Theoretische und experimentelle Begründung der Fehlermethoden.

Von

Dr. Julius Merkel
in Zittau.

Mit Tafel II.

Unter der Aufschrift »Zur Kenntniss der psychophysischen Methoden« hat Kräpelin[1]) in diesen Studien einen Aufsatz veröffentlicht, der sich im wesentlichen mit der Methode der richtigen und falschen Fälle beschäftigt. Vorübergehend werden auch die von mir zuerst begründete und praktisch verwerthete Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle, die Methode der doppelten Reize, die Methode der mittleren Abstufungen und die Methode der mittleren Fehler erwähnt. An Stelle der Eintheilung in Abstufungs- und Fehlermethoden wird die Eintheilung in Grenz- und Differenzmethoden in Vorschlag gebracht. Die Abhandlung fußt in erster Linie auf den Ergebnissen, welche die unter der Leitung Kräpelin's von Higier[2]) ausgeführten umfangreichen Versuche über den Raumsinn der Netzhaut geliefert haben, es werden aber zur Bestätigung auch die von Lorenz und mir[3]) herrührenden Versuche über die Unterscheidung von Schallstärken herangezogen.

Da ich nunmehr während eines Zeitraumes von 10 Jahren nach den verschiedensten Methoden und in den verschiedensten Sinnesgebieten Versuche angestellt habe, und da ich namentlich der Methode der richtigen und falschen Fälle, welche neben der Methode

---

1) Phil. Stud. VI, S. 493. 2) Phil. Stud. VII, S. 232.
3) Phil. Stud. II, S. 469.

der mittleren Fehler zweifellos noch die am unsichersten begründete genannt werden muss, fortgesetzt meine Aufmerksamkeit gewidmet habe, so möchte ich jene Ausführungen in Anbetracht der Wichtigkeit des Gegenstandes auf Grund meiner Erfahrungen ergänzen. In verschiedenen Punkten werde ich eine andere Auffassung zu vertreten haben, und namentlich werde ich die jedenfalls sorgfältigen und werthvollen Versuche Higier's in anderer Weise behandeln.

Die vorliegende Arbeit wird sich wesentlich mit der Methode der richtigen und falschen Fälle und der ihr verwandten Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle befassen; eine eingehendere Untersuchung der Methode der mittleren Fehler soll einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben. Indessen wird es nöthig sein, einige allgemeine Bemerkungen über die psychophysischen Methoden überhaupt vorauszuschicken. Was zunächst die Bezeichnung derselben anlangt, so können zwei Gesichtspunkte maßgebend sein, die in den vorliegenden Darstellungen nicht scharf getrennt worden sind; man kann einerseits das Ziel im Auge haben, welches die Methoden verfolgen, andererseits den Weg, auf welchem dasselbe erreicht wird.

Es kann sich in erster Linie handeln um die Herstellung gleicher Reize (oder die Bestimmung des unmerklichen Unterschiedes), um die Bestimmung des kleinsten Unterschiedes (Müller), des ebenmerklichen Unterschiedes (Fechner), des minimalen Unterschiedes (Wundt), um die Bestimmung des Unterschiedes, der unter 100 Fällen 50 mal oder 75 mal oder p-mal erkannt wird, ferner um die Ermittlung des übermerklichen Unterschiedes (oder der mittleren Abstufung), des doppelten, dreifachen, n-fachen Reizes oder des n^{ten} Theiles eines Reizes und schließlich um die Bestimmung gleicher Reizverhältnisse.

Hinsichtlich des gesteckten Zieles handelt es sich sonach um die Ermittlung der verschiedenartigsten Unterschiede. Die wichtigsten derselben sind jedenfalls der unmerkliche, der ebenmerkliche und der übermerkliche. Ein wesentlicher Unterschied besteht zwischen der Bestimmung der mittleren Abstufung und der Bestimmung aller übrigen Unterschiede, insofern im ersteren Falle gleichzeitig drei Reize zu beurtheilen sind, bei den übrigen Fällen immer nur zwei Reize. Selbst bei der Bestimmung gleicher Reizverhältnisse, auf welche ich an verschiedenen Stellen meiner Abhandlungen [1]) über die Abhängigkeit zwischen Reiz und Empfindung hingewiesen habe, und die neuerdings von Münsterberg [2]) sogar bei gleichzeitiger Benutzung von Reizen verschiedener Sinnesgebiete angewandt worden ist, sucht man zu einem bestimmten Reizverhältniss ein gleiches Verhältniss zweier größerer oder kleinerer Reize herzustellen. Dieser Fall kann als besonderer Fall natürlich bei der Methode der mittleren Abstufungen eintreten, wenn man den mittleren Reiz zweimal einwirken lässt. Münsterberg [3]) sagt: »Die Erörterungen über die Abstufungsversuche haben früher niemals untersucht, ob die mittlere Empfindung oder die mittlere Proportionale der Empfindungen gesucht wurde, weil man nichts anderes finden wollte, als diejenige Empfindung, welche von den beiden anderen in unmittelbarer Schätzung gleich weit entfernt scheint. Dieser Anforderung genügt aber nicht Merkel's mittlere Empfindung, sondern seine mittlere Proportionale. Merkel übersieht das, weil er glaubt, zwischen Empfindungsunterschied und Empfindungsverhältniss trennen zu dürfen, und nun die mittlere Proportionale bei gleichem Verhältniss, die Mitte dagegen an der Stelle des gleichen Unterschiedes ansetzt«. Auf Grund meiner Versuche glaube ich allerdings berechtigt zu sein, den oben genannten Unterschied zu machen, und mich trifft jedenfalls der Vorwurf nicht, dass früher niemals untersucht worden sei, ob die mittlere Empfindung oder die mittlere Proportionale der Empfindungen gesucht wurde. Allerdings ist mir nie beigekommen, den Empfindungsunterschied so aufzufassen, wie es von Münsterberg geschieht, als ein Ergebniss der Subtraction. Das Wort Unterschied kann hier nur eine ähnliche Bedeutung haben wie in der Definition des Winkels als des Richtungsunterschiedes zweier Geraden. Wir fassen selbstverständlich die einzelnen Reize auf und sprechen von einem größeren Unterschiede, wenn die einzelnen Reizstärken mehr abweichen, von einem geringeren Unterschiede, wenn die einzelnen Reize eine geringe Verschiedenheit zeigen. Bei der Methode der mittleren Abstufungen

1) Phil. Stud. IV, S. 541; V, S. 245, 499.

2) Münsterberg, Beiträge zur experimentellen Psychologie, Heft 3.

3) a. a. O. S. 116.

gilt es lediglich zu entscheiden, ob der an zweiter Stelle einwirkende Reiz in der Mitte liegt oder dem einen oder dem anderen Reize näher. Ueber die Größe der Differenz als Subtractionsergebniss aufgefasst haben wir keinerlei Vorstellung. Bei der Ermittlung gleicher Verhältnisse muss man 4 Reize einwirken lassen und zwischen den beiden ersten und den beiden letzten gleiche Verhältnisse herstellen. Hier vermögen wir wieder die absolute Größe der Verhältnisse nicht anzugeben. Wohl aber empfinden wir, dass der Grad der Verschiedenheit der beiden Empfindungspaare ein verschiedener ist, wiewohl letzteres schon schwieriger ist. Der Unterschied liegt jedenfalls darin begründet, dass wir noch gut im Stande sind, 3 möglichst schnell auf einander folgende Empfindungen zu vergleichen oder 3 neben einander gegebene gleichzeitig aufzufassen. Bei 4 Empfindungen ist dies nicht mehr in dem Maße möglich, hier messen wir die zweite im Vergleich mit der ersten und die vierte im Vergleich mit der dritten. Bei der Vergleichung zweier Empfindungen fassen wir aber lediglich das Verhältniss derselben auf. Ich habe bei meiner Aeußerung auf Seite 591 nur Versuche im Sinne gehabt, welche im Sinne Münsterberg's ausgeführt werden müssten, allein diese Methode ist derjenigen der Methode der mittleren Abstufungen unterlegen, weil sie technisch größere Schwierigkeiten darbietet. Uebrigens sind meine Versuche nach der Methode der doppelten Reize, deren Ergebnisse auf einem wesentlich anderen Gebiete durch die Versuche von Higier eine Bestätigung erhalten haben, den Versuchen Münsterberg's nach der Methode gleicher Verhältnisse sehr nahe verwandt. Man stellt erst in zahlreichen Versuchen das Verhältniss 2 : 1 der Empfindungen her und prägt sich dasselbe ein. Das nämliche Verhältniss stellt man dann bei größeren Reizstärken her. Würde man das zuerst benutzte Verhältniss bei Herstellung jedes anderen immer wiederholen, so hätte man die Methode Münsterberg's, angewandt auf dasselbe Gebiet von Empfindungen.

Natürlich kann bei der Methode der mittleren Abstufungen auch der Fall eintreten, dass man das Verhältniss der Reize 1 und 2 mitbeachtet und damit das Verhältniss der Reize 2 und 3 vergleicht. Dass dieser Umstand namentlich bei größeren Unterschieden und bei gleichzeitig einwirkenden Reizen störend einwirken mag, habe ich ja in meiner Abhandlung deutlich zum Ausdruck gebracht. Auf die Abhandlung von Münsterberg möchte ich schon deshalb nicht näher eingehen, weil ihre Zahlenergebnisse mit allen bisherigen Untersuchungen durchaus im Widerspruch stehen[1]), und weil aus einer so geringen Zahl von Versuchen sichere Ergebnisse nicht abgeleitet werden können.

Der principielle Unterschied der verschiedenen Methoden liegt darin, dass man bei der Methode der mittleren Abstufungen den gesuchten Reiz gleichzeitig mit zwei anderen Reizen vergleicht, bei allen anderen Methoden mit nur einem Reize. Da wir aber bei den meisten Methoden gewohnt sind, die Verhältnisse der Reize zu beurtheilen, da wir in den meisten Fällen überhaupt nichts anderes beurtheilen können, so liegt es auf der Hand, dass diese Gewohnheit störend einwirken muss bei der Methode der mittleren Abstufungen, bei welcher es sich um die Aufsuchung des mittleren Reizes handelt.

Meine Untersuchungen haben ja die Richtigkeit der Verhältnisshypothese nachzuweisen gesucht, und in diesem Sinne aufgefasst wird das Ergebniss durch die Untersuchungen Münsterberg's nur bestätigt. Man kann sehr wohl für verschiedene absolute Reizstärken gleiche Reizverhältnisse herstellen, aber die wirkliche Größe dieser Verhältnisse kennt man damit noch nicht. Auch bei der Methode der doppelten Reize kann man nicht sicher entscheiden, ob das Verhältniss der Empfindungen wirklich 2 ist. Demnach lassen alle diese Versuche, namentlich aber die Versuche Münsterberg's, die Frage unentschieden, wie die Empfindung mit dem Reize wächst, ob proportional oder logarithmisch oder in anderer Weise. Die Entscheidung dieser Frage ist nur durch Versuche nach der Methode der mittleren Abstufungen in dem von mir vertretenen Sinne möglich. Nehmen die Empfindungen mit der Quadratwurzel der Reizstärke zu, so würde man für die Reize 1 und 81 die Empfindungen 1 und 9 haben, die mittlere Empfindung würde 5 sein und dieser würde der Reiz 25 entsprechen müssen. Die Mitte

---

1) Münsterberg findet für das Schallmaß einen geringeren ebenmerklichen Unterschied wie für die Gewichtsempfindungen, ja sogar wie für die Lichtempfindungen, was allen bisher vorliegenden Untersuchungen widerspricht (S. 90).

von 1 und 81 ist aber 41. Erhält man einen Werth, welcher dieser Reizstärke nahekommt, so kann das obige Gesetz nicht gelten. Ist jede Empfindung etwa dem halben Reize gleich, so handelt es sich um die Empfindungen $\frac{1}{2}$ und $40\frac{1}{2}$, die mittlere Empfindung ist $20\frac{1}{2}$ und dieser würde der Reiz 41 entsprechen. Das obige Ergebniss würde also für das Gesetz

$$e = p\,r$$

sprechen, wo e die Empfindung, r der zugehörige Reiz und p ein echter Bruch ist. Für den Reiz 25 würde:

$$e = p\sqrt{r}$$

sein und für den mittleren Reiz 9 würde:

$$e = p \log r$$

sich ergeben. Hat man aber gleiche Empfindungsverhältnisse hergestellt, so kann man setzen:

$$\frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^x,$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{e_2}{e_1}\right)^x,$$

denn für: $\frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2}{r_1}$ ist dann jederzeit auch: $\left(\frac{E_2}{E_1}\right)^x = \left(\frac{e_2}{e_1}\right)^x$. Erhält man aber bei Ermittlung der mittleren Empfindung die arithmetischen Mittel, so ist damit nachgewiesen, dass in den obigen Gleichungen $x = 1$ sein muss.

Für die Richtigkeit meiner Auffassung sprechen auch die Versuche von C. Lorenz über die Auffassung der Tondistanzen, auf die ich später noch zurückkommen werde.

Wollte man die im Vorstehenden gekennzeichneten Methoden in zwei Gruppen theilen, so könnte man denselben die Namen Verhältniss- und Unterschiedsmethoden beilegen. Die erste Gruppe würde dann zerfallen in die Methoden der unmerklichen Reizverhältnisse (Herstellung gleicher Reize), der ebenmerklichen Verhältnisse (Methode der kleinsten, der ebenmerklichen und der minimalen Unterschiede) und der übermerklichen Verhältnisse (Methode der

Herstellung des p-fachen Reizes oder des p^{ten} Theiles von einem Reize, Methode gleicher Verhältnisse). Ferner würden hierher die Methoden gehören, welche ein Verhältniss ermitteln, bei dem die Verschiedenheit der Reize unter hundert Versuchen eine bestimmte Anzahl Male erkannt wird.

Zur zweiten Gruppe würde nur die Methode der mittleren Abstufungen gehören. Nimmt man bei ihr als ersten Reiz den Werth 0, so gehört hierher die Methode, welche die Hälfte eines Reizes herzustellen verlangt, und in gewissem Sinne auch die Methode der doppelten Reize, wenn man sich zu den Reizen 1 und 2 den Werth 0 als Anfangsreiz hinzudenkt.

Die durch diese Methoden gekennzeichneten Verhältnisse und Unterschiede lassen sich aber auf verschiedenen Wegen ermitteln.

Das roheste Verfahren besteht zweifelsohne im Probiren. So bestimmte Vierordt[1]) denjenigen Höhenpunkt, bei welchem der Schall einer kleinen Kugel dem einer größeren von constanter Höhe herabfallenden Kugel gleich wird, dadurch, »dass er so lange hin- und herprobirte, bis die 2 Schalle, welche gleiche Stärke erhalten sollten, für die Empfindung gleich stark ausfielen«.

Auch das Verfahren Fechner's ist noch wenig bestimmt. Er sagt[2]): »Nach meinem Princip sucht man mit den Einstellungen einen kleinen, bei wiederholten Versuchen möglichst gleich merklichen Unterschied oberhalb der Schwelle immer wieder herzustellen«.

Einen entschiedenen Fortschritt bezeichnet das Verfahren, wie es G. E. Müller[3]) beschreibt. Nach diesem lässt man einen vorhandenen, deutlich übermerklichen Zuwuchs zu derjenigen Reizstärke, welche betreffs der ihr zugehörigen Unterschiedsempfindlichkeit zu untersuchen ist, ganz allmählich mit möglichster Gleichförmigkeit verringern, vergleicht hierbei aufmerksam die beiden Unterschiedscomponenten, und sobald der Unterschied beider nicht mehr merklich erscheint, thut man sofort der Verminderung desselben Einhalt und lässt die Größe desselben mit möglichster Genauigkeit bestimmen. Dann geht man dazu über, die Größe des ebenmerk-

1) Wiedemann's Ann. N. F. XVIII, S. 477 u. 478.
2) Fechner, Revision der Hauptpunkte der Psychophysik, S. 120.
3) Müller, Zur Grundlegung der Psychophysik, S. 63.

lichen Unterschiedes zu bestimmen, indem man in ganz gleicher Weise einen untermerklichen Unterschied, etwa von der Größe 0 an so lange erhöhen lässt, bis er eben merkbar wird. Das Mittel aus dem ebenmerklichen und ebenunmerklichen Unterschied nennt Müller »kleinsten Unterschied«. Der Kern des Verfahrens ruht darin, dass man sich von 2 Seiten her durch möglichst kleine und gleichförmige Aenderungen dem gesuchten Werthe nähert.

Dieses Verfahren ist insofern noch unbestimmt, als es unentschieden lässt, mit welchem deutlich übermerklichen Reiz bei der ersten Bestimmung zu beginnen ist. Beginnt man aber mit wesentlich verschiedenen Reizen, so machen sich störende Contrastwirkungen geltend. Dieser Nachtheil ist bei der Methode der Minimaländerungen von Wundt[1]), welche ebenfalls durch möglichst kleine und gleichmäßige Aenderungen zwei Grenzwerthe ermittelt, vermieden: Man geht von gleichen Reizen aus, bestimmt den Punkt, bei welchem sich die Reize sicher unterscheiden, und geht von da zurück, bis der Unterschied sicher verschwunden ist. Aus beiden Aufzeichnungen nimmt man das Mittel.

Dieses Verfahren verdient nicht nur vor dem Müller'schen entschieden den Vorzug, sondern auch vor dem neuerdings von Starke[2]) eingeschlagenen, das ebenfalls unter dem Einfluss des Contrastes leidet.

Die Methode der minimalen Aenderungen könnte aber unter Umständen lediglich zur Bestimmung des einen Grenzwerthes benutzt werden, d. h. zur Ermittelung des ebenunmerklichen oder ebenübermerklichen Reizunterschiedes. Sie kann ferner Verwendung finden bei der Bestimmung der mittleren Abstufung, des doppelten Reizes u. s. w.[3])

Neben der Methode des Probirens und der Methode der minimalen Aenderungen haben bereits Fechner und ebenso Müller und Wundt die Ausführung zahlreicher Versuche zur Ermittlung der nämlichen Größe empfohlen. In einzelnen Sinnesgebieten geben bereits wenige Bestimmungen irgend eines der oben genannten Werthe brauchbare Ergebnisse, in anderen Gebieten vielleicht erst

---

1) Wundt, Physiolog. Psychologie, 3. Aufl. I. S. 350.
2) Phil. Stud. III, S. 278. 3) Phil. Stud. IV, S. 548.

die Mittelwerthe aus 10 und mehr Beobachtungen. Man kann dann bei diesen Versuchen, namentlich wenn sie in sehr großer Zahl vorliegen, nicht nur den arithmetischen Mittelwerth aus sämmtlichen Versuchen verwenden, sondern man kann auch die verschiedenen Abweichungen von diesem Mittelwerthe berücksichtigen. Darauf kann man eine neue Methode gründen, welche mit der Methode der mittleren Fehler in gewisser Beziehung übereinstimmt. Dieselbe würde zur ersten Gruppe zu rechnen sein, insofern sie gleichzeitig ein neues Ziel verfolgt. Handelte es sich bei jenen Versuchsgattungen um die Aufsuchung von Verhältnissen, welche unmittelbar oder durch Einschließung in zwei Grenzen gefunden werden konnten, so erhält man bei dieser Methode ein Verhältniss, welches erst mittelbar gefunden wird, gewissermaßen ein Verhältniss zweiter Ordnung. Es ist klar, dass sich diese Methode mit allen Versuchsgattungen vereinigen lässt, bei welchen zahlreiche Bestimmungen vorliegen. Die eigentliche Methode der mittleren Fehler bedarf noch einer einwurfsfreien theoretischen und experimentellen Begründung, vor Allem in Betreff der Anwendbarkeit der Gaußschen Theorie der Beobachtungsfehler.

Die erste Gruppe von Versuchsmethoden enthielt auch ein Verfahren, bei dem es sich um die Ermittlung des Verhältnisses handelte, bei welchem der Unterschied der Reize unter 100 Versuchen etwa 50mal erkannt wird und 50mal unerkannt bleibt. Man kann dieses Verhältniss durch die Methode der minimalen Aenderungen aufsuchen, wenn man bei jedem Reizverhältniss 100 Versuche ausführt. Diese Methode hat vor allen übrigen den Vorzug, dass sie völlig bestimmt ist. Sie bedarf in dieser Form keiner mathematischen Begründung, erfordert aber einen großen Aufwand an Zeit. Dieses Verfahren würde, wie wir später genauer sehen werden, der Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle entsprechen. Auch die Methode der richtigen und falschen Fälle würde in dieser Weise Verwendung finden können, wenn man etwa den Punkt durch minimale Aenderungen zu erreichen suchte, bei welchem unter 100 Urtheilen 75 richtig und 25 falsch lauten würden. Dabei ist jedoch vorausgesetzt, dass Gleichheitsurtheile nicht vorhanden, bez. in einwurfsfreier Weise unter die richtigen und falschen Fälle vertheilt worden sind.

