

Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik.

Von

Gottl. Friedr. Lipps.

(Fortsetzung.)

III.

Die logische Ordnung und die Zahl.

§ 1.

Das Aufsuchen der Thatsachen, welche der Mathematik zu Grunde liegen, führte zu der Einsicht, dass das Gegebene als ein vom Denken unberührter Complex von Erlebnissen aufzufassen sei, der erst dann geschieden und getrennt wird, wenn eine Veränderung im Zustande des Gegebenen thatsächlich eintritt und wenn das hierdurch erwachende Denken zum Auffassen und Behalten der beharrenden und wechselnden Erlebnisse angeregt wird. Es bieten sich alsdann die einzelnen Erlebnisse, die vermöge ihrer Qualität von einander unterscheidbar sind, als Einzelinhalte des Bewusstseins dar und das Bewusstsein selbst ist als ihr Träger aufzufassen. Dies wurde hervorgehoben, nicht etwa um irrtümlicher Weise schon das bloße Vorhandensein von Gegenständen des Bewusstseins, die Jedermann als unmittelbar gegeben hinzunehmen geneigt ist, für ein mit bewusster Absicht herbeigeführtes Resultat des Strebens nach Erkenntniss auszugeben, sondern um die Bedingungen anzugeben, unter denen man durch den unwillkürlich wirkenden psychologischen Mechanismus einzelner Inhalte bewusst wird. Es war aber nothwendig dies hervorzuheben; denn es erhellt daraus die Möglichkeit einer Wissenschaft, welche als Objecte der

Untersuchung unbefangen die Inhalte des Bewusstseins ganz so hin-
nimmt, wie sie aus der Analyse des Gegebenen resultiren, und
deren Aufgabe in der Erforschung der Beziehungen, die zwischen
jenen Objecten nachweisbar sind, besteht. Es wird nun allerdings
zunächst das Bedürfniss sich geltend machen, eine Uebersicht über
jene thatsächlich im Bewusstsein vorhandenen und thatsächlich er-
lebten Inhalte zu gewinnen. Als Resultat dieses Bemühens werden
sich die psychologischen Classificationen der Bewusstseinsobjecte er-
geben; darauf kann sich alsdann eine weitergehende psychologische
Arbeit gründen, die dadurch genügend charakterisirt ist, dass es
immer ein thatsächlich Erlebtes ist, dessen Beschaffenheit und Ge-
setzmäßigkeit erforscht wird. Man gewinnt auf diese Weise die
Anfänge der Psychologie. Man wird ferner das Bedürfniss empfin-
den, die Thätigkeit des Denkens in ihren Eigenschaften und Ge-
setzmäßigkeiten kennen zu lernen, um zu erfahren, nach welchen
Regeln das vorhandene Material durch das Denken verarbeitet wer-
den kann. Das formale Geschäft des Denkens wird alsdann den
Gegenstand der Untersuchung bilden, deren Ergebniss sich als for-
male Logik darstellen wird.

Fragt man aber nach dem Grunde der Möglichkeit, das Ge-
gebene durch das Denken zu bearbeiten, so wird man auf den Zu-
stand des Bewusstseins aufmerksam. Das Bewusstsein bietet sich
als der Träger des Gegebenen dar und man erkennt, dass alles
Bearbeiten der Bewusstseinsinhalte nur ein ordnendes Zusammen-
fassen derselben im Bewusstsein als ihrem Träger zur Folge hat.
Alsdann wird eine Wissenschaft von der Ordnung der Bewusst-
seinsinhalte im Bewusstsein zum Bedürfniss. Sie ist naturgemäß
durch das psychologische Material bedingt, das vorgefunden wird
und zunächst geordnet werden muss. Sie ist aber auch von der
Natur des Denkens abhängig; denn das Denken erzeugt ja allererst
die Ordnung, und die Erzeugnisse des Denkens sind weiterhin ebenso
wie die dem Denken sich darbietenden Objecte Inhalte des Bewusst-
seins und einer ordnenden Zusammenfassung fähig.

Die Erkenntniss, für welche man in solcher Weise die Fun-
damente gewinnt, soll nicht als die einzig mögliche oder einzig
berechtigte hingestellt werden. Sie soll vielmehr nur eine erste
Stufe des Erkennens markiren, für welche der Gegensatz zwischen

einem gegebenen Schein und einem durch den Schein angedeuteten Sein noch nicht vorhanden ist. Eine weitergehende wissenschaftliche Thätigkeit mag immerhin sich genöthigt sehen, Ergänzungen vorzunehmen. Es betont ja Herbart¹⁾ eindringlich genug die »unvermeidliche Mangelhaftigkeit« aller unserer unmittelbaren Kenntnisse und sieht in der Ergänzung eine besondere Operation des Denkens. Auch ist ohne Bedenken das Zugeständniss zu machen, dass der Erkenntnistrieb auf solch einer ersten Stufe nicht befriedigt wird, sondern dass er das schon durch die populäre Reflexion begonnene Geschäft weiterzuführen genöthigt ist, um dem Ziele einer widerspruchslosen Auffassung des Ichs und der Welt zuzustreben.

Das Hervorheben jener ersten Stufe des Erkennens ist aber nothwendig, wenn man sich vor der Metaphysik des sogenannten gesunden Menschenverstandes schützen will. Denn man treibt doch, auch wenn man sich dessen nicht bewusst wird, Metaphysik, indem man die Dinge der Außenwelt mit ihren Kräften und Eigenschaften und das denkende Ich mit seinen Zuständen als gegeben hinnimmt und die Erfahrung, die man an diesen Dingen macht, als Quelle des Erkennens benutzt. Damit ist aber wohl der Standpunkt des in den Einzelwissenschaften herrschenden Empirismus und der positiven Philosophie, wie sie Auguste Comte lehrt, gekennzeichnet. Wollte man auf solcher Grundlage wissenschaftlich arbeiten, so dürfte doch wohl Herbart nicht umsonst auf die Widersprüche der Erfahrungsbegriffe hingewiesen haben, und es wäre die einzige Möglichkeit für ein vor Irrthümern geschütztes Erkennen in einer Metaphysik im Sinne Herbarts gegeben, deren Aufgabe es wäre, die Begriffe von ihren Widersprüchen zu reinigen und an Stelle der Ergänzungen, welche die populäre Reflexion geschaffen hat, solche zu setzen, die wissenschaftlich berechtigt sind und ein widerspruchsloses Erkennen ermöglichen.

Den Charakter einer von allen Voraussetzungen über das Sein und über den realen Untergrund des Geschehens und in gleicher

1) Er sagt: »diejenige Operation des Denkens, wodurch die Mangelhaftigkeit verbessert wird, heißt Ergänzung«. Psychologie als Wissenschaft. Königsberg 1824. I. Theil. S. 26.

Weise von den Ergebnissen der populären Reflexion unabhängigen Wissenschaft erhält auch die Mathematik. Denn die früheren Erörterungen zeigten und die folgenden Untersuchungen werden es bestätigen, dass in den Thatsachen, auf welchen die Ordnung der Bewusstseinsinhalte im Bewusstsein beruht, der geeignete Ausgangspunkt für die Entwicklung der mathematischen Begriffe gefunden wird. Die Natur des in der Mathematik verarbeiteten Thatsachenmaterials ist so völlig klar gestellt; denn man hat es bloß mit dem Bewusstsein und seinen Inhalten zu thun. Die Art und Weise der Verarbeitung ist aber von Anfang an davon abhängig, ob die Inhalte des Bewusstseins in ihrem Zusammenhange mit dem Gesamtinhalte oder ob sie in ihrer Isolirung, als für sich bestehende Qualitäten erfasst werden. Im ersteren Fall resultirt die anschauliche, im letzteren Falle die logische Ordnung, und je nachdem sich die Reflexion der einen oder der andern Art ordnenden Zusammenfassens zuwendet, entsteht die eine oder die andere der beiden fundamental verschiedenen Arten mathematischer Begriffe.

§ 2.

Die Untersuchung der logischen Ordnung, welche durch das Zusammenfassen der für sich bestehenden Qualitäten im Bewusstsein als ihrem logischen Träger vermittelt wird, stelle ich mir zunächst als Aufgabe, um so einen Zugang zum Begriffe der Zahl und zu den auf die Zahl gegründeten mathematischen Disciplinen zu gewinnen.

Der dadurch gegebene Ausgangspunkt der Untersuchung schließt von vornherein eine Berücksichtigung der Bedingungen aus, unter denen der Zahlbegriff historisch sich entwickelt hat. Dagegen wird der Empirismus, der ängstlich bemüht ist, das Gebiet der im täglichen Leben gemachten Erfahrungen nicht zu verlassen, geneigt sein, jene Bedingungen auch für die wissenschaftliche Ableitung des Begriffs als Grundlage zu benutzen. Er wird daher, da die Zahlen offenbar dem sich geltend machenden praktischen Bedürfnisse nach Zählungen und Messungen physischer Objecte ihre Entstehung verdanken, nur in physikalischen Thatsachen als der eigentlichen Anwendungssphäre des Begriffs die Quelle der Begriffsbildung finden.

Von diesem Standpunkte aus ist es begreiflich, wenn John Stuart Mill sagt ¹⁾: »die in der Definition einer Zahl ausgesagte Thatsache ist eine physikalische Thatsache«, und dann die Arithmetik im Wesentlichen auf »Sammlungen von Steinchen« zurückführt. Man würde aber diesem sorgfältigen Denker ohne Zweifel Unrecht thun, wollte man annehmen, dass ihm die Möglichkeit, auch nicht physikalisch vorhandene Dinge zählen zu können, entgangen sei. Es ist eben die Beschränkung des Gebiets, aus dem der Zahlbegriff abstrahirt wird, durch den Standpunkt bedingt, der zur Quelle der Begriffsbildung das dem Empiriker nächstliegende Gebiet der physikalischen Verwendung des Begriffs wählt. Mill selbst fühlt diese Beschränkung, indem er sagt, dass es »angesichts der außerordentlichen Allgemeinheit der Zahlengesetze und ihres Entrücktseins aus der Sphäre — nicht sowohl der Sinne im Allgemeinen, als der Gesichtsbilder — eine gewisse Anstrengung kostet, in diesen Gesetzen physische, durch Beobachtung gewonnene Wahrheiten zu erblicken«. Es muss aber betont werden, dass auf diese Weise Nebensächliches aus dem Anwendungsgebiete des Begriffs bei der Ableitung des Begriffs Beachtung findet.

