# Die Abhängigkeit zwischen Reiz und Empfindung.

Von

**Dr. Julius Merkel**
in Zittau.

Vierte Abtheilung.

---

## I. Die Verhältniss- und Unterschiedshypothese.

Seit der Veröffentlichung der III. Abtheilung[1]) meiner Arbeit über die Abhängigkeit zwischen Reiz und Empfindung ist ein längerer Zeitraum verflossen. Während desselben habe ich auf Grund genauerer psychophysischer Methoden zahlreiche neue Untersuchungen im Gebiete des Schallmaßes angestellt.

Als ich die I. Abtheilung[2]) dieser Arbeit der Oeffentlichkeit übergab, hatte die Unterschiedshypothese von Fechner einen nahezu unangefochtenen Sieg über die Verhältnisshypothese von Plateau errungen, nur hinsichtlich der Deutung der logarithmischen Abhängigkeit gingen die Meinungen weit aus einander. Hatte doch selbst Plateau seine Hypothese auf Grund der Versuche Delboeuf's preisgegeben!

Während die Ergebnisse meiner Versuche mich immer entschiedener von der Richtigkeit der Verhältnisshypothese überzeugten, folgerte Frank Angell[3]) aus Versuchen in demselben Reizgebiete, dass die Verhältnisshypothese der Abhängigkeit zwischen Reiz und Empfindung, insofern sie auf die Ergebnisse der Methode der mittleren Abstufungen und der Methode der doppelten Reize gegründet

---

1) Phil. Stud. V, S, 499—557. 2) Ebenda, IV, S. 541—594.
3) Ebenda, VII, S. 468.

werde, nicht gültig sei, dass vielmehr die Unterschiedshypothese zu Recht bestehe. Ich will mich aus den bereits in der Einleitung zur I. Abtheilung angedeuteten Gründen nicht eingehender mit den theoretischen Auseinandersetzungen Angell's befassen, ich verspüre auch wenig Neigung, ihm mit Münsterberg in das psychologische Labyrinth »des geschätzten Unterschieds der Unterschiede der absoluten Unterschiedsempfindungen«[1]) zu folgen, ich will vielmehr an das Ergebniss anknüpfen, das Angell[2]) in die Worte zusammenfasst:

»Ich finde also nicht, dass die Verhältnisshypothese den wesentlichen Forderungen einer wissenschaftlichen Hypothese entspricht, indem sie weder 1) eine genaue Zusammenfassung der Thatsachen ist, noch 2) auf deductive Weise Folgerungen gestattet, welche mit den Resultaten von Beobachtungen vergleichbar sind. Endlich, insoweit sie auf dem Hering'schen Relativitätssatz beruht, scheint mir die Verhältnisshypothese ebenso sehr metaphysisch als psychologisch zu sein.«

Die Versuche über das Weber'sche Gesetz haben im Gebiete des Schallmaßes durchgängig gezeigt, dass der Reizzuwachs, welcher eine ebenmerkliche Empfindung hervorruft, mit dem Ausgangsreiz ein constantes Verhältniss bildet, dass also die Beziehung:

$$\frac{\varDelta r}{r} = C \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

thatsächlich besteht. Gegen die Annahme, dass auch der Empfindungszuwachs zur Ausgangsempfindung ein gewisses Verhältniss bilden müsse, lässt sich nichts einwenden, so lange über die Größe dieses Verhältnisses keine Festsetzung getroffen wird. Man kann daher:

$$\frac{\varDelta e}{e} = c \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

setzen, worin $c$ vorläufig noch unbestimmt ist.

Die Gleichungen (1) und (2) liefern:

$$\frac{\varDelta e}{e} = \varepsilon \frac{\varDelta r}{r} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

---

1) Phil. Stud. VII, S. 423. 2) Ebenda, S. 419.

für $\varepsilon = \frac{c}{C}$, oder, wenn man zur Differentialformel übergeht:

$$\frac{de}{e} = \varepsilon \frac{dr}{r} \quad \text{. . . . . . . . . . . . . (4)}$$

Durch Integration erhält man:

$$e = kr^{\varepsilon} \quad \text{. . . . . . . . . . . . . . (5)}$$

Die vorstehende Formel enthält die von den Maßeinheiten abhängige Constante $k$ und den noch unbestimmten Exponenten $\varepsilon$, über dessen Größe sich nichts aussagen lässt, dessen Constanz nicht einmal feststeht, da er von $c$ mit abhängig ist.

Da über das Verhältniss $\frac{\Delta e}{e} = c$ die Versuche über das Weber-sche Gesetz keinerlei Auskunft geben, ist also $\varepsilon$ vorläufig als unbekannt anzusehen. Grotenfelt[1]) leugnet die Möglichkeit der Bestimmung des Werthes von $\varepsilon$ grundsätzlich.

Für $\varepsilon = 1$ wird $e = kr$, d. h. die Empfindung wächst proportional mit dem Reize.

