Der mathematische Zahlbegriff und seine Entwicklungsformen.

Eine logische Untersuchung.

Von

Walter Brix.

Einleitung.

Es ist ein eigenthümlicher Charakterzug der Mathematik, dass diese exacteste aller Wissenschaften es liebt, umfangreiche Theorien und Entwicklungen auf Begriffe zu gründen, deren logische Natur kaum erörtert zu werden pflegt, weitgehende Schlüsse aus Prämissen zu ziehen, deren erkenntnisstheoretische Bedeutung nicht untersucht wird, und ein hohes, in sich selbst wohl gefestigtes Lehrgebäude zu errichten auf Fundamenten, von deren Sicherheit man sich in den seltensten Fällen überzeugt hat. Denn ungleich anderen Wissenschaften hat sie schon seit den frühesten Zeiten nicht in der Erkenntniss und Klarlegung der Untersuchungsobjecte ihre Hauptaufgabe gesucht, sondern in der exacten Herausbildung und wissenschaftlichen Verfeinerung ihrer Methodik, unbekümmert darum, mit welchem Recht die allgemeinen Methoden im einzelnen gegebenen Fall anzuwenden sind. Daher bietet sie uns das seltene Schauspiel dar, dass alle ihre Grundbegriffe erst, nachdem man sich ihrer schon Jahrhunderte lang als selbstverständlicher Convenienzen bedient hatte, einer kritischen Behandlung unterworfen wurden. Wo aber immer ein Mathematiker sich entschloss, an diese wichtige Aufgabe heranzutreten, da hat er sie in den meisten Fällen sehr bald wieder fallen lassen. Denn solche Untersuchungen haben häufig genug keinen andern Erfolg gehabt, als den Forscher, der ihrer Schwierigkeiten nicht Herr wurde, unsicher und misstrauisch zu stimmen gerade gegen die Begriffe, die zu klären er anfänglich bestrebt war. Kein Wunder daher, wenn die Mathematik, welcher derartige Betrachtungen nicht allein ungewohnt und unbequem, sondern auch in der freien Forschung hinderlich waren, sich schließlich für den inneren Werth und die logische Berechtigung ihrer Resultate allein auf die Exactheit der Methoden berief und alles weitere der Philosophie überließ, nicht immer zum Vortheil der Sache.

Denn nur selten fanden sich philosophische Köpfe, welche zugleich mathematisch genug geschult waren, um beiden Seiten der Frage gerecht zu werden, und eine glückliche Doppelbegabung, wie sie etwa Descartes und Leibniz besaßen, ist so vereinzelt gewesen, dass man sich kaum über die vielen einseitigen Ansichten wundern darf, welche im Laufe der Zeit über die mathematischen Grundbegriffe geäußert sind. Daher ist es erst allmählich dem einmüthigen Zusammenarbeiten der beiden Wissenschaften gelungen, auch in dieses, immer noch wenig berührte Forschungsgebiet einzudringen und das Dunkel einigermaßen zu zerstreuen, welches die Bequemlichkeit der zünftigen Mathematiker und die zu geringe formale Schulung einseitiger Philosophen darüber gedeckt hatten.

In der That ist es ein Grundzug der Mathematik unseres Jahrhunderts, und wahrlich nicht der minderwerthigste, dass sie bemüht ist nachzuholen, was frühere Zeiten in dieser Beziehung versäumt oder gesündigt hatten, und als erstes Erforderniss einer mathematischen Theorie die logische Richtigstellung ihrer Grundbegriffe verlangt, ja sogar bereit ist, ganze ausgedehnte Entwicklungen preiszugeben, oder dieselben doch zum secundären Range einer Hülfsmethodik herabzudrücken, wenn sie nicht der Grundforderung klarer Begriffe Genüge leisten. So fiel z. B. die Raumlehre Euklid's vor den weiteren modernen Anschauungen, und seine Verhältnisslehre wurde von der projectiven Geometrie verdrängt; so musste die mangelhafte Begründung der Cauchy'schen Functionentheorie dem systematischen Aufbau derselben durch Weierstraß, die Analysis der Leibniz-Euler'schen Schule der schneidenden Kritik eines Lagrange weichen.

Aber wohl kein Grundbegriff der Mathematik hat so viel Schwierigkeiten verursacht, so viel kritische Bedenken hervorgerufen und zu so divergirenden Meinungsäußerungen Anlass gegeben, wie der Zahlbegriff. Denn ungleich anderen Begriffen wuchs er, weit entfernt, durch methodische Behandlung dem Verständniss zugänglicher zu werden, immer weiter über seine früheren Grenzen hinaus; und kaum war es dem mathematischen Gewissen gelungen, sich dem jeweilig herrschenden Zahlbegriff durch eine, meist nur eingebildete, Ueberzeugung seiner Rechtmäßigkeit oder allein durch Gewöhnung anzupassen, so tauchte auch gleich wieder ein neuer auf mit noch räthselhafteren Eigenschaften und noch eigenartigeren Bestimmungen. Und es ist bisweilen recht interessant zu verfolgen, wie ermüdet von der scheinbaren Sisyphusarbeit ein Mathematiker nach dem andern die logische Untersuchung der neuen Zahlbegriffe aufgibt, sich über den Widerspruch zwischen der Thatsache ihrer Existenz und der anscheinenden Unzulässigkeit ihrer Bestimmungen mit dem Bewusstsein ihrer Nothwendigkeit tröstet und schließlich dahin gelangt, dass er ruhig mit ihnen, wie mit andern Zahlen operirt, ohne doch eigentlich von der Berechtigung seiner Handlungsweise überzeugt zu sein. Erst den unausgesetzten Angriffen der Kritik, erst den tiefgehenden systematischen Arbeiten von Männern wie Hamilton, Grassmann, Hankel, Weierstraß, Cantor ist es zu verdanken, dass wenigstens die grundlegenden Principien der Begriffsbildung aufgedeckt sind in einem Gebiete, über das selbst ein Gauß sich noch mit unzulänglichen Anschauungen trug.

Wurde aber auf diese Weise auch die Schwäche der früheren Behandlungen gründlich klar gelegt, so führte doch andererseits die positive Tendenz jener Untersuchungen entweder durch Specialinteressen wieder aus dem allgemeinen Gebiete heraus oder gab, wo das nicht der Fall war, den divergirendsten Ansichten Raum. Denn während ein so allgemeines Princip, wie das der Permanenz formaler Gesetze durch Festhalten bald dieser, bald jener Formaleigenschaft zu derartig verschiedenen Fictionen des Denkens führen kann, dass sie, alle als Zahlen betrachtet, überhaupt nicht mehr zu übersehen wären, wuchs im Laufe der Zeit eine andere, diametral entgegengesetzte Richtung heran, welche durchaus negirend die ganze Arithmetik auf die Zahlentheorie, den Zahlbegriff auf die ganze positive Zahl beschränken zu wollen scheint. Wird es aber der ersten Ansicht schließlich unmöglich, überhaupt noch irgend ein exactes allgemeingültiges Merkmal des Zahlbegriffs festzuhalten, so gibt die zweite in ihrer selbstgewählten Beschränkung einen großen Theil jenes Untersuchungsgebietes preis, das früher unter der Herrschaft des Zahlbegriffs stand und das wiederzugewinnen selbst einer Autorität wie Kronecker, dem Führer dieser Richtung, nicht ohne weiteres gelingen dürfte. Zwischen diesen beiden extremen Anschauungen bewegt sich ferner eine solche Fülle mannigfach variirter Ansichten, welche, theils noch ungeklärt, die exacte Forschung stören, theils auf Grund verschiedener, aber untereinander ziemlich gleichwerthiger Begründungen auch Anspruch auf gleiche Berücksichtigung machen, dass es dem unparteiischen Beobachter kaum möglich ist, sich in diesem Wirrwarr zurechtzufinden, welcher durch die scheinbare äußere Aehnlichkeit aller diesbezüglicher Betrachtungsweisen nur noch undurchdringlicher gemacht wird. Dazu kommt, dass selbst heutzutage noch Debatten über Begriffe vorkommen, die man für längst geklärt, für allgemein recipirt halten durfte. In der That schien es kaum möglich, dass noch eine Discussion entstehen konnte wie z. B. die über das Negative im vierzehnten und fünfzehnten Band der Hoffmann'schen Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht[1], oder dass die so sicher scheinende Begründung der Theorie des Irrationalen wieder in Frage gestellt würde. Denn während noch Hankel 1867 die Worte schrieb: »Wenn es wahr ist, dass, wie Whewell meint, das Wesen der Triumphe der Wissenschaft und ihres Fortschritts darin besteht, dass wir veranlasst werden, Ansichten, welche unsere Vorfahren für unbegreiflich hielten und unfähig waren zu begreifen, für evident und nothwendig zu halten, so war die Erweiterung des Zahlbegriffs auf das Irrationale, und wollen wir sogleich hinzufügen das Imaginäre der größte Fortschritt, den die reine Mathematik jemals gemacht hat«[2], ist heutzutage dieser Begriff wieder Gegenstand derartig heftiger Angriffe geworden, dass ein Aufsatz von Christoffel mit den Worten beginnen kann: »Da die Irrationalzahlen demnächst wieder abgeschafft werden sollen« u. s. w.[3]

1) Näheres weiter unten Kapitel III, 2.

2) Hankel: Theorie der complexen Zahlsysteme. Leipzig 1867, p. 60.

3) Christoffel: Lehrsätze über arithmetische Eigenschaften der Irrationalzahlen. Annali di Matematica, Serie II^a, Tomo XV^0. Milano 1888, p. 253.

Bei diesem Stand der Frage scheint es nun allerdings noch nicht gerade an der Zeit, eine zusammenfassende logische Untersuchung über den Zahlbegriff anzugreifen. Denn wenn auch der Philosophie als der Wissenschaftslehre die Aufgabe zufällt, die Grundbegriffe der Einzelwissenschaften einer berichtigenden Kritik zu unterziehen, so kann eine solche doch immer erst da ansetzen, wo entweder durch den Charakter der Untersuchung oder durch allgemeine stillschweigende Uebereinkunft ein bestimmtes Maß fester Elemente und Merkmale gegeben ist, welche den betreffenden Begriff constituiren. Solche bestimmte, durchgängig vorhandene Merkmale vermisst nun aber in unserem Fall der kritische Beobachter eigentlich überall. Will er also nicht ganz auf die Lösung der Aufgabe verzichten, so ist er gezwungen, mehrere getrennte Zahlbegriffe zu unterscheiden, welche einander äußerlich alle ähnlich, in Wahrheit aber doch durch tiefgreifende Gegensätze geschieden sind. Denn weder ist er in der angenehmen Lage des Mathematikers, welcher häufig nach dem Charakter der jeweiligen Untersuchung mehrere Zahlbegriffe als gleich ansehen kann, so lange nur ihre logischen Verschiedenheiten in der Rechnung nicht zum Ausdruck kommen, noch darf er, will er sich anders den unparteiischen Blick nicht trüben lassen, durch einseitiges Betonen eines bestimmten Merkmals ganze Klassen von Zahlen, deren Brauchbarkeit wenigstens außer Frage steht, von vorn herein verwerfen. Inmitten eines neuen, gewaltigen Aufschwungs der Principienforschung, umdrängt von den verschiedenartigsten und mannigfaltigsten Anschauungen und Ansprüchen, bald auf dieses, bald auf jenes Merkmal einseitig aufmerksam gemacht, von anderen, ebenso wichtigen fortwährend abgelenkt, hat er die Aufgabe, aus der Fülle des Dargebotenen, aus der zahlreichen Menge der mathematisch meist werthvollen Begriffe das herauszusuchen, was einer wissenschaftlichen Kritik standhält.

Der Verfasser verhehlt sich die Schwierigkeit dieser Aufgabe auch um so weniger, als sie noch durch die Mängel vergrößert wird, welche einer jeden Einzeluntersuchung nothwendig anhaften müssen; ja er hält eine vollständige Lösung derselben im gegenwärtigen Augenblick überhaupt noch nicht für möglich, weil in den maßgebenden Ansichten doch noch so starke Differenzen, so diametral entgegengesetzte Anschauungen sich ausprägen, dass eine Aus-gleichung derselben für's erste kaum zu stande kommen dürfte. Deshalb glaubt er sich im vorliegenden Fall mit einem provisorischen Abschluss begnügen zu müssen, mag dieser auch kein einheitlicher sein. Denn nach reiflicher Erwägung hat er als die einzige Möglichkeit unparteiischer Entscheidung den Ausweg gewählt, alle jene einzelnen Zahlbegriffe, soweit es anging, in ihrer Selbständigkeit zu erhalten, ihre Wurzeln und ihre logische Existenzberechtigung zu untersuchen, zugleich aber auch, sie gegeneinander in ihrem Wirkungsbereich abzugrenzen und unberechtigte Uebergriffe zurückzuweisen. Auf diese Weise ist er schließlich zu der Aufstellung einer ganzen Reihe von Typen gelangt. Nicht als ob er die Nothwendigkeit ihrer selbständigen Existenz befürworten wollte oder alle Stadien ihrer genetischen Entwicklung stets so genau abgegrenzt sehen möchte, wie er dies durchzuführen sich bemüht hat. Dagegen hielt er es für eine wichtigere Aufgabe, die Möglichkeit der verschiedenen Zahlbegriffe außer Zweifel zu stellen und die Auswahl derselben der Kritik und halb und halb den praktischen Gesichtspunkten einer weiter sich entwickelnden Wissenschaft anheimzugeben, statt von irgend einem vorgefassten logischen Standpunkt aus, mochte er an sich noch so einleuchtend sein, feste Begriffselemente von vorn herein aufzustellen und dann auf Grund derselben diese oder jene Zahlform ohne weiteres zu eliminiren. Denn eine Kritik, die sich nicht aus der Untersuchung selbst heraus entwickelt, verdient ihren Namen nicht und wird stets von logischen Vorurtheilen ungünstig beeinflusst sein.

Es scheint deshalb unter allen Umständen nothwendig, zuerst eine Uebersicht über die historische Entwicklung des Zahlbegriffs zu geben, um die verschiedenen Formen desselben, wie sie im Laufe der Zeit sich herausgebildet haben, zu registriren und einen Ueberblick über das zu gewinnen, was auf unserm Gebiete bisher geleistet ist. Diese summarische Darstellung[1]) ist also gewissermaßen bestimmt, das Material zu liefern für die genetische Entwicklung des zweiten Theils[2]), welcher nun hauptsächlich die logische Seite der Frage betonen wird, wie der erste die mathematische. Das

1) Dieselbe wird im ersten Kapitel enthalten sein.
2) Die genetische Entwicklung umfasst die Kapitel II—IV.