Als ein Hervorheben von Nebensächlichkeiten ist es auch auf Grund des sich anbietenden Ausgangspunktes zu betrachten, wenn in der räumlichen oder zeitlichen Anschauung die Quelle des Zahlbegriffs gefunden wird. Man muss dabei die mathematische Ableitungsweise des Begriffs von der philosophischen scheiden. Wird der Zahlbegriff im Zusammenhange mit den allgemeinen Problemen der Erkenntnistheorie behandelt, so stellt er bloß ein Glied in einem großen Gefüge dar, durch welches er Halt und Begründung findet. So ist es bei Kant. Nachdem derselbe in der transscendentalen Logik die reinen Verstandesbegriffe als Bedingungen a priori zu einer möglichen Erfahrung gefunden und in der Kategorientafel zusammengestellt hat, sieht er sich vor die Aufgabe gestellt ²⁾, anzugeben, wie reine Verstandesbegriffe auf Erscheinungen angewandt werden können, da doch beide ganz »ungleichartig« sind.

1) System der deductiven und inductiven Logik. Buch III. Capitel XXIV. § 5 f. (Uebersetzt von Gomperz).

2) Kritik der reinen Vernunft; von dem Schematismus der reinen Verstandesbegriffe.

Es muss daher ein Bindeglied geben, das die Anwendung der Kategorie auf die Erscheinung ermöglicht. Die »transscendentale Zeitbestimmung« ist es nun, welche diese Anwendung vermittelt. Durch diese Vermittlung wird dann die Vorstellung von einem allgemeinen Verfahren der Einbildungskraft, einem Begriff sein Bild zu verschaffen, möglich, die Kant das Schema zu diesem Begriffe nennt. Ein solches Schema ist die Zahl, nämlich »das reine Schema der Größe (quantitatis) als eines Begriffs des Verstandes«, und die Zahl ist somit eine Vorstellung, »die die successive Addition von Einem zu Einem (gleichartigen) zusammenbefasst.« Der Zusammenhang der Zahl mit der Zeit ist somit für Kant gewiss nicht nebensächlich, sondern eine nothwendige Folge seiner ganzen Theorie des Erkennens. Es ist aber die vorliegende Untersuchung, welche die Aufgabe hat, den Zahlbegriff durch die Betrachtung der logischen Ordnung zu gewinnen, von den großen Problemen der Erkenntnistheorie unabhängig, so dass auch die Gründe in Wegfall kommen, welche Kant oder einen anderen Philosophen bestimmen können, die Zahl auf die Anschauungsformen der Zeit oder des Raumes zu gründen.

Dem Zusammenhange mit solch tiefen erkenntnisstheoretischen Problemen entspringt es dagegen nicht, wenn der Mathematiker die Zahlen durch einen Abstractionsprocess aus räumlich getrennten oder zeitlich auf einanderfolgenden Dingen entstehen lässt. Es scheint vielmehr bloß das Streben nach anschaulicher Klarheit zunächst das Ausgehen von anschaulich Gegebenem zu veranlassen¹⁾. Ein solcher Ausgangspunkt ist insbesondere in pädagogischem Interesse thatsächlich geboten, um dem Lernenden das Verständniss

1) In diesem Sinne ist wohl die Definition der Anzahl aufzufassen, welche Lipschitz zu Beginn seines Lehrbuchs der Analysis gibt: »Wenn man bei der Betrachtung getrennter Dinge von den Merkmalen absieht, durch welche sich die Dinge unterscheiden, so bleibt der Begriff der Anzahl der betrachteten Dinge zurück.« Denn unter den getrennten Dingen hat man doch offenbar räumlich oder zeitlich getrennte Dinge zu verstehen. — Die von den Mathematikern gern benutzte Möglichkeit, in anschaulich gegebenen Dingen eine Veranschaulichung der Zahlen zu gewinnen, ist es wohl auch, welche W. Brix veranlasst, die Zahl der Raumanschauung und die Zahl der Zeitanschauung als besondere, psychologische Formen des Zahlbegriffs aufzufassen. (Der mathematische Zahlbegriff und seine Entwickelungsformen. Phil. Stud. V, S. 671 f.)

der abstracten Natur der Zahlen und Zahlenoperationen zu erleichtern. Die an gezählte Dinge sich anlehrende Versinnlichung der Zahlen ist nun gewiss nebensächlich für die Erkenntniss des Zahlbegriffs selbst; sie ist jedoch unschädlich, wenn sie nicht mit dem Anspruch auftritt, das Wesen der Zahl zu erschöpfen. Das Erkennen der wahren Bedeutung des Zahlbegriffs wird es dagegen hindern, wenn die geometrische Verwendung der Zahlen anticipirt wird, deren Bedeutung doch erst eingesehen werden kann, wenn das Wesen der Zahlen selbst schon vollständig erkannt ist. Es wird sich auf Grund solcher Anticipationen dem Zahlbegriffe leicht ein anderer Begriff, z. B. der des Verhältnisses von Strecken, unterschieben und es werden dann, wenn man davon ausgeht, die Zahlen als Punkte einer Geraden zu betrachten, Eigenschaften der Punkte, die in einer Geraden liegen, für Eigenschaften der Zahlen ausgegeben werden, trotzdem die letzteren doch keinen solchen Träger, wie er in der Geraden für die in ihr fixirbaren Punkte vorhanden ist, besitzen.

Die Möglichkeit, dass sowohl Philosophen als auch Mathematiker die Zahl auf die zeitliche und räumliche Anschauung gründen können, erklärt sich mit Leichtigkeit daraus, dass jeder Bewusstseinsinhalt, der als Glied einer logischen Kette von Denkobjecten sich darstellt, zugleich auch kraft seiner Beziehungen zum Gesamteinhalte des Bewusstseins einer anschaulichen Ordnung sich einfügt. Man muss sich folglich der Einseitigkeit der Betrachtungsweise bewusst sein, wenn man von der anschaulichen Ordnung absieht und bloß die logische Ordnung ins Auge fasst. Eine solche einseitige Betrachtung ist aber gestattet, weil die logische Ordnung nicht von der anschaulichen Ordnung abhängig ist, was am besten dadurch bewiesen wird, dass das Zustandekommen der logischen Ordnung beschrieben wird, ohne dabei in der räumlichen oder zeitlichen Anschauung eine Stütze zu suchen. Jene Einseitigkeit ist ferner im Interesse der Reinlichkeit der Begriffsentwicklung nothwendig, weil anderenfalls Eigenschaften, die der anschaulichen Ordnung der Bewusstseinsinhalte zukommen, leicht in den Zahlbegriff mit aufgenommen werden. Ist aber dies einmal geschehen, so wird es unmöglich, eine Entscheidung darüber herbeizuführen, ob und in wie weit durch Zahlen ein anschauliches, zeitliches oder räumliches Continuum dargestellt werden kann und ob die Mannigfaltigkeit der

Zahlen von selbst schon ein Continuum darstellt und welcher Art dasselbe ist. Diese Probleme, deren Wichtigkeit unmittelbar einleuchtet, können vielmehr nur dann gelöst werden, wenn sowohl diejenigen mathematischen Begriffe, welche in der logischen Ordnung ihre Begründung finden, als auch diejenigen, welche der anschaulichen Ordnung entspringen, in ihrer Eigenart erkannt sind.

§ 3.

Will man nun das Entstehen der logischen Ordnung verfolgen, so muss zuvor klar gestellt werden, in wie fern man von einem Zustande des Bewusstseins, in welchem noch keine logische Ordnung sich findet, reden kann. Es kann dies offenbar nicht den Sinn haben, dass in einem Bewusstsein zuerst ungeordnete Inhalte vorhanden sind und dass dieselben dann irgendwie zusammengefasst und geordnet werden. Denn man könnte alsdann einwenden, dass unwillkürlich eine Ordnung sich bemerklich macht, sobald überhaupt das Eine vom Anderen unterschieden wird. Dieser Einwand könnte überdies mit vollem Rechte gemacht werden, wenn er sich auf die Thatsache stützt, dass es nicht im Belieben des denkenden Ichs steht, die Gegenstände des Bewusstseins zu ordnen oder nicht zu ordnen, sondern dass das Entstehen einer Ordnung mit Nothwendigkeit und unmittelbar sich vollzieht. Wenn somit ein Zustand des Bewusstseins ohne Ordnung seiner Inhalte nicht als ein thatsächliches Erlebniss zu Grunde gelegt werden kann, so kann das Zurückgehen auf einen solchen Zustand nur den Sinn haben, dass es möglich ist, Einzelinhalte im Bewusstsein vorhanden zu denken, ohne dass sie zugleich geordnet gedacht werden müssen.

Dies ist aber möglich, weil damit, dass man sich {des Einen bewusst ist, noch nicht die Nothwendigkeit verknüpft ist, auch eines Anderen sich bewusst zu werden, obgleich der Widerstreit zwischen dem Wechselnden und Verschiedenen es erst möglich macht, sich des Einen oder des Anderen bewusst zu werden. Kann man somit von der Ordnung der Bewusstseinsinhalte absehen, so kann man diese Ordnung auch reconstruiren und zugleich die Bedingungen angeben, unter denen das Ordnen sich vollzieht. In diesem Sinne soll das Entstehen der logischen Ordnung verfolgt werden.

So lange man bloß diesen oder jenen Gegenstand denkend erfasst oder appercipirt, kann von einem Ordnen, von einem Beziehen des einen Gegenstandes auf den andern nicht die Rede sein. Es ist hiezu erforderlich, dass man sowohl den einen als auch den andern Gegenstand bewusster Weise erfasst und dass der eine im Bewusstsein bleibt, wenn der andere ins Bewusstsein tritt. Es ist folglich offenbar das so entstehende Zusammensein von appercipirten Bewusstseinsinhalten im Bewusstsein die Grundbedingung für das Zustandekommen der logischen Ordnung.

