines annähernd geradlinigen Stabes zum Begriff der mathematischen geraden Linie hinüberführt. Wenn man zwei Punkte eines solchen Stabes festhält und diesen alsdann in beliebiger Weise um sich dreht, so wird derselbe jederzeit auf gleiche Art die Verbindung der beiden festgehaltenen Punkte vermitteln. Auf diese Erfahrung gründet sich die Gewinnung des Begriffes der mathematischen Geraden: Maßgebend für denselben wird nur der Denkact, welcher die relative Lage zweier Punkte zu einander fixirt; alle objectiven Bestandtheile der sinnlichen Vorstellung des Stabes dagegen werden eliminirt. Durch ein Abstractionsverfahren ganz ähnlicher Art werden alle übrigen geometrischen Vorstellungen gewonnen; nur sind die empirischen Objecte, auf die sich dasselbe bezieht, bei der Bildung zusammengesetzterer mathematischer Ideen meist von anderer Natur als in den genannten einfachsten Fällen: Nur selten knüpft sich die zur Gewinnung verwickelterer geometrischer Vorstellungen führende Abstraction an unmittelbare Erfahrungen; viel häufiger erscheinen als ihre Ausgangspunkte Gebilde, die einer willkürlichen Construction aus objectiven oder subjectiven Elementen, dem Wirken der bildenden Hand oder der Thätigkeit der bloßen Einbildungskraft ihre Entstehung verdanken. Auch alle Gebilde dieser Art werden erst durch Elimination aller objectiven, der Absicht unseres Denkens fern liegenden Elemente zu rein geometrischen Vorstellungen erhoben.

Wenn es nun aber eine zugegebene Thatsache ist, dass es nur die rein subjectiven, nur die unserer Gedankenthätigkeit angehörigen Bestandtheile aller unserer Vorstellungen sind, aus denen sich die mathematischen Ideen zusammensetzen, so ist das Wesen des mathematischen Apriori erklärt, allerdings in anderer Weise als durch die Kantische transcendentale Aesthetik. Die subjectiven Elemente, aus denen sich schließlich alle unsere mathematischen Vorstellungen aufbauen, können nur gewonnen werden aus unseren empirischen Vorstellungen; nichts gibt uns die Berechtigung, diese subjectiven Bestandtheile als den objectiven Elementen vorangehende transcendentale Bedingungen der empirischen Vorstellungen zu betrachten. Durch Abstraction aus der Erfahrung und durch Induction aus diesen Abstractionen, nicht aber durch unmittelbare Constructionen innerhalb eines ursprünglichen reinen Anschauungsvermögens — die jede Induction und Abstraction entbehrlich machen müssten — wird die Bildung aller mathematischen Vorstellungen und Einsichten vollzogen.

In diesem Punkte begründet sich der Unterschied der Lehre Wundt's von der Kantischen Auffassung. Dieser Unterschied bezieht sich auf die Erklärung und Begründung des schließlichen Resultates; in der Formulirung desselben stimmt Wundt mit Kant überein: Alle mathematischen Sätze sind synthetische Urtheile a priori.