Für $\varepsilon = 0$ wird $e = k$. Führt man diesen Werth in die Gleichung (3) ein und ersetzt man $k\varepsilon$ durch $\pi$, so ergibt sich:

$$\Delta e = \pi \frac{\Delta r}{r} \quad \text{. . . . . . . . . . . . . (6)}$$

oder:

$$de = \pi \frac{dr}{r}, \quad \text{. . . . . . . . . . . . . (6')}$$

woraus unter Beachtung des Schwellenwerthes $\varrho$ folgt:

$$e = \pi \log \operatorname{nat} \left(\frac{r}{\varrho}\right) \quad \text{. . . . . . . . . (6'')}$$

Sonach enthält Formel (5) auch den besonderen Fall, welcher zu der Fechner'schen logarithmischen Formel führt. (Die Bedenken, welche sich gegen die Ueberführung in die Differentialformeln und gegen die Constantenbestimmung erheben lassen, sollen im nächsten Abschnitte erörtert werden.)

---

1) Das Weber'sche Gesetz und die psychische Relativität, academ. Abhandl. von Arwid Grotenfelt. Helsingfors 1888. S. 149.

Günstiger, als bei der Bestimmung der ebenmerklichen Unterschiede, liegen die Verhältnisse bei der Bestimmung der doppelten Reize, falls man diese Aufgabe überhaupt als lösbar betrachtet. Angenommen, $r_2$ sei der Reiz, welcher nach der Empfindung doppelt so groß wie $r_1$ geschätzt wird, so erhält man:

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\varepsilon} = 2,$$

d. h.

$$\varepsilon = \frac{\log 2}{\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Diese Formel gibt für $\varepsilon = 1 : \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \log 2$, d. h. $\frac{r_2}{r_1} = 2$, dagegen für $\varepsilon = 0 : \log\frac{r_2}{r_1} = \infty$, d. h. einen untauglichen Werth. Dieser Fehlschlag ist indess wohl erklärlich; denn für die verschiedenartigsten Reizverhältnisse geben die Logarithmen den Werth 2, so z. B. für die Reize 4 und 2, 100 und 10, 10000 und 100 u. s. w., also für die Reizverhältnisse 2, 10, 100 u. s. w.

Während die Methode der doppelten Reize also auch in theoretischer Beziehung nicht völlig befriedigt, genügt die Methode der mittleren Abstufungen in jeder Hinsicht. Man erhält, wenn $r_u$ und $r_o$ die Grenzreize, $r_m$ den erhaltenen mittleren Reiz darstellt:

$$r_o^{\varepsilon} - r_m^{\varepsilon} = r_m^{\varepsilon} - r_u^{\varepsilon},$$

d. h.

$$r_m^{\varepsilon} = \frac{r_u^{\varepsilon} + r_o^{\varepsilon}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Diese Formel gibt für $\varepsilon = 1$ den Werth:

$$r_m = \frac{r_u + r_o}{2},$$

d. h. also das arithmetische Mittel aus den Grenzwerthen. In diesem Falle liefert also die Methode der mittleren Abstufungen bei Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes die arithmetischen Mittel. Die Empfindung wächst proportional mit dem Reize gemäß der Gleichung:

$$e = kr$$

und die Verhältnisshypothese gilt in der vereinfachten Form:

$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{\Delta r}{r} .$$

Dagegen lässt sich durchaus nichts einwenden.

Für $\varepsilon = 0$ gibt Gleichung (8):

$$1 = \frac{1 + 1}{2} = 1 ,$$

also eine richtige identische Gleichung. Indessen ist damit noch in keiner Weise bestimmt, für welchen Werth von $r_m$ der Exponent $\varepsilon$ den Werth 0 erhält.

Die Gleichung (8) lässt sich unter Benutzung eines Hülfswinkels auflösen. Man setze:

$$A = \frac{\log \sin \lambda + 0,1505}{\log \cos \lambda + 0,1505} \qquad \text{(9)}$$

und berechne sich aus dieser Gleichung für $\lambda = 45^\circ$ bis $90^\circ$ den Werth $A$. (Siehe die unten S. 147 folgende Tabelle.) Man erhält für den Grenzwerth $\lambda = 45^\circ$ den Werth $-1$ und für $90^\circ$ den Werth 0. Zwischen diesen Grenzen liegen alle andern Werthe. Für den jeweils gewonnenen Werth $r_m$ berechne man $A$ aus der Gleichung:

$$A = -\frac{\log r_o - \log r_m}{\log r_m - \log r_u} , \qquad \text{(10)}$$

entnehme aus der Tabelle den entsprechenden Werth $\lambda$ und bestimme $\varepsilon$ aus der Gleichung:

$$\varepsilon = \frac{2 \log \sin \lambda + 0,3010}{\log r_o - \log r_m} \qquad \text{(11)}$$

Die Gleichung (10) lässt sich auch schreiben:

$$A = -\frac{\log \frac{r_o}{r_m}}{\log \frac{r_m}{r_u}}$$

und da für $r_m = \sqrt{r_u\, r_o}$ die Verhältnisse $\frac{r_o}{r_m}$ und $\frac{r_m}{r_u}$ gleich sind, wird $A = -1$. Diesem Werthe entspricht $\lambda = 45^\circ$, also:

$$\sin \lambda = 0,8495 - 1 .$$

Für $\varepsilon$ ergibt sich sonach:

$$\varepsilon = \frac{2\,(0{,}8495 - 1) + 0{,}3010}{\log r_0 - \log r_m},$$

oder $\varepsilon = 0$, da der Nenner von Null verschieden ist.