Die Anwendung der Gauß'schen Fehlertheorie führt aber zu zwei neuen Methoden, welche der zweiten Gruppe angehören. Man kann nämlich die oben genannten Reizverhältnisse auch finden, wenn man nicht das Princip der minimalen Aenderungen anwendet, sondern wenn man bei einem bez. bei zwei beliebigen Reizverhältnissen Versuche ausführt und aus den erhaltenen Zahlen von richtigen und falschen Fällen oder Gleichheits- und Ungleichheitsfällen die obigen Reizverhältnisse berechnet. Diese Methoden behalten damit den oben genannten Vorzug völliger Bestimmtheit, sie reihen sich aber auch den früheren Methoden ebenbürtig an, insofern sie eine wesentlich geringere Zahl von Versuchen erfordern. Die Bestimmung des Präcisionsmaßes oder des wahrscheinlichen Fehlers ist nur eine andere Ausdrucksweise für die Aufsuchung eines bestimmten Reizverhältnisses. Der wahrscheinliche Fehler entspricht, wie wir später sehen werden, thatsächlich dem oben genannten Verhältniss der Methode der richtigen und falschen Fälle ($r = 75$, $f = 25$). Mit Rücksicht hierauf tritt diese Methode in enge Beziehung zur Methode der mittleren Fehler.

Das Wesentliche dieser Methoden, welche auch bei Bestimmung der mittleren Abstufung verwandt werden können, besteht darin, dass man die Beobachtungen nur bei einem oder zwei Reizverhältnissen auszuführen braucht und aus den Ergebnissen die gewünschten Größen berechnen kann.

Die Methoden, welche hinsichtlich des Weges, auf welchem man zu irgend einem bestimmten Reizverhältniss oder Reizunterschied gelangen kann, in Frage kommen, bestehen also:

1) im Probiren,

2) in der Anwendung minimaler Aenderungen, mittels deren man sich von einer oder zwei Seiten her dem gesuchten Werthe nähert,

3) in der Ausführung zahlreicher Versuche und der Benutzung des Mittelwerthes sowie der Abweichungen vom Mittelwerthe,

4) in der Berechnung eines bestimmten Reizverhältnisses aus Versuchen bei einem beliebigen Reizverhältniss (Methode der richtigen und falschen Fälle).

5) in der Berechnung eines bestimmten Reizverhältnisses aus Versuchen bei zwei beliebigen Reizverhältnissen (Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle).

Insofern die Urtheile richtig und falsch und gleich und ungleich durch Fehler entstehen, die bei der Beobachtung begangen werden, gehören diese Methoden in eine Klasse mit der Methode der mittleren Fehler, bei welcher jene Beobachtungsfehler unmittelbar bestimmt werden. Wir behalten daher den von Wundt eingeführten Namen der Fehlermethoden für die Methoden unter 3 bis 5 bei. Da man auch bei dem ersten Verfahren wenigstens innerhalb gewisser Grenzen kleine Aenderungen vornehmen wird, kann man die Methoden unter 1 und 2 unter dem Namen der Abstufungsmethoden zusammenfassen.

Wir unterscheiden sonach hinsichtlich des Zieles, welches die psychophysischen Methoden verfolgen, die Verhältniss- und Unterschiedsmethoden, hinsichtlich des Weges, auf welchem die obigen Ziele zu erreichen gesucht werden, die Abstufungs- und Fehlermethoden.

Die Anwendbarkeit der Gauß'schen Fehlertheorie ist unabhängig von der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes; das Gauß-sche Gesetz muss im Gebiete der Psychophysik Anwendung finden können, ja die Bedingungen hierfür scheinen in diesem Gebiete noch günstiger zu sein, als im Gebiete der Physik. Wenn sich diese Theorie trotzdem so wenig Anerkennung verschafft hat, so stehen entweder ihre Grundlagen in Frage, oder die psychophysischen Versuche sind nicht den Forderungen der Theorie entsprechend ausgeführt worden.

Die Methode der richtigen und falschen Fälle hat nach dem Urtheile Kräpelin's seit langer Zeit den meisten Anlass zu theoretischen Discussionen gegeben, ohne dass darum bis heute die Schwierigkeiten ihrer Handhabung sich wesentlich vermindert hätten. Für mich gibt es solche Schwierigkeiten schon seit etwa 3 bis 4 Jahren nicht mehr; aus 100 Versuchen nach der Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle erhalte ich ein besseres Ergebniss, als aus 100 Versuchen nach der Methode der ebenmerklichen Unterschiede, jene Versuche können schneller erfolgen als diese, weil die Reize unverändert bleiben, bei der

Methode der Minimaländerungen aber fortwährend geändert werden müssen.

Betreffs der Vertheilung der Gleichheitsfälle bei der Methode der richtigen und falschen Fälle äußert derselbe Forscher: »Alle vorgeschlagenen Vertheilungsmethoden beruhen auf Voraussetzungen, die bisher nicht bewiesen oder nachweisbar falsch sind und im günstigsten Falle den Effect haben, dass die unbequemen Fälle schließlich durch einfache Umtaufung aus den Berechnungen verschwinden«. Indessen unterliegt auch das Verfahren von Jastrow, nach welchem diese Fälle überhaupt ausgeschlossen werden, Bedenken, die wir später begründen werden. Die Forderung, diese Fälle möglichst einzuschränken, habe ich ebenfalls aufgestellt, weil in diesem Falle die Halbirung brauchbare Ergebnisse liefert. Beim Jastrow'schen Verfahren handelt es sich übrigens im Grunde ebenfalls nur um eine Umtaufung, nämlich um eine Umtaufung der Gleichheitsfälle in »scheinbar« richtige und »scheinbar« falsche.

Gegen die Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle erhebt Kräpelin den Einwand, dass sie nicht weniger umständlich sei, als die Methode der richtigen und falschen Fälle, und einstweilen theoretisch wie praktisch noch ungenügend geprüft sei. Was das erstere anlangt, so ist sie verbunden mit der Methode der minimalen Aenderungen allerdings umständlich, allein es genügt bei ihr thatsächlich die Untersuchung zweier Reizverhältnisse, um in völlig bestimmter Weise zur Kenntniss der Schwelle zu gelangen. Die von mir gegebene Begründung kann allerdings nicht als genügend bezeichnet werden, doch reichen die von mir gegebenen Formeln zu einer praktischen Prüfung hin. Diese letztere wird man von mir allein, der ich nur in den Mußestunden und Ferien mich psychophysischen Studien widmen kann, nicht erwarten können. Gerade ein Theil der Versuche Higier's hätte zu einer praktischen Prüfung meiner Methode verwerthet werden können. Soweit ich die Dinge jetzt überschaue, darf ich wohl hoffen, dass die Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle dieselbe Verbreitung finden wird, wie die Methode der richtigen und falschen Fälle.

Die hervorragende Bedeutung der Fehlermethoden habe ich schon vor vielen Jahren erkannt und zu ihrer Prüfung mannigfache

Untersuchungen angestellt, welche ich in meinen Abhandlungen über die Abhängigkeit zwischen Reiz und Empfindung z. Th. mit verwerthet habe. Ich habe auch bereits Vorarbeiten zu umfassenderen Untersuchungen namentlich über die Anwendung der Fehlermethoden zur Bestimmung der mittleren Abstufung ausgeführt. Andererseits habe ich auch der Theorie dieser Methoden fortgesetzt meine Aufmerksamkeit gewidmet.

Da ich nicht weiß, wie lange noch ein gewisser Abschluss meiner experimentellen Untersuchungen währen wird, so gebe ich, gestützt auf bereits vorliegende Versuche, denen ja, soweit sie nicht von mir herrühren, eine größere Beweiskraft innewohnt, eine umfassende theoretische und experimentelle Begründung der Fehlermethoden, eine Begründung, die hinsichtlich ihres theoretischen Theiles kaum noch Lücken aufweisen dürfte. Ich hege die Hoffnung, dass diese Methoden von anderer Seite eine weitere experimentelle Prüfung erfahren möchten. Freilich möchte ich im Hinblick auf gewisse neuere Veröffentlichungen auf dem Gebiete der Psychophysik darauf hinweisen, dass 20 Versuche zu einer Prüfung nicht hinreichen, dass hier vielmehr das Gesetz der großen Zahlen herrscht. Das Arbeitsfeld, welches diese Methoden eröffnen, ist so ausgedehnt, dass ein sicheres Ziel nur mit vereinten Kräften zu erreichen ist. Es geht auch noch ein anderer unheilvoller Zug durch die neuere und neueste psychophysische Literatur. Er zeigt sich am auffallendsten in den verschiedenen neuen Grundlegungen der Psychophysik. Eine solche neue Grundlegung würde ja ein verdienstliches Unternehmen sein, wenn der Bau morsch und veraltet wäre. Aber weder ist letzteres der Fall, noch ist es nöthig, alle Bausteine des Gebäudes zu verwerfen. Es muss zweifellos als Aufgabe jedes experimentellen Forschers angesehen werden, die vorhandenen Untersuchungen zu beachten und, wenn sich Abweichungen ergeben oder gar wesentlich andere Ergebnisse herausstellen, nach den Ursachen zu forschen. Es darf sich nicht um ein planloses Niederreißen handeln, sondern es soll die vorsichtig bessernde Hand angelegt werden.

I. Die Methode der richtigen und falschen Fälle.

A. Zur Theorie der Beobachtungsfehler.

Alle Beobachtungen im Gebiete der Psychophysik nicht minder wie in dem der Physik sind mit Fehlern behaftet, und diese können von zweifacher Art sein: entweder regelmäßig (constant) oder unregelmäßig (zufällig). Die Ursachen der regelmäßigen Fehler können erkannt werden, man kann sie daher in Rechnung ziehen oder zu eliminiren suchen. Die zufälligen Fehler können in keiner Weise umgangen werden, nur sie werden als Beobachtungsfehler bezeichnet, auf sie nur bezieht sich die Gauß'sche Theorie der Beobachtungsfehler.

Ueber diese zufälligen Fehler werden folgende Annahmen gemacht: 1) sie müssen verhältnissmäßig klein sein, 2) die kleineren müssen häufiger auftreten, als die größeren, 3) positive Fehler müssen sich ebenso leicht ereignen können, als negative desselben absoluten Betrages[1]).

Die Hauptbedingung, dass constante Fehler eliminirt werden müssen, ist in vielen Untersuchungen nicht beachtet worden. Hinsichtlich der zufälligen Fehler ist gegen die erste der obigen Forderungen vielfach gefehlt worden; die zweite Forderung ist durch das Vorhandensein der Schwelle nicht zur Geltung gekommen; auch die dritte Forderung ist nicht immer zureichend beachtet worden. Darf es daher Wunder nehmen, dass das Gauß'sche Gesetz bis jetzt so wenig festen Grund in der Psychophysik gewonnen hat?

Bezeichnet man mit w_x die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers x, mit m eine unbestimmte, von der Art der Beobachtungen abhängige Constante, so erhält man:

$$w_x = \frac{m}{\sqrt{\pi}} e^{-m^2 x^2} dx \, .$$

1) Vergl. Gauß, Werke, IV. Bd. S. 97, 100, 109 f.; Meyer, Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung, Cap. VIII, S. 243 f.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der bei der Beobachtung begangene Fehler x zwischen $\pm\,\delta$ enthalten ist, drückt sich aus durch das Integral:

$$W = \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-m^2 x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta m}^{+\delta m} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\delta m} e^{-t^2} dt \,.$$

Dieser Werth drückt zugleich die Anzahl Z der zwischen 0 und δ enthaltenen Fehler aus, wenn die Gesammtzahl N aller möglichen Fehler zur Einheit genommen wird. Setzt man alle Fehler als gleich möglich voraus, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass x ein Fehler zwischen 0 und δ ist:

$$W = \frac{Z}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{m\delta} e^{-t^2} dt \,, \tag{I}$$

woraus sich ergibt:

$$Z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{m\delta} e^{-t^2} dt \,.\, N = \Phi(m\delta) \,.\, N \,, \tag{II}$$

eine Formel, welche in der That für $N = 1$ den Werth I) liefert.

Um die Anzahl der Fehler zu bestimmen, welche innerhalb gewisser Grenzen liegen, kann man die Tabelle für:

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

benutzen, welche sich im Berliner Astronomischen Jahrbuche, 1834, vorfindet[1]).

Für die Annahme $N = 50$ und $m = 0{,}0197$ erhält man für die Grenzen:

---

1) Dieselbe ist abgedruckt in Meyer, Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung, S. 545—549; Cournot, Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, übersetzt von Schnuse, S. 221—224; Bobek, Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, S. 277—279.

0 und $\delta = 20 : \gamma = m\delta = 0{,}394,\quad 50\,\Phi = 21{,}13,$
0 und 40 $: \gamma = 0{,}788,\quad 50\,\Phi = 36{,}74,$
0 und 60 $: \gamma = 1{,}182,\quad 50\,\Phi = 45{,}27,$
0 und 80 $: \gamma = 1{,}576,\quad 50\,\Phi = 48{,}71,$
0 und 100 $: \gamma = 1{,}970,\quad 50\,\Phi = 49{,}73.$
u. s. w.

Demnach liegen zwischen:

0 und 20 :	21,13	Fehler,
20 und 40 :	15,61	»
40 und 60 :	8,53	»
60 und 80 :	3,44	»
80 und 100 :	1,02	»

u. s. w.

Für die Annahme $N = 50$, $m = 0{,}094$ ergeben sich in ähnlicher Weise die in folgender Tabelle genannten Werthe (F. Z) für die angegebenen Fehlergrenzen (F. G).

0 und	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
γ	0,19	0,376	0,564	0,752	0,940	1,128	1,32	1,50	1,69	1,88
$50\,\Phi$	10,6	20,25	28,7	35,6	40,8	44,5	46,9	48,3	49,15	49,6
F. G.	0 u. 2	2 u. 4	4 u. 6	6 u. 8	8 u. 10	10 u. 12	12 u. 14	14 u. 16	16 u. 18	18 u. 20
F. Z.	10,6	9,65	8,45	6,9	5,2	3,7	2,4	1,4	0,85	0,45

Hiernach nimmt die Zahl der Fehler mit der Größe derselben in der That ab. Im ersteren Falle würde man ähnliche Werthe erhalten für die Grenzen 0 und 10, 10 und 20, 20 und 30 u. s. w.

Als obere Grenze ϱ für den Werth:

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \qquad \text{III)}$$

erhält man durch Interpolation aus der oben genannten Tabelle:

$$\varrho = 0{,}476936. \qquad \text{III}')$$

Ferner ergibt sich der wahrscheinliche Fehler, d. h. die Fehlergrenze F, welche gleich häufig nicht erreicht als überschritten wird, für welche also:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{mF} e^{-t^2}dt = \frac{1}{2} \qquad \text{IV)}$$

ist, durch Vergleichung mit dem Werthe III:

$$\varrho = mF, \qquad \text{IV')}$$

mithin:

$$F = \frac{\varrho}{m}, \quad m = \frac{\varrho}{F}.$$

Für die obigen Annahmen ($m = 0{,}0197$ und $0{,}094$) wird: $F = 24{,}2$ und $5{,}07$.

Neben dem wahrscheinlichen Fehler kann schließlich auch der mittlere Fehler F_m Verwendung finden. Er berechnet sich aus der Beziehung:

$$F = \varrho\sqrt{2}\, F_m\,,$$

d. h.

$$F_m = \frac{F}{0{,}674489} = 1{,}4826\, F.$$

Setzt man in Formel I) für m den Werth $\frac{\varrho}{F}$, so erhält man:

$$W = \frac{Z}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varrho\frac{\delta}{F}} e^{-t^2}dt\,,$$

also:

$$Z = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varrho\frac{\delta}{F}} e^{-t^2}dt\,.\,N = \Phi\left(\varrho\frac{\delta}{F}\right)N. \qquad \text{V)}$$

Von dieser Formel macht man Gebrauch, wenn es sich um die Vergleichung der Fehlervertheilung bei einer wirklich ausgeführten Beobachtungsreihe mit der Theorie handelt, und wenn nicht die Constante m, sondern der wahrscheinliche Fehler F bekannt ist, also vor allen Dingen bei Versuchen nach der Methode der mittleren Fehler.

Gauß nennt m das Maß der Genauigkeit der Beobachtungen (Präcisionsmaß), Laplace nennt diese Constante das Gewicht der Beobachtungen; denn:

$$w_x = \frac{m}{\sqrt{\pi}} e^{-m^2 x^2} dx$$

nimmt mit zunehmendem x um so schneller ab, je größer m ist; eine Beobachtungsreihe wird aber als um so genauer zu bezeichnen sein, je rascher bei ihr die Fehlerwahrscheinlichkeit mit wachsender Fehlergröße abnimmt.

B. Methode der richtigen und falschen Fälle bei Benutzung gleicher Reize.

Wir nehmen zunächst an, dass die auf uns einwirkenden Reize R und R_1 gleich groß seien. Infolge zufälliger Fehlervorgänge werden wir sowohl bei der Beurtheilung von R als auch bei der Beurtheilung von R_1 Fehler begehen. Bezeichnet man das Intervall, über welches sich die positiven Fehler bei R erstrecken, durch C, das Intervall für die negativen Fehler durch c, so wird unter der Voraussetzung, dass die Fehler nur innere sind, infolge der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes:

$$\frac{R + C}{R} = \frac{R}{R - c},$$

mithin:

$$c = C \cdot \frac{R}{R + C}$$

sein. Die negativen Fehler sind also kleiner als die positiven. Ferner werden die Fehler ebenfalls infolge der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes der Reizgröße R proportional sein.

Zu diesen inneren, dem Weber'schen Gesetze unterworfenen Fehlern können auch äußere, der Berechnung unzugängliche Fehler hinzutreten, die unter Umständen nach positiver und negativer Seite gleich groß sein können, für die also:

$$R \pm \delta$$

gesetzt werden könnte. Infolge äußerer Fehlervorgänge wirkt also nicht der Reiz R, sondern $R \pm \delta$ auf uns ein, infolge innerer Fehler beurtheilen wir den Reiz R nicht als solchen, sondern als:

$$R + C \text{ oder } \frac{R^2}{R + C},$$

welch letzterer Ausdruck aus $R - c = R - C\frac{R}{R+C}$ entstanden ist.

Die positiven Fehler können sonach den Maximalwerth $\delta + C$ erreichen, die negativen den Maximalwerth $\delta + C \cdot \frac{R}{R+C}$. Die Gesammtfehler, welche also durch innere und äußere Fehlerursachen bedingt sind, können sich innerhalb gewisser Grenzen des Schwellengebietes bewegen, sie können dasselbe bei ungünstigen Versuchsbedingungen sogar überschreiten. Letzteres wird namentlich dann der Fall sein, wenn die äußeren Fehler einen großen Spielraum einnehmen.

Für diese bei der Beurtheilung eines Reizes begangenen Fehler ist das Gauß'sche Gesetz der Fehlervertheilung streng genommen nicht anwendbar, weil nicht positive und negative Fehler desselben absoluten Betrages dieselbe Wahrscheinlichkeit haben. Die auf Seite 573 genannten Fehler würden sich nicht auf gleiche Zwischenräume beziehen, sondern auf wachsende, bez. abnehmende.

Nimmt man an, dass:

$$C + c = 2\delta$$

ist, so ergeben sich mit Rücksicht auf:

$$\frac{R+C}{R} = \frac{R}{R-c}$$

für C und c die Werthe:

$$C = -(R - \delta) + \sqrt{R^2 + \delta^2}\,; \quad c = 2\delta - C\,.$$

Für	$\delta =$	20,	40,	60,	80,	100 wird:
	$C =$	21,1;	44,5;	69,9;	97,2;	126,3;
	$c =$	18,9;	35,5;	50,1;	62,8;	73,7.