Da diese Ordnung eine Erkenntniss darstellt — denn es kann das Erkennen direct als ein logisches Ordnen des im Bewusstsein Vorhandenen definirt werden —, so ist das Entstehen des Zusammenseins von Bewusstseinsobjecten auch als Grundbedingung des Erkennens zu bezeichnen. In ihm findet man das, was zu den Gegenständen der Erfahrung hinzukommen muss, um eine Erkenntniss zu ermöglichen. Es hat im denkenden Ich seinen Ursprung und es ist als eine Thätigkeit dieses Ichs, als ein durch das Ich bewirktes Zusammenfassen zu betrachten, sobald man das Ich den Objecten des Denkens gegenüberstellt. Jenes Zusammenfassen von Bewusstseinsinhalten kann darum mit Kant als eine Synthese bezeichnet werden, so dass das beginnende Erkennen auf die Synthese desjenigen sich gründet, was das beginnende Denken durch die anfängliche Analyse des gegebenen Complexes von Erlebnissen gewonnen hat. Dann gilt auch für uns, was Kant sagt¹⁾: »Die Synthesis eines Mannigfaltigen aber (es sei empirisch oder a priori gegeben) bringt zuerst eine Erkenntniss hervor, die zwar anfänglich noch roh und verworren sein kann und also der Analysis bedarf; allein die Synthesis ist doch dasjenige, was eigentlich die Elemente zu Erkenntnissen sammelt und zu einem gewissen Inhalte vereinigt; sie ist also das Erste, worauf wir Acht zu geben haben, wenn wir über den ersten Ursprung unserer Erkenntniss urtheilen wollen.«

Wenn nun aber diese Synthese, als eine dem Verstande eigenthümliche Function, Kant²⁾ zu der Auffindung der reinen Ver-

1) Kritik der reinen Vernunft; von den reinen Verstandesbegriffen oder Kategorien.

2) Er sagt am angegebenen Orte: »Dieselbe Function, welche den verschiedenen

standesbegriffe hinführt, so kann dieselbe hier eine solche Rolle nicht spielen, und die Erwähnung Kant's vermag nur die Bedeutung der Synthese als der Grundbedingung des Erkennens und Ord-nens hervorzuheben. Denn wir haben keine Veranlassung, ein be-sonderes Verstandesvermögen anzunehmen, das durch die Unter-scheidung der im Urtheilen sich bethätigenden Functionen der Synthesis »gänzlich ausgemessen« würde. Es genügt für uns, in der Synthese die Bedingung für das Zustandekommen der logischen Ordnung zu finden und das Wesen der Synthese darin zu erblicken, dass man sich sowohl des einen als auch des anderen für sich erf-assbaren Bewusstseinsinhaltes bewusst wird, dass also appercipirte Bewusstseinsinhalte im Bewusstsein zusammengefasst werden.

Die Thatsache, dass eine Synthese zu Stande kommt, bildet somit den Ausgangspunkt für unsere auf die logische Ordnung und auf die Zahl gerichtete Untersuchung. Man kann nun die logische Ordnung und die Zahl thatsächlich gewinnen, indem man sich von der durch die Synthese veranlassten Denkbewegung leiten lässt. Dies führt zur wirklichen Erzeugung der logischen Ordnung und der Zahl. Damit erreichen wir jedoch das ins Auge gefasste Ziel nicht vollständig. Denn dies besteht nicht so sehr in einer that-sächlichen Herleitung der Zahl durch Vermittlung der im Bewusst-sein wirklich sich vollziehenden logischen Ordnung als vielmehr wesentlich in dem Erkennen und Begreifen des Wesens der Zahl auf Grund des Erkennens und Begreifens des Wesens der logischen Ordnung. Dies wird aber am einfachsten dadurch ermöglicht, dass die Bedingungen, an die das Entstehen der logischen Ordnung und damit auch der Zahl gebunden ist, hervorgehoben werden. Die jenen Beding-ungen sich zuwendende Reflexion wird alsdann das Begreifen der logischen Ordnung und der Zahl zur Folge haben und dadurch als Begleiterin des die logische Ordnung und die Zahl wirklich erzeugenden Denkprocesses zugleich den Begriff der logi-schen Ordnung und der Zahl zu Tage fördern.

Es besteht daher die nächstliegende Aufgabe in einer Beschrei-bung des Zustandekommens der Synthese. Dadurch wird zwar die

Vorstellungen in einem Urtheile Einheit gibt, die gibt auch der bloßen Synthesis verschiedener Vorstellungen in einer Anschauung Einheit, welche, all-gemein ausgedrückt, der reine Verstandesbegriff heißt.

logische Ordnung selbst noch nicht gewonnen; es wird aber so das Verständniss des durch die Synthese veranlassten, zur logischen Ordnung führenden Denkprocesses ermöglicht und das Begreifen der logischen Ordnung selbst wesentlich gefördert werden.

§ 4.

Um dies zu leisten, erinnere ich daran, dass die Bewusstseinsinhalte, die in erster Linie einer Synthese sich darbieten, Unterscheidungen am Gegebenen darstellen. Da es Unterscheidungen sind, die das erwachende Denken bewirkt, so muss zugestanden werden, dass jene Inhalte nur auf Grund einer Thätigkeit des denkenden Ichs vorhanden sind. In ihr zeigt sich die sogenannte Spontaneität des Denkens, die sich somit schon beim Vollzuge der ersten Apperceptionsakte geltend macht. Es ist diese Thätigkeit aber keine willkürliche; denn die Unterscheidungen sind Unterscheidungen am Gegebenen, durch welches das Denken erst geweckt und gewissermaßen ausgelöst wird. Man kann somit nicht einen Zustand der Aufmerksamkeit voraussetzen, in welchem der Eintritt von Gegenständen in das Bewusstsein erwartet würde; man kann auch nicht das Vorhandensein eines Interesses annehmen, welches das Hervorheben bestimmter Gegenstände motiviren könnte; man kann vielmehr nur hinnehmen und aufnehmen, was geboten wird, ohne dass man es wählt oder wünscht; und das sind eben all' jene Einzelerlebnisse, die als solche Gegenstand des Bewusstseins werden. Diese Apperception wird daher passend als passive Apperception¹⁾ bezeichnet.

Dieses passive Verhalten des appercipirenden Ichs hat zur Folge, dass ein appercipirter Inhalt Gegenstand der Apperception bleibt, wenn nicht ein anderer Gegenstand sich vordrängt. Geschieht dies jedoch, so kann der andere Gegenstand in gleicher Weise appercipirt werden. Es wechseln alsdann die appercipirten Gegenstände und es ist die Möglichkeit, bald diesen bald jenen Gegenstand zu

1) Hierdurch bezeichnet Wundt (Logik, I. Bd. S. 25, 2. Aufl. S. 30) die Thätigkeit oder Willenshandlung, »welche sich unmittelbar einer in das Bewusstsein gehobenen Vorstellung zuwendet, lediglich weil diese als psychischer Reiz den Apperceptionsvorgang wachruft«.

appercipiren und so einen Wechsel in der Apperception herbeizuführen; ebenso hervorzuheben wie das Appercipiren selbst. Kommt in dem letzteren die Spontaneität des Denkens zum Ausdruck, so macht sich in dem Wechsel der Apperception die discursive Beschaffenheit des Denkens bemerklich.

Ein solches Vordrängen eines anderen Gegenstandes ist aber nur möglich, wenn er ein von dem ersteren verschiedener ist, weil ja sonst kein Grund zum Uebergange von dem einen zum anderen vorhanden wäre. Auf diese Weise entsteht eine Folge passiv appercipirter, von einander verschiedener Bewusstseinsinhalte.

Wenn aber auch ein anderer Inhalt appercipirt wird, so verschwindet doch der bereits appercipirte nicht aus dem Bewusstsein; er bleibt und er muss bleiben, soll überhaupt ein Material sich sammeln, das zu einer Erkenntniss Anlass geben kann. Er bleibt aber nicht so, wie er bliebe, wenn nicht noch ein anderer Inhalt appercipirt würde; sondern er bleibt im Zusammenhange mit diesem letzteren, als ein auf ihn bezogener und ihm zugesellter. So bleibt auch dieser andere Inhalt, wenn noch ein anderer zum Gegenstande der Apperception wird. In Folge dessen gewinnt ein jeder eine directe Beziehung zu einem anderen, der seinerseits eine Beziehung zu noch einem anderen erhält, und diese directen Beziehungen vermitteln die Beziehungen eines jeden zu jedem anderen. Es entsteht somit die Synthese von Bewusstseinsinhalten in der Weise, dass nicht nur der eine oder der andere, sondern sowohl der eine als auch der andere und zwar der eine modificirt durch den anderen im Bewusstsein appercipirt wird. Die zusammengefassten Inhalte sind folglich die Glieder einer Kette oder einer Reihe.

Der Grund zu den Beziehungen, welche die Inhalte, insofern sie Glieder einer Reihe sind, gewinnen, liegt aber nicht in den Inhalten selbst, sondern lediglich in ihrer Zusammenfassung im Bewusstsein als ihrem Träger. Die Zusammenfassung in eine Reihe ist daher für die Glieder der Reihe, an und für sich betrachtet, zufällig; sie stellt nur die Form dar, in der das Appercipirte im Bewusstsein zusammengefasst werden kann. Die Reihe wird daher nur gedächtnismäßig fixirt und ihre Reproduction ergibt die einzelnen Inhalte wieder als Glieder der nämlichen Reihe, in welcher sie anfänglich im Bewusstsein Aufnahme fanden.

Aus der Beschreibung des Zustandekommens der Synthese erhellt somit einerseits, dass das zur Erzeugung der logischen Ordnung zu Gebote stehende Material aus passiv appercipirten, von einander verschiedenen Bewusstseinsinhalten besteht, die sich unwillkürlich und unbeabsichtigt im Bewusstsein zusammenfinden; es ergibt sich andererseits, dass eine Uebersicht über dieses Material gewonnen wird, indem man es in Form einer Reihe auffasst und als eine Reihe festhält und reproducirt.

Es ist nun zu beachten, dass dieses Resultat aus zwei Theilen besteht, von welchen der erste das durch die Synthese zusammengefasste Material, der zweite die Thätigkeit des Zusammenfassens charakterisirt. Beide Theile sind wohl von einander zu scheiden, da sie eine wesentlich verschiedene Bedeutung beanspruchen.

Das durch die Synthese zusammengefasste Material ist es nämlich, das die zur logischen Ordnung führende Denkbewegung veranlasst. Die Charakterisirung dieses Materials wird daher ihre Bedeutung dadurch erhalten, dass sie es ermöglicht, die in dem empirisch gegebenen Materiale liegenden Bedingungen für das Zustandekommen der logischen Ordnung festzustellen und die Richtung zu verstehen, in welcher das Denken sich bewegen muss, um zur logischen Ordnung zu gelangen. Diese Bedeutung liegt offen zu Tage; denn die Rolle der Synthese empirisch gegebener Bewusstseinsinhalte erschöpft sich ja gerade in der Darbietung des Materials, das den ferneren Denkprocess veranlasst.