Sonach entspricht die Gleichung (5) allen Anforderungen, welche an eine derartige Formel gestellt werden können. Die Versuche nach der Methode der mittleren Abstufungen gestatten die Bestimmung von $\varepsilon$, gleichviel ob sie die arithmetische oder die geometrische Mitte oder irgend einen ändern Werth liefern. Für die arithmetische Mitte ergibt sich $\varepsilon = 1$, für die geometrische Mitte $\varepsilon = 0$, für dazwischen liegende Werthe liegt $\varepsilon$ zwischen 0 und 1 und für kleinere bez. größere Werthe als die geometrische und arithmetische Mitte erhält man negative Werthe oder Werthe, welche größer als 1 sind. Im ersten Falle ergibt sich die Hypothese $\frac{\varDelta e}{e} = \frac{\varDelta r}{r}$, also die Verhältnisshypothese in ihrer einfachsten Form, und im zweiten Falle. $\varDelta e = \pi \frac{\varDelta r}{r}$, also die Unterschiedshypothese.

Diesen Standpunkt[1]) habe ich bereits in der ersten Abtheilung meiner Abhandlung vertreten. Ich betonte damals, dass diese Fälle nicht die einzig möglichen seien, dass sich sehr wohl auch ein zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel gelegener Werth ergeben könne. Ich glaubte damals, dass sich alsdann das Webersche Gesetz nicht gleichzeitig als gültig erweisen könne, und dass man eine complicirtere Voraussetzung über das Verhältniss ebenmerklicher Empfindungen machen müsse, als die genannten Hypothesen. Die Versuche haben thatsächlich solche mittlere Werthe geliefert, für die ich angenähert den Werth $\varepsilon$ der complicirteren Voraussetzung: $\frac{\varDelta e}{e} = \varepsilon \frac{\varDelta r}{r}$ bereits ermittelt habe. Die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes ist indess lediglich an die **Constanz** des Werthes $\varepsilon$ geknüpft.

Ich glaube hiermit, im Gegensatze zu der Ansicht Angell's, gezeigt zu haben, dass die Verhältnisshypothese alle Thatsachen

1) Phil. Stud. IV, S. 548.

umfasst, welche die Versuche überhaupt nur ergeben können, und dass sich aus ihr deductiv alles folgern lässt, was man von den Versuchen überhaupt nur erwarten kann. Ueberdies habe ich bei den vorstehenden Entwickelungen weder das Hering'sche Relativitätsgesetz noch die Wundt'sche Relativitätslehre gestreift.

Im Hinblick auf die vorausgehenden Auseinandersetzungen lässt sich etwa sagen:

Wir besitzen in unserem Bewusstsein nur ein **relatives** Maß der in ihm vorhandenen Zustände, wir müssen also eine Empfindung immer an einer andern messen. Handelt es sich nur um zwei Empfindungen, so beurtheilen wir die zweite nach ihrem Verhältniss zur ersten, und wir vermögen zwei Empfindungen erst dann zu unterscheiden, wenn ihr Verhältniss eine gewisse Größe erreicht hat. Handelt es sich um drei Empfindungen, so vermögen wir anzugeben, ob die zweite näher an der ersten oder zweiten liegt, oder ob sie die Mitte einnimmt. Im ersten Falle vermögen wir nicht zu entscheiden, ob das Verhältniss der Empfindungen gleichwerthig mit dem Verhältniss der Reize sei.

Die Ermittelung der Constanten $k$ und $\pi$ ist uns unmöglich, wir können daher nur untersuchen, wie die Empfindungen mit den Reizen wachsen, die absoluten Werthe für die Empfindungen werden wir wahrscheinlich niemals zu ermitteln vermögen. Man kann daher diese Constanten der Einfachheit wegen gleich 1 setzen.

**Tabelle zur Berechnung des Exponenten $\varepsilon$ der Formel $r_m^{\varepsilon} = \frac{r_u^{\varepsilon} + r_o^{\varepsilon}}{2}$.**

$$-A = \frac{\log r_o - \log r_m}{\log r_m - \log r_u} \left\{ = - \frac{\log \sin \lambda + 0{,}1505}{\log \cos \lambda + 0{,}1505} \right\}^{1)} \quad . \quad . \quad \text{(I)}$$

$$\varepsilon = \frac{2 \log \sin \lambda + 0{,}301}{\log r_o - \log r_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

Man berechne $-A$ nach Formel (I), suche in der Tabelle den Werth $\lambda$ und berechne $\varepsilon$ nach Formel (II).

(Die Tabelle reicht von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = 1$.)