Stellt man 100 Versuche an, so erhält man die für 50 Φ ermittelten Fehler sowohl nach positiver wie nach negativer Seite, und die Fehlervertheilung stellt sich nach dem Gauß'schen Gesetz durch Fig. 1, Tafel II, bei der Voraussetzung, dass die Fehler nur innere, dem Weber'schen Gesetz unterliegende sind, dagegen durch Fig. 2 dar. Auf der rechten Seite sind die Fehlergrenzen, auf der linken die Zahlen der Fehler angegeben[1]. Die positiven Fehler sind von 0 an nach aufwärts, die negativen nach abwärts aufgetragen. In Fig. 2 liegen zwischen 0 und 20, 0 und 40, 0 und 60, 0 und 80 und 0 und 100 etwa folgende Fehler: 20,25; 34; 42,8; 46,6; 48,9 und 49,6, dagegen zwischen 0 und — 20, 0 und — 40, 0 und — 60 und 0 und — 80 die Fehler: 22,25; 39,75; 48,2 und 100. Nach der Gauß'schen Theorie müssten diese Zahlen beiderseits die folgenden sein: 21,13; 36,74; 45,27; 48,71 und 49,73. Die Fehlervertheilung für gleiche Zwischenräume stellt Fig. 3 dar. Diesen Fall würde man vor sich haben, wenn bei der Beurtheilung zweier Reize der eine möglichst genau aufgefasst werden könnte, während die Fehler ausschließlich bei der Beurtheilung des zweiten begangen würden.

Verlangt man bei 100 Versuchen jedesmal die Angabe eines Unterschiedes, so würde man bei Anwendung gleicher Reize den ersten Reiz 50 mal größer (richtig) und 50 mal kleiner (falsch) als den zweiten schätzen. Wählt man dann zum zweiten Reize die Zulage 20, so erhält man 50 richtige Urtheile entsprechend den positiven Fehlern und 22,25 richtige Urtheile, die dem negativen Fehlergebiet 0 bis — 20 entsprechen. Für die Zulage 40 erhält man entsprechend $50 + 39,75 = 89,75$ richtige Urtheile, die dem ganzen positiven und dem negativen Fehlergebiet 0 bis — 40 zugehören. Ueberhaupt wird für:

$$D = 0, \quad 20, \quad 40, \quad 60, \quad 80$$
$$r = 50; \; 72,25; \; 89,75; \; 98,2; \; 100.$$

Für negative Zulagen erhält man in ähnlicher Weise:

$$D = 0, \quad -20, \quad -40, \quad -60, \quad -80, \quad -100, \quad -120$$
$$f = 50; \; 70,25; \; 84; \; 92,8; \; 96,6; \; 98,9; \; 99,6.$$

Meine Versuche[2] zeigen indessen ein durchaus anderes Verhalten: bei ihnen nimmt die Zahl der richtigen Fälle bei positiven D langsamer zu als die Zahl der falschen Fälle bei negativen D. Durch den Wechsel der Zeitlage war es bei diesen Versuchen auch nicht möglich, immer auf den Normalreiz die Hauptaufmerksamkeit zu lenken. Wenn auch zweifellos der Endreiz genauer beurtheilt

---

1) Letztere lauten bei Fig. 2 wie bei Fig. 1.

2) Phil. Stud. IV, S. 141.

würde, als der zuerst einwirkende, welcher ja nur als Erinnerungsbild dem Gedächtniss vorschwebte, so musste doch diese Ungleichheit dadurch eliminirt werden, dass man den Normalreiz ebenso oft zu Anfang als zu Ende einwirken ließ. Daher muss man annehmen, dass bei der Beurtheilung des zweiten Reizes dieselben Fehler in Rechnung gestellt werden müssen, wie beim ersten Reize. Man erhält sonach noch zwei ebensolche Figuren wie 1 und 2, je nachdem die Fehler nach beiden Seiten als gleich oder verschieden vorauszusetzen sind.

Nehmen wir zunächst an, die Curven 1 seien die richtigen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass R um 20 überschätzt werde und gleichzeitig R_1 um 20 unterschätzt, ebenso groß, als die Wahrscheinlichkeit, dass R um 20 unterschätzt und R_1 um ebenso viel überschätzt werde, vorausgesetzt, dass die Versuche in der Weise ausgeführt werden, dass constante Fehler nicht zur Geltung kommen können. Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit gleich für: $R + 40$ und $R_1 + 20$ wie für $R + 20$ und $R_1 + 40$ oder für: $R - 40$ und $R_1 - 20$ wie für $R - 20$ und $R_1 - 40$ u. s. w. Für die Unterschiede erhalten wir unter Beachtung der Beziehung $R_1 = R$:

$$
\begin{aligned}
(R_1 - 20) - (R + 20) &= - 40,\\
(R_1 + 20) - (R - 20) &= + 40,\\
(R_1 + 20) - (R + 40) &= - 20,\\
(R_1 + 40) - (R + 20) &= + 20,\\
(R_1 - 20) - (R - 40) &= + 20,\\
(R_1 - 40) - (R - 20) &= - 20.
\end{aligned}
$$

Der Unterschied beider Reize ist sonach ebenso oft positiv wie negativ, und zwar sind die Differenzen nach beiden Seiten absolut gleich groß.

Bei Zugrundelegung der Curve 2 würden die Unterschiede die folgenden Werthe erhalten.

$$
\begin{aligned}
(R_1 - 18{,}9) - (R + 21{,}1) &= - 40,\\
(R_1 + 21{,}1) - (R - 18{,}9) &= + 40,\\
(R_1 + 21{,}1) - (R + 44{,}5) &= - 23{,}4,\\
(R_1 + 44{,}5) - (R + 21{,}1) &= + 23{,}4,\\
(R_1 - 18{,}9) - (R - 35{,}5) &= + 16{,}6,\\
(R_1 - 35{,}5) - (R - 18{,}9) &= - 16{,}6.
\end{aligned}
$$

Auch hier sind die Unterschiede nach beiden Seiten von gleicher absoluter Größe. Da bei Beurtheilung der einzelnen Reize die kleinen Fehler häufiger auftreten als größere, so werden auch hier kleine Differenzen öfter sich ergeben, als größere. Wird der eine Reiz überschätzt, der andere unterschätzt, so sind die Unterschiede ihrem Betrage nach gleich denen bei Figur 1, werden beide überschätzt, so sind die Differenzen größer, werden beide unterschätzt, kleiner als bei Figur 1. Die Mittelwerthe aus entsprechenden Ueber- und Unterschätzungen geben wieder die aus Figur 1 gewonnenen Zahlen.

Handelt es sich sonach um die Unterscheidung zweier Reize, von denen jeder zufälligen Fehlern unterworfen ist, so sind die Bedingungen des Gauß'schen Integrals voll und ganz erfüllt, d. h. so sind kleinere Fehler bei Beurtheilung des Unterschiedes häufiger zu erwarten als größere, und die Differenzen haben nach positiver und negativer Seite gleich große absolute Werthe.

Während für die Beurtheilung eines einzelnen Reizes die Fehlervertheilung sich durch Figur 2 darstellt, kann die Fehlervertheilung bei Auffassung des Unterschiedes zweier Reize durch eine der Figur 1 analoge Zeichnung dargestellt werden. Dabei sind nach oben alle Fälle einzutragen, in welchen $R_1 > R$ erscheint, nach unten alle Fälle, in denen $R > R_1$ ist. Die Intervalle 0 und 20, 0 und 40 u. s. w. beziehen sich nur noch auf die Unterschiede der beiden Reize, nicht mehr auf die beobachteten Reizstärken selbst.

Den Unterschied der Figuren 1 und 2 dürfte am besten ein Beispiel erläutern. Bei Figur 2 wird angenommen, der Reiz $R = 200$ werde genau aufgefasst. Dieser Thatsache würde der Punkt 0 entsprechen. Dann wird der Reiz R_1 21,13 mal zwischen 200 und 221,1, 15,61 mal zwischen 221,1 und 244,5 u. s. w. liegen. Die einzelnen Punkte der Linie in Figur 2 stellen also sofort die Werthe von R_1 dar, wenn wir immer 200 hinzufügen. Dasselbe gilt von Figur 1 nicht mehr. Dieselbe besagt lediglich, dass sich in 21,13 Fällen die Reize R_1 und R um 0 bis 20 unterscheiden. Der Unterschied 20 müsste sich bei Figur 2 auf die Reize $R_1 = 220$ und $R = 200$ beziehen, hier kann er sich aus allen möglichen Werthen zusammensetzen, etwa aus: $R_1 = 210$, $R = 190$; $R_1 = 230$, $R = 210$; $R_1 = 190$, $R = 170$ u. s. w.

Verlangt man jedesmal die Angabe eines Unterschiedes, so wird man auch hier unter 100 Fällen 50 richtige und 50 falsche erhalten. Wie steht es aber mit den Gleichheitsfällen, welche bei Annahme einer Schwelle auftreten werden? Offenbar können die beiden Reize einen absolut genommen geringeren Unterschied haben, wenn sie beide unterschätzt werden, als dann, wenn sie beide überschätzt werden, um zur Abgabe des Urtheils richtig oder falsch Veranlassung zu geben. In Figur 1 sind aber nach oben alle Urtheile $R_1 > R$ angegeben, gleichviel ob beide Reize über- oder unterschätzt werden, oder ob der eine überschätzt, der andere unterschätzt wird. Hiernach kann sich eine etwaige Schwellenbestimmung bei diesen Versuchen von vorn herein nur auf die Gewinnung einer mittleren Schwelle richten.

Angenommen, wir erhielten bei Benutzung gleicher Reize genau 42,26 Urtheile gleich, so würde die Schwelle S bei Zugrundelegung der Figur 1 gleich 20 sein sowohl nach positiver, wie nach negativer Seite. Dieser Werth würde aber bei den Versuchen die wahre Schwelle nur dann kennzeichnen, wenn der eine Reiz überschätzt, der andere unterschätzt würde, so dass der Unterschied der Reize 20 wäre. Es müsste:

$$\frac{R+C}{R} = \frac{R}{R-c}$$

und

$$(R+C)-(R-c) = C+c = 20$$

werden, d. h. es würde sich:

$$C = -(R-10) + \sqrt{R^2+10^2}\,, \quad c = 20 - C$$

ergeben. Für den Schwellenwerth $C + c = S$ wird allgemein:

$$C = -\left(R-\frac{S}{2}\right) + \sqrt{R^2+\left(\frac{S}{2}\right)^2}\,,$$

$$c = S - C\,.$$

Für $R = 177{,}2$ würde $C = 10{,}3$, $c = 9{,}7$ sein, also der erhaltene Schwellenwerth für die Reize 187,5 und 167,5 gelten. Werden beide Reize überschätzt, so ist die Schwelle größer, werden beide unterschätzt, so ist sie kleiner als 20. Für 73,48 Gleichheitsurtheile würde die mittlere Schwelle 40 betragen, sie würde sich auf die Reize 198,3 und 158,3 beziehen. Bildet man den Ausdruck: $\frac{198{,}3}{158{,}3} = 1{,}253$, so berechnet sich die obere Schwelle aus: $\frac{177{,}2 + S_0}{177{,}2} = 1{,}253$, d. h. $S_0 = 44{,}83$ und die untere aus: $\frac{177{,}2}{177{,}2 - S_u} = 1{,}253$, d. h. $S_u = 35{,}78$.

In der Regel wird jedoch der Werth $C + c$ unbekannt sein. Dagegen kennt man vielfach aus Versuchen nach der Methode der Minimaländerungen die Verhältnisse:

$$\frac{R + S_0}{R} = \frac{R}{R - S_u} = p\,.$$

Setzt man $R + C = x$ und $R - c = y$, so berechnet sich die mittlere Schwelle aus:

$$\frac{x}{R} = \frac{R}{y}\,,\quad \frac{x}{y} = p\,,$$

und man erhält:

$$x = R\sqrt{p}\,,\quad y = \frac{R}{\sqrt{p}}\,;\quad S = x - y = R\,\frac{p-1}{\sqrt{p}}\,.$$

Sind beide Schwellen S_0 und S_u bekannt, so kann man zur Berechnung der mittleren Schwelle die Formeln benutzen:

$$S = \sqrt{R\,(S_0 - S_u)} = \sqrt{S_0\,S_u}\,,$$

oder, wenn S_0 und S_u wenig verschieden sind, die Näherungsformel:

$$S = \frac{S_0 + S_u}{2}\,.$$

Ist hingegen S oder C, c und S gegeben, so berechnen sich S_0 und S_u aus den Formeln:

$$S_0 = \frac{S^2}{2R} + \sqrt{\left(\frac{S^2}{2R}\right)^2 + S^2} \quad \text{oder} \quad S_0 = R\,\frac{S}{R - c}\,,$$

$$S_u = \sqrt{\left(\frac{S^2}{2R}\right)^2 + S^2} - \frac{S^2}{2R} \quad \text{oder} \quad S_u = R\,\frac{S}{R + C}\,.$$

Ist schließlich S verhältnissmäßig klein, so kann man näherungsweise:

$$\frac{R + \frac{S}{2}}{R - \frac{S}{2}} = p$$

setzen und S_o und S_u berechnen aus:

$$S_o = R\,(p-1) = \frac{2S}{2R - S}, \quad S_u = R\left(\frac{p-1}{p}\right) = \frac{2S}{2R + S}.$$

Für $S = 40$ geben die genauen Formeln: $S_o = 44{,}83$, $S_u = 35{,}78$, die Näherungsformeln: $S_o = 45$, $S_u = 35{,}9$. Für das Verhältniss $\frac{S_o}{R}$ ergeben sich daraus die Werthe 0,253 und 0,254. Die Abweichungen der genauen Formeln und der Näherungsformeln sind also selbst bei verhältnissmäßig großen Werthen von S verschwindend klein zu nennen.

Bestimmt man nach der Berechnung von S für die Zahl g der erhaltenen Gleichheitsfälle den Werth Φ aus $100\,\Phi = g$, so kann man aus der Tabelle für das Gauß'sche Integral für:

$$mS = x$$

den Werth x entnehmen und aus der vorstehenden Gleichung den Werth m berechnen. Kennt man den Werth m, so berechnet sich der wahrscheinliche Fehler aus:

$$F = \frac{0{,}476936}{m}$$

und der mittlere Fehler aus:

$$F_m = 1{,}4826\,F.$$

Legt man den Berechnungen immer die Versuchszahl 100 zu Grunde, so erhält man für $m\delta = 1{,}83$ für $50\,\Phi$ praktisch bereits den Werth 0,5 (theoretisch 0,495). Bezeichnet man diese obere Fehlergrenze, die also bei 50 richtigen Urtheilen sowohl, wie bei 50 falschen (vorausgesetzt, dass beiden Gruppen die Hälfte der gleichen Fälle hinzugefügt worden ist) einmal erreicht werden kann, mit Δ, so berechnet sich dieser Werth aus:

$$\Delta = \frac{1{,}83}{m} = 3{,}84\,F.$$

Die Berechnung dieses Werthes ist für die Beurtheilung der Versuchsergebnisse von besonderer Wichtigkeit, sie lehrt uns die Grenzen kennen, welche die Fehler bei der Beurtheilung des Unterschiedes zweier Reize erreichen. Näherungsweise kann man sagen, dass sich die Fehler etwa bis zum vierfachen Betrag des wahrscheinlichen Fehlers erstrecken.

Der wahrscheinliche Fehler F, wie auch die äußere Fehlergrenze Δ beziehen sich im Vorstehenden immer auf die Beurtheilung des Unterschiedes der beiden Reize. Welche Größe wird der wahrscheinliche Fehler bei jedem der beiden Reize besitzen? Wirken bei der Bestimmung einer Größe zwei von einander unabhängige Fehlerursachen mit, welche einzeln die wahrscheinlichen Fehler F_1 und F_2 erzeugen würden, so ist nach den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Fehler des Gesammtresultates:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}\,.$$

Da die Fehler bei gleichen Reizen gleich groß anzunehmen sind, also $F_2 = F_1$ gesetzt werden kann, ist:

$$F = F_1 \,.\, \sqrt{2}\;;$$

d. h.

$$F_1 = \frac{F}{\sqrt{2}}\,.$$

Da ferner

$$F = \frac{\varrho}{m} \quad \text{und} \quad F_1 = \frac{\varrho}{m_1}$$

ist, so wird:

$$\frac{\varrho}{m_1} = \frac{\varrho}{m\sqrt{2}}\,,$$

also:

$$m_1 = m\sqrt{2}\,.$$

Diese Werthe sind die Mittelwerthe für positive und negative Fehler. Da letztere bei Beurtheilung eines Reizes nicht als gleich groß angenommen werden können, so müssen die wahrscheinlichen Fehler aus:

$$\frac{R + F_1''}{R} = \frac{R}{R - F_1'} \quad \text{und} \quad F_1' + F_1'' = 2\,F_1$$

berechnet werden.

Man erhält als wahrscheinlichen positiven Fehler:

$$F_1'' = -(R - F_1) + \sqrt{R^2 + F_1^2}$$

und als wahrscheinlichen negativen Fehler:

$$F_1' = 2F_1 - F_1''\,.$$

Die entsprechenden Präcisionsmaße sind:

$$m_1'' = \frac{\varrho}{F_1''}\,,\quad m_1' = \frac{\varrho}{F_1'}\,.$$

Im allgemeinen wird man sich jedoch mit der Kenntniss des mittleren wahrscheinlichen Fehlers begnügen, in einzelnen Sinnesgebieten schon deshalb, weil zwischen dem positiven und negativen Fehler überhaupt nur ein geringer Unterschied ist.

Ueberdies gelten ja diese genaueren Bestimmungen nur dann, wenn es sich nur um innere Fehler handelt, die wiederum nur wahrscheinlich dem Weber'schen Gesetz unterworfen sind, also nach positiver und negativer Seite von verschiedener Größe angenommen werden müssen.

Die Grenzen, innerhalb welcher die Fehler δ liegen, hängen von verschiedenen Ursachen ab. Zunächst können bei der Herstellung der Reize gewisse Fehler begangen werden. Dieselben werden, soweit sie in den Apparaten ihre Ursache haben, dem Weber'schen Gesetz nicht unterworfen sein, dagegen vom Weber'schen Gesetz abhängen, soweit unsere Sinne in Frage kommen. Die Hauptrolle spielen aber jedenfalls die Fehler, die wir bei der Beurtheilung begehen, und die dem Weber'schen Gesetz unterliegen. Benutzt man z. B. zur Messung kleinerer und größerer Strecken denselben in Millimeter eingetheilten Maßstab, so wird man bei kleineren Strecken dieselben Fehler begehen wie bei größeren, vorausgesetzt, dass man in beiden Fällen mit derselben Aufmerksamkeit beobachtet, die Fehler werden jedoch verschieden ausfallen, wenn man zur Messung der kleineren Strecken feinere Maßstäbe anwendet.

Die Versuche mit gleichen Reizen gestatten bereits eine Prüfung des Weber'schen Gesetzes. Man muss zu diesem Zwecke Versuche mit je zwei gleichen Reizen von verschiedenen Stärken ausführen. Dann muss sich für dieselbe Versuchszahl immer dieselbe Zahl von

Gleichheitsurtheilen ergeben, wenn die inneren und äußeren Fehler dem Weber'schen Gesetze unterworfen sein sollen. Kennt man S, so lassen sich m, F, F_m und $\varDelta$ berechnen, m muss indirect, die übrigen Größen müssen direct der angewandten Reizstärke proportional sein. Treffen diese Bedingungen nicht zu, so kann man daraus noch nicht auf die Ungültigkeit des Weber'schen Gesetzes schließen, da die äußeren Fehler das Nichtzutreffen bedingen könnten. Da die inneren Fehler die Schwelle vermuthlich nicht überschreiten, so kann man aus Versuchen mit gleichen Reizen bereits einen Schluss auf die vorhandenen Fehlerursachen machen, auch wenn man weder S, noch F oder F_m kennt. Ueberwiegen nämlich die richtigen und falschen Fälle die gleichen bedeutend, so sind jedenfalls äußere Fehlerursachen in hohem Maße wirksam, je geringer aber die Zahl der richtigen und falschen Fälle ist, um so geringer wird auch der Spielraum der äußeren Fehler sein. In dieser Hinsicht sind Versuche mit gleichen Reizen vor allen Dingen zur Prüfung der Versuchstechnik geeignet.

Dabei ist vorausgesetzt, dass die Versuche möglichst bei gleicher Aufmerksamkeit und zwar bei normaler Aufmerksamkeit ausgeführt werden. Die Gleichheitsurtheile müssen zugelassen werden, wo ein Unterschied nicht erkannt wird. Natürlich sind auch Versuche vergleichbar, bei denen mit gespannter Aufmerksamkeit beobachtet wurde, wenn nur der Grad der Spannung annähernd als gleich vorausgesetzt werden kann.