Resultat der Untersuchung wird dann die Aufstellung der verschiedenen Typen des Zahlbegriffs sein, soweit diese eben logisch zulässig sind.

Hiermit wird die Aufgabe, wenigstens in dem Umfange, wie sie dem Verfasser jetzt lösbar erscheint, im wesentlichen erledigt sein. Wie indessen die logische Existenzberechtigung eines Begriffes, außer auf seiner eigenen inneren Widerspruchsfreiheit, namentlich auf der Frage beruht, ob es möglich ist, ihm gegen die übrigen Begriffe des Denkens eine bestimmte, wohldefinirte Stellung zu geben, welche mit jenen im Einklang steht, so wird es erforderlich sein, gewissermaßen als einen Prüfstein für die Möglichkeit der einzelnen Zahlformen, als ein Kriterium für die Richtigkeit der Betrachtungen diese Einstellung in die Reihe der logischen Begriffe wirklich vorzunehmen, d. h. ihre Classification durchzuführen. Hiermit ist aber implicite zugleich die Forderung verbunden, dass alle jene einzelnen Zahlbegriffe aus ihrem obersten Gattungsbegriff, dem der Mannigfaltigkeit, durch successive Determination abzuleiten sind. An die historische und genetische muss sich also, wieder rückwärts schreitend, die logische Entwicklung anschließen [1]), deren Aufgabe die wissenschaftliche Systematisirung des Ganzen bildet. Die letztere kann nun allerdings bei dem gegenwärtigen Stand der Frage noch keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit machen. Erst einer völlig abgeschlossenen Untersuchung, wie sie aber außer auf Grund allgemeiner Convention, d. h. schließlich bestimmt durch praktische Erwägungen in Bezug auf die festzuhaltenden Merkmale, wohl nie zu stande kommen wird, erst einer solchen vollendeten Entwicklung wäre es möglich, die logische Determination consequent durchzuführen. Was der Verfasser in dieser Beziehung geben konnte, darf im günstigsten Falle als ein erster Versuch, als ein Beweis für die wissenschaftliche Zulässigkeit der von ihm aufgestellten Zahltypen gelten.

---

1) Wir werden dieselbe im fünften Kapitel geben.

Erstes Kapitel.

Die historische Entwicklung des Zahlbegriffs.

1. Die Zahl wesentlich concreten Charakters.

In einer Uebersicht über die historische Entwicklung des Zahlbegriffs, wie sie im vorliegenden Kapitel weniger um ihrer selbst willen, denn als Grundlage für die folgende logische Untersuchung gegeben werden soll, wird von vorn herein von einer eingehenden wissenschaftlichen Darstellung Abstand genommen werden müssen, ein Verzicht, der um so unbedenklicher auszusprechen ist, als über diesen Gegenstand, wenigstens für die früheren Perioden, umfangreiche Arbeiten bereits existiren [1]), andererseits aber auch die in Frage kommenden Begriffe zu den geläufigsten der Mathematik gehören. Wichtiger für den Zweck der logischen Untersuchung ist die Fixirung der allgemeinen Gesichtspunkte, welche bei der Bildung der verschiedenen Zahlbegriffe leitend gewesen sind, mögen sie nun dabei zum Bewusstsein gekommen sein oder nicht. Wir werden daher auf diese im Folgenden hauptsächlich unsere Aufmerksamkeit richten [2]).

Ueberblickt man aber die ganze, reiche Entwicklung des Zahlbegriffs, so machen sich schon bei oberflächlicher Betrachtung drei Perioden bemerklich, welche sich, wie dies ja ein Kennzeichen der Gesammtentwicklung des menschlichen Denkens ist, durch die verschiedenen Grade der Abstraction unterscheiden. In der ersten dieser Perioden bewahrt die Zahl noch ihren ursprünglichen concreten Charakter. Ihr Anfang ist natürlich ebensowenig zu fixiren, wie der Anfang des Denkens überhaupt, und auch ein Versuch der Bestimmung ihres Endes kann wegen des fortwährenden Flusses

---

1) H. Hankel, Zur Geschichte der Mathemathik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig 1874, und M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig 1880. Wir werden diese Werke künftig citiren als Hankel resp. Cantor, Geschichte der Mathematik.

2) Zur Vermeidung von Wiederholungen werden wir in diesem Kapitel unter Beiseitelassung aller erkenntnisstheoretischen oder logischen Erörterungen lediglich den historischen Thatbestand betrachten. Betreffs des begrifflichen Inhalts der ganzen Entwicklung müssen wir auf die spätere ausführlichere Darstellung des dritten Kapitels verweisen.

der Begriffe keine Aussicht auf Erfolg haben. In der Culturwelt muss man ihre Herrschaft im allgemeinen auf das Alterthum und einen großen Theil des christlichen Mittelalters beschränken, während die niederen Völker ihr jetzt noch nicht entwachsen sind. Als äußeres Merkmal dient dieser Periode der Umstand, dass alles Rechnen, soweit von einem solchen überhaupt die Rede sein kann, an concreten Einheiten ausgeführt, d. h. mit der Anschauung begleitet wird, wie ja auch das Kind seine ersten Rechenversuche an Aepfeln, Nüssen und ähnlichen Größen machen lernt.

Eine solche Mathematik konnte natürlich über den Begriff der ganzen positiven Zahl und höchstens ihrer Bruchverhältnisse nicht hinauskommen; sie stand den Irrationalzahlen, welche ja allerdings auch heute noch den schwierigsten Theil der Untersuchung bilden, rathlos gegenüber. Die Einführung dieser Zahlarten konnte erst einer zweiten Periode gelingen, welche, von den vorgestellten concreten Einheiten abstrahirend, die Zahl mehr und mehr als symbolisches Zeichen aufzufassen begann, das lediglich bestimmt war, als Grundlage für die Rechnungsoperationen zu dienen, wenn die erhaltenen Resultate auch meistens concrete Deutungen zuließen. Aeußerlich charakterisirt sich diese Periode, deren Anfang etwa in die indische Mathematik des fünften und sechsten Jahrhunderts zu legen ist, zunächst durch die Einführung des Negativen und Irrationalen, ein Fortschritt, der freilich dort mehr ein mathematischer als ein logischer genannt werden muss. Der Beginn der Neuzeit brachte dann das erste Auftauchen der imaginären und complexen Zahlen, deren Existenzberechtigung ein dreihundertjähriger Kampf sicher stellte. Und dieser Kampf wurde erst entschieden, als bereits diejenigen Bestrebungen sich geltend machten, welche allgemeine, complexe Zahlen höherer Ordnung discutirten und den auf solche Weise erhaltenen Zahlbegriffen eine unbegrenzte Ausdehnung sichern wollten.

Zugleich begann aber, namentlich in England, eine strenge wissenschaftliche Untersuchung der formalen Rechengesetze, die den scheinbar beliebig zu erweiternden Zahlbegriffen gewisse nothwendige Beschränkungen auferlegen lehrte und so das Gleichgewicht in der stetigen Entwicklung wieder herstellte. In diesen rein formalen Speculationen schien nun der höchste Grad der Abstraction erreicht, wenn es nicht gelang, den so gewonnenen Zahlbegriffen einen allgemeinen, noch umfassenderen Gattungsbegriff überzuordnen. Die Ausführung dieser Subsumtion, die wir als das charakteristische Merkmal der dritten Entwicklungsperiode aufzufassen genöthigt sind, ist noch verhältnissmäßig neu. Die frühesten Versuche in dieser Beziehung fallen in die Mitte des neunzehnten Jahrhunderts, und erst in den letzten Jahrzehnten ist es wesentlich den Arbeiten G. Cantor's gelungen, eine Theorie zu begründen, welche wirklich alle Zweige der Mathematik umfasst und zugleich einen so hohen Grad von Abstraction erreicht hat, dass ein Darüberhinausgehen unmöglich scheint. Wenn aber auch beide, Mannigfaltigkeits- und allgemeine Formenlehre, als die jüngsten Zweige der Mathematik, welche schon bedeutend auf das Grenzgebiet zwischen ihr und der Logik übergreifen, noch keineswegs so ausgebildet sind, dass man von einem befriedigenden Abschluss reden könnte, so scheinen sie doch andererseits genügend fest fundirt, um als letzte Grundlage der Mathematik dienen zu können. Ihre Ausbildung kann und wird daher eine wesentliche Aufgabe der eben begonnenen dritten Periode sein.

Kehren wir nun nach diesem Ueberblick zu den Anfängen der arithmetischen Begriffsbildung zurück, so versteht es sich von selbst, dass der erste Zahlbegriff, welcher überhaupt gefasst werden konnte, der der positiven ganzen Zahl war. Er entstand jedenfalls — auf die psychologische oder logische Seite der Frage ist hier nicht näher einzugehen — indem man in der Wahrnehmung getrennt gegebene Erscheinungen, welche alle das gleiche charakteristische Merkmal darboten, in eine Vielheit zusammenfasste. Zahlenbegriffe in diesem Sinne dürften wohl alle bekannten Völker besitzen. Denn wenn auch manche Reisende aus der Armuth gewisser Völker an Ziffern und Zahlworten haben schließen wollen, dass dieselben nicht bis zwanzig, oder auch nur bis fünf zu zählen im Stande wären[1]), so steht doch diese Ansicht auf gleicher Höhe mit dem bekannten Schluss, dass die Griechen die blaue Farbe nicht wahr-

1) A. v. Humboldt, Ueber die bei verschiedenen Völkern üblichen Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen. Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik. Berlin 1829. IV, p. 205. Die betreffende Angabe steht p. 209.

genommen hätten, weil sie keine ausreichende Bezeichnung für dieselbe besitzen. Allgemeine Untersuchungen über diese, vom psychologischen wie anthropologischen Standpunkt aus gleich interessante Frage fehlen leider heutzutage noch, man darf indessen wohl die Fähigkeit, beliebig hohe Zahlen zu bilden, bei allen Menschen voraussetzen. Wo freilich, wie bei niederen Völkern, der Antrieb fehlt, größere Mengen abzuzählen, da werden wir selbstverständlich auch keinen entsprechenden Zahlwörtern begegnen.

Da jedoch das Abzählen eine der primitivsten Formen der menschlichen Erkenntniss darstellt, so finden wir ausgebildete Zahlsysteme schon bei den ältesten bekannten Völkern. Anfänglich mag man die Zahl wohl immer nur auf die jeweilig in's Auge gefassten Gegenstände bezogen haben, d. h. man zählte nicht 4, 5, 6, sondern vier Bäume, fünf Menschen, sechs Steine u. s. w. Dann aber machte man die Wahrnehmung, dass die Zahl von der Beschaffenheit des Gezählten selbst unabhängig sei, und benutzte diese Entdeckung, um den Zählprocess an den hierzu wie geschaffenen Fingern, eventuell mit Zuhülfenahme der Zehen, auszuführen und diesen erst im Resultat die ursprünglich betrachteten Objecte zu substituiren. So entstanden bekanntlich auf den Grundeinheiten von fünf, zehn, zwanzig sämmtliche Zahlsysteme.

In diesem Stadium war nun die Zahl nichts anderes, als ein primitives Hülfsmittel praktischer Erkenntniss, sie wurde lediglich zum Abzählen verwandt. Da indessen die Umständlichkeit der Auszählung größerer Mengen schon sehr frühe die Zusammenfassung gewisser Anzahlen in höhere Einheiten erforderlich machte, so drängte sich die Nothwendigkeit auf, die Zahlen nicht wegen ihrer Beziehung zum realen Apperceptionsprocess, sondern um ihrer selbst willen zu untersuchen, und es begann die Arithmetik. Es wurden die Verhältnisse verschiedener Zahlen zu einander näher in's Auge gefasst, ihre Verknüpfung eingehender betrachtet, kurz die Zahl wurde Gegenstand der Rechnung. So entstanden, allerdings unter dem Einfluss der Anschauung, die Regeln der Addition, Subtraction, Multiplication und Division, und den Grundlagen der Operationen folgte bald bei Chaldäern, Aegyptern, Griechen und Indern die wissenschaftliche Behandlung des Gegenstandes. Die beste systematische Darstellung erfuhr diese Arithmetik wie die ganze antike Mathematik in dem großen Elementarwerk des Euklid.

Hier erscheint die Zahl allein als positive ganze Zahl, bestimmt die Maßverhältnisse zweier Größen zu formuliren. Waren die letzten so beschaffen, dass die größere durch die kleinere sich vollständig ausmessen ließ, so wurde dies Verhältniss ausgedrückt durch die ganze Zahl; war aber die Vergleichung nur durch ein kleineres gemeinsames Maß möglich, so kam man auf ein Bruchverhältniss. Solche Verhältnisse erschienen aber noch keineswegs als Brüche im heutigen Sinne. Denn der Grieche kannte überhaupt nur Stammbrüche, deren Zähler ja bekanntlich nur die 1 bildet, und auch diese gelten nicht einmal als Zahlen, sondern als Größen niederer Ordnung[1]. So bedeutet bei Euklid $\frac{1}{7}$ den siebenten Theil der als Länge veranschaulichten Einheit, $\frac{2}{7}$, gesprochen als zwei Siebentel, das Aggregat von zwei solchen kleineren Längen, $\frac{2}{7}$ hingegen, gesprochen als zwei durch sieben, das Verhältniss zweier Strecken von den Längen 2 und 7, niemals aber den siebenten Theil der Länge 2. Der erste Ausdruck $2 \cdot \frac{1}{7}$ ist also eine Größe, der zweite $\frac{2}{7}$ ein Verhältniss, und keiner wird daher zu den Zahlen gerechnet[2].

Das Verhältniss, rein formal gefasst, hätte am ehesten noch auf die gebrochenen Zahlen führen können. Da aber den Griechen die Zahl nur als Maßbezeichnung für die Größen erschien, so konnten sie ganz wohl mit den ganzen Zahlen auskommen, sobald sie nur nicht das Verlangen stellten, es müsse jede Zahl durch jede gleichartige auszumessen sein, sondern ein kleineres gemeinsames Maß zuließen. Die Brüche von der Gestalt $\frac{2}{7}$ hatten also

1) Elemente V *α′* (ich citire die Teubner'sche Ausgabe von Heiberg, Leipzig 1883) *Μέρος ἐστὶ μέγεθος τοῦ μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν μετρῇ τὸ μεῖζον.*

2) Elemente V *γ′*.. *Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις*, oder, wenn man diese vielbestrittene Definition (vgl. Hankel, Geschichte der Mathematik p. 393) nicht gelten lassen will: *δ′ Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.*

(wenn man unter e irgend eine Größe versteht) eine der beiden Bedeutungen: $2\frac{e}{7}$, d. h. die Summe zweier Größentheile, welche siebenmal kleiner sind als die ursprüngliche Einheit, oder: $\frac{2e}{7e}$, d. h. das Verhältniss der doppelten Einheit zur siebenfachen. Was unter $\frac{2e}{7}$, d. h. dem siebenten Theil der Größensumme $2e$, oder unter $\frac{2}{7}e$, worin der Bruch $\frac{2}{7}$ schon ganz formal erscheint, zu verstehen sei, das finden wir bei Euklid mit keinem Worte berührt.