Die Thätigkeit des Zusammenfassens ist dagegen eine unmittelbare Bethätigung des Denkens. Die Charakterisirung derselben gewinnt demgemäß ihre Bedeutung dadurch, dass sie nicht die Objecte des Denkens, sondern das denkende Subject betrifft. Nun ist aber das letztere nicht ein frei schaltendes, für sich bestehendes Wesen, das durch das Vermögen ausgezeichnet wäre, das Zusammensein verschiedener Gegenstände in Reihenform zu erfassen. Wäre es ein solches, so könnte es wohl nebst seinen, das Zustandekommen der logischen Ordnung etwa beeinflussenden Besonderheiten direct wahrgenommen werden. Das denkende Ich existirt jedoch für uns nur in seiner Bethätigung an den Objecten des

Denkens und es kann darum nur dadurch erkannt werden, dass man auf die Art und Weise dieser Bethätigung achtet. Es wurde nun bisher bloß in den Objecten der Anlass zur Denkhätigkeit gesucht, während nunmehr das Denken durch die Erzeugung der Reihenform sich zu bethätigen scheint, ohne hiezu durch die Beschaffenheit der Objecte veranlasst zu werden. Es ist daher nothwendig, die Reihenform eingehender zu betrachten, damit ihre Bedeutung für das Zustandekommen der logischen Ordnung klar hervortrete.

§ 5.

Zu diesem Zwecke muss das Entstehen einer Erkenntniss wohl unterschieden werden von der Reflexion über dieses Entstehen.

Die zur Erkenntniss führenden Denkprocesse werden nämlich unmittelbar und unwillkürlich in bestimmten Formen vollzogen, deren man sich dabei nicht bewusst wird, an die man aber gebunden ist. Man wird sich derselben nicht bewusst, weil das Interesse, wie es zur thatsächlichen Gewinnung von Erkenntnissen nothwendig ist, den Objecten des Denkens sich zuwendet. Es müssten somit auch jene Formen, falls sie unmittelbare Beachtung finden sollten, Gegenstände des Bewusstseins werden, an welchen das Denken sich bethätigen könnte. Sie sind aber keine Denkobjecte, sondern Formen, in welchen das Denken sich bewegt. Man ist jedoch an diese Formen gebunden. Denn sie machen sich unwillkürlich an den Objecten des Denkens bemerklich und prägen denselben Spuren auf, die nicht durch die Objecte selbst begründet sind. Das auf ein thatsächliches Erkennen gerichtete Denken wird daher jene Spuren allerdings wahrnehmen, aber ihre Bedeutung nicht verstehen können, da es ja bloß die Objecte ins Auge fasst.

Anders ist es, wenn man über das Entstehen einer Erkenntniss reflectirt. In diesem Falle wird das Erkennen selbst zum Gegenstande des Denkens. Es werden darum auch die Formen, an die das Denken gebunden ist, direct wahrnehmbar, und man gewinnt in ihnen neue Bewusstseinsinhalte, deren Wesen und Bedeutung erforscht werden kann. Es ist aber zu beachten, dass die Reflexion über das Entstehen einer Erkenntniss es ist, die in den Denkformen selbständige Bewusstseinsinhalte gewinnt. Es wäre darum eine Ver-

kehrung des wirklich bestehenden Sachverhaltes, wollte man die Denkformen zu Objecten des Denkens gestalten und an die Spitze des Erkennens stellen, während dieselben doch erst durch die wirklich vollzogene Denkarbeit an den Gegenständen des Denkens bemerkbar werden können. Der Weg zur Erkenntniss wird vielmehr durch eine solche Reflexion bloß beleuchtet, indem klar wird, dass das Erkennen nicht nur durch die Beschaffenheit der verarbeiteten Objecte, sondern auch durch die dem Denken eigenthümliche Form des Verarbeitens beeinflusst wird.

Die durch die Reflexion gewonnenen Resultate erhalten somit für das Erkennen selbst ihre Bedeutung dadurch, dass sie es ermöglichen, in dem an bestimmte Formen gebundenen Denken den Grund für Beziehungen zu finden, die an den Objecten des Denkens zu Tage treten, ohne durch diese selbst bedingt zu sein.

Beachtet man dies, so wird es nicht befremden, dass die Betrachtung des Zustandekommens der Synthese auf Beziehungen aufmerksam machte, die nicht durch die zusammengefassten Objecte selbst begründet sind, die jedoch an denselben zu Tage treten und sie als Glieder einer Reihe erscheinen lassen. Dass die Objecte, für sich betrachtet, nicht den Grund zur Aneinanderreihung in sich tragen, wird daraus klar, dass sie nur dann als Glieder einer Reihe sich bemerklich machen, wenn das Erfassen ihres Zusammenseins durch das Denken in Frage kommt. Jene Beziehungen können deshalb nur im denkenden Subjecte begründet sein, obgleich die Objecte es sind, welche, in Form einer Reihe aufgefasst, festgehalten und reproducirt werden. Die Reihenform kann daher als eine subjective Form des Denkens bezeichnet werden.

Sie ist als solche von der Natur der zusammengefassten Objecte völlig unabhängig, da sie ja nur der Regel entspringt, nach welcher ein Zusammensein überhaupt, nicht aber das Zusammensein dieser oder jener Gegenstände erfasst werden kann. Sie zeigt sich daher nicht bloß, wenn das von der Erfahrung dargebotene Zusammensein passiv appercipirter, von einander verschiedener Bewusstseinsinhalte erfasst werden soll, sondern in gleicher Weise, wenn es sich um das Erfassen eines Zusammenseins handelt, welches durch das Denken selbst erst geschaffen wird, wobei es überdies gleichgültig ist, ob ein erlebtes oder ein durch das Denken erst zubereitetes

Material zusammengefasst wird. In Folge dessen erweist sich das Denken und Ordnen in seinem ganzen Umfange von der Reihenform beherrscht, indem jedes durch das Denken bewirkte Erfassen eines Zusammenseins appercipirter Bewusstseinsinhalte in der Form einer Reihe sich vollzieht.

Es ist aber zu betonen, dass dieses reihenförmige Zusammenfassen einen ursprünglichen Process darstellt, den man bloß constatiren, aber nicht begründen oder ableiten kann. Denn man muss ihn schon bemerken, wenn man das Zustandekommen der Synthese unmittelbar erlebter Bewusstseinsinhalte betrachtet. Es kommt ihm daher eine ähnliche Bedeutung zu, wie dem apperceptiven Erfassen eines einzelnen Bewusstseinsinhaltes, so dass das reihenförmige Erfassen des Zusammenseins appercipirter Objecte im Bewusstsein in ähnlicher Weise ein elementarer Vorgang ist, wie die Apperception eines Bewusstseinsobjectes.

Diese Einsicht in die subjective, fundamentale und elementare Natur der Reihenform ist aber lediglich der Reflexion zu verdanken, welche das Zustandekommen der Synthese betrachtete und auf diese Weise in der Reihenform einen selbständigen Bewusstseinsinhalt gewann, dessen Wesen erforscht werden konnte. Dagegen wird der zur logischen Ordnung wirklich führende Denkprocess von dem Zusammensein appercipirter Objecte als einer vollendeten Thatsache ausgehen, ohne die Erkenntniss zu zeitigen, dass jenes Zusammensein in Form einer Reihe erfasst wird. Die Reihenform wird sich vielmehr unvermerkt von selbst darbieten. Denn wie das Vollziehen des Apperceptionsaktes nicht ein Reflectiren über denselben zur Voraussetzung hat, so ist auch das thatsächliche Erfassen eines Zusammenseins appercipirter Objecte nicht von der Erkenntniss der Art und Weise dieses Erfassens abhängig. Man darf demnach nicht die im denkenden Subjecte begründete Aneinanderreihung von Bewusstseinsinhalten unvermittelt zu einem Objecte des Denkens machen, falls man das Entstehen der logischen Ordnung verfolgen will. Man muss vielmehr auf das Zusammensein empirisch gegebener Objecte im Bewusstsein zurückgehen und den dadurch ausgelösten, die logische Ordnung erzeugenden Denkprocess wirklich verfolgen.

Wenn nun so der Schein entsteht, als ob durch die bisherigen Bemühungen das Ziel, zur logischen Ordnung und zur Zahl zu gelangen, um nichts näher gerückt sei, so muss man bedenken, dass die wirkliche Erzeugung der logischen Ordnung und der Zahl nur den Zweck hat, das Begreifen der logischen Ordnung und der Zahl zu ermöglichen und dass der Zweck erreicht wird, wenn die Reflexion als Begleiterin jenes Erzeugungsprocesses die Bedingungen, an welche die logische Ordnung und die Zahl geknüpft ist, hervorhebt.

Die Ergebnisse der Reflexion über das Zustandekommen der Synthese sind daher keineswegs überflüssig, obwohl durch sie die logische Ordnung selbst noch nicht gewonnen wird. Denn das Begreifen der logischen Ordnung wird gefördert, indem die Reflexion in der Reihe die Form findet, in der ein Zusammensein appercipirter Objecte denkend erfasst wird. Nur ist in Erwägung zu ziehen, dass die Reihenform als Gegenstand der Reflexion zu einem besonderen Bewusstseinsinhalte wird, dass sie aber in dem zur logischen Ordnung führenden Denkproceß nur an den Objecten des Denkens zu Tag treten kann, indem die letzteren Merkmale gewinnen, die ihnen durch das reihenförmige Erfassen vom Denken aufgeprägt werden. Insofern sie als Ergebniss der Reflexion sich darstellte, konnte sie in ihrer subjectiven, fundamentalen und elementaren Natur erkannt werden. Diese Erkenntniss dient nun dazu, ihre Bedeutung für die logische Ordnung verständlich zu machen. Denn es ist ja möglich, dass ein Zusammensein appercipirter Gegenstände im Bewusstsein irgendwie logisch motivirt ist, dass aber ein ordnendes Zusammenfassen derselben bloß der Regel entspringt, nach welcher das Denken ein Zusammensein reihenförmig erfasst. Alsdann gewinnen die zusammengefassten Objecte Beziehungen, die nur dann richtig aufgefasst werden können, wenn man in der durch die Reflexion bereits hervorgehobenen Reihenform ihre Quelle erkennt. Man findet somit in der Reihenform ein im denkenden Subjecte begründetes ordnendes Princip, das beim Zustandekommen der logischen Ordnung sich wirksam erweisen wird.