Erhält man bei Benutzung gleicher Reize nicht gleich viel richtige und falsche Fälle, so ist ein constanter Fehler vorhanden. Auf die Bestimmung bez. Elimination desselben werden wir im nächsten Abschnitt eingehen.

C. Methode der richtigen und falschen Fälle bei Benutzung verschiedener Reize.

Führt man die Versuche mit normaler Aufmerksamkeit aus, wie bei der Methode der Minimaländerungen, so werden jedenfalls Gleichheitsurtheile in größerer Zahl auftreten. Schließt man dieselben aus oder lässt man sie nur in geringer Zahl zu, so müssen sich entweder die Fehlergrenzen wesentlich erweitern, oder es muss auf den Act der Unterscheidung mehr Aufmerksamkeit verwandt werden. Bei meinen Versuchen wurde auf die Unterscheidung besondere Aufmerksamkeit verwandt, der Schwellenwerth musste dadurch wesentlich herabgedrückt werden. Bei völligem Ausschluss der Gleichheitsurtheile müsste die Schwelle eigentlich den Werth 0 haben. Dieser Fall wird in Wirklichkeit niemals eintreten. Wir werden auch bei Ausschluss der Gleichheitsurtheile trotz angestrengter Aufmerksamkeit in einzelnen Fällen einen Unterschied nicht wahrnehmen, aber gezwungen, einen solchen festzustellen, werden wir bald richtig, bald falsch urtheilen. Wir überlassen also die Gleichheitsurtheile dem Gesetz der Wahrscheinlichkeit. Da dasselbe nur bei größeren Zahlen zutrifft, so unterliegt der Ausschluss dieser Urtheile Bedenken. Es lassen sich indess noch weitere Bedenken gegen die Ausschließung der Gleichheitsurtheile geltend machen. Angenommen, wir stellen Versuche mit positiven Zulagen an. In diesem Falle wird die Zahl der richtigen Fälle mit der Zunahme der Zulage wachsen. Gestattet sind nur die Urtheile richtig und falsch, d. h. die Angaben, ob der größere Reiz wirklich als der stärkere empfunden wird oder ob er schwächer erscheint. Wie leicht wird man da geneigt sein, einen Fall, in welchem ein Unterschied nicht erkannt wird, zu den falschen zu zählen! Meine Versuche haben dies bestätigt; deshalb habe ich die Urtheile gleich in den Fällen zugelassen, in denen ein Unterschied absolut nicht wahrzunehmen war. Die Versuche von Higier lassen das ebenfalls erkennen, denn sie liefern bei Zulassung der Gleichheitsfälle und Halbirung der letzteren mehr richtige Urtheile, als bei Ausschluss der Gleichheitsfälle. Higier erklärt dieses Verhalten anders, er glaubt, man sei vielmehr geneigt, mehr g-Urtheile auf Kosten der falschen zu bilden als auf Kosten der richtigen. Ich sehe keinen Grund ein, warum man einen als falsch erkannten Fall zu den gleichen zu werfen geneigt sein sollte, wenn alle Urtheile zulässig sind; wohl aber wird man einen Gleichheitsfall eher zu den falschen zu stellen geneigt sein, wenn man ihn entweder zu den richtigen oder zu den falschen Fällen bringen muss.

Hieran reiht sich ein weiterer wesentlicher Uebelstand, auf welchen ich ebenfalls bei meinen Versuchen bereits aufmerksam wurde. Bei Ausschluss der Gleichheitsfälle ist man geneigt, bei kleinen Reizunterschieden, bei denen ja die Auffindung des Unterschiedes schwieriger ist, mit verstärkter Aufmerksamkeit zu beobachten. Man erhält dann bei den kleinen Zulagen relativ zu viel richtige Fälle. Auch diese Erfahrung bestätigen, wie wir später sehen werden, die Versuche von Higier.

Gegen die Zulassung der Gleichheitsfälle namentlich dann, wenn sie in größerer Zahl auftreten, sprach jedoch bisher die Unsicherheit ihrer Vertheilungsweise. Die Halbirung derselben führt zu falschen Ergebnissen, wenn die Zahl beträchtlich ist, noch weniger brauchbar hat sich die verhältnissmäßige Vertheilung erwiesen. Um diesen Schwierigkeiten zu entgehen, stellte ich die Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle auf, welche eine gleiche Beurtheilungsweise wie bei der Methode der Minimaländerungen zulässt und eine zu Bedenken Anlass gebende Vertheilung von einer Gruppe von Urtheilen, die den Gleichheitsfällen entsprechen würde, ausschließt.

Später, nachdem ich auch durch Versuche auf anderen Sinnesgebieten, als demjenigen des Gehörsinns, weitere Erfahrungen über die Methode der richtigen und falschen Fälle gewonnen hatte, zeigte sich mir ein einwurfsfreier Weg der Vertheilung der Gleichheitsurtheile.

Ich gehe zuvörderst von der Benutzung zweier Reize aus, von denen der Vergleichsreiz R_1 um $D = 20$ größer ist als der Hauptreiz R. Die in Figur 1 gekennzeichneten Unterschiede werden, wenn man annimmt, dass die Fehler bei beiden Reizen gleich groß geblieben sind, sämmtlich um 20 zunehmen. Lässt man nur richtige und falsche Fälle zu, so werden zu den 50 richtigen Urtheilen bei gleichen Reizen noch die 21,13 Fälle des Fehlergebietes 0 bis — 20 hinzutreten. Man würde folgende Zahlen richtiger Urtheile erhalten müssen:

$$D = 0,\quad 20,\quad 40,\quad 60,\quad 80,\quad 100$$
$$r = 50;\ 71{,}13;\ 86{,}74;\ 95{,}27;\ 98{,}71;\ 99{,}73.$$

Dieselbe Vertheilung ergiebt sich bei den negativen D für die falschen Fälle, wenn man durchweg das Urtheil $R_1 > R$ als richtig, das Urtheil $R_1 < R$ als falsch bezeichnet. Mit diesem Ergebniss stimmen meine bereits früher erwähnten Versuche besser überein, als mit dem auf Seite 577 mitgetheilten.

Indessen ist bei Benutzung größerer Zulagen zu beachten, dass der bei der Auffassung des Reizes R_1 begangene wahrscheinliche Fehler größer sein wird, als der entsprechende Fehler bei Auffassung des Reizes R. Bezeichnen wir diese Fehler durch F_2 und F_1, so ist:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}\,. \tag{I}$$

Die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes vorausgesetzt, wird:

$$\begin{Bmatrix} F_1 = p R_1 \\ F_2 = p R_1 \end{Bmatrix} \tag{II}$$

sein, worin p einen echten Bruch darstellt. Man erhält demnach:

$$F = p \sqrt{R^2 + R_1^2} \tag{III}$$

Da $F = \frac{\varrho}{m}$ ist, ergibt sich hieraus:

$$m = \frac{\varrho}{p\sqrt{R^2 + R_1^2}} = \frac{c}{\sqrt{R^2 + R_1^2}}, \tag{IV}$$

wenn man den constanten Werth $\frac{\varrho}{p}$ mit c bezeichnet.

Setzt man: $R_1 = R \pm D$, so erhält man:

$$m = \frac{c}{\sqrt{2R^2 \pm 2RD + D^2}} = \frac{c}{\sqrt{2R(R \pm D) + D^2}} = \frac{c}{\sqrt{2R \,.\, R_1 + D^2}}\,. \tag{V}$$

Die Versuche müssen jedoch, um Fehlschläge zu vermeiden, bei verhältnissmäßig kleinen Werthen von D ausgeführt werden. Für solche ist aber D^2 im Vergleich zu $2R(R \pm D)$ sehr klein. Man kann daher näherungsweise setzen:

$$m = \frac{c}{\sqrt{2R(R \pm D)}} = \frac{c}{\sqrt{2R \,.\, R_1}}\,. \tag{VI}$$

Eine genauere und zugleich bequemere Näherungsformel erhält man, wenn man den Ausdruck zunächst in der Form:

$$m = \frac{c}{\sqrt{2}.\sqrt{R(R \pm D) + \frac{D^2}{2}}}$$

schreibt. Vernachlässigt man nicht, wie vorhin, unter der zweiten Wurzel den Ausdruck $\frac{D^2}{2}$, welcher ja im Vergleich zu $R(R \pm D)$ ebenso klein ist, wie D^2 im Vergleich zu $2R(R \pm D)$, sondern lässt man nur $\frac{D^2}{4}$ unbeachtet, so wird:

$$m = \frac{c}{\sqrt{2}\sqrt{R(R \pm D) + \frac{D^2}{4}}} = \frac{c}{1{,}414\sqrt{R^2 \pm RD + \left(\frac{D}{2}\right)^2}}$$

also:

$$m = \frac{c}{1{,}414 \,.\left(R \pm \frac{D}{2}\right)} = \frac{c}{0{,}707 \,.(2R \pm D)} = \frac{c}{0{,}707 \,.\,(R + R_1)} \,. \qquad \text{VI)}$$

Ist schließlich D sehr klein, eine Voraussetzung, die Fechner immer zu Grunde legt, so kann man auch die erste Potenz von D vernachlässigen. Man erhält alsdann:

$$m = \frac{c}{1{,}414 R} \,. \qquad \text{VII)}$$

Mit Rücksicht auf den Werth der Wurzelgröße $\sqrt{R^2 + R_1{}^2} = \frac{c}{m}$ erhält man aus den Gleichungen I) bis III):

$$\left\{\begin{array}{l} F = \frac{\varrho}{m}, \quad F_1 = \frac{R\varrho}{c}, \quad F_2 = \frac{R_1\varrho}{c}. \\ \\ \quad m_1 = \frac{c}{R}, \quad m_2 = \frac{c}{R_1}. \end{array}\right\} \qquad \text{VIII)}$$

Berechnet man auf Grund der Annahme $m = 0{,}0197$ für $D = 0$ den Werth c, so erhält man: $c = mR\sqrt{2} = 4{,}936$. Auf Grund dieses Werthes hat man die Größen m für die Zulagen $\pm D = 20$, 40 u. s. w. zu berechnen und unter Zuhilfenahme der Tabelle für das Gauß'sche Integral die Fehlervertheilung für die genannten Grenzen zu bestimmen. Addirt man zu den auf solche Weise gewonnenen Zahlen jedes Mal 50, so erhält man:

	$D =$	0,	20,	40,	60,	80,	100,	120,
berechnet	r =	50;	70,06;	84,03;	92,05;	96,30;	98,31;	99,65;
beobachtet	r =	49,75;	70;	83,75;	91,5;	96;	98;	99,2.

	$D =$	0,	-20,	-40,	-60,	-80.
berechnet	$f =$	50;	72,18;	89,33;	97,55;	99,71;
beobachtet	$f =$	50,25;	72,5;	89;	97,5;	100.

Die berechneten Werthe stimmen völlig genau mit der Theorie überein, die beobachteten wurden bei meinen Versuchen [1]) erhalten, sie sind aus einer Curve entnommen, da ich z. Th. andere D benutzte. Die Uebereinstimmung kann schwerlich besser erwartet werden. Dazu kommt, dass bei meiner Beobachtungsreihe die Gleichheitsfälle nicht ganz richtig vertheilt worden sind.

Bei den Versuchen von Higier müssten sich für den Reiz 200 bei Vernachlässigung der geringen Aenderungen von m für positive und negative D die folgenden Fälle ergeben:

$D =$	0,	± 2,	± 4,	± 6,	± 8,	± 10.
r, f $=$	50;	60,6;	70,25;	78,7;	85,6;	90,8.

Die Abweichungen sind, wie Tabelle XII [2]) erkennen lässt, sehr bedeutend, doch sind sie zum größten Theile durch den Einfluss des constanten Fehlers bedingt.

Die Behandlung meiner Versuche [3]) nach der Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle in derselben Weise (d. h. bei Halbirung der Gleichheitsfälle) würde zu folgenden Werthen führen:

$D =$	0;	11,3;	22,5;	33,5;	44;	53,8;	63,1;	72,7;	82,2;	91,8.
$r =$	53,25;	56;	60,5;	67,12;	75,5;	84;	91;	96,12;	98,75;	99,75.

Die Differenzen zwischen den r nehmen hier bis zu 75,5 zu und dann ab, ein Verhalten, welches sich mit dem Gauß'schen Integral durchaus im Widerspruch befindet. In ganz ähnlicher Weise verhalten sich die Versuche von Lorenz. Bei Halbirung der Gleichheitsfälle widersprechen sie vollständig den Forderungen des Gaußschen Gesetzes.

Um zunächst zu einer richtigen und begründeten Vertheilung der g-Fälle zu gelangen, gehen wir von dem Falle $D = 0$, $R_1 = R = 177{,}2$, $m = 0{,}02$ aus. Die Fehlervertheilung stellt alsdann Fig. 4 (Taf. II) dar. Für $D = 20$ ist $m = 0{,}019$. Rücken wir diese Linie

---

1) Phil. Stud. IV, S. 141. 2) Phil. Stud. VII, S. 253.
3) Phil. Stud. IV, S. 262.

um 20 (10 cm) höher, so gibt Fig. 5 die Zahl der richtigen Fälle an (r). Für $D = 40$ ist $m = 0{,}018$; die Fehlervertheilung und Anzahl der richtigen Fälle lässt Fig. 6 erkennen. Für $D = 60$, $m = 0{,}017$ giebt das Entsprechende Fig. 7 und für $D = 80$, $m = 0{,}016$ Fig. 8. Vom Kreuze aus liegen nach oben und unten immer 50 Fälle, was bei der Berechnung der richtigen Fälle zu beachten ist, da die letzten kleinen Brüche weggelassen sind. Für die mittlere Schwelle $S = 10$ würde man folgende Zahlen für r und g erhalten:

$D =$	0,	20,	40,	60,	80,
$r =$	38,85;	60,59;	77,75;	88,53;	94,34;
$g =$	22,3;	18,4;	12,1;	6,85;	3,57.

Bei Halbirung der Gleichheitsfälle würden folgende Fälle zu den richtigen kommen:

$$\frac{g}{2} = 11{,}15;\quad 9{,}2;\quad 6{,}05;\quad 3{,}42;\quad 1{,}78;$$

während die richtige Vertheilung wäre:

$$11{,}15;\quad 9{,}86;\quad 6{,}82;\quad 4{,}01;\quad 2{,}15.$$

Die Differenzen sind in diesem Falle nur unbedeutend. Die Werthe r werden bei Halbirung für $D > 0$ zu klein gefunden. In der That sind auch die von mir Seite 589 angegebenen r kleiner als die berechneten Werthe.

Für die Schwelle $S = 50$ würde man erhalten:

$D =$	0,	20,	40,	60,	80,
$r =$	7,85;	21,01;	39,95;	59,5;	75,14;
$g =$	84,3;	75,99;	58,95;	40,09;	24,78.

Für $r + \frac{g}{2}$ ergeben sich hier die Werthe:

$$r + \frac{g}{2} = 50;\quad 59{,}01;\quad 69{,}42;\quad 79{,}54;\quad 87{,}53,$$

während die richtigen Werthe sein würden:

$$50;\quad 70{,}45;\quad 84{,}57;\quad 92{,}54;\quad 96{,}49.$$

Hier sind die Abweichungen so bedeutend, dass die Halbirung der Gleichheitsfälle unbedingt verworfen werden muss. Meine auf Seite 590 erwähnten Versuche würden diesem Falle nahezu entsprechen.

Wir erhielten bei $D = 20$ für die Schwelle $S = 10$ theoretisch 60,59 {50 + 10,59} richtige Urtheile. Dieselbe Zahl würden wir unter Nichtbeachtung der Schwelle für die Zulage $D - S = 10$ erhalten haben bei Benutzung desselben m. Für die Zulage $D + S = 30$ würden wir die Fälle $r + g = 78{,}99$ {50 + 10,59 + 9,86 + 8,54} erhalten haben.

Nun ist unter Benutzung des Gauß'schen Integrals:

$$\frac{r}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m(D-S)=t_1} e^{-t^2} dt ,$$

$$\frac{r+g}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m(D+S)=t_2} e^{-t^2} dt . \text{ [1]}$$

Daraus ergibt sich in bekannter Weise für die mittlere Schwelle:

$$S = \frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1} D . \qquad \text{IX)}$$

Hierbei ist jedoch zu beachten, dass bei Benutzung verschiedener Reize die mittlere Schwelle S eine andere Bedeutung hat, als bei gleichen Reizen. Bei gleichen Reizen war:

1) Die hier benutzten Formeln erheischen die Anwendung der von Fechner gegebenen Tabellen für das Gauß'sche Integral (Fechner, Elemente der Psychophysik, I, S. 108—111; Revision der Hauptpunkte der Psychophysik, S. 66 u. 67). — Will man sich der früher erwähnten Meyer'schen Tabelle für Φ bedienen, so muss man folgende Umformung vornehmen:

$$\left\{ \begin{aligned} 2\left\{\frac{r}{n} - \frac{1}{2}\right\} = \frac{2r}{n} - 1 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m(D-S)=\gamma_1} e^{-t^2} dt , \\ \frac{2(r+g)}{n} - 1 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m(D+S)=\gamma_2} e^{-t^2} dt . \end{aligned} \right\}$$

Man sucht den Werth der linken Seite unter $\Phi(\gamma)$ und findet γ_1 und γ_2 unter γ. Ist bei Fechner $\frac{r}{n} < \frac{1}{2}$, im vorliegenden Falle die linke Seite (Φ) kleiner als 1, so sucht man im ersteren Falle den Werth für $1 - \frac{r}{n}$, im letzteren Falle für $-\Phi$ und nimmt t bez. γ negativ. Ich behalte für die Folge die Fechner'sche Tabelle bei, weil sie dem Psychophysiker leichter zugänglich sein dürfte.

$$\frac{R+C}{R}=\frac{R}{R-c}; \quad C+c=S.$$

Die mittlere Schwelle bezog sich auf den Fall, dass der eine Reiz überschätzt, der andere unterschätzt wurde. Jetzt wird die mittlere Schwelle erhalten, wenn der Reiz $R+D$ überschätzt und der Reiz R unterschätzt wird. An Stelle der obigen Gleichungen treten jetzt die Gleichungen:

$$\frac{(R+D)+C}{R+D}=\frac{R}{R-c}; \quad C+c+D=S.$$

Dieselben gehen für $D=0$ in die früheren Gleichungen über und geben für $D=S$ den Werth:

$$C+c=0,$$

was nur möglich ist, wenn $C=c=0$ ist. Für den Werth $D=S$ geht demnach die mittlere Schwelle in die obere Schwelle über. Die Auflösung der obigen Gleichungen gibt:

$$c=\frac{S}{2}+R-\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2+R(R+D)}; \quad C=S-D-c. \tag{X}$$

Die obere und untere Schwelle berechnen sich aus den Gleichungen:

$$\frac{S_0+R}{R}=\frac{R+D+C}{R-c}$$

und

$$\frac{R}{R-S_u}=\frac{R+D+C}{R-c}$$

unter Beachtung des Werthes von S zu:

$$\left\{\begin{aligned} S_0 &= R\,\frac{S}{R-c}, \\ S_u &= R\,\frac{S}{R+C+D}. \end{aligned}\right\} \tag{XI}$$

An Stelle dieser Formeln kann man sich der Näherungsformeln:

$$S_0=\frac{2RS}{2R+D-S}, \quad S_u=\frac{2RS}{2R+D+S} \tag{XII}$$

bedienen.

Der Werth IX) für die mittlere Schwelle, welcher augenscheinlich mit der Müller'schen Schwelle identisch zu sein scheint, ist jedoch bei Benutzung verschiedener D keineswegs constant, sondern er wächst für positive D und nimmt ab für negative; er ist sonach zur Prüfung des Weber'schen Gesetzes nicht geeignet. Müller legt bekanntlich gerade dieser Schwellenbestimmung eine große Bedeutung bei, er hält gerade deshalb die Methode der richtigen und falschen Fälle für geeignet, zu einer näheren Prüfung des Weber'schen Gesetzes verwandt zu werden. Unter Beachtung dessen, was wir früher bereits über die mittlere Schwelle gefunden haben, lässt sich sagen, dass diese mittlere Schwelle bei Benutzung gleicher Reize dem geometrischen Mittel aus der oberen und unteren Schwelle gleich ist, dass sie sich bei Benutzung positiver D mehr und mehr der oberen Schwelle nähert, dass sie dieselbe für $D = S_0$ erreicht und dann größer wird. Bei Benutzung negativer D nähert sich die mittlere Schwelle der unteren Schwelle, erreicht dieselbe für $D = S_u$ und nimmt dann weiterhin ab. Da diese mittlere Schwelle sonach mit der oberen oder unteren Schwelle nicht identisch ist, wollen wir sie in Rücksicht auf die später zu erörternde Verwendungsweise nach Fechner als Theilungsschwelle bezeichnen.