Den letzten Ausdruck, dessen Besprechung in den zweiten Abschnitt dieses Kapitels zu verweisen ist, fanden erst die Inder, der andere scheint dagegen bereits Vorwurf der ägyptischen Rechenkunst gewesen zu sein, welche also in dieser Beziehung über die griechische Arithmetik hinausging. Indessen schon eine oberflächliche Betrachtung der Rechnungsvorschriften, wie sie in dem bekannten, vielcitirten Papyrus Rhind [1]) auseinandergesetzt sind, genügt, um den Eindruck zu erwecken, dass hier von einer wissenschaftlichen Methodik noch keine Rede sein kann. Die ersten Blätter jenes Papyrus beschäftigen sich nämlich mit Brüchen, deren Nenner die ungeraden Zahlen von drei bis neunundneunzig, deren Zähler gleich zwei sind, und geben eine Tafel zur Zerlegung solcher Brüche in Stammbrüche. Aus dem Streben nach dieser Zerlegung ergibt sich nun unmittelbar, dass es sich hier wiederum nur um ein Rechnen mit Größen, mit benannten Zahlen handelt, dennoch aber muss die Tendenz, Ausdrücke wie $\frac{2e}{7}$ in die Rechnung einzuführen, entschieden als ein Fortschritt bezeichnet werden, da sie implicite den Begriff des formalen Bruches $\frac{2}{7}$ bereits enthalten. Ja ein wirklich formaler Bruch findet sich in der That schon in jenen Rechentafeln, nämlich $\frac{2}{3}$. Denn man begegnet dort vielfach einer Bezeichnung von der Form $\frac{2}{3}e$, deren Identität mit $\frac{2e}{3}$ oder

1) Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum), übersetzt und erläutert von August Eisenlohr, Leipzig 1877. Eine eingehende Besprechung dieses werthvollen Documentes findet sich in der Geschichte der Mathematik von M. Cantor p. 18 ff.

$2\frac{e}{3}$ zwar nirgends direct ausgesprochen, aber doch stillschweigend vorausgesetzt wird.

Ueberhaupt dürfen die Tafeln wohl auf etwas mehr Bedeutung Anspruch machen, als Cantor zugeben will, der in ihnen lediglich additive Zerlegungen von Brüchen der betrachteten Art in Stammbrüche sieht, welche man habe vornehmen müssen, um dieselben den für Stammbrüche aufgestellten Regeln unterwerfen zu können. Denn eine solche Zerfällung wäre doch am einfachsten geleistet durch die Formel: $\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \left(= 2\frac{1}{2n+1}\right)$; und wenn man auch nicht annehmen will, dass den Aegyptern das allgemeine Princip von der Vertauschbarkeit der Reihenfolge von Division und Multiplication bekannt gewesen sei — dies würde schon eine Bekanntschaft mit den formalen Gesetzen verrathen, wie wir sie jenem Volke noch durchaus absprechen müssen — so darf man doch entschieden voraussetzen, dass z. B. eine Zerlegung von $\frac{2}{37}$ in $\frac{1}{37}$ und $\frac{1}{37}$ leichter zu finden war, als die im Text angegebene $\frac{1}{24} + \frac{1}{111} + \frac{1}{296}$. Man muss daher in jener Tabelle wohl mehr eine Zusammenstellung allmählich bekannt gewordener anderweitiger Bruchzerfällungen erblicken, nicht hervorgegangen aus der Nothwendigkeit, die betrachteten Brüche überhaupt in Stammbrüche zu zerlegen, sondern im Interesse der Vollständigkeit gesammelt und lediglich dazu bestimmt, was dieser oder jener im Laufe der Zeit zufällig gefunden, für die Nachwelt zu retten. Hierfür spricht unter anderm auch der Umstand, dass alle jene Zerlegungen einen durchaus empirischen Charakter tragen, so dass ihre schriftliche Fixirung im Interesse späterer Ersparung langen Probirens sehr wünschenswerth erscheinen konnte. Und, wenn gleich dieser rein empirische Charakter der Resultate andererseits beweist, dass auch den Aegyptern die Trennung der Zahl von der Größe noch nicht gelungen ist, so muss man es doch immer als einen bedeutenden Schritt auf dem Wege zum formalen Zahlbegriff ansehen, dass hier zum ersten Mal der Versuch gemacht wird, die Principien der Rechnungsoperationen für ganze Zahlen und Stammbrüche auch — wie es in den späteren Blättern des Papyrus in der That geschieht —

auf gebrochene Zahlen zu erweitern. So wurde hier der Grund zu einer Bruchrechnung gelegt, welche zwar noch nicht von dem Begriff der Größe zu abstrahiren verstand, es aber doch schon zu einer ziemlichen Entwicklung brachte. Ihre successive Ausbildung hier weiter zu verfolgen, ist allerdings überflüssig; es genügt zu bemerken, dass sie stets ihren unselbständigen Charakter behielt, indem sie immer nur mit messbaren Zahlgrößen operirte und häufig sogar ganz concrete Einheiten, wie z. B. bei den Römern die Münzsorten, zu Grunde legte.

Wenn aber eine solche Behandlungsweise der Größenverhältnisse schon daran hinderte, die Brüche unter die Zahlen aufzunehmen, so war dies selbstverständlich ganz unmöglich bei den Irrationalitäten, die der griechischen Mathematik deshalb auch die meisten Schwierigkeiten gemacht haben. Ihre trotz vielfacher Analogien den rationalen Größen durchaus heterogene Natur forderte gebieterisch die völlige Trennung von den letzteren; und so sehen wir denn auch bei Euklid die Scheidung in commensurable und incommensurable Größen überall streng durchgeführt [1]). Jene verhalten sich wie Zahlen, diese nicht, jene können auch arithmetisch behandelt werden, diese nur geometrisch u. s. w.

Die Vereinigung beider Begriffe auf Grund des Größenbegriffes konnte erst einer Analysis des Unendlichen — und hieran war damals selbstverständlich noch nicht zu denken — oder aber einer Theorie gelingen, welche die Zahlen nicht blos als concrete Größenmaße oder Maßgrößen, sondern vielmehr als durch formale Eigenschaften definirt ansah. Diesen Fortschritt finden wir jedoch erst bei den Indern verwirklicht.

2. Die Zahl wesentlich abstracten Charakters.

Weit über die bisherige concrete Auffassung des Gegenstandes erhebt sich nun aber bereits ein Grieche, der so weit außerhalb der ganzen hellenischen Wissenschaft steht, dass er zu dieser eigentlich gar nicht gerechnet werden kann, um so mehr, als er weder

---

1) Elemente X, *α'*. Dann Satz V: *τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν*, und VII *τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.*

Vorgänger noch Nachfolger besitzt, Diophantus. In dem euklidischen System war die Arithmetik im wesentlichen nichts anderes gewesen, als eine singuläre Behandlungsweise eines ganz speciellen Gebietes der Größenlehre, nämlich der commensurablen Größen. Diophant erhob sie zur selbständigen Wissenschaft. Denn er ersetzte die Größen durch reine Zahlen und die bisher üblichen geometrischen Constructionen arithmetischer Aufgaben durch die formalen Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Potenzirung und Radicirung, deren Regeln, wie etwa das distributive Gesetz, er in so staunenerregender Weise handhabte, dass er beispielsweise das positive Vorzeichen eines Productes von zwei negativen Zahlen abzuleiten wusste[1]). Hieraus ist nun allerdings noch in keiner Weise zu entnehmen, dass er die negativen Zahlen gekannt oder gar eingeführt habe. Denn jene Entdeckung dient ihm lediglich dazu, das distributive Gesetz in seiner allgemeinen Form: $(a \pm b)\,(c \pm d) = ac \pm bc \pm ad + bd$ zu verificiren. Die eventuellen Differenzen $a - b$ und $c - d$ müssen dabei immer noch positive ganze Zahlen sein. Negative Zahlen, wo sie auch immer vorkommen mögen, verwirft er ebenso wie irrationale. Die Erkenntniss dieser Zahlformen konnte erst der weit höheren Abstraction der indischen Mathematik gelingen.

Die Möglichkeit einer weiteren Ausbildung der Zahlen beruhte nun in erster Linie auf einer geschmeidigen Bezeichnungsweise derselben, da die schwerfälligen Ziffersysteme der Culturvölker des Mittelmeeres ein Rechnen mit einigermaßen großen Zahlen kaum gestatteten. Diese Forderung wurde aber erst erfüllt durch das indische Positionssystem. Denn das ausgesprochene Princip des Stellenwerthes erlaubte es einerseits mit dem geringsten Raum für die Schrift, andererseits mit möglichst wenig Zahlzeichen auszukommen, ein Vortheil, der durch die, freilich in Anlehnung an die alte Fingerrechnung gewählte, zufälligerweise aber äußerst zweckmäßige Grundeinheit der zehn noch vergrößert wurde. Die Darstellung einer jeden Zahl in der Form $\ldots\, a_3\, 10^3 + a_2\, 10^2 + a_1\, 10 + a_0$, worin $a_0\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ die Zahlen unter zehn, also die Ziffern darstellen, wurde aber erst ermöglicht durch das Zeichen für das

1) Hankel, Geschichte der Mathematik S. 158.

Fehlen einer bestimmten Potenz von zehn, durch die Null. Dieses Zeichen, dessen Erfindung einen so bedeutenden Fortschritt in der Systematik involvirt, dass Hankel sie zu »jenen epochemachenden Ideen« rechnet, »welche wie eine Offenbarung von oben nur den größten Geistern zuweilen eingegeben werden«[1]), erscheint hier im Positionssystem vorläufig noch ohne jede reale Größenbedeutung lediglich als der Ausdruck dafür, dass die betreffende Einheit, deren Stelle sie vertritt, in der betrachteten Zahl nicht vorkommt. Die Null ist hier ebenso ein Symbol, wie etwa das Minus- oder Wurzelzeichen bei Diophant.

Diese Bedeutung sollte nun freilich nicht ihre einzige bleiben, denn sie fand sehr bald eine andere durch die Ausbildung der formalen Rechenoperationen. Letztere nämlich, bei Diophant schon genauer erforscht, empfingen unabhängig von ihm in der indischen Arithmetik eine Vollendung wie nie vorher. Es wurden schon sehr bald die vier Species sowie die Potenzirung und Radicirung mit ganzen Zahlen wie mit Brüchen in der umfassendsten Weise gelehrt und gehandhabt; und die formalen Gesetze dieser Operationen erhielten einen Grad der Vollkommenheit, der einmal den ursprünglichen concreten Charakter des Zahlbegriffs zu Gunsten des formalen Rechnungselementes ganz vergessen ließ, dann aber auch über die so gewonnenen absoluten Zahlen hinausführte. So leitete auch in der That bereits ziemlich früh die Division auf die Brüche, die nun nicht mehr auf die Theile concreter Größen bezogen wurden, sondern als Erzeugnisse einer rein formal aufgefassten Division in die Rechnung eingingen. So entstand durch Subtraction einer dem Minuenden gleichen Zahl wieder die Null, nun auch nicht mehr der symbolische Ausdruck für den Mangel einer Einheit, sondern das Resultat einer in absoluten Zahlen ausführbaren Subtraction, wobei sie freilich, da sie durch Abziehen jeder beliebigen Zahl von sich selbst erhalten werden konnte, als Divisor nicht verwendet werden durfte. So verdankten einer weiteren Ausdehnung der Subtraction für den Fall, dass der Minuendus kleiner war als der Subtrahendus, die negativen Zahlen ihren Ursprung; und sie durften auf solche Weise definirt werden, da sie sich, wie

1) Hankel, Geschichte der Mathematik S. 45.

die Inder das ausdrücklich bewiesen, den formalen Operationsgesetzen vollkommen fügten. So erschien endlich zum ersten Male das Irrationale als Zahl, bestimmt durch eine in absoluten Zahlen nicht ausführbare, trotzdem aber den gewöhnlichen Zahlgesetzen gehorchende Radicirung.

Mit einer derartig ausgebildeten Algebra war es nun nicht schwer, selbst schwierigere geometrische Probleme, deren Lösung den Griechen nur durch mühevolle Synthese gelungen war, rechnend mit verhältnissmäßiger Leichtigkeit zu bewältigen und so diejenige Disciplin der Mathematik vorzubereiten, welche sich dann zur Analysis entwickelte. Während diese aber später auf Betrachtung des unendlich Kleinen den größten Werth legte, tritt sie uns hier noch in völlig finiter Form entgegen. Zwar kannten die Inder Näherungsmethoden für die Auswerthung des Irrationalen, d. h. seine Messung durch rationale Zahlen, zwar lehrten sie schon in derselben Weise, wie es noch heute geschieht, das Ausziehen von Quadrat- und Cubikwurzeln, zwar hatten sie für die Zahl π bereits die erstaunliche Genauigkeit von 3,1416 erreicht [1]), aber niemals haben sie in solchen, nothwendigerweise unendlichen Processen etwas räthselhaftes oder widerspruchsvolles gefunden. Man beschränkte sich eben im Besitze einer vollendeten finiten Methodik auf die rein algebraische Behandlung aller mathematischen Aufgaben, ohne über den Umkreis derselben herauszugehen.

Dieser Charakterzug ist übrigens nicht allein den Indern, sondern auch der ganzen, von ihnen abhängigen arabischen und christlich-mittelalterlichen Mathematik eigen. In der formalen Algebra wurden später infolgedessen auch neue Fortschritte gemacht. So wurden z. B. auf Grund einer weiteren Verallgemeinerung der formalen Gesetze vom Bischof von Lisieux Nicole Oresme im vierzehnten Jahrhundert die gebrochenen Potenzen eingeführt [2]) und ihre nothwendige Gleichheit mit den Wurzeln betont. Indessen bedeutet diese Leistung, wie so viele andere Weiterentwicklungen, doch nur einen Ausbau der bereits bekannten formalen Algebra;

---

1) Hankel, Geschichte der Mathematik S. 216.