| $-A$ | $\lambda$ | Differenz für $A = 0{,}001$ | $-A$ | $\lambda$ | Differenz für $A = 0{,}001$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 45° | — | 0,426 | 68° | 3,33′ |
| 0,962 | 46° | 1,63′ | 0,408 | 69° | 3,33′ |
| 0,930 | 47° | 1,87′ | 0,391 | 70° | 3,53′ |
| 0,899 | 48° | 1,94′ | 0,374 | 71° | 3,53′ |
| 0,869 | 49° | 2,00′ | 0,358 | 72° | 3,75′ |
| 0,839 | 50° | 2,00′ | 0,342 | 73° | 3,75′ |
| 0,810 | 51° | 2,07′ | 0,326 | 74° | 3,75′ |
| 0,782 | 52° | 2,14′ | 0,310 | 75° | 3,75′ |
| 0,755 | 53° | 2,22′ | 0,295 | 76° | 4,00′ |
| 0,728 | 54° | 2,22′ | 0,280 | 77° | 4,00′ |
| 0,703 | 55° | 2,40′ | 0,265 | 78° | 4,00′ |
| 0,678 | 56° | 2,40′ | 0,250 | 79° | 4,00′ |
| 0,653 | 57° | 2,40′ | 0,235 | 80° | 4,00′ |
| 0,630 | 58° | 2,61′ | 0,221 | 81° | 4,29′ |
| 0,607 | 59° | 2,61′ | 0,207 | 82° | 4,29′ |
| 0,585 | 60° | 2,73′ | 0,193 | 83° | 4,29′ |
| 0,563 | 61° | 2,73′ | 0,179 | 84° | 4,29′ |
| 0,542 | 62° | 2,86′ | 0,164 | 85° | 4,00′ |
| 0,522 | 63° | 3,00′ | 0,149 | 86° | 4,00′ |
| 0,502 | 64° | 3,00′ | 0,133 | 87° | 3,75′ |
| 0,482 | 65° | 3,00′ | 0,115 | 88° | 3,33′ |
| 0,463 | 66° | 3,16′ | 0,094 | 89° | 2,86′ |
| 0,444 | 67° | 3,16′ | 0 | 90° | 0,64′ |

1) Wird nur benöthigt, wenn sich die Kenntniss weiterer Werthe für $\lambda$ und $A$ nöthig machen sollte.

## II. Die logarithmische Abhängigkeit zwischen Reiz und Empfindung.

Bekanntlich haben die aus der Fechner'schen Formel sich ergebenden negativen Empfindungen, die bei den geringsten Reizen ungeheure Werthe annehmen, ohne jedoch appercipirt zu werden, unübersehbare Erörterungen veranlasst. Trotzdem ist zu bezweifeln, ob irgend jemand sich aus voller Ueberzeugung mit ihnen befreundet habe.

Bevor ich auf diese negativen Empfindungen des näheren eingehe, möchte ich die logarithmische Abhängigkeit zwischen Reiz und Empfindung auf Grund der verschiedenen Darstellungen etwas näher beleuchten.

Das logarithmische Gesetz bezieht sich zunächst auf natürliche Logarithmen. In dieser Form ist es auf wesentlich verschiedenen Wegen von Fechner, Wundt und Bernstein abgeleitet worden. Andere Forscher haben die Formel entweder in der genannten Form angenommen oder sie haben, wie Delboeuf, Helmholtz, Müller und Langer, einige Aenderungen vorgenommen, welche den Charakter der Formel nicht berühren, sondern lediglich den Abweichungen vom Weber'schen Gesetz Rechnung tragen sollen. Auf die veränderte Deutung, welche Wundt in der neuesten Auflage seiner physiologischen Psychologie der logarithmischen Formel zu Grunde legt, komme ich später zurück. In neuerer Zeit hat Chr. Wiener[1]) in seiner Arbeit über »die Empfindungseinheit zum Messen der Empfindungsstärke« auf Grund experimenteller Versuche aus dem Gebiete der Lichtempfindungen für den absoluten (!) Werth der Empfindungsstärke die Formel:

$$e = \frac{\log r + 4}{0{,}0414}$$

abgeleitet, in welcher künstliche Logarithmen zu Grunde zu legen sind.

Ich will für die Formeln von Fechner und Wiener einige Zahlenbeispiele anführen. Die Formel (6″) gibt für den Reiz $r = 0{,}054$ und die Schwelle $\varrho = 0{,}02$ für $e$ den Werth:

---

1) Ann. der Phys. und Chem. N. F. Bd. XLVII. S. 659.

$$e = 1\pi,$$

und für den 21fachen Reiz 1,134 den Werth:

$$e = 4\pi.$$

Für den Reiz $r = 1$ und dieselbe Schwelle wird:

$$e \doteq 3{,}91\pi$$

und für den Reiz 1000:

$$e = 10{,}82\pi,$$

d. h. während der Reiz den 1000fachen Betrag erreicht, steigt die Empfindung nur um das 2,77fache. Um die vierfache Empfindung zu erhalten, müsste man einen Reiz von mehr als 120000 benutzen.

Auf Grund der Formel von Wiener wird für den Reiz $r = 1$ die Empfindung $e = 96{,}6$, für $r = 10$, $e = 127{,}7$, für $r = 100$, $e = 144{,}9$, für $r = 1000$, $e = 169$ und endlich für $r = 10000$, $e = 193{,}2$.

Während hiernach der Reiz den 10000fachen Werth erreicht, steigt die Empfindung nur auf das doppelte. Die Erklärung dieser unbegreiflichen Zahlen möchte ich namentlich von Frank Angell heischen, der bei der Methode der mittleren Abstufungen z. Th. die mittleren Proportionalen experimentell erhalten hat, der zugleich der Ansicht ist, dass sich diese aus theoretischen Gründen ergeben müssen und der überdies die frühere Ansicht Wundt's[1]) vertritt, nach welcher das Schätzen der Empfindung $e_m$ als Mitte zwischen den Empfindungen $e_u$ und $e_0$ bedeutet, dass man die absolute Größe des Unterschieds zwischen $e_u$ und $e_m$ der absoluten Größe des Unterschieds zwischen $e_m$ und $e_0$ gleichsetzt[2]).