Die im vorstehenden charakterisirten Aenderungen der mittleren Schwelle bedingen aber naturgemäß eine Vergrößerung des Gebietes der Gleichheitsfälle. Bei den Versuchen zeigt sich dies darin, dass sich mehr Gleichheitsurtheile ergeben, als die Reihe für das constante Schwellengebiet $S = 10$ für g angibt.

Für diese Schwelle war:

$$D = \quad 0, \quad 20, \quad 40, \quad 60, \quad 80,$$
$$g = 22{,}3;\ 18{,}4;\ 12{,}1;\ 6{,}85;\ 3{,}75;$$

meine Versuche ergaben indessen:

$$g = 21{,}5;\ 18;\ 15;\ 10{,}5;\ 6{,}5.$$

Diese Zahlen bestätigen die obige Folgerung vollkommen, wenn wir uns die letzteren Werthe um je 0,8 vermehrt denken. Denn für $D = 0$ müssen die Zahlen für g in Uebereinstimmung gebracht werden.

Die Formeln IX) und XI) oder XII) müssen an Stelle der von Müller abgeleiteten Formel IX), oder an Stelle der Fechner'schen Formeln:

$$\left\{\begin{aligned} S_1 &= \frac{t_0 - t_1}{t_0} D \\ S_2 &= \frac{t_2 - t_0}{t_0} D \end{aligned}\right. \qquad \text{XIII)}$$

treten, wenn man das Weber'sche Gesetz auf Grund der durch die Methode der richtigen und falschen Fälle gebotenen Schwellenbestimmung prüfen will. In meiner früheren Abhandlung habe ich noch an der Fechner'schen Bestimmungsweise festgehalten.

Für den obigen Fall ist: $\frac{r}{n} = 0{,}6059$; $\frac{r+g}{n} = 0{,}7899$; $D = 20$; $t_1 = 0{,}1900$; $t_2 = 0{,}5700$, also nach Formel IX):

$$S = \frac{0{,}5700 - 0{,}1900}{0{,}5700 + 0{,}1900} \,.\, 20 = 10\,.$$

Die Formeln XI) geben: $S_0 = 9{,}74$; $S_u = 9{,}23$, die Formeln XII): $S_0 = 9{,}83$ und $S_u = 9{,}32$; die Formeln XIII) $S_1 = 9{,}64$, $S_2 = 11{,}1$.

Im andern Falle war für $D = 20$: $\frac{r}{n} = 0{,}2101$; $\frac{r+g}{n} = 0{,}97$; $t_1 = 0{,}5700$; $t_2 = 1{,}3297$, also nach Formel IX):

$$S = \frac{1{,}3297 - (-0{,}5700)}{1{,}3297 - 0{,}5700} \,.\, 20 = 2{,}5 \,.\, 20 = 50\,.$$

Die Formeln XI) geben: $S_0 = 54{,}16$, $S_u = 41{,}48$, die Formeln XII): $S_0 = 54{,}58$ und $S_u = 41{,}73$, die Formeln XIII): $S_1 = 90{,}8$ und $S_2 = 145$.

Die Abweichungen zwischen den genauen Werthen (XI) und den Näherungswerthen (XII) betragen noch nicht 1%, während die Abweichungen zwischen den genauen Werthen (S_0) und den Müller-schen im ersten Falle 2,6%, im letzten Falle 8,3% und die Abweichungen zwischen den genauen Werthen (S_0 und S_u) und den Fechner'schen (S_2 und S_1) im ersten Falle etwa 3 bis 14%, im letzten Falle bis weit über 100% betragen. Die letzteren Werthe sind also völlig unbrauchbar. Nur bei verhältnissmäßig kleiner Zahl von Gleichheitsfällen geben die Müller'schen und Fechner'schen Formeln angenähert richtige und überhaupt brauchbare Werthe:

Die Formel IX) lässt sich auch schreiben:

$$S = \frac{1 - \frac{t_1}{t_2}}{1 + \frac{t_1}{t_2}} D.$$

Kommen nur richtige und gleiche Fälle vor, so wird $t_2 = \infty$, mithin $S = D$. Die Formel ist sonach nur so lange anwendbar, so lange noch falsche Fälle auftreten. In diesem Falle werden aber auch die Fechner'schen Formeln unbrauchbar, denn S_2 wird selbst unendlich. Bei Benutzung gleicher Reize ist $r = f$, mithin werden die Werthe $\frac{r}{n}$ und $\frac{r+g}{n}$ für t_1 und t_2 gleiche, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen behaftete Werthe geben, d. h. S wird ∞. In diesem Falle wird aber $\frac{r + \frac{g}{2}}{n} = 0{,}50$, also $t_o = 0$. Da dieser Werth im Nenner der Fechner'schen Formel auftritt, ergibt sich auch hier ein Fehlschlag. Hiernach dürfte Formel IX) im Vergleich mit den Fechner'schen Formeln in keiner Weise im Nachtheil sein. Auf einen weiteren mathematischen Einwand gegen Formel IX) wird später hinzuweisen sein. Einen Nachtheil besitzen beide Formeln, die Fehlschläge bei verhältnissmäßig großen Zulagen, bei denen falsche Fälle nicht mehr auftreten. Solche Fehlschläge sind bei meinen Versuchen nach der Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle, ebenso bei den Versuchen von Lorenz[1]) fast durchgängig aufgetreten. Deshalb muss von einer Verwendung der obigen Formeln für diese Versuche Abstand genommen werden.

Alle Forscher, die sich der Müller'schen und Fechner'schen Formeln bedient haben, haben auf den geringen Unterschied der beiderseitigen Schwellenwerthe hingewiesen. Dies ist aber nur möglich, wenn die Zahl der Gleichheitsfälle im Vergleich zu der Zahl der richtigen und falschen Fälle gering ist. Dann weichen diese Schwellenwerthe auch nur wenig von den Werthen S_0 und S_u der Formeln XI) und XII) ab. Wollte man aber in solchen Fällen die Prüfung des Weber'schen Gesetzes auf die Berechnung der Schwelle stützen, so würde man das Hauptgewicht gerade auf die

1) Phil. Stud. II, S. 417 u. 418.

geringere Zahl der Versuche lenken; die Hauptbedingung der Methode, dass der wahrscheinliche Fehler einen constanten Bruchtheil des zugehörigen Reizes bilden müsse, würde unbeachtet bleiben. Wird die Zahl der Gleichheitsfälle größer, so weichen die Werthe der Müller'schen Formel bedeutend von den Werthen der Formeln XI) oder XII) ab, die Fechner'schen Formeln geben völlig untaugliche Werthe. Sie würden jedoch völlig richtige Werthe (d. h. mittlere Schwellenwerthe) liefern, wenn man die Gleichheitsfälle in der richtigen Weise vertheilte. Der Fehler liegt in der Halbirung der Gleichheitsfälle.

Wir erhielten oben für $D = 20$, $\frac{r}{n} = 0{,}2101$, $\frac{r'}{n} = 0{,}5901$, $\frac{r+g}{n} = 0{,}97$ für die Fechner'schen Schwellen 90,8 und 145. Benutzen wir für $\frac{r'}{n}$ den richtigen Werth 0,7045, so erhalten wir:

$$S_1 = \frac{0{,}3800 - (-0{,}5700)}{0{,}3800} \cdot 20 = 50\,,$$

$$S_2 = \frac{1{,}3297 - 0{,}3800}{0{,}3800} \cdot 20 = 49{,}94\,.$$

Diese Werthe stimmen unter sich fast völlig überein und ebenso mit dem auf Grund der Müller'schen Formel IX) berechneten. Die obere und untere Schwelle müssten dann wieder mittels der der Formeln XI) und XII) bestimmt werden.

Addirt man die Fechner'schen Formeln unter der Annahme $S_1 = S_2 = S$, so erhält man:

$$S = \frac{t_2 - t_1}{2\,t_0}\,D\,,$$

d. h.

$$t_0 = \frac{t_2 - t_1}{2\,S}\,D\,.$$

Andererseits ist nach Fechner:

$$t_0 = m D\,.$$

Demnach wird:

$$m = \frac{t_2 - t_1}{2\,S}\,.$$

Formel IX) gibt aber:

$$\frac{t_2 - t_1}{2\,S} = \frac{t_2 + t_1}{2\,D}\,,$$

also wird:

$$\left\{\begin{aligned} t_0 &= \frac{t_2 + t_1}{2}, \\ m &= \frac{t_2 + t_1}{2D}. \end{aligned}\right. \qquad \text{XIV)}$$

Der letztere Werth ergibt sich sofort durch Addition der Gleichungen:

$$m(D - S) = t_1,$$

$$m(D + S) = t_2,$$

aus denen früher S berechnet wurde, und t_0 durch Vergleichung mit der Fechner'schen Formel:

$$m = \frac{t_0}{D}.$$

Die einfache Formel für t_0 lehrt uns aber die einzig richtige Vertheilung der Gleichheitsfälle kennen. Man sucht die Werthe t_1 und t_2 für $\frac{r}{n}$ und $\frac{r+g}{n}$ in der Fechner'schen Tabelle auf, nimmt das arithmetische Mittel und sucht zu dem erhaltenen Werthe das Verhältniss $\frac{r'}{n}$. Dann gibt der Ausdruck: $n\left(\frac{r'}{n} - \frac{r}{n}\right)$ den Werth $r' - r$, d. h. die Anzahl der Gleichheitsfälle, welche zu den richtigen gezählt werden müssen.

Da bei Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes:

$$m\sqrt{2R(R \pm D) + D^2} = m\sqrt{2RR_1 + D^2} = \text{const.} = c,$$

oder:

$$1{,}414\, m\left(R \pm \frac{D}{2}\right) = 0{,}707\, m(R + R_1) = c,$$

oder:

$$m\sqrt{2R(R \pm D)} = m\sqrt{2RR_1} = c,$$

oder endlich:

$$1{,}414\,.\,m\,.\,R = c \qquad \text{XV)}$$

sein muss, je nachdem D groß, klein oder sehr klein gegen R ist, so braucht man die Vertheilung der Gleichheitsfälle nicht erst zu berechnen, sondern man muss für m an Stelle der Fechner'schen Formel:

$$m = \frac{t_0}{D},$$

welcher die fehlerhafte Vertheilung der Gleichheitsfälle anhaftet, die Formel:

$$m = \frac{t_1 + t_2}{2D}$$

anwenden. Will man von der Berechnung der wahrscheinlichen Fehler sowie der Präcisionsmaße für die einzelnen Reize absehen, so kann man sich auf die Untersuchung der Constanz der Ausdrücke:

$$\left\{\begin{aligned} m\sqrt{2RR_1 + D^2} &= c, \\ m(R + R_1) &= c, \\ m &= c \end{aligned}\right\} \qquad \text{XVI)}$$

beschränken.

Während Müller die Bestimmung der Unterschiedsschwelle S als den Hauptzweck der Methode der richtigen und falschen Fälle betrachtet, fordert Fechner für kleine Zulagen bei demselben Hauptreiz die Constanz des Präcisionsmaßes. Wir haben gesehen, dass sich die Müller'sche Schwelle nur als Theilungsschwelle eignet, und dass das Fechner'sche Kriterium für die Gültigkeit des Weber-schen Gesetzes noch durch die beiden ersten Formeln unter XVI) erweitert werden muss. Soll die Müller'sche Schwelle zur Prüfung des Weber'schen Gesetzes verwandt werden, so muss ihr Werth in die Formeln XI) und XII) eingeführt werden. Dann müssen sich die Ausdrücke:

$$\frac{S_0 + R}{R} = \frac{R}{R - S_u} = \text{const.} \qquad \text{XVII)}$$

erweisen.

Für die Schwelle $S = 10$ war: $\frac{r}{n} = 0{,}6059$, $\frac{r+g}{n} = 0{,}7899$, $t_1 + t_2 = 0{,}1900 + 0{,}5700 = 0{,}7600$, also: $\frac{t_2 + t_1}{2} = 0{,}3800$. Diesem Werthe entspricht nach der Fechner'schen Tabelle 0,7045. Demnach ist $n\left(\frac{r'}{n} - \frac{r}{n}\right) = 100\,(0{,}7045 - 0{,}6059) = 9{,}86$. Dieser Werth stimmt vollständig mit dem auf S. 591 angegebenen überein. Im andern Falle war: $\frac{r}{n} = 0{,}2101$, $\frac{r+g}{n} = 0{,}97$, $t_1 + t_2 = 1{,}3297 - 0{,}5700 = 0{,}7597$, also: $\frac{t_1 + t_2}{2} = 0{,}3798$. Diesem Werthe entspricht:

0,7045, mithin ist 100 . 0,7045 = 70,45. Dieser Werth findet sich Seite 591 als der richtige angegeben.

Damit ist das Princip der Vertheilung der Gleichheitsfälle in einfachster Weise gelöst. Bei den Versuchen muss man sich auf solche Zulagen beschränken, welche noch falsche Fälle liefern, oder bei denen $r + g < 100$ ist.

Ueber die Bedeutung von m ist noch eine wichtige Bemerkung hinzuzufügen. Es soll die Präcision darstellen, mit welcher der Unterschied der beiden Reize aufgefasst wird. Nun befinden sich aber unter den richtigen Urtheilen, welche bei der Bestimmung von m maßgebend sind, mehr oder weniger Gleichheitsurtheile, bei denen der Unterschied gar nicht erkannt wird. Der Werth m bezieht sich also auf die bei der Beurtheilung der beiden Reize überhaupt vorhandenen Unterschiede zwischen 0 und δ, gleichviel ob dieselben erkannt werden oder nicht. Neben dem Werthe m ist alsdann der Werth S bez. S_0 von entscheidender Bedeutung, insofern er die Grenze angibt, bis zu welcher die vorhandenen Unterschiede nicht erkannt werden.

Der Werth m wird um so größer ausfallen, je kleiner der Spielraum der zufälligen Fehler ist, S_0 wird um so kleiner sein, je feiner die Beurtheilung der Reizunterschiede ist. Sonach wird man das wirkliche Maß für die Genauigkeit der Auffassung etwa durch den Ausdruck:

$$M = \frac{m}{S_0} R \qquad \text{XVIII)}$$

darstellen können. Für negative Zulagen, d. h. für $R > R_1$, kann man sich derselben Formeln bedienen, wenn man entweder an Stelle der richtigen Fälle die falschen verwendet, oder wenn man, wie es von Higier geschieht, die Fälle $R_1 > R$ als falsch, die Fälle $R_1 < R$ als richtig bezeichnet.

Bereits Fechner und neuerdings Higier führen gegen die Formel IX) zur Bestimmung der Schwelle den extremen Fall an, in welchem $\frac{r}{n} = \frac{1}{2}$, das zugehörige $t_1 = 0$ und die Schwelle nach Formel IX) $= D$, nach Fechner $= \frac{t_2}{2\,t_0}$ wird. Higier betont, dass die Schwelle einem constanten D gleich werden kann schon unter der Bedingung, dass die Zahl der richtigen Fälle 50% der Gesammtzahl beträgt, und ganz unabhängig davon, wieviel falsche und wieviel Nullfälle sich finden. Dies sei jedoch für die Größe der Unterschiedsschwelle, welche ihrer Definition nach von den g mitbestimmt werde, nicht gleichgültig. Sachlich erledigt sich dieser Einwand durch den Hinweis darauf, dass eine Identität zwischen der Unterschiedsschwelle und der Theilungsschwelle gar nicht besteht. Für die Versuche, welche $\frac{r}{n} = \frac{1}{2}$ geben, ist zwar jederzeit $S_0 = D$, aber je nach der Zahl der Gleichheitsfälle wird das durch die zweite Gleichung XIV) definirte m ein anderes und somit erhält auch der Ausdruck XVIII) andere Werthe. Es genügt eben weder der Ausdruck S_0 noch m allein zur vollen Charakteristik der Versuche.

Der fragliche Einwand trifft aber auch die Formel IX) gar nicht, sondern er kehrt sich gegen die Fechner'schen Formeln. Angenommen es sei $D = 20$, $\frac{r}{n} = \frac{1}{2}$, $g = 35{,}88$, $f = 14{,}12$ oder $D = 40$, $\frac{r}{n} = \frac{1}{2}$, $g = 47{,}91$, $f = 2{,}09$, wie es den Figuren 5 und 6 entspricht. Dann wird nach Formel IX): $S = 20$; 40, nach den Formeln XIII): $S_1 = 20$, $S_2 = 26{,}12$; $S_1 = 40$, $S_2 = 86{,}8$. Die zweite Fechner'sche Formel liefert demnach für große Werthe von g durchaus falsche Werthe.

Tritt eine Aenderung der Versuchstechnik ein, so kann man für dasselbe $D = 20$ etwa erhalten: $\frac{r}{n} = \frac{1}{2}$, $g = 10$, $f = 40$ oder $\frac{r}{n} = \frac{1}{2}$, $g = 20$, $f = 30$. Nach Formel IX) erhält man in beiden Fällen $S = 20$, nach Fechner haben die S_1 wieder den nämlichen Werth, für S_2 erhält man 20,24 und 21,4. Während die Zahl der g auf das doppelte gestiegen ist, ist die Schwelle S_2 nur um 1,16 gewachsen. Diese Zunahme hat nichts zu bedeuten, wenn man bedenkt, dass in den obigen Beispielen der Zunahme der Fälle g von 35,88 bis 47,91 eine Zunahme von S von 20 bis 40, von S_2 von 26,12 bis 86,8 entsprach. Führt man bei beiden Versuchsgattungen die Beurtheilung der Reize mit derselben Aufmerksamkeit durch, so wird S eine Aenderung nicht erleiden können, wohl aber wird sich der Werth m ändern. Tritt aber unter Umständen thatsächlich eine Aenderung des Werthes S ein, so zeigt sich dies darin, dass man den Werth $\frac{r}{n} = \frac{1}{2}$ erst bei einem größeren D erreicht.

Führt man Versuche bei zwei verschiedenen Zulagen aus, so kann man eine Bestimmung des Gleichheitspunktes vornehmen. Die erforderlichen Formeln habe ich bereits in meiner Abhandlung [1]) abgeleitet und zu vielfachen Bestimmungen benutzt. Für $R_2 = R + D_2$ ist $D_2 = R_2 - R$ und für $R_1 = R + D_1$ ist $D_1 = R_1 - R$. Versteht man unter t_I und t_{II} die nach der ersten Formel unter XIV) berechneten Werthe, so erhält man aus $m_I = \frac{t_I}{D_1}$, $m_{II} = \frac{t_{II}}{D_2}$:

$$\frac{m_I}{m_{II}} = \frac{(R_2 - R)\, t_I}{(R_1 - R)\, t_{II}}$$

und mit Rücksicht auf die 2. Näherungsformel unter XV) wird:

$$\frac{m_I}{m_{II}} = \sqrt{\frac{2RR_2}{2RR_1}} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}.$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich A, so erhält man:

$$R = \frac{A t_{II} R_1 - t_I R_2}{A t_{II} - t_I}. \qquad \text{XIX)}$$

Bestimmt man den Gleichheitspunkt mit Hilfe der Methode der Minimaländerungen, so wird man im allgemeinen zwei Werthe erhalten, die der Beziehung $t_I = - t_{II}$ entsprechen. Mit Rücksicht auf den Werth von A gibt Formel XIX):

$$R = \frac{R_1 \sqrt{R_2} + R_2 \sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}} = \sqrt{R_1 R_2}. \qquad \text{XX)}$$

Demnach muss man bei Bestimmung des Gleichheitspunktes nach der Methode der Minimaländerungen aus den beiden Grenzwerthen das geometrische Mittel statt des arithmetischen Mittels nehmen. Führt man die Versuche bez. die Berechnungen für verschiedene Werthpaare von D durch, so kann man aus der mehr oder weniger guten Uebereinstimmung der Werthe für den Gleichheitspunkt einen

1) Phil. Stud. IV, S. 133.