2) Nicole Oresme: Algorismus proportionum, herausgegeben von M. Curtze, Berlin 1868, vgl. Schlömilch: Zeitschrift für Mathematik und Physik XIII. Suppl. S. 68 ff.

einen wesentlichen Fortschritt bildet erst die Entdeckung der imaginären und complexen Größen und der hieraus resultirenden Zahlformen.

Trotz dieser hohen formalen Ausbildung der Algebra finden wir indessen in dem ganzen bisher besprochenen Zeitabschnitt gegen die negativen Zahlen ein im Grunde unberechtigtes Misstrauen, das aus den immer noch nicht völlig aufgegebenen älteren concreten Anschauungen entsprang. Es bedurfte deshalb geraumer Zeit, bis dieselben sich als selbständige Begriffe in der Algebra eingebürgert hatten. Aufgenommen sind sie jedoch bereits vor Harriot, der für gewöhnlich als der erste systematische Bearbeiter der negativen Zahlen gilt, bei Fibonacci[1]), welcher sie zulässt, sobald sie als debitum interpretirt werden können, und bei dem Augustinermönch Michael Stifel[2]), welcher schon von numeris absurdis oder fictis infra nihil spricht. Aber es war kaum gelungen, ihnen eine allenfalls genügende arithmetische Grundlage zu geben, als auch schon ein neuer, viel räthselhafterer Begriff auftauchte, das Imaginäre.

Complexe Zahlen kommen zuerst vor bei Cardan, der sie in seinen beiden Compendien der Algebra[3]), sowie in dem allerdings sehr verworrenen Werk: De regula Aliza[4]) mehrfach erwähnt. Da Cardan demnach in der That der erste ist, welcher bewusst mit dem Imaginären operirt, so wird es zweckmäßig sein, auf seine diesbezüglichen Anschauungen etwas näher einzugehen, umsomehr, als die einzige hierüber bestehende Darstellung, die von Hankel[5]), der übrigens wahrscheinlich die Ars magna nicht gekannt hat, zu den am wenigsten vollständigen Theilen seines bekanntlich unvollendeten Geschichtswerkes gehört.

---

1) Fibonacci (= filius Bonacci) oder Leonardo Pisano. Liber Abaci 1202 und 1220.

2) Michael Stifel, Arithmetica integra. Norimbergae 1544.

3) Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus. Mediolani et Norimbergae 1545 und Ars magna Arithmeticae seu liber quadraginta capitulorum et quadraginta quaestionum. Basileae 1570. Wir werden beide Werke citiren als: Artis magnae liber und Ars magna.

4) Basileae 1570. Alle drei Schriften sind abgedruckt im vierten Band der Gesammtausgabe: Hieronymi Cardani opera omnia. Lugduni 1663.

5) Hankel, Geschichte der Mathematik S. 371, 372.

Cardan unterscheidet in der Algebra zweierlei Werthe; die einen sind ihm real, und hierzu gehören die absoluten, gebrochenen und irrationalen Zahlen, die andern gelten ihm im allgemeinen als Fictionen, und hierzu gehören die negativen Zahlen, Quadratwurzeln aus solchen und endlich — dies ist für seinen Standpunkt sehr charakteristisch — negativ genommene Quadratwurzeln aus negativen Zahlen. Er nennt die ersten veros, die andern falsos oder fictos numeros, wobei er freilich die zweite Bezeichnung ursprünglich nur auf die negativen Zahlen bezieht[1]). So lange es sich allein um concrete Verhältnisse, d. h. um die Anwendung der Algebra auf wirkliche Größen handelt, verwirft er alles fictive und stellt sich soweit auf einen rein realistischen Standpunkt. Dieser Gesichtspunkt leitet ihn z. B. bei der Aufstellung der verschiedenen Gleichungstypen, deren er, da er hierbei nirgends negative Zahlen zulassen will[2]), eine ganze Reihe für jeden Grad nöthig hat[3]). Dieselbe Erwägung lässt ihn auch bei der Anwendung auf die Wirklichkeit negative Lösungen für ungiltig erklären. So muss er z. B. bei der Behandlung quadratischer Gleichungen von dem Typus $x^2 + b = ax$ verlangen, dass $\frac{a^2}{4} > b$ sei, weil sonst die Aufgabe unmöglich wäre, wie überhaupt jedesmal das Auftreten einer unmöglichen Lösung auf eine falsche Fragestellung hinweise[4]). Lässt aber in Bezug auf die Größenlehre seine realistische Anschauung eine Duldung der fictiven Zahlen nicht zu, so kann er

1) .... aestimatione ... ficta, sic enim vocamus eam, quae debiti est seu minoris. Artis magnae liber I, 3.

2) semper autem numerus, cui comparantur denominationes (sc. die Formen der Function, in welchen die Unbekannte erscheint) in hoc capitulo (sc. Gleichung) verus, non fictus supponitur. Quid enim tam stultum, quam fundamentum ipsum (sc. die Beziehung auf die realen Größen) infirmare; wozu er allerdings vorsichtig noch die Bemerkung fügt: quamquam ratio opposita in oppositis esset observanda. Artis magnae liber I, 4.

3) Für den zweiten Grad z. B. drei, nämlich $x^2 + ax = b$; $x^2 = ax + b$, $x^2 + b = ax$, für den dritten schon achtzehn, für den vierten noch viel mehr. Vgl. Artis magnae liber II und Ars magna XX.

4) Artis magnae liber, Caput V, regula III, notandum: Quodsi detractio ipsa numeri, a quadrato dimidii numeri rerum fieri nequit, quaestio ipsa est falsa, nec esse potest, quod proponitur, semper autem pro regula generali in hoc tractatu toto est observandum, quod cum ea quae praecipiuntur fieri non possunt, nec illud quod proponebatur fuit nec esse potuit.

sich ihrer in der formalen Algebra doch nicht erwehren. So muss er sie z. B. für die quadratischen Gleichungen schon unter allen Umständen formal beibehalten, da er selbst an die Spitze des liber artis magnae das Theorem stellt, eine quadratische Gleichung müsse immer zwei Wurzeln haben, ein Satz, der ja nur giltig ist, so lange man das ganze complexe Zahlgebiet in Betracht zieht. In der ars magna, dem späteren Werke, hat er sogar schon erkannt, dass auch eine cubische Gleichung in allen den Fällen, wo sie bis dahin für unlösbar oder vielmehr für falsch galt, außer einer reellen in gewöhnlichen Zahlen stets noch zwei complexe Lösungen besitze, ein für jene Zeit ganz außerordentliches Resultat[1]).

Für die Auffindung solcher unechter Wurzeln gibt er nun in dem liber artis magnae besondere Regeln, welche noch jedesmal durch Beispiele erläutert werden[2]). Die erste Regel handelt von dem Aufsuchen negativer Wurzeln, mit denen man es zuerst probiren soll, wenn man keine wahren absoluten finden kann. Bemerkenswerth ist dabei, dass die drei hinzugefügten Aufgaben eingekleidet sind, und zwar in Fragen nach dem Vermögen eines gewissen Franciscus, (der als Beispiel bei Cardan eine ähnliche Rolle spielt, wie Caius im römischen Recht), so dass das herauskommende negative Resultat doch wieder concret durch Schulden interpretirt werden kann, also eigentlich gar nicht als aestimatio falsa erscheint. In der zweiten Regel wird dann die Auffindung von Lösungen der Form $a + \sqrt{-b}$ und $a - \sqrt{-b}$ gelehrt für den Fall, dass a und b positive Zahlen sind, und die dritte beschäftigt sich endlich unter derselben Voraussetzung mit Wurzeln, wie $-a - \sqrt{-b}$, denen Cardan jede reale Existenz aberkennt, und die er als omnino falsa bezeichnet, weil sie weder negativ noch von der Form $a \pm \sqrt{-b}$ sind[3]).

1) Ex hoc patet complementum capitulorum (sc. Gleichungen) omnium cubi aequalis rebus et numero (sc. $x^3 = ax + b$) et cubi et censuum aequalium numero (sc. $x^3 + ax^2 = b$) et cubi et numeri aequalium rebus (sc. $x^3 + a = bx$) et cubi et numeri aequalium rebus et censibus (sc. $x^3 + a = bx + cx^2$) etc. Ars magna. Quaestio 38, in der citirten Gesammtausgabe IV, p. 373.

2) Artis magnae liber XXXVII. De regula falsum ponendi (p. 286).

3) Haec regula (sc. falsum ponendi) triplex est, aut enim ponit $\tilde{m}$ (sc. eine negative Zahl) aut quaerit $R\!\!\!/\ \tilde{m}$ (sc. eine Zahl wie $\sqrt{-b}$) aut quaerit quod non est (sc. $-a - \sqrt{-b}$), regula I. und später: possumus vero venari genus m aliud, quod neque est purum m nec $R\!\!\!/\ m$, sed res omnino falsa.

Wenn diese Ansichten nun auch noch ziemlich unklar genannt werden müssen, so bedingen sie doch jedenfalls algebraisch schon einen bedeutenden Fortschritt, da hier in der That zum ersten Mal mit complexen Zahlen gerechnet wird, und zwar nach den gewöhnlichen Operationsregeln, allerdings ohne dass die Frage nach der Berechtigung dieser Handlungsweise irgendwie sich geltend macht. So verificirt Cardan z. B. in der Aufgabe zur Regel II, dass $5+\sqrt{-15}$ und $5-\sqrt{-15}$ wirklich als Lösungen der Gleichungen $x+y=10$, $x\cdot y=40$ anzusehen sind. Andererseits ist allerdings das Beispiel für die dritte Regel vollständig verrechnet, da er z. B. den Ausdruck $\frac{1}{4}\cdot\left(-\sqrt{-\frac{1}{4}}\right)=\sqrt{\frac{1}{64}}=\frac{1}{8}$ setzt und auf diese Weise natürlich ein vollkommen falsches und unsinniges Resultat erhält.

Wenn somit zu der begrifflichen Unsicherheit der neuen Zahlen noch die mathematische hinzukam, kann es nicht Wunder nehmen, dass sie aus der späteren Literatur wieder verschwinden. Nur ein einziger von Cardan's Nachfolgern, Bombelli, benutzte sie einmal, aber auch nur, um sie auf reale zu reduciren, indem er nämlich durch directe Wurzelausziehung nachwies, dass in dem sogenannten casus irreductibilis der cubischen Gleichungen das Imaginäre häufig nur scheinbar auftrete und in Wirklichkeit gar nicht vorhanden sei[1].

Spielen hier aber die imaginären Zahlen als solche schon eine sehr nebensächliche Rolle, so werden sie in den späteren Arbeiten ganz vernachlässigt. Der große Systematiker Viète duldete sogar nicht einmal mehr negative Zahlen, sondern verwarf alle derartigen Lösungen[2]. Und da er für viele Nachfolger bestimmend war, so konnten erst nach und nach beide Begriffe, das Negative und Imaginäre, das Bürgerrecht wieder erwerben. Geduldet, weil man sie doch nicht ganz vermeiden konnte, von den absoluten, gebrochenen

1) Rafaello Bombelli, L'Algebra parte maggiore dell' Aritmetica, divisa in tre libri, nuovamente posta in luce. Bologna 1572. Es schließt sich an das wenig verstandene Werk Cardan's de regula Aliza über denselben Gegenstand an. Vgl. hierzu Hankel, Geschichte der Mathematik S. 372.

2) Vieta: De numerosa potestatum purarum adque adfectarum ad exegesin resolutione tractatus. Paris 1600, auch abgedruckt in seinen Opera omnia, herausgegeben von F. van Schooten. Lugduni Batavorum 1646.

und irrationalen Zahlen durch eine weite Kluft geschieden, wurden sie ihrem Wesen nach um so weniger verstanden, als man der Erforschung ihrer Beziehungen zu andern Zahlen sorgfältig aus dem Wege ging. Wo sie auch immer auftauchten, überall erscheinen sie bei den späteren Algebristen als unbequeme Formen, deren man sich nicht erwehren kann. Infolgedessen kehren sie auch nur vereinzelt in diesem oder jenem Lehrbuch wieder. So führte Harriot die negativen[1], der holländische Mathematiker Girard[2] die imaginären Lösungen wieder ein, beide von formalen Betrachtungen ausgehend. Denselben Standpunkt vertritt auch die 1637 erschienene Geometrie Descartes', welche zum ersten Mal durchgängig das Wort »imaginaire« anwendet; und sie ist es, welche definitiv den Anstoß gab zu einer stetigen rationellen Weiterbildung der bisher nur ungern geduldeten Begriffe. Denn gerade die Cartesische Mathematik in ihrer völligen Verbindung von Arithmetik und Geometrie durch eine allgemeine Größenanalysis, gerade sie musste bei ihrer schnellen und großartigen Entwicklung auch zu einer näheren Beschäftigung mit den ursprünglich unanschaulichen Zahlen drängen.

Und in der That; wie man sich durch die geometrische Richtungsanschauung immer mehr daran gewöhnte, im Negativen keinen Widerspruch mehr zu finden, so wurden auch die imaginären Zahlen allmählich als etwas unvermeidliches, selbstverständliches behandelt, das man hinnahm, ohne sich mit seiner Untersuchung länger als nöthig aufzuhalten. Hatte schon Descartes die negativen Lösungen einer Gleichung finden gelehrt, so gab nun Newton eine Anweisung zur Aufsuchung der complexen[3]. Mit demselben

1) Thomas Harriot, Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas. Londini 1631 (posthum).

2) Albert Girard, Invention nouvelle en l'Algèbre, tant pour la solution des équations, que pour recognoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieures choses, qui sont nécessaires à la perfection de ceste divine science. Amsterdam 1629.

3) In dem Werk: Arithmetica universalis, sive de compositione et resolutione arithmetica liber, das bekanntlich gegen Newton's eigenen Willen zuerst von Whiston herausgegeben wurde. Cambridge 1707. Weitere Auflagen von Ralphson, Cann, Wilder, Castillon u. s. w. London 1722, 1728, 1769 u. s. w.

Problem beschäftigten sich dann Maclaurin[1]), de Gua de Malves[2]) und viele andre, so dass die imaginären Zahlen als Lösungen von Gleichungen am Anfang des achtzehnten Jahrhunderts endlich allgemein anerkannt waren.

Noch aber waren sie auch nichts weiter, als fingirte Lösungen, die man surrogatweise verwandte, wenn es keine besseren gab, Concessionen an die formale Algebra, um die Allgemeingültigkeit solcher gern geglaubter Sätze — denn beweisen konnte man dies natürlich nicht — wie der, dass die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung ebenso groß sei wie ihr Grad, nicht in Frage zu stellen. Man glaubte schon viel erreicht zu haben, wenn man im Stande war, eine complexe Lösung thatsächlich aufzufinden. Das war aber auch alles; denn an eine Arithmetik des Imaginären dachte noch niemand.