Es erwächst hieraus die Aufgabe, den Einfluss der Reihenform auf die logische Ordnung zu beachten und insbesondere die Beson-

derheiten hervorzuheben, die sich bemerklich machen, wenn die Reihe als Form des zusammenfassenden Denkens einen vollendeten und vollkommenen Ausdruck in den zusammengefassten Objecten gewinnt. Diese Aufgabe ist aber für das hier verfolgte Ziel von wesentlicher Bedeutung. Es erhellt dies zur Genüge, wenn voreilend bemerkt wird, dass die logische Ordnung, welche lediglich in der subjectiven Form des Erfassens eines logisch motivirten Zusammenseins appercipirter Objecte begründet ist, die Keime zur Zahlenreihe enthält.

Die Bedeutung der von der Reflexion hervorgehobenen Reihenform besteht nun wesentlich in der Stellung dieser Aufgabe. Dieselbe kann jedoch nur gelöst werden, wenn die logische Ordnung wirklich zu Stande kommt. Hierbei wird aber nicht bloß die im denkenden Subjecte begründete Reihenform in den Objecten des Denkens eine Gestalt gewinnen, sondern es werden auch die Objecte des Denkens zu ihrem Rechte kommen und zur Erkenntniss eines in ihnen begründeten, objectiv ordnenden Principis führen. Denn es gewinnt ja das Denken seinen Gehalt durch das von der Erfahrung gebotene Material, dessen Beschaffenheit den Denkprocess auslöst, der zur logischen Ordnung führt. Es kann darum auch das in der Reihenform gewonnene Resultat der Reflexion über das Zustandekommen der Synthese bloß die Einsicht bewirken, dass die Reihe als subjective Form, in der ein Zusammensein appercipirter Gegenstände erfasst wird, die Denkarbeit in ihrem ganzen Umfange beherrschen und je nach der Beschaffenheit der im Denken zusammengefassten Objecte mehr oder minder Gelegenheit haben wird, sich der Beachtung aufzudrängen. Die Objecte des Denkens selbst sind daher ins Auge zu fassen, wenn man das Zustandekommen der logischen Ordnung betrachten will.

§ 6.

Lässt man demgemäß die bisher besprochene subjective Form, in der ein Zusammensein von Bewusstseinsinhalten erfasst werden kann, unbeachtet, so fördert die Betrachtung des Zustandekommens der Synthese bloß die Einsicht zu Tage, dass empirisch gegebene, passiv appercipirte und darum von einander verschiedene Inhalte

zusammengefasst werden, die durch ihr Zusammensein zunächst nichts weiter gewinnen, als dass der eine in gleicher Weise wie der andere Gegenstand des Bewusstseins ist. Die Objecte sind daher in dem durch die Erfahrung vermittelten Zusammensein noch nicht logisch geordnet. Die logische Ordnung muss vielmehr erst erzeugt werden.

Das Erlebte zeigt zwar eine Ordnung, die durch die unvermeidlichen Beziehungen der Einzelinhalte zum Gesamttinhalte des Bewusstseins begründet ist. Es ist dies die anschauliche, zeitlich-räumliche Ordnung. In ihr bietet sich das Erlebte dar und sie veranlasst das Denken, die relative Beständigkeit des räumlichen Seins und des zeitlichen Geschehens zu erklären und nach Gesetzen zu forschen, denen das Erlebte im Raume und in der Zeit unterliegt. Sie ist aber keine logische Ordnung; denn sie bedarf ja der logischen Begründung und veranlasst so das Problem, das Wirkliche, in seiner anschaulich gegebenen Form, als vernünftig darzulegen. Die Lösung dieses Problems setzt jedoch voraus, dass man über das Wesen der logischen Ordnung selbst schon Klarheit besitze; denn nur dann ist es möglich nach einer Verwirklichung der logischen Ordnung im anschaulich Erlebten zu forschen. Da es sich nun für uns wesentlich um das Begreifen der logischen Ordnung handelt, so ist es zunächst ohne Interesse, ob das Wirkliche thatsächlich als vernünftig dargestellt werden kann. Denn auch in ihrer logischen Begründung kann die anschauliche Ordnung im günstigsten Falle bloß ein Beispiel von logischer Ordnung darstellen, ohne mit dieser selbst identisch zu sein. Die logische Ordnung wird daher bloß im Denken und für das Denken existiren.

Vom thatsächlich Erlebten muss jedoch ausgegangen werden. Da sich dieses nun einmal in der räumlich-zeitlichen Form darbietet, so kann wohl auch der Fall eintreten, dass Besonderheiten, die in der anschaulichen Ordnung begründet sind, den zur logischen Ordnung führenden Denkprocess beeinflussen. Dies kann jedoch nur in der Weise geschehen, dass den Objecten, an sich betrachtet, Merkmale zugelegt werden, die ihren Ursprung in der räumlich-zeitlichen Form des Gegebenen haben. Denn es ist ja an den Bewusstseinsinhalten nur die ihnen an sich zukommende Beschaffenheit in Betracht zu ziehen, da sie es ist, die den Apperceptionsvorgang veranlasst und durch denselben als Gegenstand des Denkens

hervorgehoben wird. Bezeichnet man dieselbe, wie es früher schon geschah, als Qualität, so können demnach jene anschaulichen Merkmale nicht wegen ihrer Herkunft eine besondere Bedeutung beanspruchen, sondern nur als ein Beitrag zur Qualität der Bewusstseinsinhalte zur Geltung kommen. Es kommt aber nur darauf an, dass den Bewusstseinsinhalten, an sich betrachtet, überhaupt eine Qualität zukommt, und dies ist schon auf Grund des Vorhandenseins einer specifisch psychologischen Qualität der Fall. Man hat es darum gar nicht nöthig, auf die Möglichkeit, anschauliche Merkmale durch die Apperception hervorzuheben, Gewicht zu legen, und wir lassen dieselbe ganz außer Acht, um nicht den Schein zu erwecken, als ob die logische Ordnung auf die anschauliche sich stütze und folglich auch die Zahlen durch die anschauliche Ordnung des Gegebenen bedingt seien.

Es wird so evident, dass das Zusammensein der apperzipirten Bewusstseinsobjecte bloß einen Widerstreit ihrer verschiedenen Qualitäten und dadurch ein Vergleichen derselben zur Folge haben kann. Da das Zusammensein ein erlebtes ist, so ist der Antheil der Erfahrung an den durch das Vergleichen gewonnenen Resultaten außer Frage gestellt. Denn ob ein Resultat überhaupt erzielt wird und welcher Art dasselbe ist, hängt doch von der empirisch gegebenen Beschaffenheit der verglichenen Bewusstseinsinhalte ab. In der Erfahrung wird daher auch die logische Ordnung wurzeln, indem das, was logisch geordnet werden kann, von jener geboten wird und darum so vielgestaltig ist, wie die Erfahrung selbst.

Man gewinnt dadurch die Einsicht, dass nur die Erfahrung das Material zur logischen Ordnung darbietet und dass jedes Beispiel einer solchen aus der Erfahrung geschöpft werden muss. Es genügt jedoch diese Einsicht und es ist nicht nöthig, das weite Feld der Erfahrung zu durchforschen, um den Stoff, der logisch geordnet werden kann, in seinem ganzen Umfange kennen zu lernen. Denn es kann sich hier nur darum handeln, die durch die Erfahrung erfüllte Bedingung, die das Zustandekommen der logischen Ordnung ermöglicht, hervorzuheben. Dieselbe erhellt, wenn man zusieht, wozu das Vergleichen der zusammengefassten Bewusstseinsinhalte führt.

Es ist nun Thatsache, dass durch das Vergleichen gemeinsame

Merkmale an dem Zusammengefassten wahrgenommen werden. Sie werden ohne Zweifel erst durch das Vergleichen bemerkt. Sie bestehen aber nicht bloß für das Vergleichen, sondern, einmal bemerkt, werden sie auch an den für sich betrachteten Objecten wahrgenommen. Man fasst sie darum als Elemente der Objecte auf. Dies wäre offenbar nicht möglich, wenn die Bewusstseinsinhalte nicht von der Erfahrung als thatsächlich mit unterscheidbaren Merkmalen behaftet dargeboten würden, und darin besteht eben die von der Erfahrung erfüllte Bedingung, welche ein erfolgreiches Vergleichen des Zusammengefassten und dadurch ein logisches Ordnen ermöglicht.

So findet man beispielsweise, wenn man die specifisch psychologische Qualität der Bewusstseinsinhalte ins Auge fasst, verschiedene Arten einfacher Empfindungen, wie Farben- und Tonempfindungen, und die specifisch psychologische Structur der Bewusstseinsinhalte ist erfahrungsgemäß der Art, dass Verschmelzungen gleichartiger und Complicationen ungleichartiger Empfindungen den Empfindungsinhalt ausmachen. Andererseits erweisen sich die als Dinge bezeichneten Gegenstände des Bewusstseins als behaftet mit Eigenschaften und wechselnden Zuständen.

In dem Bemerken gemeinsamer Elemente besteht somit wesentlich das durch die Erfahrung ermöglichte Resultat, welches durch Vergleichen der zusammengefassten, empirisch gegebenen Bewusstseinsinhalte erzielt wird.

In diesem Resultate erschöpft sich für uns die Bedeutung, die ein erlebtes Zusammensein von Bewusstseinsinhalten für das Zustandekommen der logischen Ordnung hat. Diese Bedeutung muss nur noch in das richtige Licht gestellt werden, damit auch der auf ihr beruhende Denkprocess seine Erhellung finde, und es ersichtlich werde, wie man auf Grund hervorgehobener Elemente oder Merkmale zu einer durch das Denken motivirten Zusammenfassung von Bewusstseinsinhalten und zu einer für das Denken zu Recht bestehenden Beziehung zwischen dem Zusammengefassten gelange.