Auf Grund dieses letzteren Satzes, den auch ich im Hinblick auf die Methode der mittleren Abstufungen (nicht mit Rücksicht auf die Münsterberg'sche Methode gleicher Reizverhältnisse)

1) Gegenwärtig hält Wundt bei der Methode der mittleren Abstufungen sowohl die relative als auch die absolute Schätzung der Empfindungen je nach der Verschiedenheit der Versuchsbedingungen für möglich. Vergl. Physiol. Psychol. 4. Aufl. S. 394.

2) Phil. Stud. VII, S. 422 und 449.

noch voll und ganz vertrete, ergibt sich eben die Gleichung (8), die selbstredend nicht verlangt, dass die Versuche die arithmetischen Mittel ergeben.

Urtheilt man bei der Methode der mittleren Abstufungen nach gleichen Verhältnissen, so muss man an Stelle der Gleichung (8) die Gleichung:

$$\left(\frac{r_o}{r_m}\right)^\varepsilon = \left(\frac{r_m}{r_u}\right)^\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

zu Grunde legen, die augenscheinlich für jeden Werth von $\varepsilon$ gilt und somit die Bestimmung dieser Größe ebenso wenig gestattet, wie die Gleichung, welche das Weber'sche Gesetz zum Ausdruck bringt.

Für den Verfechter der logarithmischen Abhängigkeit zwischen Reiz und Empfindung kann übrigens die Unterscheidung der Beurtheilung gleicher Unterschiede und gleicher Verhältnisse im letztgenannten Sinne gar nicht in Frage kommen, denn mit Rücksicht auf den Satz von Wundt erhält man für die Methode der mittleren Abstufungen:

$$\log r_o - \log r_m = \log r_m - \log r_u\,, \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

woraus ohne weiteres:

$$\frac{r_o}{r_m} = \frac{r_m}{r_u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

folgt. Während man also gleiche Reizverhältnisse als gleich beurtheilt hat, waren die absoluten Unterschiede der Empfindungen im Einklang mit dem Wundt'schen Satze einander gleich. Besteht sonach die logarithmische Abhängigkeit, so ist die Schätzung (B) oder (C) als absolute zu bezeichnen, sie würde für die Reize $r_u = 10$ und $r_o = 1000$ den Werth $r_m = 100$ liefern. Die relative Schätzungsweise oder die Beurtheilung nach gleichen Verhältnissen würde den Werth 54 für $R_m$ ergeben und sich darstellen durch:

$$\frac{\log r_o}{\log r_m} = \frac{\log r_m}{\log r_u}\,,$$

oder:

$$\log r_m = \sqrt{\log r_u \cdot \log r_o} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D)$$

Ich habe bereits in der I. Abtheilung meiner Arbeit über die Abhängigkeit zwischen Reiz und Empfindung angedeutet, welche berechtigte Anwendung die Logarithmen bei der Untersuchung der Abhängigkeit zwischen Reiz und Empfindung erfahren können. Ich habe im Anschluss an das Gleichungssystem:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = \ldots = C \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

wörtlich gesagt:

»Construirt man die verschiedenen $r$, welche ebenmerkliche Empfindungen hervorrufen, als Ordinaten, und wählt man als Abscissen die Werthe $C$, $2C$, $3C$ ...., so ergibt sich eine logarithmische Linie. Wählt man auf dieser irgend zwei Reize, die einer Abscissendifferenz $C$ entsprechen, so rufen dieselben ebenmerkliche Empfindungen hervor, ist die Abscissendifferenz größer, so ist der Unterschied der Empfindungen übermerklich, ist er kleiner, so ist ein Empfindungsunterschied nicht zu bemerken. Die einzelnen Abscissen könnten auch einen beliebigen andern constanten Abstand von einander haben«[1]).

Das Gleichungssystem (I) gibt augenscheinlich die Beziehungen:

$$r_1 = rC^1,$$
$$r_2 = r_1 C = rC^2,$$
$$r_3 = r_2 C = rC^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$r_n = rC^n,$$

denen noch: $r = r$ vorausgeschickt werden könnte.

Setzt man den Ausgangsreiz $r = 1$, so erhält man als Reizstufen (Ordinaten):

$$C^0, \quad C^1, \quad C^2, \quad C^3 \quad \ldots \quad C^n,$$

denen die Empfindungsstufen (Abscissen):

$$0\pi, \quad 1\pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi \quad \ldots \quad n\pi,$$

in denen $\pi$ ein unbestimmbarer Factor ist, entsprechen.

Versteht man allgemein unter $r_x$ die $x$te Reizstufe, so erhält man:

---

1) Phil. Stud. IV, S. 545.

$$\left.\begin{aligned} r_x &= C^x , \\ r_{x-1} &= C^{x-1} , \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II)}$$

d. h. die Reize $r_x$ und $r_{x-1}$ vermag man eben zu unterscheiden für alle Werthpaare, welche innerhalb der Gültigkeitsgrenzen des Weber'schen Gesetzes liegen.