Erst ganz allmählich begann man sich von jenem Standpunkt, auf dem die imaginären Zahlen lediglich als werthlose Lösungen von Gleichungen erschienen, zu emancipiren, sie als selbständige Begriffe zu behandeln, d. h. mit ihnen zu rechnen und die Entdeckung zu machen, dass ein solches Operiren nicht allein möglich sei, sondern auch zu vielen neuen und schönen Resultaten führen könne. In Euler's Händen wurde das Imaginäre dann sogar ein mächtiges Hülfsmittel der Analysis, nachdem dieser erst aus der Moivre-Cotes'schen Formel: $(\cos a + \sqrt{-1}\,\sin a)\,(\cos b + \sqrt{-1}\,\sin b) = \cos(a+b) + \sqrt{-1}\,\sin(a+b)$ die außerordentlich fruchtbare Gleichung: $\cos a + \sqrt{-1}\,\sin a = e^{\sqrt{-1}\,a}$ gezogen hatte. Er war es auch, der den zweiten wichtigen Fortschritt machte, indem er $\sqrt{-1}$ als eine neue selbständige dem 1 coordinirte Zahleneinheit auffasste, eine complexe Zahl $a + b\sqrt{-1}$ infolgedessen als eine solche aus zwei Einheiten betrachtete und sie zugleich in der Form darstellte: $\sqrt{a^2+b^2}\,e^{\sqrt{-1}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{b}{a}}$.

---

1) Letter concerning equations with impossible roots. Philosophical Transactions 1726 und 1729.

2) Jean Paul de Gua de Malves: Recherches du nombre des racines réelles ou imaginaires . . ., qui peuvent se trouver dans les équations de tous les degrès, publicirt 1741. Mém. Par.

Aber auch Euler, wiewohl er die imaginären Zahlen zu benutzen verstand wie keiner vor ihm, und wiewohl er die schönsten und folgenreichsten Entdeckungen aus ihnen zog, auch er vermeidet sorgfältig jede Untersuchung über die Berechtigung seiner Operationen und die wahre Natur derselben[1]). Und denselben Standpunkt nahm die ganze folgende große Entwicklung der Analysis ein. Man rechnete mit complexen Zahlen wie mit reellen, und konnte dies auch durchführen, da sie sich in der That den gewöhnlichen Rechnungsvorschriften fügten, man benutzte sie als ein sehr brauchbares Hülfsmittel bei Operationen aller Art; aber niemals hat man sich über die Zulässigkeit dieser Handlungsweise eine andere Rechenschaft abzulegen versucht als die, dass die erhaltenen Resultate richtig waren. Allmählich wie die negativen wurden thatsächlich auch die imaginären Zahlen recipirt, und man gewöhnte sich durch den vielfachen Gebrauch so an sie, dass man schließlich ihre begrifflichen Schwierigkeiten ganz vergaß und sie ungeachtet ihrer formalen Entstehungsweise als gleichwerthig mit den realen Größen betrachtete. Eine Untersuchung aber über ihren wahren Charakter vermied man ängstlich oder suchte, wo diese dennoch nöthig war, mit einigen allgemeinen Bemerkungen sich und andere schnell über die Widersprüche hinwegzutäuschen[2]).

Da indessen die Schwierigkeiten, welche im Imaginären lagen, doch zu bedeutende waren, als dass sie sich auf die Dauer mit Worten hätten beseitigen lassen, so musste man mindestens bestrebt sein, sie auf eine Weise zu heben, die an der Berechtigung dieses Begriffes, wenigstens in der Mathematik, keinen Zweifel mehr aufkommen ließ, wenn sie auch den Logiker nicht zufriedenstellen mochte. Alle Unklarheiten dieser Frage waren lediglich hervorgerufen durch die Unmöglichkeit, den complexen Zahlen diejenige Gleichstellung mit den übrigen Zahlformen mathematisch zuzuerkennen, die man ihnen praktisch schon längst stillschweigend eingeräumt hatte, d. h. sie auch in wirklichen Größenbeziehungen

1) Die allgemeinen Bemerkungen in der »Vollständigen Anleitung zur Algebra« § 151, wo er Gelegenheit hätte, sich hierüber näher auszusprechen, beziehen sich auf etwas anderes.

2) Vgl. z. B. die unten Kapitel III, 2) mitgetheilten »considérations générales« Cauchy's.

nachzuweisen. Wenn es daher gelang, eine solche anschauliche Bedeutung dennoch für sie aufzufinden, so mussten die bisherigen Bedenken als beseitigt gelten. Nun war ja aber schon das Negative, ursprünglich ebenso widerspruchsvoll, von Descartes durch die Interpretation als Richtung einer Geraden in die Anschauung eingeführt worden und hatte seitdem alles Wunderbare verloren. Der Versuch, das Complexe ebenfalls geometrisch zu deuten, brauchte daher von vorn herein nicht aussichtslos zu erscheinen.

In diesem Sinne hatte auch bereits Cardan die imaginären Zahlen als Seiten eines Quadrates dargestellt, das durch Subtraction eines größeren von einem kleineren entstanden wäre[1], sich hierunter aber wahrscheinlich ebensowenig denken können wie seine Schüler. Die Berufung auf eine negative Fläche wurde daher auch sehr bald wieder fallen gelassen; und sie kann auch in der That nur zu einer ganz oberflächlichen Begründung des Imaginären führen, wie sie später z. B. noch einmal Heinrich Kühn versucht hat[2]. Ihre Unhaltbarkeit wurde daher auch bald erkannt, z. B. von Foncenex[3], der statt dessen eine zweite, schon tiefere und bessere Veranschaulichung befürwortete. Eine solche hatte man nämlich in der Ueberlegung gefunden, dass $\sqrt{-1}$ als geometrische Proportionale zwischen den Strecken $+1$ und -1 aufgefasst werden könne und demgemäß als eine Strecke von derselben Länge, wie diese im Nullpunkt senkrecht zur reellen Zahlenachse aufgetragen werden müsse, während dem $-\sqrt{-1}$ die entgegengesetzte Richtung zuzuweisen sei. Diese Idee ist sogar verhältnissmäßig alt; denn schon Wallis hat sie vor 1693 ausgesprochen[4]. Dann haben ihr außer Foncenex, Buée[5] und schon früher, nämlich seit 1786 nach dem Zeugniss Cauchy's[6], Henri

1) Artis magnae liber XXXVII demonstratio (p. 287).

2) Heinrich Kühn: Meditationes de quantitatibus imaginariis, construendis et radicibus imaginariis exhibendis. Novi Commentarii Academiae Petropolitanae III. 1753 p. 170.

3) Foncenex: Réflexions sur les quantités imaginaires. Miscellana Taurinensia I. 1759 p. 122.

4) Wallis: Algebra, Capitel 66—69, der opera omnia von 1693 Band II.

5) Buée: Mémoire sur les quantités imaginaires. Philosophical Transactions for 1806 p. 23—88.

6) Nouveaux exercices d'analyse et de physique mathématique IV, p. 157.

Dominique Truel ihre Aufmerksamkeit geschenkt. Aber sie sind alle über die ersten Anfänge der Theorie nicht hinausgekommen.

Derjenige, dem das Verdienst gebührt, die Veranschaulichung des Imaginären zum ersten Mal im vollsten Umfange durchgeführt zu haben, ist Argand. Von derselben Auffassung der mittleren Proportionalität wie die bisher erwähnten Forscher ausgehend, gab er zuerst 1806 die bekannte Darstellung des complexen Zahlengebietes in der Ebene und entwickelte hieraus die Gesetze der vier Species[1]). Der Inhalt seiner Arbeit blieb aber vorläufig unbekannt und erreichte erst einige Verbreitung infolge eines Prioritätsstreites, welcher durch die Aufstellung derselben Theorie durch Français hervorgerufen war, und an welchem außer den genannten noch Lacroix, Servois und Gergonne theilnahmen. Da dieser Streit für uns nur von untergeordnetem Interesse ist, kann er hier übergangen werden[2]). Es genüge deshalb die Bemerkung, dass in den citirten Arbeiten, namentlich in denen Argand's, bereits die ganze Darstellung des Complexen in der Ebene enthalten ist, so dass Hankel ihn mit Recht den wahren Begründer derselben nennen kann[3]).

Aber auch dieser Streit wurde vergessen und die ganze Frage ruhte eine Zeit lang, bis sie durch die Arbeiten von Monrey[4])

1) Argand, Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. Paris 1806.

2) Eine kurzgefasste Uebersicht über denselben gibt Drobisch in seiner Abhandlung: Ueber die geometrische Construction der imaginären Größen. Berichte über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig aus dem Jahre 1848, II, p. 171. Leipzig 1849. Eine eingehendere Darstellung ist enthalten in der neuen Ausgabe: R. Argand, Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. 2me édition précédée d'une préface par M. J. Hoüel et suivie d'un appendice contenant des Extraits des Annales de Gergonne, rélatifs à la question des imaginaires. Paris 1874. — Die historische Vorrede von Hoüel ist auch abgedruckt im Bulletin des sciences mathématiques VII, p. 145—151, Paris 1874. — Die Originalartikel finden sich in Gergonne's Annales de Mathématiques pures et appliquées und zwar: Argand, Band IV, p. 133—147, V, 197—209. Français: IV, 61—71, 222—227, 364—366; Lacroix: IV, 367, Servois: IV, 228—235; Gergonne in vielen Anmerkungen, z. B. IV, 71—73, 228—229, 231—232, 367 etc.

3) Hankel: Complexe Zahlen p. 82. Vgl. auch hier weitere Literaturangaben.

4) C. V. Monrey: La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires. Paris 1828.

und Warren[1]) wieder in Fluss kam. Sie gehen beide ebenfalls noch von der Ansicht aus, dass $\sqrt{-1}$ als mittlere Proportionale zwischen $+1$ und -1 zu betrachten sei. Eine derartige Auffassung trägt aber immer nothgedrungen den Begriff der Richtung in Verhältnisse hinein, in die er gar nicht passt, nämlich in Proportionen[2]), und dieser Mangel kann selbst nicht durch die Vollkommenheit und innere Abgeschlossenheit der aus ihr gezogenen Resultate ersetzt werden. Deshalb musste sie auch bald der tieferen, noch heute in den Schulen gelehrten Begründung weichen, welche im wesentlichen schon ausgeht von der unmittelbaren Auffassung des complexen Zahlgebietes als einer zweifachen Mannigfaltigkeit. Die erste Ableitung dieser Art gab bekanntlich Gauß[3]), indem er die complexe Zahlenebene durch Parallelverschiebung der reellen Zahlenachse zu sich selbst erzeugte. Es ist jedoch außerdem noch eine andere einfache Bildungsweise möglich, nämlich durch Drehung der reellen Achse um den Nullpunkt, und dies ist die letzte der hier zu erwähnenden geometrischen Darstellungen. Sie wurde systematisch von Ballauff[4]), Scheffler[5]) und Drobisch[6]) entwickelt. —

Hiermit ist das, was über die Entwicklung der Lehre von den

1) John Warren, Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities. Cambridge 1828. Considerations of the objections raised against the geometrical representation of the square roots of negative quantities, Philosophical Transactions for 1829, p. 241 and: On the geometrical representations of the powers of quantities, whose indices involve the square roots of negative quantities, ebenda p. 339.

2) Durch Hereinziehung negativer Zahlen in Proportionen hat schon D'Alembert (im ersten Band der Opuscules mathématiques) ganz widersinnige Resultate erhalten.

3) In der bekannten Selbstanzeige der Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda, Göttingische gelehrte Anzeigen 1831, abgedruckt in den gesammelten Werken Band II, p. 169—178, Zweiter Abdruck, Göttingen 1876.

4) L. Ballauff, Beiträge zur systematischen Darstellung der allgemeinen Arithmetik, Grunert's Archiv für Mathematik und Physik V, 1844, p. 259—286, und Ueber die Potenzen mit imaginären Exponenten, ebenda VI, 1845, p. 409—414.

5) Scheffler, Ueber das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie, insbesondere über die geometrische Bedeutung der imaginären Zahlen. Braunschweig 1846.

6) In der auf p. 658 Anmerkung 2) citirten Abhandlung aus den Berichten der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften von 1848.

complexen Zahlen vom historischen Standpunkt aus gesagt werden kann, im wesentlichen erschöpft. Denn der Nachweis, dass alle diese Veranschaulichungen, welche den großen praktischen Nutzen hatten, die Aufnahme des Imaginären in das Gebiet der Größenlehre vollständig durchzusetzen, auf einer großen logischen Täuschung beruhen, gehört nicht in diesen, sondern in den genetischen Theil. Wir verlassen deshalb hier die Betrachtung des Imaginären und wenden uns zu der letzten Erweiterung, die der Zahlbegriff erfuhr, zu den allgemeinen complexen Zahlen.

Bestrebungen einer neuen Ausdehnung des Zahlbegriffes machten sich nach Ueberwindung der Hauptschwierigkeiten in der Theorie des Imaginären naturgemäß sehr bald geltend. Aber auch sie gingen anfänglich von der Anschauung aus, da es sich zunächst nur darum handelte, ein Zahlsystem für den Raum zu finden, wie das Complexe eines für die Ebene gewesen war. So glaubte schon Argand die dritte Einheit in $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ gefunden zu haben [1]), was Servois [2]) freilich mit dem Nachweis widerlegte, dass diese Größe, wie schon Euler gefunden, reell sei und gleich $e^{-\frac{\pi}{2}}$ gesetzt werden müsse. Dagegen kam in England Hamilton nach langwierigen Untersuchungen [3]), die er im Verein mit den Brüdern John und Charles Graves unternahm, schließlich zu der Aufstellung eines solchen Systems in den Quaternionen, welche allerdings eigentlich, da sie nur auf der Kugelfläche operiren, ein System für den sphärischen nichteuklidischen Raum bilden.

Indessen stand die geometrische Darstellung der Quaternionen ihrem Werthe nach doch weit höher, als die der gewöhnlichen complexen Zahlen in der Ebene. Denn diese war lediglich eine Veranschaulichung der Zahl gewesen, jene muss aber umgekehrt als eine Unterwerfung der Anschauung unter den Zahlbegriff betrachtet werden. Hier war die Ebene dasjenige Element der gegenseitigen Beziehung, dessen vollkommen bekannte Eigenschaften dazu

---

1) Gergonne's Annalen IV, p. 146.