Rückschluss auf die Güte der Methode machen. Im allgemeinen wird indessen der Gleichheitspunkt, bez. der Reiz R bekannt sein.

Wir kommen zum Schluss noch auf die Elimination constanter Fehler. Die Gauß'sche Theorie der Fehlervertheilung beruht durchaus auf der Annahme, dass constante Fehler nicht im Spiele sind. Die Erkennung derselben erfolgt bereits bei Versuchen mit gleichen Reizen; gleichviel, welche Anzahl von g-Fällen sich ergibt, die Zahl der richtigen und falschen Fälle muss gleich groß sein, wenn constante Fehler nicht wirksam gewesen sind. Ist dies nicht der Fall, so muss man entweder durch die Versuchsanordnung diese Fehler zu eliminiren suchen, oder man muss sie irgend wie zu berechnen versuchen. Die Anwendung der entwickelten Formeln auf Versuche mit constanten Fehlern kann nur zu dem Ergebniss führen, die Brauchbarkeit der Formeln in Zweifel zu ziehen. Diesen Umstand hat weder Lorenz noch Higier beachtet. Lorenz schließt die Berechnung des Präcisionsmaßes an die verschiedenen Zeit- und Raumlagen an, Higier berechnet die Ausdrücke aH, welche meiner Constanten c entsprechen, für positive und negative Zulagen, welche eben infolge constanter Fehlerursachen wesentlich verschiedene $\frac{r}{n}$ ergaben. Diese Fehlerursachen werden von Higier zwar untersucht, aber erst nachträglich, nachdem gezeigt worden ist, »dass die Fechner'schen Präcisionsmaße bei gleichen Reizverhältnissen mit der wachsenden Distanzgröße abnehmen, dass die zu erwartende Constanz der Müller'schen H und H_1 und ihrer wahrscheinlichen Fehler nirgends strict nachzuweisen und dass auch die Constanz der aH bei den verschiedenen Distanzen keine durchgehende ist«. Die letzte Forderung, welche ich als allgemeines Kriterium für die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes bereits in meiner früheren Abhandlung hingestellt hatte, ist allerdings nach den Berechnungen von Higier nichts weniger als erfüllt, denn diese Producte schwanken zwischen — 3,69 und 76,42.

Bei den Versuchen von Higier ist für positive Zulagen der Werth $\frac{r}{n}$ infolge des constanten Gesammtfehlers, der durch verschiedene Ursachen bedingt sein kann, stets zu klein gefunden worden. Man wird daher statt:

$$\frac{r}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{mD} e^{-t^2} dt$$

die Gleichung:

$$\frac{r}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m_1(D-C)=t_I} e^{-t^2} dt$$

setzen müssen. Bei den absolut gleich großen negativen D war $\frac{r}{n}$ zu groß, man hat daher:

$$\frac{r}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m_2(D+C)=t_{II}} e^{-t^2} dt.$$

Daraus ergibt sich:

$$m_1 = \frac{t_I}{D-C}; \quad m_2 = \frac{t_{II}}{D+C}. \tag{XXI)}$$

Auf Grund der ersten Näherungsformel XV) ist:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2R+D+C}{2R+D-C}. \tag{XXII)}$$

Die Gleichungen XXI) und XXII) geben für C eine quadratische Gleichung. In der Regel wird jedoch in Gleichung XXII C gegen $2R+D$ klein sein. Man kann es alsdann vernachlässigen und:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2R+D}{2R+D} = 1$$

setzen. Man erhält alsdann:

$$\left\{\begin{aligned} C &= \frac{D(t_{II}-t_I)}{t_{II}+t_I}, \\ m &= \frac{t_I+t_{II}}{2D}. \end{aligned}\right\} \tag{XXIII)}$$

Die quadratische Gleichung lautet:

$$C^2(t_{II}-t_I) + 2RC(t_{II}+t_I) = D(2R+D)(t_{II}-t_I).$$

Setzt man das Verhältniss: $\frac{t_{II}-t_I}{t_{II}+t_I} = B$, so erhält man:

$$C = -\frac{R}{B} + \sqrt{\left(\frac{R}{B}\right)^2 + D\,(2R + D)}\,. \qquad \text{XXIV)}$$

In der quadratischen Gleichung hat C einen kleinen Werth und ebenso $t_{II} - t_I$, man kann also zweifellos in den meisten Fällen das Glied $C^2\,(t_{II} - t_I) = 0$ setzen und erhält dann:

$$C = \frac{D\,(2R + D)\,B}{2R}\,. \qquad \text{XXV)}$$

Die Präcisionsmaße sind dann nach den Formeln XXI) zu berechnen.

Sind die Unterschiede der Werthe für $\frac{r}{n}$ bei absolut gleich großen positiven und negativen D-Werthen nur wenig verschieden, so kann man das arithmetische Mittel aus diesen Größen zu Grunde legen, für dieses den Werth t_0 bestimmen und m ermitteln aus:

$$m = \frac{t_0}{D}\,.$$

Will man einen etwaigen constanten Fehler bei Benutzung zweier positiven Zulagen eliminiren, so muss man sich der folgenden Formeln bedienen:

$$m_1 = \frac{t_I}{D_1 - C}\,, \quad m_2 = \frac{t_{II}}{D_2 - C}\,, \qquad \text{XXVI)}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2R + D_2 - C}{2R + D_1 - C}\,.$$

Hier kann man für kleine Werthe von C jedenfalls ohne Bedenken:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2R + D_2}{2R + D_1} = A$$

setzen. Dann wird:

$$C = \frac{A\,t_{II}\,D_1 - t_I\,D_2}{A\,t_{II} - t_I}\,. \qquad \text{XXVII)}$$

Vernachlässigt man auch hier nur das Glied $C^2\,(t_{II} - t_I)$, so erhält man:

$$C = \frac{t_{II}\,D_1\,(2R + D_2) - t_I\,D_2\,(2R + D_1)}{(2R + D_1 + D_2)\,(t_{II} - t_I)}\,. \qquad \text{XXVIII)}$$

Die genaue Formel dürfte hier kaum jemals erforderlich sein, in den meisten Fällen wird die Formel XXVII) hinreichen. Bei Benutzung gleich großer positiver und negativer Zulagen muss man die D absolut nehmen und einmal die richtigen, das andere Mal die falschen Fälle setzen, wenn man $R_1 > R$ als richtig, $R > R_1$ als falsch bezeichnet. Bei der von Higier gewählten Bezeichnungsweise nimmt man beiderseits die richtigen Fälle.

Den Formeln XXIII), XXIV) und XXV) liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass der constante Fehler für je zwei gleiche positive und negative Zulagen gleich groß sei, den Formeln XXVII) und XXVIII) die Voraussetzung, dass der constante Fehler auch bei verschiedenen Zulagen dieselbe Größe habe. Da die erstere Voraussetzung offenbar größere Wahrscheinlichkeit besitzt, empfiehlt sich die Benutzung gleich großer positiver und negativer Zulagen.

II. Die Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle.

Die Methode der richtigen und falschen Fälle setzt das Vorhandensein von falschen Fällen voraus. Sollen derartige Fälle auch bei größeren Zulagen noch auftreten, so muss der Spielraum der zufälligen Fehler ein möglichst großer sein. Wollte man letzteres durch eine minder gute Versuchstechnik zu erreichen suchen, so würde man damit Fehler einführen, die sich dem Gauß'schen Gesetz nur bei sehr großer Zahl von Versuchen unterordnen dürften. Die erste Forderung, welcher die Beobachtungsfehler unterliegen müssen, war ja die, dass sie möglichst klein ausfallen müssen. Meine Schallversuche haben ebenfalls gezeigt, dass sich das Gauß'sche Gesetz um so besser bewährt, je kleiner die Beobachtungsfehler sind. Auch wird man eine bessere Versuchstechnik einer mangelhaften von vorn herein vorziehen. Schränkt man aber die Fehlerursachen nach Möglichkeit ein, so wird die Zahl der gleichen Urtheile größer und bei verhältnissmäßig kleinen D erhält man bereits lauter richtige und gleiche Fälle. Durch gesteigerte Aufmerksamkeit kann man auch in solchen Fällen zu falschen Urtheilen gelangen, allein damit erleidet die Schwelle eine Änderung. Man bemerkt jetzt Unterschiede, welche man bei normaler Aufmerksamkeit nicht empfinden würde. Hauptsächlich auf diese Ursache sind die verschiedenen Ergebnisse meiner Versuche nach der Methode der richtigen und falschen Fälle einerseits und der Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle andererseits zurückzuführen.

Stellt man aber die Versuche bei normaler Aufmerksamkeit an, und dies ist doch eigentlich das natürlichste Verfahren, so erhält man sehr bald Fehlschläge, d. h. man erhält bereits bei verhältnissmäßig kleinen D nur noch richtige und gleiche oder falsche und gleiche Fälle. Je besser die Versuchstechnik ist, um so eher treten Fehlschläge ein. Zu dieser Versuchsgruppe gehören zum weitaus überwiegenden Theile meine Versuche nach der Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle. Aber selbst da, wo noch falsche Fälle neben den richtigen und gleichen auftraten, war die Zahl der ersteren nur gering. Erhält man alsdann in einem Falle einen oder zwei falsche Urtheile mehr als in einem andern Falle, so ist dies auf die Schwellenbestimmung von erheblichem Einfluss. Ueberhaupt muss man Zulagen, welche mehr als 96% Fälle einer und derselben Gattung liefern, vermeiden, da für die äußeren Grenzen das Gauß'sche Integral naturgemäß größere Abweichungen erleidet.

Diese Erwägungen waren bei der Aufstellung der Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle maßgebend. Dieselbe gestattet die Versuche bei normaler Aufmerksamkeit auszuführen, sie erlaubt die Anwendung verhältnissmäßig großer Zulagen, sie gibt die einwurfsfreieste Methode zur Bestimmung der Unterschiedsschwelle. Die zweifelhaften Fälle, welche bei beiden Methoden auftreten können, werden immer nur vereinzelt dastehen, sie werden am besten proportional zu den Ungleichheits- und Gleichheitsfällen vertheilt. Sollten indessen bei der Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle die zweifelhaften Fälle in großer Zahl auftreten, so sind sie so zu behandeln, wie bei der Methode der richtigen und falschen Fälle die gleichen Urtheile, d. h. man hat t aufzusuchen für die Ungleichheitsfälle $U(r)$ und für die Fälle $U+Z$ und aus beiden Werthen das arithmetische Mittel zu nehmen.

Ist in der Formel:

$$\frac{r}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m(D-S)=t_1} e^{-t^2} dt \qquad \text{I)}$$

$D < S$, so werden sich auch bei normaler Aufmerksamkeit im allgemeinen falsche Fälle ergeben. Alsdann ist sowohl die Berechnung von S möglich, wie auch die Ermittlung von m. Ist dagegen $D > S$, so werden im allgemeinen Fehlschläge eintreten, d. h. man wird nur richtige und gleiche Urtheile erhalten.

Für $D = S$ wird:

$$\frac{r}{n} = \frac{1}{2}.$$

Während S für $D < S$ kleiner, für $D > S$ aber größer als die obere Schwelle ist, stimmt es für den Fall $D = S$ mit der oberen Schwelle S_0 überein.

Von diesem Falle geht die Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle aus. Wir legen vor der Hand wieder die Figuren 4 bis 8 zu Grunde und nehmen an, es sei $D = S = 40$. Für $D = 20$ ist sodann: $\frac{r}{n} = 29{,}55$, für $D = 0$: $\frac{r}{n} = 12{,}9$, für $D = 60$: $\frac{r}{n} = 68{,}47$ und für $D = 80$: $\frac{r}{n} = 81{,}53$. Setzt man $\mathfrak{D} = D - S$, so wird für $D = 20$ und 0, $S = 40$:

$$\mathfrak{D} = -20; \quad -40;$$

$$(G) f = 70{,}45; \quad 87{,}1,$$

und für $D = 60$ und 80:

$$\mathfrak{D} = \ \ 20; \quad 40;$$

$$(U)\, r = 68{,}47; \quad 81{,}53.$$

Diese Zahlen stimmen im Gange augenscheinlich vollständig mit den Zahlen überein, welche sich bei der Methode der richtigen und falschen Fälle ergaben.

Bei Benutzung der Zulage $D = S$ hat man einerseits den Reiz $R + S$ zu beurtheilen, andererseits den Reiz R. Nennen wir die wahrscheinlichen Fehler F_1 und F_2, so ist der wahrscheinliche Fehler bei der Auffassung des Unterschiedes:

$$F = \sqrt{F_1{}^2 + F_2{}^2}.$$

Da die wahrscheinlichen Fehler den Reizstärken proportional sein werden, so wird:

$$F = p\sqrt{R^2 + (R + S)^2}.$$

Setzt man wieder: $F = \frac{\varrho}{m}$ und $\frac{\varrho}{p} = c$, so wird:

$$m \sqrt{R^2 + (R+S)^2} = c\,.$$

Benutzt man eine Zulage $\mathfrak{D} = D - S$ zum Reize $(R + S)$, so wird:

$$m \sqrt{R^2 + (R + S + \mathfrak{D})^2} = c\,.$$

Lässt man in dem Ausdrucke $\mathfrak{D} = D - S$ den Werth D sowohl größer als kleiner als S werden, so erhält man positive und negative $\mathfrak{D}$. Die vorstehende Formel gibt für $\mathfrak{D} = D - S$:

$$m \sqrt{R^2 + (R + D)^2} = c\,,$$

oder:

$$m \sqrt{2R(R + D) + D^2} = c\,. \tag{II)}$$

Setzt man wie früher $R + D = R_1$, so erhält man in ähnlicher Weise die Näherungsformeln:

$$1{,}414\,.\,m\left(R + \frac{D}{2}\right) = 0{,}707\,.\,m\,(R + R_1) = c\,, \tag{III)}$$

$$m \sqrt{2R(R + D)} = m \sqrt{2RR_1} = c\,, \tag{IV)}$$

$$1{,}414\,.\,mR = c\,. \tag{V)}$$

Diese Formeln stimmen in der Wurzelgröße mit den Formeln der Methode der richtigen und falschen Fälle überein, der Unterschied liegt in den verschiedenen Größen von D und in dem verschiedenen Werthe von m. Mit Rücksicht auf Formel I) ergibt sich für m:

$$m = \frac{t_1}{D - S}\,. \tag{VI)}$$

Hiernach muss man, um für verschiedene Zulagen D die obigen Ausdrücke zu prüfen, die Schwelle kennen. Sonach verhilft auch hier die Schwelle zum Ziele, ähnlich wie bei der Fechner'schen Methode die Theilungsschwelle die Eintheilung der Gleichheitsfälle ermöglichte und damit erst die Prüfung der Formeln II) bis V). Für die Berechnung der wahrscheinlichen Fehler und der Präcisionsmaße der einzelnen Reize gelten wieder die Formeln VIII) S. 589.

Hat man bei einer Reihe von D-Werthen Versuche ausgeführt, so bestimmt man am einfachsten durch Interpolation unter

Benutzung einer graphischen Darstellung den Werth $D = S$, indem man den Punkt $\frac{r}{n} = 0{,}5$ aufsucht. Daraus bestimmen sich die Werthe $D - S$ und auf Grund derselben berechnen sich die Werthe m der Formel VI).

Die Schwelle lässt sich aber auch berechnen, wenn man Versuche bei zwei verschiedenen D zur Verfügung hat. Nennen wir diese Zulagen D_1 und D_2, so ist:

$$m_1 = \frac{t_1}{D_1 - S},$$

$$m_2 = \frac{t_2}{D_2 - S}.$$

Andererseits hat man:

$$m_1 \sqrt{2R(R + D_1) + D_1^2} = c,$$

$$m_2 \sqrt{2R(R + D_2) + D_2^2} = c.$$

Diese Gleichungen geben:

$$\frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{2R(R + D_2) + D_2^2}{2R(R + D_1) + D_1^2}}. \qquad \text{VII)}$$

Hierfür können die Näherungsformeln:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2R + D_2}{2R + D_1} = \frac{R + R_2}{R + R_1}, \qquad \text{VIII)}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{R + D_2}{R + D_1}} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}, \qquad \text{IX)}$$

$$m_1 = m_2 \qquad \text{X)}$$

treten, in denen $R_2 = R + D_2$ und $R_1 = R + D_1$ ist.

Wählt man für D_1 und D_2 bei verschiedenen Ausgangsreizen die Werthe:

$$D_1 = pR,$$

$$D_2 = qR,$$

in denen p und q echte Brüche darstellen, so wird ein für allemal:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2 + q}{2 + p} \qquad \text{XI)}$$

und die Rechnungen gestalten sich dann äußerst einfach.

Setzt man das durch die Gleichungen VII) bis XI) definirte Verhältniss:

$$\frac{m_1}{m_2} = A\,,$$

so wird:

$$S = \frac{A t_2 D_1 - t_1 D_2}{A t_2 - t_1}\,. \qquad \text{XII)}$$

Die genaue Formel VII) und die erste Näherungsformel VIII) finden sich in meiner früheren Abhandlung nicht, dagegen habe ich auf anderem Wege die Formeln IX) und XII) abgeleitet und allen Schwellenberechnungen zu Grunde gelegt[1]).

Benutzt man die Zulage $D_1 = 0$ mit, so erhält man, vorausgesetzt, dass noch richtige Fälle neben den gleichen auftreten (Ungleichheitsfälle oder Urtheile $R_1 > R$), die einfacheren Formeln:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{}{R}\sqrt{\frac{2R(R+D_2)+D_2^2}{2}}\,, \\ \text{oder:}\quad A &= \frac{R+R_2}{2R}\,, \\ S &= \frac{t_1 D_2}{t_1 - A t_2}\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{XIII)}$$

Bei Berechnung der unteren Schwelle werden sämmtliche D in den Formeln für A negativ genommen bez. mit entgegengesetztem Zeichen versehen; dann sind alle Formeln gültig. Die Quadrate von D bleiben unverändert. Die Werthe R_1 und R_2 sind dann: $R_1 = R - D_1$ und $R_2 = R - D_2$. Die hierbei zu benutzenden Ungleichheitsfälle entsprechen den falschen Fällen der Fechner-schen Methode ($R_1 < R$). Berechnet man auf Grund der Annahme $m = 0{,}0304$, $D = S = 43{,}2$, welche etwa meinen Versuchen auf Seite 263[2]) entspricht, den Werth c, so erhält man 6,7535. Auf Grund dieses Werthes berechnet man die Werthe m für eine Reihe von positiven und negativen Zulagen $\mathfrak{D} = S - D$, und unter Zuhilfenahme der Tabelle für das Gauß'sche Integral die Fehlervertheilung für die genannten Grenzen. Addirt man zu den auf solche Weise

---

1) Phil. Stud. IV, S. 260 und 261. 2) Phil. Stud. IV.

gewonnenen Zahlen jedesmal 50, so erhält man ähnlich wie auf S. 589 und 590 bei der Methode der richtigen und falschen Fälle:

	$\mathfrak{D}$	0;	—20,7;	—43,2;	—67;	—95;
berechnet	U	50;	79,95;	94,98;	99,15;	99,91;
beobachtet	U	50;	79;	93,5;	98,5;	100.

	$\mathfrak{D}$	0;	20,1;	39;	59;
berechnet	G	50;	82,29;	96,76;	99,83;
beobachtet	G	50;	82;	97,5;	100.

Die berechneten Werthe müssten nach der Theorie erwartet werden, die beobachteten wurden bei meinen Versuchen erhalten. Die Uebereinstimmung kann auch hier als eine gute bezeichnet werden. Auch hier würde man bei den entsprechenden Versuchen von Higier bedeutende Abweichungen zwischen den durch die Theorie geforderten und den berechneten Werthen erhalten, allein auch hier trägt die Einwirkung der constanten Fehler die Hauptschuld an den Abweichungen.

Berechnet man auf Grund der Tabelle bei Meyer unter der Annahme $m = 0{,}0304$ für $\mathfrak{D} = 0$ die Fehlervertheilung, so erhält man zwischen:

0 und 10, 10 und 20, 20 und 30, 30 und 40, 40 und 50, 50 und 60, 60 und 70 und 70 und 80

folgende Fehler:

16,64; 13,86; 9,64; 5,58; 2,70; 1,09; 0,36 und 0,10.

Vergleichen wir diese Zahlen mit den entsprechenden der Methode der richtigen und falschen Fälle, so sehen wir, dass im vorliegenden Falle die Fehlerwahrscheinlichkeit mit wachsender Fehlergröße wesentlich rascher abnimmt. Daher stimmen die obigen Zahlen mit den auf Seite 608 abgeleiteten nur im Gange, nicht in ihrer absoluten Größe überein.