Die Gleichungen (II) dienen dazu, um für irgend eine Empfindungsstufe (d. h. für irgend einen Werth von $x$) die zugehörige Reizstufe zu ermitteln. Ist umgekehrt irgend ein Reiz $R$ gegeben, und will man die ihm zugehörige Empfindungsstufe berechnen, so hat man $x$ zu bestimmen aus der Gleichung:

$$C^x = R ,$$

d. h. aus:

$$x = \frac{\log R}{\log C} ,$$

oder, wenn man die Empfindungsstufen durch $e_x$ bezeichnet, aus der Gleichung:

$$e_x = \frac{\log R}{\log C} . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

**Hiernach ist nur für das Logarithmensystem, welches als Grundzahl die Gröfse $C$, d. h. das Verhältniss eben unterscheidbarer Reize hat, die Empfindungsstufe gleich dem Logarithmus des Reizes.**

Die Formel (III) gibt für $R = 1$ den Werth: $e_x = 0$, für $R = C$ den Werth $e_x = 1$.

Am einfachsten wird man für denjenigen Reiz $r$ den Werth 1 annehmen, welcher der Reizschwelle entspricht. Dann hat es keinen praktischen Sinn, die Reihe der Reizstufen nach rückwärts fortzusetzen, auch schon deshalb nicht, weil in der Nähe der Reizschwelle in der Regel das Weber'sche Gesetz nicht mehr gültig ist. Wählt man für ein beliebiges innerhalb des Reizgebietes, für welches das Weber'sche Gesetz gilt, gelegenes $r$ den Werth 1, so erhält man die rückwärts liegenden Reizstufen durch fortgesetzte Division mit $C$, und die entsprechenden Empfindungsstufen durch wiederholte Subtraction von $1\pi$, d. h. es ergibt sich:

$$C^{-1}, \quad C^{-2}, \quad C^{-3} \quad \ldots\ldots \quad C^{-n},$$

$$-1\pi , \quad -2\pi , \quad -3\pi \quad \ldots\ldots \quad -n\pi .$$

Daraus geht hervor, dass die Gleichungen (II) und (III) auch für negative Werthe von $x$ gelten, denen die Werthe $R < 1$ entsprechen.

Gibt man dem der Reizschwelle entsprechenden Reize den Werth 1 und setzt man auch in diesem Falle die Reihe der Reizstufen nach rückwärts fort, so kann man natürlich unendlich oft durch $C$ dividiren, ohne den absoluten Nullwerth zu erreichen, und auf der andern Seite erhält man unendlich viele Empfindungsstufen. Da letztere nicht appercipirt werden, hat diese Frage keine praktische Bedeutung; wäre die Reizschwelle nicht vorhanden, so würden ja thatsächlich zwischen 0 und 1 bereits unendlich viele Reizverhältnisse liegen, die sich ebenmerklich unterscheiden lassen. Um also negative Empfindungsstufen, welche nach der vorstehenden Ableitung nichts befremdendes haben, auszuschließen, wird man für den kleinsten benutzten Reiz mindestens den Werth 1 annehmen müssen.

Sobald nun die Versuche ergeben sollten, dass das geometrische Mittel immer als Mitte zwischen zwei Reizen, welche um wesentlich mehr als die doppelte Schwelle abweichen, geschätzt wird, so würde es sich in Formel (III) um das Wachsthum der Empfindung handeln, die Formel (III) würde dann unmittelbar die Abhängigkeit zwischen Reiz und Empfindung darstellen; sobald sich jedoch Werthe herausstellen, welche dem arithmetischen Mittel näher liegen, so bringt Formel (III) lediglich die Thatsachen des Weberschen Gesetzes zur Darstellung. Sie gestattet dann zu berechnen, wieviel Empfindungsstufen oder Merklichkeitsstufen der Empfindung bis zu einem gegebenen Reize liegen, ohne gewissermaßen über den Inhalt dieser Stufen etwas auszusagen.

Offenbar kommt die Behandlung, welche Wundt in der neuesten Auflage seiner physiologischen Psychologie der Abhängigkeit zwischen Reiz und Empfindung gewidmet hat, den oben gegebenen Entwickelungen unter allen andern Darstellungen am nächsten. Während er früher das logarithmische Gesetz zwar nicht unmittelbar auf die Abhängigkeit zwischen Reiz und Empfindung, sondern im Gegensatz zu Fechner auf die Abhängigkeit zwischen Reiz und appercipirter Empfindung bezog, hat er nunmehr lediglich an der Fassung festgehalten: »Die Merklichkeit einer Empfindung wächst proportional dem Logarithmus des äußeren Reizes«. Dagegen vertritt Chr. Wiener in neuester Zeit den Fechner'schen Standpunkt am energischsten. Er berücksichtigt zwar neben der Schwelle auch die Verhältnissschwelle, glaubt aber, dass seine logarithmische Formel den absoluten Werth der Empfindungsstärke zum Ausdruck bringe. Ich möchte Formel (III) in folgenden Satz kleiden:

**Die Merklichkeitsstufe der Empfindung wächst proportional dem Logarithmus des Reizes, getheilt durch den Logarithmus des ebenmerklichen Reizverhältnisses.**

Der letzte Zusatz ist von Wichtigkeit. Die Formel (III) ist abgeleitet worden, ohne auf die Differentialformel zurückzugehen, sie liefert für $R = 1$ und $R = C$ die richtigen Werthe, während die Fechner'sche Formel nur im ersten Falle den richtigen Werth gibt. Entweder ist die Ueberführung der Formel (6) in die Differentialformel (6′) nicht erlaubt, oder die Bestimmung der Integrationsconstanten ist nicht richtig.