2) Ebenda p. 235.

3) Vgl. die Preface zu den Lectures on Quaternions, Dublin 1853. Die Theorie der Quaternionen ist außerdem niedergelegt in den posthumen, von W. E. Hamilton herausgegebenen Elements of Quaternions. London 1866.

dienen sollten, den schwankenden Begriff des Imaginären zu festigen; dort aber waren alle Eigenthümlichkeiten der Quaternionen in sich schon genau untersucht, und die geometrische Bedeutung schien nur ein logisch nebensächliches Hülfsmittel der Methodik. Der große Fortschritt, den dieses so wie alle neueren allgemeinen Zahlsysteme gegenüber den früheren aufweisen, besteht eben darin, dass man zum ersten Mal versucht ihre Berechtigung allein aus ihrer widerspruchsfreien Definition nachzuweisen, nicht aber aus der Möglichkeit, sie zur Anschauung zu bringen. Deshalb beschränken sich diese generellen Speculationen auch bald nicht mehr auf den Raum, sondern gehen weit darüber hinaus und betrachten Zahlsysteme von beliebig vielen Einheiten.

Die nähere Ausführung dieser sehr mannigfaltigen und verschiedenartigen Bestrebungen gehört natürlich nicht in den Rahmen der vorliegenden Arbeit[1]); für unsern Zweck genügt es, als allgemeinen Charakter dieser Periode die völlige Lösung der Zahl von der Anschauung festgehalten zu haben, welche infolgedessen auch eine unanschauliche Methode der Bearbeitung erforderte. Eine solche abstracte Behandlung des Gegenstandes, welche sich eigentlich nur auf die jeweilige Definition des betreffenden Zahlsystems stützen durfte und dessen Eigenschaften hieraus zwar nicht analytisch zu entwickeln, aber doch in ihrer Zulässigkeit zu bestimmen gezwungen war, verlangte nun aber vor allen Dingen eine ausgebildete Theorie der algebraischen Grundverknüpfungen. Denn da die Zahlen schließlich doch nur als die Objecte der mit ihnen vorzunehmenden Rechenoperationen angesehen werden konnten, war eine Untersuchung der letzteren unumgänglich nothwendig.

In der That ist die allmähliche Bewältigung dieser scheinbar so einfachen Aufgabe in formaler Hinsicht eine der bedeutendsten Leistungen der neueren Mathematik. Freilich nehmen auch die diesbezüglichen Untersuchungen einen ziemlich langen Zeitraum ein. Ausgehend von Frankreich, wo sich Servois zuerst mit den Eigenschaften der Addition und Multiplication beschäftigte[2]), verpflanzten

1) Werthvolle Angaben darüber, wenigstens bis 1867, gibt Hankel in den historischen Theilen seiner Theorie der complexen Zahlen.

2) Von ihm rühren z. B. die Bezeichnungen distributiv und commutativ für die entsprechenden Eigenschaften der Addition und Multiplication her. Vgl. Gergonne's Annalen V, 1814—15, S. 93.

sich diese formalen Studien nach England. Hier wurde mehr oder weniger von allen Arithmetikern, insbesondere von Hamilton und George Peacock nebst dessen »Cambridger Schule« die »symbolische Algebra« bearbeitet und zu ziemlicher Vollendung gebracht. In Deutschland ruhte dagegen die Beschäftigung mit den formalen Eigenschaften lange. Man hielt sich hier lieber an die geometrische Interpretation und ging auch über die gewöhnlichen complexen Zahlen ungern hinaus, weil man sofort Gefahr gelaufen wäre, die Anschauung zu verlieren. Außer der bekannten weitschweifigen Darstellung Ohm's[1]) finden sich daher nur in wenigen Lehrbüchern, und auch hier nur vereinzelt Bestrebungen in dieser Richtung. Vor allen Dingen aber fehlt es überall an einem einheitlichen System, einem durchgreifenden Princip der Behandlung. Denn die berührten Darstellungen werden, ausgehend von der anschaulichen Bedeutung der actuellen Addition und Multiplication, in ihrer formalen Verallgemeinerung derselben schließlich immer von Nützlichkeitsgründen bestimmt. Eine einwurfsfreie, vollkommen systematische Behandlung des Stoffes gab erst Hankel in der schon mehrfach citirten Theorie der complexen Zahlsysteme[2]), und ihm gebührt auch das Verdienst, jenes große durchgreifende Princip der Verallgemeinerung, welches unbewusst eigentlich auch schon allen früheren Arbeiten zu Grunde gelegen hatte, in dem »Princip der Permanenz formaler Gesetze«[3]) gefunden zu haben, eine Form, in der es sich jetzt überall eingebürgert hat.

Diese äußerst allgemeine und einzig systematische Auffassung wurde nun aber erst möglich gemacht durch abstracte Betrachtungen noch allgemeinerer Art, deren Besprechung uns bereits zum nächsten Abschnitt überleitet.

---

1) Ohm: Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik. Berlin 1822, 2. Auflage 1829.

2) Der vollständige Titel dieses angezeichneten Werkes, das wir überall kurz als: Hankel, Complexe Zahlen citiren, lautet: Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen, I. Theil: Theorie der complexen Zahlsysteme, insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung von Dr. Hermann Hankel. Leipzig 1867.

3) a. a. O. p. 10.

3. Die Subsumtion des Begriffs der Zahl unter den der Mannigfaltigkeit.

Bei der Untersuchung der formalen arithmetischen Gesetze war man schon aufmerksam geworden auf gewisse Eigenschaften derselben, welche sich in der entsprechenden Form immer wiederholten. So stellten sich Addition und Multiplication sowohl als associativ wie als commutativ heraus; und diese Eigenschaften hatten sich zwar ursprünglich unmittelbar aus der Anschauung ergeben, nahmen aber später bei den nicht mehr anschaulichen Zahlformen mehr und mehr den Charakter von Postulaten an und gewannen ein abstractes Aussehen, welches eine Ableitung derselben aus dem Wesen der Operationen heraus, wie sie bisher gefasst waren, unmöglich machen musste. Solche Beziehungen wiesen denn darauf hin, dass es über diesen Operationen noch eine allgemeine Formenlehre, eine Discussion beliebiger formaler Verknüpfungen geben könne, deren eventuelle Eigenschaften, so weit sie einer Bestimmung zugängig waren, auf die vier Species ein ähnliches Licht werfen würden, wie die moderne Raumtheorie auf die euklidische Geometrie.

Der Gedanke einer solchen allgemeinen Formenlehre ist aber begreiflicherweise noch ziemlich neu. Wenn man die Idee dazu nicht schon in Leibnizens universeller Charakteristik sehen will[1], so muss man gleich in die Mitte des letzten Jahrhunderts gehen, um ihre Anfänge zu verfolgen. Dieselben sind, wie alle mathematischen Speculationen formaler Natur, in Englandzu suchen, wo sie einerseits zu der ziemlich abgeschlossenen mathematischen Logik führten, andererseits aber eine ganz abstracte, lediglich mit dem Begriff des Verknüpfungselementes operirende Formenlehre in's Leben riefen[2]. Allein, so große Verdienste um die Ausbildung der letztern die Engländer, namentlich Peacock und seine Schule, sich erworben haben, zu einem befriedigenden Abschluss haben sie nicht gelangen können. Denn selbst bei Hamilton, der die Algebra betrachtet: »as being no mere Art or Language, nor primarly

1) Vgl. Trendelenburg, Leibnizen's Entwicklung einer allgemeinen Charakteristik, Denkschriften der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Philosophische Abhandlung p. 53. Berlin 1856. Die Arbeit ist auch abgedruckt in Trendelenburg's historischen Beiträgen III, p. 1 ff.

2) Sehr werthvolle Angaben über diese Arbeiten gibt die Preface zu den Lectures on Quaternions von Hamilton, Dublin 1853.

a Science of Quantity, but rather as the Science of Order in Progression«, d. h. als »Science of Pure Time«, kann von einem solchen noch nicht die Rede sein[1]).

Einigermaßen vollständig und umfassend wurde diese wichtige Theorie erst in Deutschland behandelt, wo zunächst Grassmann eine allerdings gänzlich unbeachtete Uebersicht über dieselbe gab[2]). Gestützt auf ihn fügte aber dann Hankel seiner Theorie der complexen Zahlen eine erschöpfende Darstellung des Gegenstandes hinzu[3]), und in dieser Bearbeitung ist die ganze, natürlich sehr inhaltsarme Theorie, so weit sie sich bisher als nothwendig erwies, so vollständig enthalten, dass spätere Bearbeitungen ihr wenig oder gar nichts haben hinzufügen können. Sie ist deshalb auch im wesentlichen unverändert in die Lehrbücher übergegangen[4]). Die allgemeine Formenlehre, wenn auch naturgemäß niemals vollständig erschöpft, darf daher für die Bedürfnisse der Gegenwart als abgeschlossen gelten.

Im Gegensatz dazu ist die zweite große Oberdisciplin der Mathematik, die Mannigfaltigkeitslehre, noch im Werden. Der Gedanke, den Zahlbegriff in dieser Hinsicht unter einem allgemeineren Gesichtspunkt zu betrachten, findet sich überhaupt zum ersten Mal

1) Die citirte Stelle steht in dem Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time, welcher vorausgeschickt ist der Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples — Transactions of the Royal Irish Academy, XVII, Part II (Dublin 1835), p. 293—422. Dieselbe Betrachtung wird in der Preface zu den Lectures on Quaternions fortgesetzt.

2) In seinem Werk: Die Ausdehnungslehre von 1844 oder die lineale Ausdehnungslehre. (Zweite, unveränderte Auflage. Leipzig 1878, p. 1—9.) Wir werden dies Werk, wo es vorkommen sollte, zur Unterscheidung von der Ausdehnungslehre von 1862, kurz citiren als: Ausdehnungslehre von 1844.

3) Complexe Zahlen S. 18—29.

4) Die Anzahl derselben ist allerdings nicht groß. Zu denen, welche dem Verfasser bekannt geworden sind, gehören z. B. Schröder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Leipzig 1873. Otto Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. I. Theil. Leipzig 1885, p. 25—42 und Giuseppe Peano: Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann. Torino 1888. Hier ist der Darstellung des eigentlichen Gegenstandes ein allerdings mehr logisch gehaltener Abschnitt vorausgeschickt über die Operazioni della logica deduttiva, p. 1—20. Von demselben Autor ist jüngst erschienen: Arithmetices principia nova methodo exposita a Joseph Peano Augustae Taurinorum 1889. Diese Schrift ist gleichfalls auf die allgemeine Formenlehre begründet.

bei Gauß[1]). Dann kommen vielfach vereinzelte Bemerkungen desselben Charakters sowohl bei ihm wie bei mehreren zeitgenössischen Schriftstellern vor; indessen ist eine wirklich wissenschaftliche Bearbeitung des Gegenstandes erst Riemann zuzusprechen, welcher in seiner Habilitationsschrift[2]) denselben allerdings mehr mit Rücksicht auf seine Bedeutung für die Geometrie untersuchte. Vorzugsweise das geometrische Interesse bestimmte dann auch die vielen, von Riemann angeregten Einzeluntersuchungen, wie sie z. B. bei Helmholtz sich finden[3]), sowie die ganz selbständigen und unabhängigen Forschungen Grassmann's[4]); und am ausgedehntesten ist gegenwärtig die geometrische Seite der Frage behandelt von Killing[5]).

So lange aber diese Theorie nur in Hinsicht auf ihre geometrische Anwendung studirt wurde, konnte ihre Bedeutung naturgemäß auch nur eine partielle bleiben. Da sie indessen gleich von Anfang an mit dem Anspruch auftrat, nicht allein der Geometrie, sondern der gesammten Größenlehre übergeordnet zu sein, so musste sie nothwendig von jener losgelöst und um ihrer selbst willen der Behandlung unterworfen werden. Nun wird es allerdings auch unserer modernen Abstraction, ob sie gleich vor den weitgehendsten Speculationen nicht mehr zurückschreckt, auf die Dauer doch allzuschwer, lediglich mit Begriffen und Verhältnissen ohne jeden realen Inhalt oder mit leeren schematischen Beziehungen zu operiren, ohne diesen irgend ein Substrat unterzulegen; und deshalb ist die Weiterentwicklung der Mannigfaltigkeitslehre auch stets an Größen- oder Zahlverhältnisse angelehnt geblieben. Aber diese Anpassung blieb immer nur eine rein äußerliche Beziehung, eine Concession, die man der Bequemlichkeit des Denkens machte, ohne doch die

1) In der schon citirten Anzeige, Werke II, p. 176.

2) Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Göttingen 1854, abgedruckt in den Gesammelten Werken Riemann's, Leipzig 1870, p. 254.

3) »Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie«. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen II, Leipzig 1883, p. 609, und »Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen«, ebenda p. 618.

4) In den beiden Ausdehnungslehren von 1844 und 1862.

5) W. Killing: Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig 1885.

Allgemeinheit der Betrachtung dabei aufzugeben. Denn es ist in jedem Augenblick gestattet, von den greifbaren geometrischen oder arithmetischen Verhältnissen ohne Schwierigkeit wieder zu den universelleren Mannigfaltigkeitsbegriffen überzugehen. Die Unselbständigkeit der späteren Theorie ist also nur eine scheinbare, und wir können in ihr thatsächlich die wahre, vom Entwicklungsgang der Mathematik geforderte allgemeine Mannigfaltigkeitslehre sehen.

Die Ausbildung dieser Disciplin ist fast ausschließlich das Verdienst eines einzigen Mannes. Denn wenn man auch schon bei Grassmann bedeutende Fortschritte in der Allgemeinheit erblicken kann, so ist eine wirklich eingehende und erfolgreiche Bearbeitung der Theorie doch erst G. Cantor gelungen; und alles, was von andern in dieser Richtung geleistet ist, bezieht sich ausschließlich auf seine Darlegungen[1]). Auf die positiven Resultate seiner Untersuchungen einzugehen, ist hier nicht der Ort, wir müssen in dieser Beziehung auf die Originalarbeiten verweisen[2]). Denn für unsern Zweck kommt es weniger auf den Grad der Ausbildung an, welche diese Theorie bereits erlangt hat, als vielmehr auf den allgemeinen

1) Hierhin sind z. B. zu rechnen die Aufsätze von Bendixson, Acta mathematica II, p. 415—429, Mittag-Leffler, ebenda, IV, p. 1—79; Phragmén, ebenda, V, p. 47—48 und VII, 43—48; Scheeffer, ebenda, V, p. 183 bis 194 und 279—296. Von Cantor beeinflusst sind auch die functionentheoretischen Untersuchungen von P. Du Bois-Reymond in Kronecker-Weierstass' Journal für die reine und angewandte Mathematik: Band 79, S. 21—37, 38—66, 259—262 und Band 100, S. 331—358, sowie sein Werk: Die allgemeine Functionentheorie, erster Theil, Tübingen 1882.