Zunächst ist hervorzuheben, dass an dem empirisch gegebenen Zusammensein von Objecten nur das wesentlich ist, dass es nicht durch das Denken veranlasst ist. Es kommt daher nicht darauf an,

ob jene Objecte irgend wann gleichzeitig wahrgenommen, oder ob sie als eine zeitliche Succession im Bewusstsein zusammengefasst werden; es ist sogar nicht einmal nöthig, dass das erlebte Zusammensein wirklich als ein fertiges Zusammensein vorliege. Es können vielmehr die zusammengefassten Objecte auch durch Association sich allmählich vergesellschaften. Nur darf die Association nicht durch das auf eine Erkenntniss abzielende Denken begründet sein, sondern sie darf lediglich durch den psychologischen Mechanismus bewirkt werden, der wegen des Fehlens logischer Motive als blind wirkender bezeichnet werden kann. Hält man dies fest, so kann man ohne Bedenken darauf hinweisen, dass die Bewusstseinsinhalte z. B. bezüglich ihrer specifisch psychologischen Qualität als Associationen einfacher Empfindungen aufgefasst werden können, und dass möglicherweise jeder aus Elementen zusammengesetzte Bewusstseinsinhalt, wofern nur diese Elemente der Beachtung sich aufzudrängen vermögen, als Beispiel einer durch die Erfahrung dargebotenen Association eben jener Elemente dienen kann. Denn man hat es gar nicht nöthig, unter den Bewusstseinsobjecten nur selbständige Dinge sich vorzustellen; es können vielmehr auch Eigenschaften und Zustände, Ereignisse und Erscheinungen unter jenen Objecten verstanden werden. Es kann so allerdings vorkommen, dass das nämliche Object einmal als unmittelbares Erlebniss, ein andermal als Resultat des Vergleichens empirisch zusammengefasster Bewusstseinsinhalte sich darstellt. Und es ist nicht einmal möglich, einen Unterschied zwischen beiden Fällen dadurch zu construiren, dass man sagt, im zweiten Falle werde das Object durch einen Abstractionsprocess hervorgehoben, der im ersten Falle fehle. Denn auch als Glieder eines erlebten Zusammenseins existiren die Bewusstseinsinhalte nur auf Grund der Apperception, die stets von einem Abstractionsvorgange begleitet sein kann. So sollte ja beispielsweise von vornherein jede Rücksicht auf die Beziehungen der Einzelinhalte zum Gesamttinhalte des Bewusstseins bei Seite gelassen werden. — Es ist aber das Resultat des Vergleichens darum doch nicht illusorisch und etwa bloß einer Fortsetzung des nämlichen Processes zu verdanken, der die Einzelinhalte des Bewusstseins als Abscheidungen vom gegebenen Gesamttinhalte des Erlebten zur Folge hatte. Denn dieses Abscheiden konnte lediglich

durch die verselbständigten Objecte selbst veranlasst werden, so dass die Apperception eine passive genannt werden musste; das Vergleichen entspringt dagegen dem Streben nach Erkenntniss, und die Resultate desselben sind nicht die Folge eines passiven Bemerkens, sondern eines activen Hervorhebens, durch das ein denknothwendiger Zusammenhang zwischen den Objecten hergestellt werden soll.

Es ist daher auch hervorzuheben, dass die Resultate des Vergleichens zwar, an sich betrachtet, keineswegs neue, von allen bisherigen verschiedene Inhalte des Bewusstseins darstellen müssen, dass ihnen aber durch das eine Erkenntniss erstrebende Denken eine besondere Bedeutung zu Theil wird, die ihnen abgeht, wenn sie bloß als Erlebnisse ins Bewusstsein treten.

Zur Erzeugung der logischen Ordnung steht folglich kein besonderes, eigenthümliches Material zu Gebote, das erst aus dem empirisch Gegebenen zubereitet werden müsste, ohne dass es möglicher Weise auch von der Erfahrung direct dargeboten werden könnte. Es bleibt daher zur Ergründung des Wesens der logischen Ordnung bloß übrig, den Denkprocess zu charakterisiren, den das Bemerkens gemeinsamer Merkmale an den verglichenen, empirisch zusammengefassten Objecten veranlasst.

§ 7.

Das Hervorheben gemeinsamer Merkmale bewirkt nun ein allmähliches Vergesellschaften all' jener Bewusstseinsinhalte, welche diese Merkmale besitzen. Durch die Erfahrung werden sie dargeboten und sie werden in dem Maße durch das Denken zusammengefasst, in welchem die Erfahrung sie kennen lehrt. Ihr Zusammensein wird daher nicht erlebt; es existirt bloß für das Denken und es ist ein logisch begründetes Zusammensein, da es lediglich durch die hervorgehobenen gemeinsamen Merkmale motivirt wird. Die Individualität der erlebten Bewusstseinsinhalte kommt dabei zunächst gar nicht in Betracht, indem jeder derselben die nämliche Bedeutung gewinnt, insofern er der Träger der nämlichen Merkmale ist.

So bildet z. B. das Bemerkens gemeinsamer Merkmale den Anlass, die Thiere oder die Pflanzen, die physikalischen oder die chemischen Erscheinungen durch das Denken im Bewusstsein zusammen-

zufassen. Die Erfahrung liefert den Stoff; das Zusammenfassen selbst ist aber ein Werk des Denkens und findet seine Begründung durch die hervorgehobenen gemeinsamen Merkmale. Da nun diese letzteren dem Denken als Stütze dienen, wenn es die zusammengefassten Dinge oder Erscheinungen zu begreifen sucht, so liegt ihre Bedeutung für das Begreifen des Zusammengefassten offen zu Tage und sie können darum, wie es üblich ist, als Inhalt des schließlich resultirenden Begriffs bezeichnet werden, während die zusammengefassten Objecte den Umfang des Begriffs darstellen. Es ist aber kein Grund vorhanden, darauf besonderes Gewicht zu legen. Das Wesentliche, das hervorgehoben werden muss, besteht vielmehr darin, dass die durch das Vergleichen erlebter Bewusstseinsinhalte gefundenen gemeinsamen Merkmale zu einem durch das Denken geschaffenen und durch das Denken begründeten Zusammensein von Bewusstseinsinhalten im Bewusstsein führen.

Es kommt nun zwar, so lange man nur die Begründung des Zusammenseins im Auge hat, der einzelne Bewusstseinsinhalt bloß als Träger der gemeinsamen Merkmale in Betracht. Er bleibt aber dennoch was er ist und verliert seine Individualität nicht. Dieselbe kann möglicherweise auch für das Denken eine Bedeutung gewinnen und das Unterscheiden untergeordneter Gruppen von Dingen oder Erscheinungen, oder das directe Studium der lebensvollen Wirklichkeit selbst veranlassen. Wie dem auch sein mag, jedenfalls ist es möglich dass an dem durch das Denken Zusammengefassten neben dem Gemeinsamen auch das Verschiedene Beachtung finden kann. Dies wird zum Anlass, das Eine auf das Andere zu beziehen und so die Mannigfaltigkeit des dem Denken sich Darbietenden zu ordnen. Die im Vorhergehenden bereits hervorgehobene Reihenform kommt hier zur Verwendung. Denn die ordnenden Beziehungen kommen zu Stande, indem das Denken von dem Einen zu einem Anderen übergeht und so das Zusammengefasste in eine Reihe formt. Die Beziehungen selbst entspringen jedoch nicht dieser Form, sondern den Objecten, welche allein das Interesse in Anspruch nehmen und den Uebergang des Denkens von dem Einen zu einem Anderen veranlassen. Nur durch Betrachten der Objecte kann es daher zur Entscheidung gebracht werden, wie das Denken

dazu kommt, Wesentliches von Unwesentlichem zu scheiden und in dem in seiner Bedeutung erkannten Einen den Grund zu finden, aus dem ein Anderes folgt.

Man vermag allerdings verschiedene Arten der so entstehenden Abhängigkeit zwischen den Objecten des Denkens zu unterscheiden, indem die Möglichkeit eingesehen werden kann, dass das Eine direct vom Anderen abhängt, oder dass die Abhängigkeit erst durch Zwischenglieder vermittelt wird; dass ferner nicht bloß jenes durch dieses, sondern auch dieses durch jenes bedingt ist; dass schließlich das Eine als in einem Andern enthalten und somit ihm untergeordnet erkannt wird, oder dass beide durch verschiedene Merkmale unterschieden, aber durch das Denken, gleichberechtigt, einem Dritten untergeordnet werden und so im Verhältniss der Beiordnung stehen. Aber auch diese Erkenntniss, dass die Abhängigkeit eine directe oder vermittelte, eine einseitig oder wechselseitig bestimmte sein, und das Gewand der Ueber- und Unterordnung oder dasjenige der Beiordnung tragen kann, ist nur der Betrachtung von Abhängigkeitsbestimmungen, die thatsächlich vollführt werden, zu verdanken. Sie erschöpft aber keineswegs die Fülle der thatsächlich durch das Denken geschaffenen Beziehungen. So verschiedenartig dieselben, aber auch sein mögen, so können sie doch als Modificationen der allgemeinen Beziehung des Grundes zur Folge bezeichnet werden.

Es muss daher hervorgehoben werden, dass jede durch das Denken geschaffene Abhängigkeit eine besondere, der Natur der untersuchten Denkobjecte angepasste Gestaltung der allgemeinen Beziehung des Grundes zur Folge darstellt, und dass folglich jedes durch die Objecte selbst motivirte ordnende Zusammenfassen durch das Verhältniss des Grundes zur Folge seine Charakterisirung erhält.

Indem somit die Objecte das Denken veranlassen, Abhängigkeiten zu schaffen, durch welche das Eine zu einem Anderen in die Beziehung des Grundes zur Folge gebracht wird, findet man in dem Verhältniss des Grundes zur Folge das objectiv ordnende Princip des Denkens. Es hat eine fundamentale Bedeutung, weil es jedes durch die Objecte motivirte Ordnen charakterisirt. Es hat aber auch einen ursprünglichen, elementaren Charakter, weil es nicht selbst wieder begründet oder abgeleitet werden kann, da es ja die

Form darstellt, in der das Denken sich bewegt, wenn es durch die Objecte geleitet wird.

Dieses objectiv_ordnende Princip stellt sich so neben das in der Reihenform bereits gefundene subjectiv_ordnende Princip, dessen elementare und fundamentale Bedeutung schon früher dargelegt wurde.

Es lassen sich daher die Ergebnisse der auf die Erkenntniss der logischen Ordnung gerichteten Bemühungen in folgendem Resultate zusammenfassen: Die logische Ordnung kommt zu Stande, indem das Denken eine Mannigfaltigkeit verschiedener Bewusstseinsinhalte im Bewusstsein auf Grund gemeinsamer Merkmale zusammenfasst und dadurch, dass es die Bewusstseinsinhalte nach Grund und Folge auf einander bezieht, eine Reihe schafft, deren Glieder im Verhältnisse des Grundes zur Folge stehen. — Die logische Ordnung wird daher dadurch charakterisirt, dass erstens ein Zusammensein von Bewusstseinsinhalten durch das Denken begründet wird, dass zweitens das Zusammensein in Form einer Reihe erfasst wird, und dass drittens die Glieder der Reihe durch die Beziehung des Grundes zur Folge mit einander verknüpft werden.

Aus diesem Resultate ergibt sich nun auch unmittelbar die Lösung der früher gestellten Aufgabe, die Besonderheiten anzugeben, die zu Tage treten, wenn die logische Ordnung bloß dem subjectiv_ordnenden Principe entspringt und folglich den zusammengefassten Objecten nur die Merkmale der Reihenform durch das Denken angeheftet werden.