Die Fechner'sche Formel lautet:

$$e = \pi \log \operatorname{nat} R + \text{const}\,.$$

Für $R = 1$ oder für die Schwelle soll $e = 0$ werden, was nur für $\text{const} = 0$ möglich ist. Es soll aber weiter für $R = C$ die Empfindung $e = 1$ sich ergeben, also wird:

$$1 = \pi \log \operatorname{nat} C\,.$$

Dividirt man die aus der Bedingung $\text{const} = 0$ sich ergebende Gleichung:

$$e = \pi \log \operatorname{nat} R$$

durch die vorstehende Gleichung, so erhält man:

$$e = \frac{\log \operatorname{nat} R}{\log \operatorname{nat} C} = \frac{\log R}{\log C},$$

also Formel (III). Die Wundt'sche Ableitung enthält Formel (III) in der Form:

$$E = k\,\frac{\log \operatorname{nat} R}{\log \operatorname{nat} b},$$

es durfte nur nicht $\frac{k}{\log \operatorname{nat} b} = \text{const}$ [1]) gesetzt werden.

1) Wundt, Physiol. Psychol. 4. Aufl. S. 401.

Am deutlichsten werden die Verhältnisse durch Berechnung einiger Zahlenbeispiele hervortreten.

Angenommen, der Schwellenwerth für ein gewisses Reizgebiet sei 0,02 und $C = 1\frac{1}{3}$. Um negative Werthe zu vermeiden, setze man diesen Reizwerth gleich 1. Dann ergibt sich für die 24. und 25. Reizstufe nach Formel (II):

$$r_{25} = 1328 \quad (0{,}02 \cdot 1328 = 26{,}56)\,,$$

$$r_{24} = \phantom{1}996 \quad (0{,}02 \cdot \phantom{1}996 = 19{,}92)\,.$$

Diese Reize lassen sich sonach eben unterscheiden. In der That ist ihr Verhältniss $C = 1\frac{1}{3}$. Den beiden Reizen entsprechen die 25. bez. 24. Empfindungsstufe. Nach Formel (II) erhält man weiter für $x = e = 1$: $r = C = 1\frac{1}{3}$. Nach Fechner'scher Deutung würde hiernach zu einer Steigerung der Empfindung um das 25fache eine Reizsteigerung um das $(1328 : \frac{4}{3})$fache, d. h. um das 996fache erforderlich sein. Für die hundertste Reizstufe wird:

$$r_{100} = 3''111\,700'000000\,.$$

Während der Reiz den 2''333 775'000000fachen Betrag erreicht, steigt die Empfindung nur um den 100fachen Betrag!!

Formel (III) gibt zunächst umgekehrt für $R = C$ den Werth $e = 1$, für den Reiz 100 die Empfindungsstufe 16, für den Reiz 5000 die Empfindungsstufe 29,6, für den Reiz 1'000000 die Empfindungsstufe 48 u. s. w.

Auch diese Ergebnisse machen die logarithmische Abhängigkeit zwischen Reiz und Empfindung keineswegs wahrscheinlich, so dass eine abermalige Prüfung der experimentellen Ergebnisse Angell's geradezu geboten erscheint.

Analog wie die Ableitung der Formel (6'') aus (6) dürfte auch die Ableitung der Formel (5) aus (3) ähnlichen Bedenken unterliegen. Berechnet man z. B. einerseits aus Gleichung (7), welche unter Benutzung der Gleichung (5) erhalten worden ist, den Werth $\varepsilon$ und bestimmt man anderseits aus der nach (3) gebildeten Gleichung:

$$\varepsilon = \frac{2}{\left(\frac{r_2}{r}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

denselben Werth, so erhält man augenscheinlich verschiedene Größen. Ich suchte daher auf ähnlichem Wege wie bei Ableitung der Formel (III) eine einwurfsfreie Formel auf Grund der Verhältnisshypothese zu gewinnen. Die Annahme, dass das Verhältniss der Empfindungen ein anderes constantes Verhältniss darstelle, als das Verhältniss der Reizpaare, die sich eben unterscheiden, kann ausgedrückt werden durch:

$$\frac{e_1}{e} = \eta \frac{r_1}{r} \quad \text{oder} \quad \frac{e_1}{e} = \frac{\eta^1}{\eta^0} \cdot \frac{r_1}{r},$$

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{\eta^2}{\eta^1} \cdot \frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{e_3}{e_2} = \frac{\eta^3}{\eta^2} \cdot \frac{r_3}{r_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{e_n}{e_{n-1}} = \frac{\eta^n}{\eta^{n-1}} \cdot \frac{r_n}{r_{n-1}}.$$

Bei Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes ist indess:

$$\frac{r_1}{r} = C, \quad \text{d. h. } r_1 = r\,C$$

$$\frac{r_2}{r_1} = C, \quad \text{d. h. } r_2 = r_1 C = r\,C^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{r_n}{r_{n-1}} = C, \quad \text{d. h. } r_n = r\,C^n.$$

Aus beiden Reihen ergibt sich ohne weiteres die Formel:

$$e_n = \eta^n r_n = \eta^n C^n,$$

wenn man wieder $r = 1$ annimmt.