2) Diese sind allerdings sehr zerstreut. Die hauptsächlichsten derselben, soweit sie dem Verfasser bekannt geworden sind, finden sich an folgenden Stellen: Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik. Band 72, S. 130—138 und 139—142, Band 73, S. 294—296, Band 77, S. 258—262, Band 84, S. 242—258, ferner: Mathematische Annalen IV, S. 139—143, V, S. 123—132, 133—134, XV, 1—7, XVI, 113—114, 267—269, XVII, 355—358, XIX, 588—594, XX, 113—121, XXI, 51—58, 545—591 (die letztere ist die wichtigste und alles zusammenfassende Arbeit der ganzen Reihe), endlich XXIII, S. 453—488. Die bisher citirten Arbeiten sind auch übersichtlich zusammengestellt und in's Französische übertragen: Acta mathematica II, p. 305—408. Dieselbe Zeitschrift enthält ferner noch die neuen Aufsätze: II, S. 409—414, IV, 381—392, VII, 105—124. Andre Arbeiten stehen in der Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, Band 91, S. 81 und 252. Eine klare summarische Darstellung der Cantor'schen Theorie hat Kerry gegeben: Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie IX, S. 191.

Gedanken, welcher ihr zu Grunde liegt, d. h. auf ihren Anspruch, die oberste Disciplin der gesammten Mathematik zu sein, ein Anspruch, der in der That berechtigt ist. Da nämlich eine jede mathematische Untersuchung sich mit der Verknüpfung irgend welcher Elemente beschäftigt, so muss selbstverständlich sowohl eine allgemeine Theorie der möglichen Verknüpfungen wie eine solche der Elemente, als der Beziehungssubstrate für die Operationen, an ihre Spitze gestellt werden. Jene liefert aber die Formen-, diese die Mannigfaltigkeitslehre; und beide sind offenbar von vornherein so bestimmt, dass sie alle specielleren Begriffe der Mathematik umfassen. Dann muss es aber jedenfalls auch möglich sein, diese specielleren Begriffe lediglich durch Determination aus den allgemeinen wieder abzuleiten. Es wird demnach noch eine zweite, und zwar die wissenschaftliche Erzeugungsweise der Zahlen geben, welche sie allein durch eine derartige successive Determination aus dem obersten Gattungsbegriff, dem der Mannigfaltigkeit gewinnen lehrt. Während der bisherige historische Entwicklungsgang mit Hülfe von Abstractionen, Inductionen, Analogieschlüssen u. s. w. vom Concreten zum Abstracten, vom Besondern zum Allgemeinen vorschritt, wird diese systematische Darstellung, auf die allgemeinen logischen Principien der Classificirung sich stützend, ungefähr denselben Weg, nur umgekehrt zurücklegen und so der historischen die logische Entwicklung gegenüberstellen.

Da die letztere natürlich in wissenschaftlicher Beziehung viel höher steht, als die erstere, darf sie in unsrer Untersuchung nicht fehlen. Andererseits aber könnte man die Frage aufwerfen, ob die historisch gegebene Ausbildung des Zahlbegriffes denn weit genug gediehen sei, um einen Begriff liefern zu können, welcher wirklich alle bisher bekannten Zahlformen umfasse. Diese Frage muss man jedoch bei dem heutigen Stande der Wissenschaft wohl bejahen. Denn einerseits ist in der völlig voraussetzungslosen Mannigfaltigkeit ein Begriff gewonnen, der einem andern mathematischen kaum noch wird subsumirt werden können, andererseits aber lassen sich auch alle Zahlenverknüpfungen als Specialisirungen der allgemeinen Formenlehre betrachten. Wenn es daher gleich an streng durchgreifenden Determinationsprincipien und Eintheilungsgründen im einzelnen noch fehlen mag, in großen Umrissen ist eine logische

Entwicklung des Zahlbegriffs heutzutage schon ausführbar. Die Darstellung derselben muss aber erst dem dritten Theil dieser Arbeit vorbehalten bleiben, da es vorher unbedingt nothwendig ist, sich über die erkenntnisstheoretisch-logische Natur der hierher gehörigen Begriffe und Operationen klar zu werden, wenn man nicht den logischen Zusammenhang mit der Gesammtentwicklung der Wissenschaft verlieren will. Wir wenden uns deshalb jetzt zu unsrer eigentlichen Aufgabe, zu der genetischen Entwicklung des Zahlbegriffs [1]), um auf diese dann in großen Umrissen die logische folgen zu lassen.

Zweites Kapitel.

Die psychologischen Formen des Zahlbegriffs.

1. Ueber die Nothwendigkeit einer psychologischen Grundlage für die genetische Untersuchung.

Wir hatten uns im vorhergehenden Theile bemüht, in großen Zügen ein Bild der historischen Entwicklung des Zahlbegriffs zu entwerfen, indem wir allein den Fortschritten der mathematischen Bearbeitung folgten. Logische Fragen waren dabei immer nur insoweit berücksichtigt, als sie für die Förderung der Arithmetik wirklich von Bedeutung waren. Diese Bedeutung ist in den meisten Fällen mehr eine negative gewesen, insofern die begrifflichen Untersuchungen die eigentlich arithmetischen Entwicklungen höchstens hemmen konnten, wie sie ja z. B. gegen die formal so brauchbaren negativen und imaginären Zahlen immer neue Bedenken auffinden ließen. Allerdings ist der Fortschritt in der formalen Behandlung hierdurch auf die Dauer doch niemals aufgehalten oder rückgängig gemacht worden; und die Beseitigung der begrifflichen Schwierigkeiten ist ja im Grunde genommen für die Mathematik auch entbehrlich. Denn diese Wissenschaft operirt stets mit Begriffen, welche sie auf irgend eine Weise gewinnt und als fertig annimmt, ohne im weiteren Verlauf der Bearbeitung auf ihren Ursprung Rücksicht zu nehmen. Alle schädlichen Gegensätze müssen sich dann früher oder später durch Widersprüche in den Resultaten

1) Derselben werden die drei folgenden Kapitel gewidmet sein.

auffinden und entfernen lassen. Die Mathematik klärt ihre Begriffe hauptsächlich durch einen solchen Eliminationsprocess; und die Deduction behält immer dieselbe Strenge, wie erkenntnisstheoretisch werthlos bisweilen auch die Resultate sein mögen.

Der Grund für diesen Vorzug vor den übrigen Wissenschaften ist in dem Umstand zu suchen, dass die mathematische Betrachtungsweise überall nur die formalen Bestimmungen der Begriffe in's Auge fasst. Diese sind aber in der Regel völlig eindeutig und widerspruchsfrei definirt, während allein der reale Inhalt unsicher und problematisch erscheinen kann.

Dagegen sind die Grundlagen und Voraussetzungen der Mathematik seit jeher Gegenstand des heftigsten Streites gewesen und bis auf den heutigen Tag geblieben. Von Anfang an stehen sich hier zwei diametral entgegengesetzte Grundanschauungen schroff gegenüber. Die eine sieht in den mathematischen Begriffen einen ursprünglichen Besitzstand des menschlichen Geistes, der durch die ihm eigene logische Evidenz seine selbständige Realität beweise, die andre hingegen leugnet jene Realität und fasst alles, was an der Mathematik exact ist, als erfunden auf, da es in Wirklichkeit überhaupt nichts exactes gebe. Die Constanz aller formalen Beziehungen gilt der ersten Ansicht infolgedessen als ein ursprüngliches, untrennbar mit ihnen verbundenes Attribut, der zweiten als eine logisch nicht nothwendige, der Bequemlichkeit wegen hinzugefügte Bestimmung der subjectiven Willkür. Die erste Ansicht ist wesentlich apriorischer Natur, die zweite stützt sich in der Regel auf empirische Voraussetzungen. Die erste endlich hält die Mathematik für ein von allen andern Wissenschaften unabhängiges Forschungsgebiet, während die zweite sie im Grunde genommen nur zu einem Hülfsmittel der äußeren Erfahrung machen möchte.

Beide Grundrichtungen, für welche wir die von Wundt zuerst eingeführte Bezeichnung des mathematischen Realismus und Nominalismus beibehalten[1]), haben sich des Zahlbegriffs als eines sehr

1) Philosophische Studien I, S. 105 und Wundt, Logik II. (Stuttgart 1883) S. 85. In der That sind diese Bezeichnungen wohl passender als die von Du Bois-Reymond in seiner Allgemeinen Functionentheorie (Tübingen 1882) zu demselben Zweck eingeführten Wörter: Idealismus und Empirismus, welche wir deshalb auch da vermeiden, wo wir auf das citirte Werk zurückkommen

dankbaren Objectes der Speculation schon sehr früh bemächtigt, ihn nach den verschiedensten Seiten bearbeitet und zu den mannigfachsten Theorien benutzt, ohne es doch zur völligen Klarheit zu bringen. Der Grund dafür ist ein doppelter. Einmal nämlich treten sie eigentlich niemals ganz rein auf, sondern sind überall mehr oder weniger mit einander vermischt, und zweitens hat es keine von ihnen vermocht, die Frage vollständig vorurtheilsfrei zu behandeln. Denn fast alle diesbezüglichen, systematisch ausgebildeten Bearbeitungen — und solche können wir hier natürlich nur in's Auge fassen — sind basirt auf die alten dogmatischen Grundannahmen der vorkritischen Philosophie; alle führen sie daher früher oder später einmal auf logische Widersprüche. Der Nachweis, dass diese Behandlungsart unzulässig sei, ist ja das große Verdienst Kant's. Aber die neue Grundlage, auf welche er dann sein System aufbaute, die Transcendentalphilosophie, leistet ebenfalls nicht, was sie versprach. Denn auch sie leitet die transcendentalen Grundformen nicht eigentlich aus bekannten Bewusstseinserscheinungen ab, sondern stellt sie sogleich als fertig gegeben hin und construirt so schließlich in leeren Schemen, die dem wirklichen Zahlbegriff keineswegs mehr adäquat sind. Dieser Misserfolg lehrt daher, dass es durchaus unerlässlich ist, wenn man nicht unwahre Formen den gesunden Realbegriffen substituiren will, auf den wirklichen Ursprung der Begriffe zurückzugehen und sie bis in ihre ersten Wurzeln zu verfolgen. Diese Aufgabe vermag aber allein die psychologische Behandlung zu lösen.

Wenn daher in der Philosophie sich heutzutage mehr und mehr das Bestreben geltend macht, die transcendentalen Grundlagen der Erkenntnisstheorie durch psychologische zu ersetzen, so ist in unserm Fall ein Zurückgehen auf die letzten psychologischen Momente des Zahlbegriffs doppelt nothwendig. Denn erstens könnte man ohne das nie auf einen wirklich vorurtheilsfreien Standpunkt gelangen,

---

sollten. — Das Wort Realismus ist hier natürlich auch in einem ganz andern Sinne gebraucht als bei Cantor (in den Mathematischen Annalen XXI, S. 561 und 588), der es nur als eine Bezeichnung für die gewöhnlich als Positivismus benannte Richtung angewendet hat. (Letztere hat sogar rein nominalistische Anschauungen herausgebildet.) Dagegen hat Cantor mit seiner Unterscheidung von intrasubjectiver oder immanenter und transsubjectiver oder transienter Realität (an derselben Stelle) offenbar etwas ähnliches im Sinne.

und zweitens vermag man im Besitz solcher fester Grundlagen leicht zu erkennen, wie in der That weitaus die meisten Fehler in den früheren Auffassungen zurückzuführen sind auf eine Vernachlässigung oder Verkennung eben dieser psychologischen Elemente der Begriffsbildung. Andererseits aber wird die Befürchtung, dass man durch Fixirung eines von vorn herein fest bestimmten Standpunktes, von dem aus alle einschlägigen Ansichten beurtheilt werden sollen, wieder in die Einseitigkeit der alten dogmatischen Auffassung zurückverfallen könne, in unserm Fall gegenstandslos. Denn jene alte Behandlungsweise geht ja allerdings auch aus von Evidenzen, und zwar solchen logischer Natur, und ihr Fehler besteht im wesentlichen darin, dass sie diese durch eine mehr oder weniger versteckte ontologische Speculation in objective Realitäten umsetzt; die psychologische Betrachtung hingegen appellirt nur an solche Beziehungen, welche zugleich evident und unmittelbar real sind, nämlich an die Thatsachen des Bewusstseins.

Wir werden daher das vorliegende Kapitel der psychologischen Behandlung der Frage widmen, um im dritten die erkenntnisstheoretische Untersuchung folgen zu lassen, welche dann die positiven Restbestandtheile für die im vierten zu behandelnden Zahlformen liefern wird.

2. Die Zahl der Raumanschauung.

Wie weit auch die Anschauungen über das Wesen der Zahl auseinander gegangen sein mögen, es dürfte heutzutage wohl wenig Mathematiker oder Philosophen geben, welche sie nicht aus der Wahrnehmung gleichartiger, räumlich getrennter Gegenstände hervorgehen ließen. Freilich wird diese erste, primitive Form vielfach übersehen und direct mit der, weiter unten zu besprechenden Zahl der Zeitanschauung zusammengeworfen; dennoch stellt sie aber ein durchaus heterogenes und selbständiges Stadium in der genetischen Entwicklung dar. Allerdings ist die Zahl auf dieser Stufe noch kein Begriff. Dazu fehlt ihr vor allen Dingen die erforderliche Constanz der Bestimmungen. Sie ist vielmehr nichts weiter als ein gewisses Schema der Wahrnehmung, eine Art Anschauungsform im kantischen Sinne. Denn sie haftet noch völlig an den Gegenständen der Wahrnehmung, d. h. man zählt auf dieser Stufe der Ausbildung nicht drei, vier oder fünf, sondern etwa drei Häuser, vier Pferde u. s. w. Deshalb erfordert sie auch noch keinerlei Abstraction, sondern besteht lediglich, wie Du Bois-Reymond es ausdrückt: in der »Vorstellung von dem Getrenntsein der Wahrnehmungsgegenstände«[1]. Sie deckt sich also nahezu mit der Raumanschauung, da der Raum gerade durch die einzelnen Gegenstände bestimmt erscheint, die in der Zahlvorstellung zusammengefasst werden.