Da jedes Ordnen das Vorhandensein von Gegenständen des Ordners voraussetzt, so muss auch in diesem Falle ein Zusammensein von Bewusstseinsinhalten vorliegen. Jeder Bewusstseinsinhalt hat nun seine unverlierbare Individualität; er ist auf Grund derselben von jedem anderen unterscheidbar und es muss so sein, falls jeder neben jedem sich behaupten soll. Wenn nun aber das Denken keinen Anlass haben soll, die Objecte auf Grund ihrer Verschiedenheit auf einander zu beziehen und dadurch eine objective Ordnung zu schaffen, so muss offenbar jedes Object das nämliche Interesse beanspruchen wie jedes andere; es können daher bloß gemeinsame

Merkmale das Denken in Anspruch nehmen und so ein Zusammen-
sein begründen. Die Bewusstseinsinhalte werden daher zwar ver-
schiedene Individuen, aber gleichwerthige Denkobjecte sein, und es
ist klar, dass durch das Erfassen ihres Zusammenseins bloß die-
jenigen Beziehungen zu Tage treten, die durch die Form des Er-
fassens bedingt sind und die schon bei der Betrachtung des Er-
fassens eines erlebten Zusammenseins sich bemerklich machten. Sie
entstehen dadurch, dass man von dem Einen zu einem Andern
übergeht, und sie bestehen darin, dass die Individualität des einen
Bewusstseinsinhaltes für das Denken die Bedeutung gewinnt, auf
einen andern, gleichfalls individuell bestimmten Bewusstseinsinhalt
hinzuführen und mit ihm in gedächtnissmäßig fixirtem Zusammen-
hang zu stehen.

Die Individualität der Bewusstseinsinhalte kommt somit aller-
dings dennoch zur Geltung, aber nicht als Grund, der das Denken
veranlasst, ihr einen anderen Bewusstseinsinhalt als Folge beizu-
gesellschaften, sondern bloß als Mittel, um den Bewusstseinsinhalten die
Merkmale, durch welche sie bestimmte Glieder der zusammen-
gefassten Reihe werden, aufzuprägen. Diese Merkmale sind daher
unmittelbar mit den zusammengefassten Bewusstseinsinhalten ver-
schmolzen, und, wenn der Process des Aneinanderreihens sich wieder-
holt, so werden die nämlichen Merkmale in gleicher Weise mit den
nunmehr aneinandergereihten Bewusstseinsinhalten verschmelzen.

Erst durch das Vergleichen verschiedener Ausführungen des
nämlichen Processes wird man zu einem Verselbständigen der
Merkmale der Reihenform gelangen. Man kann zwar offenbar auch
dann individuell bestimmte Bewusstseinsinhalte nicht entbehren,
man wird aber denselben nur die Bedeutung zulegen, dadurch, dass
sie in einem gedächtnissmäßig fixirten Zusammenhange stehen,
Glieder der Reihe zu markiren, die von einem vorhergehenden zu
einem nachfolgenden den Uebergang vermitteln. Auf diese Weise
schafft man eine Normalreihe von Bewusstseinsinhalten;
in welcher die subjective Form, in der ein Zusammensein
erfasst werden kann, zu objectiver Darstellung gelangt
und deren Glieder lediglich die Träger von Merkmalen
der Reihenform sind.

Es kann indessen bloß die Nothwendigkeit, eine Normalreihe

überhaupt zu schaffen, auf diese Weise eingesehen werden. Das thatsächliche Herstellen einer Normalreihe wird dagegen durch Zufälligkeiten bedingt sein, so dass im Grunde genommen jeder einzelne Mensch, mindestens aber jede in wechselweiser Beeinflussung lebende Gemeinschaft von Menschen zur Bildung einer besonderen Normalreihe gelangen kann. Da der Mensch ein mit Sprache begabtes Wesen ist, so liegt es nahe, besondere Laute oder Wörter und überdies, wenn der Besitz der Schrift hinzukommt, besondere Schriftzeichen als Träger jener Merkmale der Reihenform zu schaffen. Auch ist es nicht nöthig, die Erzeugung einer Normalreihe von Anfang an als Ergebniss wissenschaftlicher Reflexion über den subjectiven Process des Erfassens eines Zusammenseins von Bewusstseinsinhalten im Bewusstsein aufzufassen. Praktische Bedürfnisse werden vielmehr den ersten Anstoß geben. Denn die Normalreihe hat auch einen praktischen Werth, der darin besteht, dass sie das Erfassen eines vorliegenden Zusammenseins von Objecten, die keine hervorstechenden, unterscheidenden Merkmale besitzen, vermittelt. Indem nämlich die Glieder der Normalreihe nach einander den zu erfassenden Objecten hinzugefügt werden, erhält jedes Object das unterscheidende Merkmal eines Gliedes der Reihe, und das ganze Zusammensein kann so durch Zuordnung der Normalreihe erfasst werden.

Jedoch wird auf diese Weise weder die Normalreihe noch ihre Verwendungsweise in ihrem Wesen erkannt. Der Reflexion bleibt es daher vorbehalten, das subjective Princip des Ordnen in einer vollendeten Normalreihe zu einer vollkommenen Darstellung zu bringen. Es ersteht somit der wissenschaftlichen Reflexion ein besonderes Problem in der Erforschung der Bedeutung und des Wesens der Normalreihe, deren Glieder die Träger der Merkmale der Reihenform sind.

Die Stellung eines neuen Problems ist mithin die Frucht davon, dass die Besonderheiten, welche die Reihe als eine Form des Denkens auszeichnen, beachtet wurden. Die Aufgabe, auf dieselben zu achten, erwuchs in Folge der Betonung des Gegensatzes zwischen der Reihenform, insofern sie der Reflexion als eine Form des Denkens sich darstellt, und zwischen der unmittelbaren und unwillkürlichen Einkleidung zusammengefasster Objecte in die Reihenform, die da-

durch eine objective Gestalt gewinnt. Der nämliche Gegensatz besteht nun aber auch betreffs der Beziehung des Grundes zur Folge, die im Verein mit der Reihenform die logische Ordnung charakterisirt. Denn die nach den Bedingungen der logischen Ordnung forschende Reflexion beachtet die Art und Weise der durch die Objecte angeregten Bethätigung des Denkens und findet so in dem Fortschreiten vom Grunde zur Folge eine Form des Denkens, während die thatsächlich durch das Denken geschaffene logische Ordnung wesentlich in besonderen, durch die empirische Beschaffenheit der Denkobjecte bedingten Beziehungen des Grundes zur Folge besteht, die als solche das Wesen und die Bedeutung jener Form nicht rein hervortreten lassen. Es bleibt daher der wissenschaftlichen Reflexion vorbehalten, auch das objectiv ordnende Princip des Denkens zu einer vollendeten Darstellung zu bringen, und es ersteht derselben nochmals ein besonderes Problem, welches die Beziehungen des Grundes zur Folge als eine Form des Denkens zum Gegenstande hat und dieselben an Bewusstseinsinhalten, die lediglich als Träger jener Beziehungen geschaffen werden, eine vollendete Gestalt gewinnen lässt.

§ 8.

Die so zu einem Abschluss gebrachte Untersuchung der logischen Ordnung wurde in der ausgesprochenen Absicht unternommen, auf diese Weise einen Zugang zum Begriffe der Zahl und zu den auf die Zahl gegründeten mathematischen Disciplinen zu gewinnen. Dass überhaupt ein Zugang gesucht werden muss, indem es nicht zweckdienlich ist, eine Definition der Zahl an die Spitze der Untersuchung zu stellen, ergab sich aus den Erörterungen über »Aufgabe und Methode der Untersuchung«. Diesen Zugang in der logischen Ordnung zu suchen, wurde durch die »Thatsachen, welche der Mathematik zu Grunde liegen«, nahe gelegt. Dass nun aber dieser Zugang der richtige ist, wurde thatsächlich noch nicht bewiesen, und es war im Grunde genommen eine bloße Behauptung, wenn ich sagte, dass man auf diesem Wege zur mathematischen Zahl gelangen werde. Hiezu war ich allerdings berechtigt, weil ich, von den mathematischen Disciplinen ausgehend und nach ihrer logischen

Begründung suchend, Schritt für Schritt zu den Thatsachen des Bewusstseins und zu den Anfängen des Erkennens zurückgedrängt wurde. Es ist daher der hier verfolgte Weg die Umkehrung eines bereits zurückgelegten Weges, wobei nur von der Darlegung früherer Irrwege und Umwege Abstand genommen wird. Dies zeigt jedoch nur, dass ein vollgiltiger Beweis für die Richtigkeit des eingeschlagenen Weges nur dadurch erbracht werden kann, dass die Fortsetzung des Weges thatsächlich zu den auf die Zahl gegründeten mathematischen Disciplinen führt.

Indessen ist wohl auch jetzt schon evident, dass durch die bisherige Untersuchung nicht ein Gebilde der logischen Phantasie an die Stelle der mathematischen Zahl gesetzt wird, sondern dass die von der Reflexion zur Vollendung gebrachte Normalreihe, deren Glieder die Träger der Merkmale der Reihenform sind, nichts anderes ist als die mathematische Zahlenreihe. Wird aber dies zugestanden, so erweist sich die Zahlenreihe als Gegenstand des ersten der beiden Probleme, welche die Charakterisirung der logischen Ordnung im Gefolge hatte.

Alsdann muss man aber auch zugeben, dass die Zahl in keiner Weise auf die räumliche oder zeitliche Anschauung sich gründet und darum von Haus aus weder anschaulich stetig noch anschaulich unstetig sein kann. Die übliche Versinnlichung der Zahlenreihe durch eine aequidistante Punktreihe in einer Geraden bringt somit erst das der Zahl an sich durchaus fremde Merkmal des Unstetigen in die Zahlenreihe. Ein von solchen fremdartigen Beimischungen freies geometrisches Abbild derselben findet man darum wohl bloß in Herbart's¹⁾ Construction der »starren Linie«, deren Punkte die nicht in einander überfließenden, aber direct an einander liegenden Glieder der Zahlenreihe darstellen, und für welche alsdann die von Herbart erwähnte Definition der alten Metaphysiker zutrifft: *extensio lineae ex numero punctorum, quibus constat, determinatur*. Doch ist wohl das Bild einer Kette von unmittelbar verbundenen, selbständigen Gliedern noch vorzuziehen.