Die Bestimmung der Schwelle, welche als Hauptaufgabe dieser Methode zu betrachten ist und die sich bei Benutzung der ersten Näherungsformel mit sehr großer Genauigkeit und in völlig bestimmter Weise durchführen lässt, entspricht der Ermittlung des Gleichheitspunktes bei der Methode der richtigen und falschen Fälle.

III. Die Methode der mittleren Abstufungen, der doppelten Reize und gleicher Reizverhältnisse.

Bei der Methode der mittleren Abstufungen sind die beiden mehr oder weniger von einander abweichenden Reize R_1 und R_2 unveränderlich gegeben. Bei Bestimmung der mittleren Abstufung wählen wir etwa den Reiz $R_1 + D$ und stellen uns die Aufgabe, in 100 Versuchen jedesmal zu entscheiden, ob $R_1 + D$ näher an R_1 oder näher an R_2 liegt, oder ob $R_1 + D$ kleiner oder größer als der mittlere Reiz $R_1 + M$ ist. Für $D = M$ wird man 50 Fälle $>$ und 50 Fälle $< R_1 + M$ erhalten müssen. Hierin liegt ein wesentlicher Unterschied dieser Methode im Vergleich zur Methode der Minimaländerungen, bei welcher der mittlere Reiz als solcher gesucht wird. Hier sind die Mittenschätzungen nach Möglichkeit auszuschließen, ähnlich wie bei der Methode der richtigen und falschen Fälle die Gleichheitsurtheile und bei der Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle die zweifelhaften Fälle.

Für die Zulage $D = M$ hat man die Reize R_1, $R_1 + M$ und R_2 zu beurtheilen. Nennen wir die bei der Beurtheilung begangenen wahrscheinlichen Fehler F_1, F_m und F_2, so ist der wahrscheinliche Fehler bei Auffassung aller 3 Reize:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_m^2 + F_2^2},$$

oder, da die wahrscheinlichen Fehler den Reizstärken proportional sind:

$$F = p\sqrt{R_1^2 + (R_1 + M)^2 + R_2^2}.$$

Setzt man $F = \frac{\varrho}{m}$ und $\frac{\varrho}{p} = c$, so ergibt sich:

$$m\sqrt{R_1^2 + (R_1 + M)^2 + R_2^2} = c.$$

Benutzt man eine Zulage $\mathfrak{D} = D - M$ zum Reize $R_1 + M$ (D bezeichnet die Zulage zu R_1), so erhält man:

$$m\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + (R_1 + M + \mathfrak{D})^2} = c.$$

Lässt man in dem Ausdrucke $\mathfrak{D} = D - M$ den Werth D sowohl größer wie kleiner als M werden, so erhält man positive und negative $\mathfrak{D}$, und die vorstehende Formel geht über in:

$$m\sqrt{R_1{}^2 + R_2{}^2 + (R_1 + D)^2} = c\,,$$

oder:

$$m\sqrt{2\,R_1\,(R_1 + D) + R_2{}^2 + D^2} = c\,. \tag{I}$$

Um für kleine Werthe von D die Wurzel zu beseitigen, setze man: $R_2 = n R_1$, worin n jeden beliebigen Werth haben kann. Dann wird:

$$\begin{aligned}\sqrt{R_1{}^2 + R_2{}^2 + (R_1 + D)^2} &= \sqrt{R_1{}^2 + (nR_1)^2 + (R_1 + D)^2}\\ &= \sqrt{(2 + n^2)\,R_1{}^2 + 2\,R_1 D + D^2}\\ &= \sqrt{2 + n^2}\left\{\sqrt{R_1{}^2 + \frac{2}{2 + n^2} R_1 D + \frac{D^2}{2 + n^2}}\right\}.\end{aligned}$$

Der Ausdruck $\frac{D^2}{2 + n^2}$ ist jedenfalls so gering, dass er im Vergleich mit den übrigen Größen vernachlässigt werden könnte. Vernachlässigt man diesen Werth nur zum Theil, indem man für ihn den Werth $\frac{D^2}{(2 + n^2)^2}$ eintreten lässt, so erhält man eine durchaus brauchbare Näherungsformel:

$$m\sqrt{2 + n^2}\left\{R_1 + \frac{D}{2 + n^2}\right\} = c\,. \tag{II}$$

Die Ausdrücke $2 + n^2$ und $\sqrt{2 + n^2}$ lassen sich immer im Voraus für eine ganze Gruppe von Versuchen berechnen.

Bezeichnen wir durchgängig die Urtheile, bei denen $R_1 + D > R_1 + M$ geschätzt wird, als Obenschätzungen (o), so wird:

$$\frac{o}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{m(D-M)=t_I} e^{-t^2}\,dt$$

und mit Hilfe der Fechner'schen Tabelle wird:

$$m = \frac{t_I}{D - M}\,. \tag{III}$$

Aehnlich wie früher ergeben sich noch die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}F = \frac{\varrho}{m}\,;\quad F_1 = \frac{R_1\varrho}{c}\,;\quad F_2 = \frac{R_2\varrho}{c}\,;\quad F_m = \frac{R_m\varrho}{c}\,,\\ m_1 = \frac{\varrho}{F_1}\,;\quad m_2 = \frac{\varrho}{F_2}\,;\quad m_m = \frac{\varrho}{F_m}\,,\end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

in denen $R_m = R_1 + D$ ist und F_m und m_m den wahrscheinlichen Fehler und das Präcisionsmaß für diesen Reiz darstellen. Indessen wird auch bei diesen Versuchen die Größe M im allgemeinen nicht bekannt sein. Man könnte zwar für $R_1 + M$ das arithmetische Mittel von R_1 und R_2 zu Grunde legen, die Werthe m berechnen und die Constanz der obigen Ausdrücke prüfen; allein die Hauptaufgabe dieser Methode ist die Bestimmung von M selbst. Zu diesem Ende muss man Versuche bei zwei verschiedenen D, etwa D_1 und D_2 ausführen. Man erhält alsdann:

$$m_1 = \frac{t_I}{D_1 - M},$$

$$m_2 = \frac{t_{II}}{D_2 - M}.$$

Andrerseits ist:

$$\frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{2 R_1 (R_1 + D_2) + R_2{}^2 + D_2{}^2}{2 R_1 (R_1 + D_1) + R_2{}^2 + D_1{}^2}} = A\,, \qquad \text{V)}$$

oder in erster Annäherung:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(2 + n^2) R_1 + D_2}{(2 + n^2) R_1 + D_1} = A\,. \qquad \text{VI)}$$

Benutzt man die Werthe: $D_1 = pR_1$; $D_2 = qR_1$, so wird ein für alle mal [d. h. für verschiedene Werthe von R_1]:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{2 + n^2 + q}{2 + n^2 + p} = A\,. \qquad \text{VII)}$$

Für M ergibt sich alsdann:

$$M = \frac{A t_{II} D_1 - t_I D_2}{A t_{II} - t_I}\,. \qquad \text{VIII)}$$

Lässt man bei diesen Versuchen die Fälle zu, bei denen der Reiz $R_1 + D$ in der Mitte zu liegen scheint, so entsprechen diese Urtheile vollständig den Gleichheitsfällen der Methode der richtigen und falschen Fälle. Dieselben dürfen daher nicht, wie es von C. Lorenz[1]) in seinen umfangreichen und überaus werthvollen Untersuchungen über die Auffassung von Tondistanzen geschehen

1) Phil. Stud. VI, S. 26.

ist, zu gleichen Theilen den Urtheilen oben und unten zugezählt werden, sondern sie müssen in der Weise behandelt werden, dass man den t-Werth für die Obenschätzungen allein bestimmt, sodann den t-Werth für die Summe der Obenschätzungen und Mittenschätzungen und aus beiden Werthen das Mittel nimmt. Diese Forderung ist ganz unabhängig von der Gültigkeit des Weberschen Gesetzes, sie wird lediglich durch das Gauß'sche Gesetz bedingt. Da jedoch Lorenz die Gauß'sche Formel nicht angewandt hat, so war seine Vertheilungsweise die von selbst gegebene, und wird dieselbe auf das Resultat von keinem nachtheiligen Einfluss gewesen sein.

Bei Ermittlung der doppelten Reize treten an die Stelle der Oben- und Untenschätzungen die Urtheile größer oder kleiner als $2R$, wenn R den unveränderlichen Reiz darstellt. Man kann sich unmittelbar der Formeln der Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle bedienen, wenn man unter D_1 und D_2 die Zulagen zum Ausgangsreize R versteht, unter S die Zulage, welche den gesuchten doppelten Reiz liefert.

Die Formeln lauten, wenn wir die Zulage für den doppelten Reiz mit D_{II} bezeichnen:

$$D_{II} = \frac{At_2 D_1 - t_1 D_2}{At_2 - t_1}, \qquad \text{IX)}$$

$$A = \sqrt{\frac{2R(R + D_2) + D_2^2}{2R(R + D_1) + D_1^2}}, \qquad \text{X)}$$

oder näherungsweise:

$$A = \frac{2R + D_2}{2R + D_1}. \qquad \text{XI)}$$

Bei der Herstellung gleicher Reizverhältnisse endlich hat man jeweils 4 Reize zu beurtheilen, von denen drei unveränderlich sind. Nennt man diese unveränderlichen Reize R_I, R_{II}, r_I, so erhält man:

$$m\sqrt{R_I^2 + R_{II}^2 + r_I^2 + (r_I + D)^2} = c, \qquad \text{XII)}$$

oder, wenn man:

$$R_I = nr_I,$$

$$R_{II} = Nr_I,$$

setzt, die Näherungsformel:

$$m\sqrt{2+n^2+N^2}\left\{r_I+\frac{D}{2+n^2+N^2}\right\}=c. \qquad \text{XIII)}$$

Man hat hier zu entscheiden, ob das Verhältniss $\frac{r_I+D}{r_I}>\frac{R_{II}}{R_I}$ ist oder nicht. Die Urtheile »gleich« würden ebenso zu behandeln sein, wie bei der Methode der richtigen und falschen Fälle.

Bezeichnen wir die Zulage, welche das gleiche Verhältniss gibt, durch V, so berechnet sich diese Größe unter Anwendung zweier Zulagen D_1 und D_2 aus:

$$V=\frac{A\,t_{II}\,D_1-t_I\,D_2}{A\,t_{II}-t_I} \qquad \text{XIV)}$$

und der Werth A aus:

$$A=\sqrt{\frac{R_I{}^2+R_{II}{}^2+2r_I\,(r_I+D_2)+D_2{}^2}{R_I{}^2+R_{II}{}^2+2r_I\,(r_I+D_1)+D_1{}^2}}, \qquad \text{XV)}$$

oder aus:

$$A=\frac{(2+n^2+N^2)\,r_I+D_2}{(2+n^2+N^2)\,r_I+D_1}, \qquad \text{XVI)}$$

Für $D_1=r_Ip$, $D_2=r_Iq$ ergibt sich:

$$A=\frac{(2+n^2+N^2)+q}{(2+n^2+N^2)+p}. \qquad \text{XVII)}$$

Wählt man die Werthe D_1 und D_2 nicht allzu verschieden, so wird man sich bei allen Methoden des Werthes $A=1$ bedienen können. Für die wahrscheinlichen Fehler, die Präcisionsmaße der einzelnen Reize gelten wieder die früheren Formeln.

IV. Beziehungen zwischen den Schwellenwerthen der Methode der richtigen und falschen Fälle, der Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle und der Methode der Minimaländerungen.

Dass an eine Identität der Schwellenwerthe der Methode der richtigen und falschen Fälle und der Methode der Minimaländerungen nicht zu denken ist, wenn man bei der ersteren Methode die Gleichheitsurtheile möglichst zu meiden oder gar ganz auszuschließen sucht, wurde bereits zu verschiedenen Malen hervorgehoben. Bei normaler Aufmerksamkeit und unbeschränkter

Zulassung der Gleichheitsurtheile aber ist die Schwellenbestimmung nur für verhältnissmäßig kleine Zulagen möglich. Bei völligem Ausschluss der Gleichheitsurtheile hat die Schwelle der Methode der richtigen und falschen Fälle oder die Theilungsschwelle den Werth 0.

Trotzdem macht sich der Einfluss der Unterschiedsschwelle S_0 auch bei den Versuchen nach der Methode der richtigen und falschen Fälle geltend, und zwar auch bei Versuchen, bei denen die Gleichheitsurtheile völlig ausgeschlossen werden. In Reizgebieten mit verhältnissmäßig großer Schwelle, wie z. B. im Gebiete des Schallmaßes, wird man größere Zulagen D nöthig haben, um dasselbe $\frac{r}{n}$ oder dasselbe t zu erhalten, wie in Reizgebieten mit verhältnissmäßig kleiner Schwelle. Da aber $m = \frac{t}{D}$ ist, wird für kleine D bei unverändertem t auch ein größeres m sich ergeben. Mithin ist das Präcisionsmaß umgekehrt proportional der Unterschiedsschwelle.

Blicken wir auf die S. 573 angeführten Beispiele zurück, welche ungefähr den Verhältnissen bei Versuchen im Gebiete des Schallmaßes und der Schätzung von Raumstrecken entsprechen, so haben wir im ersteren Falle für die Fehlergrenzen 0 und 20, 0 und 40, 0 und 60 u. s. w. beim Hauptreiz 177,2 etwa dieselben Werthe wie im letzteren Falle für die Grenzen 0 und 4, 0 und 8, 0 und 12 u. s. w. beim Hauptreiz 200. Diese Thatsache lässt sich aber leicht in Formeln umsetzen, die sich bei der Vergleichung von Versuchen aus verschiedenen Sinnesgebieten verwenden lassen.

Bei der Methode der richtigen und falschen Fälle musste:

$$m \sqrt{2R(R+D)+D^2} = c,$$

bei der Methode der Minimaländerungen muss: $\frac{S_0}{R} = c_1$ sein, wo c und c_1 constante Werthe darstellen. Demnach muss auch:

$$c \,.\, c_1 = C \tag{I}$$

d. h. gleich einer Constanten sein.

Kennt man diese neue Constante für ein Sinnesgebiet, so kann man für ein anderes entweder $m\sqrt{2R(R+D)+D^2}$ oder $\frac{S_0}{R}$

berechnen, wenn man einen dieser Werthe kennt. Andererseits kann man, und darin liegt jedenfalls der Hauptwerth dieser Beziehung, für das nämliche Sinnesgebiet die Schwankungen, welche die Werthe $m\sqrt{2R(R+D)+D^2}$ zeigen, ausdrücken durch die entsprechenden Schwankungen von $\frac{S_0}{R}$. Da diese letzteren Verhältnisse in den meisten Sinnesgebieten von verschiedenen Forschern untersucht worden sind, erleichtert diese Beziehung das Verständniss der Versuche nach der Methode der richtigen und falschen Fälle ganz wesentlich.

Die Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle sucht die Schwelle selbst zu ermitteln. Dieselbe ist gekennzeichnet durch die Forderung $\frac{r}{n} = \frac{1}{2}$. Fig. 9 (Taf. II) gibt die Fehlervertheilung für die Zulage $D = S_u$. Man kann nun, anstatt die Schwelle constant zu lassen und dem Spielraum der Fehler verschiedene Größen beizulegen oder dem m verschiedene Werthe zu ertheilen, den Werth m beibehalten und für S verschiedene Annahmen machen.

Für $S_u = 20$ wird $\frac{r}{n} = 0{,}50$, $\frac{g}{n} = 0{,}305$, $\frac{f}{n} = 0{,}195$; für $S_u = 40$ wird: $\frac{r}{n} = 0{,}50$, $\frac{g}{n} = 0{,}457$, $\frac{f}{n} = 0{,}043$; für $S_u = 80$ wird: $\frac{r}{n} = 0{,}50$, $\frac{g}{n} = 0{,}4997$, $\frac{f}{n} = 0{,}0003$, also praktisch bereits: $\frac{r}{n} = 0{,}50$, $\frac{g}{n} = 0{,}50$. Das letztere ergibt sich auch für größere Werthe von S_u. Je größer also die Fehler sind, welche bei der Beurtheilung der Reize begangen werden, je größer namentlich die äußeren Fehler sind, um so größer wird auch die Anzahl der falschen Fälle im Vergleich zu den gleichen sein, ihre Summe wird jedoch immer 50 betragen. Stellt man Versuche bei gleichen Reizen an, so kommt die Schwelle nach beiden Seiten zur Geltung. Man würde, vorausgesetzt, dass m keinen Aenderungen unterworfen wäre, für $S_u = 20$ folgende Werthe erhalten: $\frac{g}{n} = 61$, $\frac{r}{n} = 19{,}5$, $\frac{f}{n} = 19{,}5$, für $S_u = 40$: $\frac{g}{n} = 0{,}914$, $\frac{r}{n} = 0{,}043$, $\frac{f}{n} = 0{,}043$, für $S_u = 80$: $g =$

100, $r = f = 0$. Das letztere würde sich auch für größere Werthe von S_u ergeben.

Liegen also sämmtliche bei der Beurtheilung des Unterschiedes zweier Reize begangenen Fehler innerhalb der Schwelle, so erhält man bei Benutzung gleicher Reize nur Gleichheitsurtheile, sind die Fehler z. Th. größer als die Schwelle, so ergeben sich neben den gleichen Urtheilen auch richtige und falsche. Für die Schwelle als Zulage erhält man im ersteren Falle nur richtige und gleiche Urtheile, im letzteren Falle richtige, gleiche und falsche. Je besser die Versuchstechnik ist, je geringer also der Spielraum der äußeren Fehler ist, um so mehr wird man sich dem ersteren Falle nähern.

Diese verschiedenen Verhältnisse kommen bei der Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle sehr wohl zur Geltung, allerdings nicht beim Schwellenwerth, der von den äußeren Fehlern unabhängig ist, wohl aber, wenn man außer ihm noch die Werthe m oder F ermittelt. Die Werthe m werden um so kleiner, die Werthe F um so größer ausfallen, je größer der Spielraum der äußeren Fehler ist.

Bei der Methode der Minimaländerungen verfährt man bei Ermittlung der Schwelle S_u wie folgt: Man geht von zwei gleichen Reizen aus, vermindert den einen allmählich so lange, bis er eben schwächer erscheint, und überschreitet diesen Punkt noch etwas, bis der Unterschied sicher empfunden wird. Sodann geht man wieder zurück, bis der Unterschied eben wieder verschwunden ist, und überschreitet auch diesen Punkt. Aus den so gewonnenen zwei äußersten Grenzen nimmt man das arithmetische Mittel.

Dieses Verfahren leidet jedoch an einer Unbestimmtheit, welche bei verschiedenen Versuchspersonen zu verschiedenen Grenzwerthen und damit auch zu abweichenden Mittelwerthen führen kann. Man kann so verfahren, dass man bei jedem Reizunterschiede etwa 5 Versuche anstellt und die Punkte aufsucht, bei denen der Unterschied zum ersten Male in allen 5 Fällen erkannt wird und dann wieder in 5 Fällen nicht erkannt wird. An Stelle der 5 Versuche kann man unter denselben Bedingungen 10 oder mehr Versuche ausführen. Da, wo der Unterschied nicht erkannt wird, erklärt man aber bei der Methode der Minimaländerungen die Reize für gleich. Sollte bei Aufsuchung der unteren Grenze der kleinere Reiz richtig kleiner geschätzt werden als der constante Reiz, so würde man die beiden Reize einander weiter nähern, d. h. den kleineren vergrößern. Sollte er aber dann in einzelnen Fällen größer als der constante Reiz erscheinen, so würde man ihn wieder verringern. Man wird also im allgemeinen für die untere Grenze einen Werth zwischen 0 und S_u erhalten. Für die obere Grenze wird der Werth $\varDelta$ als Maximum gelten können. Die Werthe, aus denen die Schwelle bestimmt wird, werden diesen Grenzwerthen mehr oder weniger nahe liegen, sie können $\frac{3}{4}\varDelta$ und $\frac{1}{4}\varDelta$, $\frac{4}{5}\varDelta$ und $\frac{1}{5}\varDelta$ u. s. w. betragen. Die Schwelle wird immer dem Werthe $\frac{\varDelta}{2}$ mehr oder weniger nahe kommen.