Die Fähigkeit, solche Vorstellungen zu vollziehen, muss man daher wohl den meisten höheren Organismen zugestehen — vielleicht wäre die Vermuthung nicht ganz grundlos, dass sie an das Sehvermögen gebunden ist — denn auch Thiere setzen sich, wie Du Bois-Reymond hervorhebt[2], gegen mehrere Feinde anders zur Wehr als gegen einen Hund, »auch die Ente zählt«[3], wie Hankel betont, »ihre Jungen«[4].

Der Umfang der so gewonnenen Zahlen kann allerdings nur ein sehr geringer sein. Denn da die Zahl hier nur als Bestimmung gilt für den Raum der jeweiligen Wahrnehmung, der Mensch aber im allgemeinen nur eine relativ geringe Anzahl in der Vorstellung festhalten kann[5], so können als ungleich auch nur die Zahlen bis etwa zur sechs zum Bewusstsein kommen, ein Umfang, der für die praktischen Bedürfnisse natürlich nicht lange ausreichte. Eine Erweiterung des Zahlgebietes auf dem Wege der bisherigen Entstehungsart ist aber durch die Beschränkung des Vorstellungsvermögens ganz unmöglich gemacht. Will man also dennoch zur Bildung neuer Zahlen fortschreiten, so muss man nothwendig auf eine unmittelbare Vorstellbarkeit derselben verzichten.

---

1) Allgemeine Functionentheorie S. 16.

2) Ebenda S. 19.

3) An ein eigentliches bewusstes Zählen ist dabei natürlich nicht zu denken.

4) Hankel: Geschichte der Mathematik S. 7.

5) Du Bois-Reymond (Allgemeine Functionentheorie S. 18) schätzt sie auf fünf bis sieben. In der That dürfte es auch schon ziemlich schwierig sein, auf einen Blick, d. h. ohne wirkliches Zählen, sechs Bäume von sieben zu unterscheiden oder etwa ein Siebeneck in der Vorstellung festzuhalten, obschon man es wohl durch Uebung viel weiter bringen kann. Man denke etwa an die sogenannten Blindlingspartien der bedeutenderen Schachmeister.

3. Die Zahl der Zeitanschauung oder Anzahl.

Mit diesem Schritte beginnt aber bereits die Abstraction und damit die Bildung des eigentlichen Zahlbegriffs. Will man größere Mengen abzählen, als man mit einem Blick überschlagen kann, so ist dies nur möglich durch eine successive Zusammenfügung von Einheiten. Hier kommt also als neues Moment die Zeit hinzu, weil die Einheit offenbar die genetische Grundlage für diesen Zahlbegriff abgeben muss. Was ist nun aber die Einheit?

Die Antworten auf diese Frage sind sehr verschieden ausgefallen. Euklid definirt z. B.: *μονάς ἐστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται*[1]), Locke fasst sie als die allgemeinste Idee, Hume als einen physikalischen Punkt, Berkeley leugnet ihre Existenz überhaupt u. s. w.

Thatsache ist jedenfalls, dass wir im Stande sind, alles überhaupt Denkbare auch als Einheit zu denken; das liegt ja bereits, wie man immer das *κατά* interpretiren möge, in der euklidischen Definition. Schon dieser Umstand weist darauf hin, dass die Einheit und Zahl keine objective Eigenschaft der Dinge sein kann, wie das noch vielfach heutzutage, namentlich vom Positivismus und verwandten Richtungen, gelehrt wird. Der Begriff der Einheit muss deshalb nothwendig in unserm Bewusstsein seine Wurzel haben. Denn wenn wir nicht unserm Denken die Fähigkeit zuschreiben, irgend etwas als Einheit aufzufassen, bleibt schlechthin unerklärlich, wie wir überhaupt diesen Begriff bilden konnten. Demnach ist die Einheit also jedenfalls eine Form der Apperception, ja, wie wir sogleich hinzufügen können, auch nichts weiter als das; wir müssen ihr überhaupt jedes objective Merkmal absprechen. Denn wenn wir irgend einen Gegenstand als Einheit auffassen, kommt es uns auf diesen Gegenstand selbst ganz und gar nicht an, sondern einzig und allein auf den Willensact, vermöge dessen wir ihn im Bewusstsein festhalten. Es liegen im empirisch gegebenen Ding wohl Momente, die uns öfter veranlassen, es als einheitlich zu betrachten, diese sind aber durchaus nicht zwingend. Man kann z. B. einen

1) Elemente VII, 1.

Menschen ebensowohl als Glied der Gesellschaft, wie als selbständiges Wesen, als Inbegriff seiner Gliedmaßen, wie als Zellenstaat, d. h. als Bruchtheil, Einheit, endliche oder empirisch-unendliche Summe auffassen, und nichts zwingt uns, eine von diesen Betrachtungsweisen im allgemeinen vor den andern zu bevorzugen.

Der Begriff der Einheit ist also jedenfalls völlig subjectiv und entsteht offenbar, indem man bei irgend einem Apperceptionsacte von dem Inhalt des Appercipirten ganz abstrahirt. Denn würden die objectiven Merkmale nicht vollständig eliminirt, so müsste es ja, da man diesen Begriff doch aus jedem beliebigen Denkinhalt abstrahiren kann, unendlich viel verschiedene Formen der Einheit geben, während diese doch unleugbar ein absolut bestimmter, mathematisch-constanter Begriff ist.

Die obige Definition der Einheit als des vom Inhalt des Appercipirten vollständig abstrahirenden Apperceptionsactes involvirt nun bereits eine psychologische Unmöglichkeit und ist völlig logischen Charakters. Denn die hierbei in Anwendung kommende Abstraction ist schon eine solche, welche Wundt als mathematische bezeichnet hat [1]). Indem man nämlich »von allen denjenigen Elementen der Vorstellung« abstrahirt, »welche im Object ihre Quelle haben«, bleibt als einziger Rest die subjective Denkthätigkeit, in unserm Fall also der Apperceptionsact selbst zurück. Ein Ding wird daher, wie man es auch auszudrücken pflegt, als Einheit betrachtet, indem man es setzt. Denn in dem Begriff des Setzens liegt eben, dass man dabei nur den einzelnen subjectiven Denkact, d. h. nur diejenige Thätigkeit in's Auge fasst, vermöge deren man das Gesetzte ins Bewusstsein ruft, ohne doch auf dessen reale Natur irgendwie Werth zu legen.

Nun aber der einzelne Denkact als solcher Träger der Einheit geworden ist, kann es keine Schwierigkeiten mehr machen, durch Zusammenfassung beliebig vieler Einheiten auch zu beliebig hohen Zahlen fortzuschreiten. Und da bei diesem Process ein Ding ein-, zwei-, dreimal u. s. w. gesetzt wird, so ist die Bezeichnung solcher Zahlen als positiver unmittelbar gegeben. Ihre Reihe ist natürlich unbegrenzt, da man durch wiederholte Hinzufügung neuer Denkacte immer höhere Zahlen bilden kann.

1) Wundt, Logik II, S. 108.

Wenn nun aber auch dieser Process in Wahrheit nur in sehr geringem Maße zur Erzeugung der Zahlreihe benutzt wird, so liegt doch auf der Hand, dass die höheren Zahlen nur deswegen geduldet sind, weil sie auf demselben Wege gebildet werden könnten. Das muss aber immer als ausführbar vorausgesetzt werden; denn die Schranke, welche die Unmöglichkeit der Vorstellung der Weiterbildung jener oben betrachteten primitiven Zahlen entgegenstellte, ist nun gefallen, da der beliebigen Wiederholung des einzelnen Denkactes eine obere Grenze nicht gesteckt erscheint. Hierdurch hat aber natürlich der neue Zahlbegriff ein von der früheren Zahlvorstellung wesentlich verschiedenes Aussehen erhalten. Dort erschien die Zahl lediglich als die Vorstellung einer Modification der Außenwelt, hier als der Ausdruck einer subjectiven Gedankenthätigkeit; dort ist sie das Erzeugniss eines mehr analytischen, hier das Resultat eines rein synthetischen Denkprocesses; dort konnten nur mehrere, als verschieden aufgefasste Gegenstände gezählt werden, hier stellt sich die Zählung als mehrmalige Setzung eines und desselben Objectes dar — Object derselben aber kann werden, was immer in einheitlicher Apperception zu umspannen ist —; dort verdankte sie ihre Entstehung der gleichzeitigen Wahrnehmung räumlich getrennter Gegenstände, hier beruht sie, ohne überhaupt eine räumliche Anordnung in Betracht zu ziehen, in der zeitlichen Wiederholung desselben Denkactes. Mit andern Worten, die Zahl ist aus dem Gebiet der Wahrnehmung oder Vorstellung in das des Denkens, aus der äußeren in die innere Anschauung, aus dem Raum in die Zeit verpflanzt worden; sie stützt sich, als der »abstracte Ausdruck der discursiven Gesetzmäßigkeit des Denkens« [1], ganz auf die Zeit.

Diese Grundlage ist aber nur eine psychologische, nicht, wie viele gemeint haben, eine logische [2]. Denn weder ist die zeitliche Folge der Denkacte für ihre wissenschaftliche Bedeutung maßgebend, noch ist die Zahl in diesem Stadium überhaupt Gegenstand der logischen Untersuchung. Sie gehört eben nicht dem Inhalt, sondern

1) Wundt, Logik I, S. 469.

2) Wir anticipiren hier Bemerkungen, welche eigentlich erst in das nächste Kapitel gehören, wohl ohne bei der Geläufigkeit der hier betrachteten Begriffe eine Verwirrung der Entwicklung befürchten zu müssen.

dem Mechanismus des Denkens, nicht der Logik, sondern der Psychologie an. Denn da sie allein zur praktischen Zählung der Objecte dient, ist sie auch nur gewissermaßen eine Form, ein Hülfsmittel der Apperception. Die Sprache trennt daher auch diesen Zahlbegriff von allen höheren und bezeichnet ihn als Anzahl.

Die Anzahl, welcher demnach eine hervorragende logische Bedeutung durchaus abgesprochen werden muss, hat eben darum auch keine weiteren Wandlungen erfahren. Die einzige Ausbildung, welche ihr zu Theil wurde, betrifft ihren sinnlichen Ausdruck in Sprache und Schrift. Ursprünglich wurde jede Anzahl durch die entsprechende Menge von Fingern versinnlicht. Da aber diese, selbst wenn man noch die Zehen zu Hülfe nahm, bald nicht mehr ausreichten, wurde es nothwendig, allmählich nach andern Veranschaulichungen zu suchen, und so entstanden die Zahlwörter und Ziffern, von denen die letzteren wohl ursprünglich nur in der Anhäufung von Strichen bestanden haben.

Der Hauptschritt nun, der in der Vervollkommnung des Zahlsystems zu thun war, beruhte auf der Einführung neuer größerer Einheiten, welche, wie bekannt, überall — und das verräth ihren anschaulichen Ursprung — nach dem decimalen System geordnet wurden[1]). Dieses, bei der Abzählung größerer Mengen unentbehrliche Hülfsmittel, die Zusammenfassung erheblicher Anzahlen in höhere Einheiten, hat seine Wurzel in der psychologischen Möglichkeit, eine Reihe von Positionen wieder als eine einzige zu betrachten. So schuf man ohne Schwierigkeiten eine ganze Reihe verschiedener Einheiten, derart, dass man mit ihnen jede vorkommende Anzahl bequem auszudrücken vermochte.

Lag nun eine gegebene Menge vor, deren Anzahl durch Zählung zu bestimmen war, so brauchte man in Wort oder Schrift nur anzugeben, wie oft eine jede der vorhandenen Einheiten in derselben enthalten war. Dies konnte systematisch natürlich nur so

---

1) D. h. auf Grundlage der fünf, zehn oder zwanzig. Vgl. hierzu z. B. A. v. Humboldt, Ueber die bei den verschiedenen Völkern üblichen Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen. Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik IV, S. 205. Pott, Die quinäre und vigesimale Zählmethode bei Völkern aller Welttheile. Halle 1847. Conestabile, Alcune osservazioni sopra il sistema di numerazione presso i Berberi e gli Aztèchi e sopra i loro idiomi. Perugia 1866.

geschehen, dass man die Angabe zunächst für die größte in der Menge überhaupt vorkommende Einheit machte, dann mit der nächst kleinern in Bezug auf den Rest ebenso verfuhr u. s. w.[1]) Während nun aber die Bezeichnungen für die Zahlwörter mit wenigen Ausnahmen streng decimal sind, ließen die Zahlzeichen in dieser Beziehung sehr viel zu wünschen übrig[2]). Einzig als brauchbar hat sich, wie schon oben erwähnt, hier das indische Positionssystem mit dem ausgesprochenen Princip des Stellenwerthes erwiesen. In welcher Weise dies System durch die Einführung der Null möglich gemacht wurde, ist bereits an andrer Stelle besprochen worden[3]). Es kann hier höchstens von Interesse sein, noch einmal zu bemerken, dass der erste dort erwähnte Nullbegriff nur anzeigt, dass die betreffende Einheit an der bezeichneten Stelle nicht zu setzen sei, also die Unterlassung eines Denkactes fordert und somit eine rein psychologische Bedeutung gewinnt.

Da wir uns indessen hier schon mehr und mehr von dem Boden der eigentlichen Psychologie entfernt haben, andererseits aber eine so hohe Entwicklung der Zahlensymbole bereits eine bedeutende erkenntnisstheoretische Thätigkeit und eine logische Betrachtung des Gegenstandes voraussetzt, so erscheint es nunmehr an der Zeit, den Begriff der Anzahl, welchen wir mit vollem Recht den psychologischen Zahlbegriff nennen können, zu verlassen und alles weitere der erkenntnisstheoretischen Besprechung des nächsten Kapitels anheimzustellen.

---

1) Nur die Römer bestimmten bisweilen Anzahlen auch dadurch, dass sie die gegebene Menge nicht in den zur Verfügung stehenden Einheiten ausschöpften, sondern angaben, wie viel man noch hinzufügen müsse, um eine größere Einheit zu erhalten. Sie näherten sich also dem wirklichen Werth der zu zählenden Menge nicht allein von unten, sondern auch von oben und bildeten Zahlzeichen wie IV, IX, XL, Zahlwörter wie Duodeviginti u. s. w. Zahlwörter bilden bekanntlich auch die Griechen vereinzelt in ähnlicher Weise.

2) Vgl. außer den auf der vorigen Seite citirten Schriften Hankel's und Cantor's Geschichten der Mathematik.

3) Kapitel I, 2.

(Fortsetzung folgt im nächsten Heft.)