Es erhellt ferner, dass die Zahl in ihrer primitiven Gestalt

1) Allgemeine Metaphysik. II. Theil. Königsberg 1829. Synechologie; von der starren Linie und der Zahl. S. 215 f.

zwar praktischen Bedürfnissen ihr Dasein verdankt, dass sie aber im Dienste praktischer Verwendung nicht zur Vollendung gelangt und ihr Wesen nicht enthüllt. Dies ermöglicht vielmehr erst die wissenschaftliche Reflexion, welche den Process des Aneinanderreihens in der Normalreihe zu einer reinen und vollendeten Darstellung bringt. In Folge dessen tritt die Bedeutung, welche die Beschaffenheit des Denkens für die Zahl hat, klar zu Tage. Dieselbe hebt auch Wundt¹⁾ hervor, wenn er den »einzelnen Denktact« als Träger des Begriffs der Einheit, die Function des Zählens als »die Verbindung der einzelnen Denktacte als solcher, abgesehen von jedem Inhalt« und die Zahl als den »abstracten Ausdruck der discursiven Gesetzmäßigkeit des Denkens« betont.

Da somit die Zahl nicht bloß ein Gegenstand der Reflexion, sondern auch ein Product derselben ist, so läuft es auf eine bloße Selbstverständlichkeit hinaus, wenn Husserl²⁾, wie er in der Vorrede zu seiner Philosophie der Arithmetik sagt, im zweiten Theile seines Werkes zu zeigen versucht, »wie die Thatsache, dass wir fast durchgehends auf symbolische Zahlbegriffe eingeschränkt sind, den Sinn und Zweck der Anzahlenarithmetik bestimmt.« Und er scheint bloß eine durch den ersten Theil seiner Untersuchungen selbstgeschaffene Schwierigkeit zu überwinden, wenn er den Zahlenoperationen zuerst die durch eigentliche Vielheitsvorstellungen fundirten Zahlen zu Grunde legt und so »auf den Abweg einer zersetzenden Skepsis« geräth, um sodann in den »symbolischen Zahlbildungen« die »eigentlichen Substrate« der Verknüpfungs- oder Operationsgesetze zu finden.

Es ist auch auf Grund des gewonnenen Zugangs zur Zahl hervorzuheben, dass es in erster Linie die Zahlenreihe ist, die von der Reflexion entwickelt und erforscht werden muss. Mit ihrer Hilfe werden erst die Anzahlen festgestellt werden können. Die Anzahl setzt daher die Zahlenreihe und den Process des Zählens voraus und kann folglich nicht als natürlicher Ausgangspunkt für eine Untersuchung des Zahlbegriffs dienen. Will man aber den Begriff der

1) Logik, I. Bd. Stuttgart 1880. S. 468 f. 2. Aufl. 1893. S. 521 f. — II. Bd. Die mathematische Abstraction. S. 108.

2) Philosophie der Arithmetik. Halle 1891. Vorrede VII. S. 297, 298.

Anzahl festsetzen, so wird ein logisch begründetes Zusammensein gleichwerthiger Denkobjecte zu Grunde gelegt werden müssen. Da ein solches, wie bereits oben erwähnt wurde, als Umfang eines Begriffs gedeutet werden kann, so erhellt unmittelbar die von Herbart¹⁾ und insbesondere von Frege²⁾ hervorgehobene Bedeutung des Begriffs und des Begriffsumfangs für den Begriff der Anzahl.

Wenn nun die Zahlenreihe als der natürliche Ausgangspunkt für eine Untersuchung des Zahlbegriffs sich darbietet, so erscheint es bloß naturgemäß, dass eine die Zahl lediglich in ihrer mathematischen Bedeutung klärende und widerspruchslos gestaltende Untersuchung mit der Zahlenreihe als etwas Gegebenem beginnt. In dieser Weise verfährt Kronecker³⁾, indem er sagt: »Den naturgemäßen Ausgangspunkt für die Entwicklung des Zahlbegriffs finde ich in den Ordnungszahlen. In diesen besitzen wir einen Vorrath gewisser, nach einer festen Reihenfolge geordneter Bezeichnungen etc.« Es liegt dabei offenbar gar nicht in seiner Absicht »auf dem freien Plane philosophischer Vorarbeit« die Entwicklung des Zahlbegriffs soweit zu führen, »dass der Begriff schon mit seinen Grundeigenschaften ausgestattet ist, wenn die specialwissenschaftliche Behandlung beginnt.« Denn es dürfte alsdann die Zahlenreihe nicht einfach hingenommen, sie müsste vielmehr erst abgeleitet werden, damit so ihre Grundeigenschaften hervortreten können.

Weiter als Kronecker geht Dedekind⁴⁾, der eine Ableitung

1) Psychologie und Wissenschaft. II. Theil. S. 161: »Jede Zahl nun bezieht sich auf solche Weise auf einen allgemeinen Begriff des Gezählten.«

2) Die Grundlagen der Arithmetik. Breslau 1884. S. 79: »Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang des Begriffes, gleichzählig dem Begriffe F .«

3) Ueber den Zahlbegriff (Philosophische Aufsätze zu Zeller's Jubiläum oder Crelle's Journal. Bd. 103. S. 337 f.). Er beginnt die Abhandlung mit den Worten: »Auf dem freien Plane philosophischer Vorarbeit, aus welchem man in die eingehegten Gebiete der verschiedenen Wissenschaften gelangt, sind auch die Begriffe der Zahl, des Raumes und der Zeit zu entwickeln, von welchen in der Mathematik Gebrauch gemacht wird. Und es erscheint zweckmäßig, die Entwicklung dort soweit zu führen, dass die Begriffe schon mit ihren Grundeigenschaften ausgestattet sind, wenn die specialwissenschaftliche Behandlung beginnt.« — In ähnlicher Weise wie Kronecker geht v. Helmholtz in der Abhandlung: »Zählen und Messen« (Philos. Aufsätze zu Zeller's Jubil.) von der Zahlenreihe aus.

4) In der Schrift: »Was sind und was sollen die Zahlen?« Braunschweig 1888. Die citirten Stellen finden sich: Vorwort VIII; S. 1, 2, 6; 21.

der Zahlenreihe thatsächlich gibt. Er geht davon aus, dass Dinge als Gegenstände unseres Denkens »aus irgend einer Veranlassung unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte aufgefasst, im Geiste zusammengestellt werden« und so »ein System« bilden können. Er findet ferner die das Denken ermöglichende Fähigkeit des Geistes darin, »Dinge auf Dinge zu beziehen, einem Dinge ein Ding entsprechen zu lassen, oder ein Ding durch ein Ding abzubilden« und versteht demgemäß unter »einer Abbildung φ eines Systems S « »ein Gesetz, nach welchem zu jedem bestimmten Elemente s von S ein bestimmtes Ding gehört, welches das Bild von s heißt und mit $\varphi(s)$ bezeichnet wird«. Mit Hilfe des Begriffs der »Aehnlichkeit einer Abbildung« und der »Abbildung eines Systems in sich selbst« kann er alsdann endliche und unendliche Systeme scharf von einander scheiden und schließlich die »Reihe der natürlichen Zahlen« aus den »einfach unendlichen Systemen« dadurch gewinnen, dass er sagt: »Wenn man bei der Betrachtung eines einfach unendlichen, durch eine Abbildung φ geordneten Systems V von der besonderen Beschaffenheit der Elemente gänzlich absieht, lediglich ihre Unterscheidbarkeit festhält und nur die Beziehungen auffasst, in die sie durch die ordnende Abbildung φ zu einander gesetzt sind, so heißen diese Elemente natürliche Zahlen oder Ordinalzahlen oder auch schlechthin Zahlen, und das Grundelement 1 heißt die Grundzahl der Zahlenreihe V .« Es charakterisiren sich somit die Untersuchungen Dedekind's als Untersuchungen allgemeiner Mannigfaltigkeiten, aus welchen durch Specialisirung die Zahlenreihe hervorgeht. Der Begriff der Abbildung ist dabei von grundlegender Bedeutung. Es begnügt sich Dedekind jedoch mit der bloßen Hervorhebung der Thätigkeit des Abbildens als einer Fähigkeit des Geistes, während es doch nothwendig ist, auf die Form zu achten, an die das Denken bei der Thätigkeit des Abbildens gebunden ist. Geschieht dies, so wird sich, wie die früheren Ueberlegungen gezeigt haben, die Reihe als die ursprüngliche, elementare Form des Denkens, in der ein Zusammensein oder ein System erfasst werden kann, darbieten. Es wird daher auch durch Dedekind's Untersuchungen das Zurückgehen auf die im logischen Ordnen bestehende, primitive Bethätigung des Denkens nicht erspart.

Wenn demgemäß das Unternehmen, durch die logische Ordnung

einen Zugang zur Zahl zu gewinnen, nicht ausichtslos zu sein scheint, so darf dies doch nicht zu einem erzwungenen Vordringen veranlassen. Der Zugang muss vielmehr in natürlicher Weise sich ergeben, soll der Werth der Untersuchung nicht illusorisch sein. Es ist daher sehr wohl zu beachten, dass nicht bloß ein subjectiv ordnendes Princip in der Reihenform gefunden wurde, sondern dass auch in der Beziehung des Grundes zur Folge ein objectiv ordnendes Princip erkannt wurde. Beide sind in ihrer Bedeutung für den Zahlbegriff zu berücksichtigen. War es evident, dass die auf Grund des ersteren Principis sich darbietende Normalreihe nichts anderes als die Zahlenreihe ist, so ist es wohl auch evident, dass das auf Grund des letzteren Principis in der Beziehung des Grundes zur Folge erstehende Problem die Quelle ist, aus der die Beziehungen zwischen verschiedenen Bewusstseinsinhalten fließen. Fasst man nun solche Bewusstseinsinhalte als Zahleinheiten auf, so ergibt sich zugleich eine Quelle für Beziehungen zwischen Zahleinheiten, und man erkennt, dass dadurch einestheils die Mittel zur Begründung der positiven und negativen, ganzen und gebrochenen, reellen und imaginären Zahlen, anderentheils die Grundlagen für eine allgemeine Operationenlehre, insofern sie eine Lehre von allgemeinen Beziehungen zwischen Zahleinheiten ist, gewonnen werden können.

Ist aber dies der Fall, so kann man hoffen, in der logischen Ordnung die wahrhaft philosophische Grundlage des Zahlbegriffs gefunden zu haben, die es gestattet, die Zahl in ihrer ursprünglichen und in ihrer verallgemeinerten Gestalt zu verstehen und zu begründen.

(Fortsetzung folgt.)

XI. 254-306.