Für einen beliebigen auf die Einheit bezogenen Reiz $R$ ist aber

$$R = C^n,$$

d. h.

$$\log R = n \log C,$$

$$n = \frac{\log R}{\log C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(V)}$$

Man erhält demnach

$$e = \eta^{\frac{\log R}{\log C}} R. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VI)}$$

Benutzt man an Stelle der Formel (V) die Formel:

$$e = R^{\varepsilon}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VII)}$$

welche sich aus der Hypothese $\frac{e_1}{e} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^{\varepsilon}$ ohne weiteres ableiten ließe, so ergibt sich:

$$R^{\varepsilon} = \eta^{\frac{\log R}{\log C}} R,$$

woraus:

$$\varepsilon = \frac{\log \eta}{\log C} + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VIII)}$$

und

$$\eta = C^{\varepsilon - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(IX)}$$

folgt. Für $\varepsilon = 1$ wird $\eta = 1$ und für $\varepsilon = 0$ ergibt sich:

$$\eta = \frac{1}{C}.$$

Im ersten Falle gibt Formel (VI) Proportionalität zwischen Reiz und Empfindung, im letzten Falle wird $e = 1$, d. h. die Verhältnisshypothese muss durch die Unterschiedshypothese ersetzt werden.

Die Berechnung von $\eta$ würde erfolgen durch die Gleichung:

$$\eta = \frac{\frac{e_1}{e}}{\frac{r_1}{r}} = \frac{\frac{e_1}{e}}{C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(X)}$$

Da indess $\frac{e_1}{e}$ nicht bekannt ist, ist die Berechnung nicht ausführbar, ebenso wie auf Grund der Weber'schen Versuche allein auch $\varepsilon$ nicht ermittelt werden konnte. Für die Methode der doppelten Reize lautet die der Gleichung (7) entsprechende Gleichung:

$$\eta = \frac{2}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{2}{C}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(XI)}$$

worin $C$ natürlich einen andern Werth hat als in Formel (X).

Berechnet man aus dieser Gleichung, sowie aus Gleichung (7), in welcher ebenfalls $\frac{r_2}{r_1} = C$ zu setzen ist, die Werthe $\eta$ und $\varepsilon$, so wird die Beziehung (IX) identisch erfüllt.

Für die Methode der mittleren Abstufungen erhält man auf Grund der Formel (VI) aus:

$$2 e_m = e_u + e_o:$$

$$2\eta^{\frac{\log R_m}{\log C}} R_m = \eta^{\frac{\log R_u}{\log C}} R_u + \eta^{\frac{\log R_o}{\log C}} R_o, \quad \ldots\ldots \quad \text{(XII)}$$

oder:

$$\eta^{\frac{\log R_o - \log R_u}{\log C}} R_o - 2\eta^{\frac{\log R_m - \log R_u}{\log C}} R_m + R_u = 0 \quad \ldots \quad \text{(XII')}$$

Setzt man $\eta^{\frac{1}{\log C}} = k$, so erhält man zur Bestimmung von $k$:

$$k^{\log \frac{R_o}{R_u}} R_o - 2k^{\log \frac{R_m}{R_u}} R_m + R_u = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(XII'')}$$

Diese Gleichung führt z. B. für $R_u = 10$, $R_m = 100$, $R_o = 1000$ zu einer quadratischen Gleichung für $k$, welche den Werth $k = \frac{1}{10}$ gibt.

Dann liefert:

$$\eta^{\frac{1}{\log C}} = \frac{1}{10}:$$

$$\frac{1}{\log C} \log \eta = -1$$

und auf Grund dieses Werthes gibt Formel (VIII): $\varepsilon = 0$. Die Formel (XII'') führt also auf die Unterschiedshypothese. Die Gleichung (XII) lässt ferner auf den ersten Blick erkennen, dass sie für $R_m = \frac{R_u + R_o}{2}$ nur dann erfüllt ist, wenn $\eta = 1$ gesetzt wird.

Anstatt die Gleichung (XII'') zu benutzen, wird man zweckmäßiger die Gleichung:

$$R_m^{\varepsilon} = \frac{R_u^{\varepsilon} + R_o^{\varepsilon}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XIII)}$$

anwenden, auf Grund derselben in der im I. Abschnitt gekennzeichneten Weise $\varepsilon$ ermitteln und dann $\eta$ aus Gleichung (IX), oder, falls $C$ nicht bekannt sein sollte, $k$ aus der Beziehung:

$$\log k = \frac{1}{\log C} \cdot \log \eta, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XIV)}$$

d. h. mit Rücksicht auf (VIII):

$$\log k = \varepsilon - 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(XV)}$$

berechnen. Führt man übrigens in Formel (VI) den constanten Werth:

$$\eta^{\frac{1}{\log C}} = k$$

ein, woraus:

$$\eta = k^{\log C}$$

folgt, so wird:

$$e = k^{\log R}\, R\,.$$

Bei Benutzung der Methode der ebenmerklichen Unterschiede und der Methode der doppelten Reize ergeben sich verschiedene Werthe für $C$ und mithin auch für $\eta$, während sich für $k$ derselbe Werth ergibt, vorausgesetzt dass die Versuchsbedingungen dieselben sind. Aus diesem Grunde ist die Aufstellung der Formel (XVI), ganz abgesehen von ihrer größeren Uebersichtlichkeit, wichtig.

(Fortsetzung folgt im nächsten Heft.)