Hat man $\varDelta$ aus dem wahrscheinlichen Fehler F berechnet, welchen man bei der Beurtheilung des Unterschiedes gleicher Reize begeht, so stellt $\frac{\varDelta}{2}$ die mittlere Schwelle S dar. Aus ihr berechnet sich die obere Schwelle bekanntlich mittels der Formel:

$$S_o = R \cdot \frac{2S}{2R - S} \qquad \text{II)}$$

mit großer Annäherung. Demnach kann der bei der Methode der richtigen und falschen Fälle gewonnene Werth $\varDelta$ zur Bestimmung der Unterschiedsschwelle der Methode der Minimaländerungen dienen. Dieser Schwellenwerth würde sich aber naturgemäß auf Versuchsgattungen beziehen, welche mit gleicher Aufmerksamkeit ausgeführt werden.

Behandelt man die Versuche der Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle nach der Methode der richtigen und falschen Fälle, so kann man auch für diese Versuche die Unterschiedsschwelle bestimmen, welche die Methode der Minimaländerungen liefern würde. Bei meinen ausführlichen Versuchsreihen, welche sich bis zu der Zulage erstreckten, die bereits 100% richtige Urtheile lieferte, kann man den Werth $\varDelta$ unmittelbar aus den gewonnenen Zahlen mittels einer graphischen Darstellung gewinnen, bei den Versuchen von Higier weichen die Werthe S_o und S so wenig von einander ab, dass eine Umrechnung mittels der Formel II) überflüssig ist. (Der Unterschied zwischen $\frac{S_o}{R}$ und $\frac{S}{R}$ beträgt für den Werth 0,045 nur 0,0008.)

Nur dann, wenn die bei der Beurtheilung des Unterschiedes der beiden Reize begangenen Fehler innerhalb der Schwelle liegen, erhält man nach beiden Methoden denselben Schwellenwerth. Sind die Fehler größer, so wird man bei den Versuchen nach der Methode der Minimaländerungen einen größeren Werth für die obere Grenze $\varDelta$ erhalten, während die untere Grenze 0 bestehen bleibt. Nennen wir diesen Werth $\varDelta + \delta$, so ist die Schwelle $\frac{\varDelta + \delta}{2}$. Sonach würde die Methode der Minimaländerungen bei Versuchsanordnungen, welche den zufälligen Fehlern einen größeren Spielraum gestatten, eine größere Schwelle liefern, als bei Versuchsanordnungen, bei denen die zufälligen Fehler möglichst eingeschränkt sind. Von diesem Uebelstande ist die Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle frei. Sie liefert, gleichviel wie groß der Spielraum der äußeren Fehler ist, dieselbe durch die Bedingung $\frac{r}{n} = \frac{1}{2}$ gekennzeichnete Schwelle. Die Größe der zufälligen Fehler spiegeln die Werthe F wieder.

Die Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle gewährt aber noch einen weiteren wesentlichen Vortheil. Bei meinen Schallversuchen mit Bleikugeln, ebenso bei den Versuchen von Tischer und Lorenz waren die Grenzwerthe der Methode der Minimaländerungen sehr verschieden, sie lagen den Werthen 0 und $\varDelta$ näher als dem Werthe S_u. Bei meinen Augenmaßversuchen wurden die Grenzen 0 und $\varDelta$ etwa erreicht. Bei meinen Schallversuchen mittels Stahlkugeln und bei Anwendung der Fallzangen gingen diese Grenzwerthe viel weniger auseinander, sie lagen dem Werthe S_u näher. Bei verschiedenen Differenzen zwischen den Grenzwerthen liefern aber die arithmetischen Mittel, welche nur Näherungswerthe darstellen, nicht gleichwerthige Zahlen. Die Abweichungen sind um so größer, je verschiedener die Grenzwerthe ausfallen. Die Grenzwerthe der Methode der Minimaländerungen entsprechen nämlich solchen Werthen D_1 und D_2 der Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle, für welche die Zahl der Ungleichheitsfälle etwa 30 und 70, 20 und 80, 10 und 90 oder 0 und 100 beträgt. Für derartige Werthe ist aber: $t_2 = - t_1$ und die Formel für S (XII, S. 611) geht über in:

$$S = \frac{AD_1 + D_2}{A + 1}, \tag{III}$$

worin A den Näherungswerth:

$$A = \frac{2R + D_2}{2R + D_1} \tag{IV}$$

hat. Für die Grenzwerthe 0 und $\varDelta$ ist $D_1 = 0$, $D_2 = \varDelta$. Man erhält daher: $A = 1 + \frac{\varDelta}{2R}$ und:

$$S = \frac{2R\varDelta}{4R + \varDelta}. \tag{V}$$

Meine Schallversuche würden z. B. für den Reiz $R = 200$ für $\varDelta$ den Werth 144 ergeben haben, wo unter $\varDelta$ die Grenze zu verstehen ist, bei welcher unter 100 Urtheilen alle richtig gelautet hätten. Für diesen Fall würde das arithmetische Mittel ergeben:

$$S = 72, \text{ also: } \frac{S}{R} = 0{,}36.$$

Die Formel V) gibt aber:

$$S = 61, \text{ mithin: } \frac{S}{R} = 0{,}305.$$

Hier liefert also das arithmetische Mittel einen zu hohen Werth. Meine Versuche lieferten aber diese Grenzwerthe nur ausnahmsweise. Nimmt man etwa $D_1 = 48$ und $D_2 = 96$ an, so erhält man für $\frac{S}{R}$ die Werthe 0,36 und 0,353. Die zweite Näherungsformel $A = \sqrt{\frac{R + D_2}{R + D_1}}$ würde für das obere Beispiel den Werth 0,311, für das untere den Werth 0,355 geben.

Hiernach kann man sich nur bei wenig verschiedenen Grenzwerthen der arithmetischen Mittel bedienen. Bildet man für $R + S$ das geometrische Mittel:

$$R + S = \sqrt{(R + D_1)(R + D_2)}, \tag{VI}$$

so erhält man für beide Beispiele die Werthe 0,310 und 0,354. Dieselben verdienen augenscheinlich vor dem arithmetischen Mittel bei weitem den Vorzug.

Diese Thatsachen spiegeln sich deutlich in den Ergebnissen der Versuche von Lorenz und mir wieder. Die Versuche von Lorenz ergaben die Schwellenwerthe 0,387 und 0,370.[1]) Bei meinen Versuchen nach der Methode der Minimaländerungen ergaben sich die Mittelwerthe 0,366 und 0,359[2]). Die Werthe von Tischer (0,495 und 0,540[3])) stellen nicht die Mittelwerthe, sondern die oberen Grenzen dar, sie sind daher wesentlich höher. Diese Zahlen können deshalb in Vergleich gezogen werden, weil ich bei allen diesen Versuchen die Schallstärken beurtheilte. Die Verschiedenheit der von Lorenz und mir gefundenen Werthe erklärt sich zum Theil durch die Uebung, zum Theil durch kleine Verbesserungen der Versuchstechnik.

Bis zum Abschluss dieser sämmtlichen überaus zahlreichen Versuche hatte ich jedenfalls eine derartige Uebung erreicht, dass weitere Versuche eine wesentliche Abnahme der Verhältnisse nicht erwarten lassen konnten. Trotzdem erhielt ich bei Anwendung äußerst genauer Stahlkugeln und bei Benutzung der Fallzangen, welche die äußeren Fehler wesentlich herabminderten und für die D weniger abweichende Werthe bedingten, bei der Methode der Minimaländerungen den Mittelwerth 0,318, bei der Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle das Gesammtmittel 0,312. Die Verminderung von 0,36 auf 0,32 ist jedenfalls der Einschränkung der äußeren Fehler, die weitere Verminderung auf 0,31 der genaueren Berechnung zuzuschreiben.

Den letzteren Nachtheil der Methode der Minimaländerungen kann man vermeiden, wenn man statt des arithmetischen Mittels zur Schwellenbestimmung die Formeln III) und IV) anwendet, den ersteren Nachtheil, wenn man die Punkte aufsucht, bei denen der Vergleichsreiz unter 10 Versuchen 10 mal als kleiner erscheint und dann 10 mal als gleich bez. größer. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Versuche bei normaler Aufmerksamkeit ausgeführt werden.

Kräpelin[4]) sagt, dass sich bei den Versuchen von Lorenz[5]) für die Schwelle der Methode der Minimaländerungen für Lorenz 46,44, für mich 48,76 % richtige Fälle ergeben hätten. Dabei

1) Phil. Stud. IV, S. 252 u. 267.
2) Phil. Stud. IV, S. 273 u. 274.
3) Phil. Stud. IV, S. 251.
4) Phil. Stud. VI, S. 509.
5) Phil. Stud. II, S. 469.

wurden die zweifelhaften Fälle halb den richtigen und halb den falschen zugezählt. Kräpelin tritt jedoch für die proportionale Vertheilung dieser Fälle ein, die auch ich für richtiger halte[1]). Dann ergeben sich statt der obigen Zahlen die Werthe: 54,3 und 54,6 %. Diese Zahlen erklären sich einfach daraus, dass sich bei diesen Versuchen theils durch die äußeren Fehlerursachen, theils durch die Benutzung des arithmetischen Mittels zu hohe Schwellenwerthe ergeben.

Will man die Versuche nach der Methode der Minimaländerungen so einrichten, dass man dieselbe Schwelle erhält wie bei der Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle, so muss man das Wundt'sche Verfahren durch folgendes ersetzen: Man bestimme den Punkt, in welchem der Vergleichsreiz eben größer erscheint, und überschreite diesen Punkt so weit, bis man den Unterschied jedesmal richtig erkennt. Dann gehe man so weit zurück, bis der Unterschied jedesmal bez. nicht erkannt oder entgegengesetzt aufgefasst wird. — Dieses Verfahren wird nur dann nöthig, wenn der Spielraum der äußeren Fehler ein bedeutender ist. In diesem Falle ist übrigens das Wundt'sche Verfahren nur schwer durchführbar.

Der Hauptwerth der Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle, welche uns auch für die Methode der Minimaländerungen zweckmäßige Formeln geliefert hat, liegt aber darin, dass man bei ihr nicht 2 bestimmte D aufzusuchen hat, die ganz bestimmte Zahlen richtiger Fälle liefern, sondern dass man die Versuche bei zwei ganz beliebigen D ausführen kann. In vielen Versuchsgebieten werden dadurch, dass man die Versuche nur bei zwei Zulagen auszuführen hat, die zufälligen Fehler eingeschränkt, während sie bei dem fortwährenden Wechsel des einen Reizes bei der Methode der Minimaländerungen eher erhöht werden.

Bei Benutzung zweier beliebiger D tritt aber an Stelle der Formel III) die Formel:

$$S = \frac{AD_1\, t_2 - D_2\, t_1}{At_2 - t_1}, \qquad \text{VII)}$$

in welcher A den Werth IV) hat.

---

1) Soweit ich mich zu erinnern vermag, war bei den zweifelhaften Fällen ein Unterschied vorhanden, man vermochte ihn nur nicht mit Sicherheit anzugeben, es handelte sich also nicht um einen Zweifel zwischen *r* und *g*, sondern zwischen *r* und *f*.

Die Annahme $A = 1$ würde der Benutzung des arithmetischen Mittels bei der Methode der Minimaländerungen entsprechen. Diese Annahme ist sogar hier noch eher berechtigt, da man zumeist weniger verschiedene D-Werthe benutzen wird, als sie die Methode der Minimaländerungen liefert.

Da bei dem Wundt'schen Verfahren die Schwelle von dem Spielraum der äußeren Fehler abhängt, so kann man unter Umständen das Weber'sche Gesetz nicht bestätigt finden, lediglich deshalb, weil die Fehler der Versuchstechnik dem Weber'schen Gesetz nicht unterliegen.

Um das von Higier angewandte Verfahren zur Bestimmung der Schwelle, welches den Einfluss der äußeren Fehler zu beseitigen sucht, zu verstehen, muss man sich an die von Jastrow gegebene, von Kräpelin[1]) vertretene Definition der Schwelle bei Versuchen ohne Gleichheitsurtheile erinnern. Jastrow meint, bei einer Zulage gleich der Unterschiedsschwelle S_0 würde in der Hälfte der Fälle die Reizdifferenz in dem einen Sinne vergrößert, in der anderen Hälfte in dem andern Sinne. Die eine Hälfte würde richtige Urtheile liefern, die andere gleiche, bez. gleiche und falsche, falls die Fehler in der Beurtheilung des Unterschiedes die doppelte Schwelle übersteigen sollten. Die gleichen Fälle, die bei der ersten Annahme 50 ausmachen würden, würden sich beim Jastrow'schen Verfahren zu gleichen Theilen in »scheinbare« richtige und »scheinbare« falsche verwandeln. Dasselbe würde auch beim Vorhandensein wirklicher falscher Fälle mit den übrigen Gleichheitsfällen sich ereignen. Sonach würde die Schwelle im Maximum durch 75 % richtige Fälle charakterisirt sein, die unterste Grenze würde 50 % betragen.

Bei der von Higier angewandten Bestimmungsweise der Schwelle wird nun zunächst beim aufsteigenden Verfahren diejenige Zulage ermittelt, bei welcher die wirklichen falschen Fälle aufhören (b'), sodann die Zulage, bei welcher nur noch richtige Fälle auftreten (c'). Dieselben Werthe bestimmt man beim absteigenden Verfahren (c'', b'')..

---

1) Phil. Stud. VI, S. 511.

Higier bestimmt dann die arithmetischen Mittel:

$$\frac{b' + b''}{2} \text{ und } \frac{c' + c''}{2}$$

und bezeichnet den Mittelwerth aus ihnen als mittlere Schwelle. Nach meinem Verfahren würde:

$$\varDelta = \frac{c' + c''}{2}$$

sein und die Schwelle den Werth:

$$S = \frac{\varDelta}{2} \text{ oder genauer } S = \frac{2R\varDelta}{4R + \varDelta}$$

erhalten. Um den Einfluss der äußeren Fehler, welche die wirklichen falschen Fälle veranlassen, zu beseitigen, würde ich $\varDelta$ aus der Differenz:

$$\frac{c' + c''}{2} - \frac{b' + b''}{2}$$

bilden, während Higier die Summe dieser Größen nimmt. In dem von Higier benutzten Beispiele wäre der Unterschied $5{,}25 - 1{,}75 = 3{,}5$, also wesentlich geringer als die Summe.

Nun hat aber Higier die Werthe c' und c'' nur ausnahmsweise erreicht, in den Mittelwerthen niemals; überdies sind diese Werthe sämmtlich durch den Einfluss des constanten Fehlers beeinträchtigt. Derselbe würde sich ja zum größten Theile eliminiren, wenn man die obige Differenz bildete; allein dies ist eben wegen der Unkenntniss der c unmöglich. Deshalb prüft Higier die Jastrow'sche Forderung für die Werthe $\frac{b' + b''}{2}$ allein und findet, dass sich für diese Schwelle im Durchschnitte 71,1 % richtige Fälle ergeben. Die Werthe $\frac{b' + b''}{2}$ haben doch aber mit der Unterschiedsschwelle absolut nichts gemein, sie sind lediglich bedingt durch die Größe der zufälligen Fehler. Es ist reiner Zufall, dass sich jene die Jastrow'schen Festsetzungen scheinbar bestätigende Zahl richtiger Fälle bei der entsprechenden Zulage ergeben hat. Nach meinen Berechnungen (siehe S. 573) müsste bei Higier: $\frac{c' + c''}{2} = 20{,}8$

betragen[1]). Nehmen wir $\frac{b'+b''}{2} = 3$ an, was indessen infolge des constanten Fehlers viel zu hoch gegriffen ist, so wird die Schwelle:

$$S_0 = \frac{20,8-3}{2} = 8,9,$$

also $\frac{S_0}{R} = 0,00445$. Für diesen Werth ergeben sich aber etwa 87% richtige Fälle[2]). Beachtet man $\frac{b'+b''}{2}$ nicht, so erhält man $\frac{S_0}{R} = 0,0052$, $S_0 = 10,4$. Für diesen Schwellenwerth erhält man 91% richtige Fälle. Der richtige Werth liegt jedenfalls innerhalb der Grenzen 87 und 91%. Bei meinen Versuchen ergab sich der Werth 92 bis 96%, weil die zufälligen Fehler einen verhältnissmäßig geringeren Spielraum einnahmen. Kräpelin sagt im Hinblick auf die Ergebnisse Higier's: »Higier's Versuche ergeben für 2 Distanzen mit Zulassung von Gleichheitsfällen im Durchschnitte 13% wirkliche falsche Fälle. Die Unterschiedsschwelle hätte demnach 68,5% richtiger Fälle nach dem Jastrow'schen Verfahren ergeben müssen. Trotzdem lieferte die Berechnung mit Hülfe der allerdings unsicheren experimentell gefundenen Unterschiedsschwelle einen Werth von 74,5%. Die Zahl der richtigen Fälle erwies sich somit auch hier, wahrscheinlich infolge eines Erwartungsfehlers, verhältnissmäßig zu groß, wenn auch lange nicht in dem Maße, wie bei den Versuchen mit Gleichheitsurtheilen.«

Wie erklären sich aber diese einander völlig widersprechenden Ergebnisse? Einfach dadurch, dass die von Jastrow herrührende Definition der Schwelle in doppelter Hinsicht völlig falsch ist. Da infolge der Gültigkeit des Gauß'schen Gesetzes, welche ja die Versuche überhaupt erst ermöglicht und die Anwendung der Formeln gestattet, kleine Fehler häufiger auftreten als große, vertheilen sich die Fehler nach beiden Seiten nicht gleichförmig, sondern wie es

---

1) Higier selbst ist der Meinung, dass diese Werthe bei vorschriftsmäßigem Versuchsverfahren hätten größer ausfallen müssen.

2) Nach der Formel von Higier würde man sogar $S_0 = \frac{20,8+3}{2} = 11,9$ erhalten. Dann wäre $r > 94\%$.

Figur 9 darstellt. Es ergeben sich daher nicht gleich viel scheinbar richtige und scheinbar falsche Fälle, sondern diese Zahlen sind wesentlich verschieden, sie sind um so verschiedener, je kleiner der Spielraum der zufälligen Fehler überhaupt ist.

Nehmen wir an, die Fehler bei Beurtheilung des Unterschiedes der beiden Reize überschritten nicht die Unterschiedsschwelle, so würde man für die Schwelle 100 richtige Urtheile nach dem Verfahren Jastrow's erhalten, erreichen sie gerade die doppelte Unterschiedsschwelle, so erhält man 90,8 richtige Urtheile, erreichen sie den 5fachen Betrag der Unterschiedsschwelle, so erhält man 70,25 richtige Fälle. Diese Werthe ergeben sich, wenn man die für die Versuche Higier's geeigneten Zahlen (Seite 573) in ähnlicher Weise benutzt, wie es in Fig. 9 geschehen ist. Hiernach dürfte es sich schwerlich empfehlen, Versuchsanordnungen zu wählen, bei welchen man die obere Grenze nach Jastrow erhielte, denn es müssten dann Fehler bis zum vierfachen Betrage der Schwelle möglich sein.

Die von Jastrow bestimmte Schwelle würde nur dann richtig sein, wenn größere und kleinere Fehler dieselbe Wahrscheinlichkeit hätten, d. h. wenn etwa in der Columne F. Z. S. 573 statt der von 10,6 bis 0,45 abnehmenden Zahlen immer die Zahl 5 sich befände, und wenn sich die Fehler mindestens über die doppelte Schwelle erstreckten. Für die oben angenommenen Möglichkeiten über die Ausdehnung der Fehlergrenze erhält man statt der Zahlen $100r$, $90{,}8r$ und $70{,}25r$ die Werthe: $100r$, $75r$ und $60r$. Der Maximalwerth $75r$ von Jastrow ist also unter allen Umständen falsch, die übrigen Werthe erhöhen sich nicht infolge eines Erwartungsfehlers, sondern weil das Gauß'sche Gesetz der Fehlervertheilung gilt. Dem Werth $r = 75$ von Jastrow entspricht der wahrscheinliche Fehler F, die Schwelle erreicht etwa den doppelten Betrag ($S = 2F$).

Wie praktisch die Unterscheidung in »scheinbare« richtige und »scheinbare« falsche Fälle und »wirkliche« richtige und »wirkliche« falsche Fälle der Beibehaltung der Gleichheitsfälle vorzuziehen sein soll, ist mir schwer verständlich, ich halte diese »scheinbaren« Fälle für verkappte Gleichheitsfälle und bin für Zulassung derselben unter ihrer richtigen Flagge.

(Schluss folgt im nächsten Hefte.)