Ueber die Ausgleichung statistischer Zählungen in der Psychophysik.

Von

H. Bruns.

Den äußeren Anlass zu der Niederschrift der nachstehenden Auseinandersetzungen gab die Untersuchung von B. Kämpfe, die in diesen »Studien«[1]) veröffentlicht ist. Bei der Durchsicht der genannten Abhandlung konnte ich mich nicht des Eindruckes erwehren, dass zwischen dem inneren Werthe der umfangreichen Beobachtungsreihe und der gewählten Art der rechnerischen Behandlung ein gewisses Missverhältniss bestehe, hervorgerufen durch die Nichtbenutzung gewisser Principien und Lehrsätze, die den Inhalt der sogenannten »Ausgleichungs-Rechnung« bilden. Wenn nämlich eine Beobachtungsreihe mehr Bestimmungsstücke liefert, als zur Ermittlung der aus den Beobachtungen gesuchten Unbekannten nothwendig sind, so treten erfahrungsgemäß zwischen den einzelnen Beobachtungen Widersprüche auf, die von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern herrühren. Diese Widersprüche müssen, wenn man nicht etwa zu einer willkürlichen und deshalb verwerflichen Auswahl seine Zuflucht nehmen will, bei der Ableitung der Endresultate »ausgeglichen« werden. Wenn auch die Grundsätze der A.-R.[2]) zum Theil conventioneller Natur sind, und zwar aus Gründen, die zur Zeit als in dem Gegenstande selbst

1) Band VIII, S. 511ff.

2) Zur Abkürzung für Ausgleichungs-Rechnung.

liegend angesehen werden müssen, so hat doch die Erfahrung, d. h. die fortwährende Probe auf die Zweckmäßigkeit und praktische Brauchbarkeit eine Art Auslese herbeigeführt, deren Ergebniss — bis zum Beweise des Gegentheils — als endgültig anzusehen ist.

Wenn eine Beobachtungsmethode bis an die Grenze ihrer Leistungsfähigkeit ausgenutzt wird — wie das z. B. in der Astronomie und Geodäsie seit Langem die Regel bildet — so besteht die einzige Möglichkeit, die Genauigkeit der Ergebnisse noch weiter zu treiben, darin, dass man durch die angemessene Verbindung möglichst zahlreicher Messungen den Spielraum der unvermeidlichen Fehler noch weiter einengt, und das Mittel dazu ist eben die A.-R. Ihre Vorschriften haben sich in den genannten Wissenschaften so fest eingebürgert, dass die Nichtanwendung als ernster Mangel angesehen wird. Aber auch anderswo treten genug Fälle auf, in denen die mit Verständniss und Urtheil durchgeführte Ausgleichung den Ergebnissen erst ihren eigentlichen Halt gibt. Wenn gleichwohl die Anwendung der hierher gehörigen Rechnungsvorschriften häufig unterbleibt, so dürfte die Ursache davon der Regel nach in der Unbekanntheit mit dem Gegenstande zu suchen sein. Man trifft wenigstens in der Litteratur immer wieder auf Beispiele, wo die regelrechte Anwendung der A.-R. nicht bloß den besten, sondern auch den kürzesten Rechnungsgang liefert, wo aber trotzdem irgend ein beschwerlicher und Ziffern vergeudender Umweg eingeschlagen wird.

Für den vornehmsten Ausgleichungsmodus, nämlich die Methode der kleinsten Quadrate, findet man in zahlreichen Büchern und Abhandlungen die Begründung und die Anweisung zur zweckmäßigen Durchführung der numerischen Rechnung auseinandergesetzt. Die Begründung geht zunächst immer davon aus, dass es sich um Messungen, im engeren Sinne dieses Wortes, handele, und dass diese Messungen unabhängig von einander seien. Es ist deshalb nicht von vorn herein gewiss, dass die Methode der kl. Qu. auch auf die statistischen Zählungen, die bei den psychophysischen Versuchen eine so häufige Anwendung gefunden haben, ohne weiteres ausgedehnt werden dürfe. Diese Frage ist, wie eine nähere Untersuchung lehrt, im wesentlichen zu bejahen, so lange in den Versuchsreihen, auf die sich die Abzählungen beziehen, bei jedem einzelnen Versuche immer nur zwei Ereignisse E und sein Gegentheil Nicht-E in Betracht kommen. Die dabei erforderlichen Sätze finden sich in den Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeits-Rechnung fertig vor, und zwar bei der Ableitung des sogen. Bernoulli'schen Theorems über die großen Zahlen. Wenn dagegen mehr als zwei Ereignisse unterschieden werden, so bedürfen die herkömmlichen Voraussetzungen und Vorschriften der Methode der kl. Qu. einer Abänderung, die meines Wissens bisher nicht gegeben worden ist. Die Form dieser Abänderung ist bei der vorliegenden Klasse von Aufgaben hinreichend einfach, dagegen verlangt die Beweisführung einige umständlichere Vorbereitungen.

Es versteht sich von selbst, dass in der Psychophysik, wie in anderen beobachtenden Wissenschaften, ganze Gebiete von Aufgaben auftreten, die wesentlich qualitativer Natur sind, wo also, wenigstens vorläufig, der Hauptzweck nicht in der Ermittelung von möglichst genauen Zahlenbeziehungen liegt, und wo deshalb bei der Rechnung ein summarisches Verfahren gestattet ist. Sobald dagegen die Zahlenwerthe der Hauptzweck sind und sobald überschüssige Beobachtungen vorliegen, tritt auch die Ausgleichung in ihr Recht.

Der Einwand, dass z. B. die Methode der kl. Qu. die Beobachtungen als frei von systematischen Fehlern voraussetze, trifft gar nicht die Nothwendigkeit, zwischen den vorhandenen Widersprüchen auszugleichen, sondern nur die Vorschriften für die Schätzung der in den Resultaten verbleibenden Unsicherheit. Diese Schätzungen können allerdings durch systematische Fehler illusorisch gemacht werden, wobei jedoch nicht zu vergessen ist, dass eben diese Schätzungen häufig genug ein Mittel zur Aufdeckung systematischer Fehler sind.

Die nachstehenden Auseinandersetzungen sind im Grunde ein Abriss der Methode der kl. Qu. mit besonderer Rücksicht auf die hier zu lösende Aufgabe. Diese Art der Behandlung war nöthig, weil die herkömmlichen Darstellungen in ihren Grundannahmen Einschränkungen enthalten, die für die Beweisführung überflüssig, für den hier zu behandelnden Fall aber unzulässig sind.

I.

Bei directer Messung einer Unbekannten mögen der wahre und der beobachtete Werth als Strecken OW und OB auf einer Abscissenachse von einem Nullpunkte O aus abgetragen werden. Man kann dann sagen: die Beobachtung verlegt den wahren Ort W des gesuchten Punktes nach B, und die Strecke BW ist der Beobachtungsfehler. Von diesem Beobachtungsfehler unterscheiden wir den eigentlichen Messungsfehler. Es wird nämlich das Messungsresultat, d. h. die als beobachtet notirte Zahl, immer nur mit einer bestimmten Anzahl von Decimalen niedergeschrieben, während für die genaue Angabe der Länge von OB unter Umständen noch weitere Decimalstellen nöthig sein können. Ist a die Strecke, die der Einheit der letzten bei den Messungen mitgenommenen Decimale entspricht, so denke man sich durch Abtragung der Vielfachen von a eine Scala oder Theilung hergestellt, deren Theilpunkte wir, von O aus, fortlaufend mit den Nummern $0, 1, 2 \ldots$ resp. $0, -1, -2 \ldots$ beziffern wollen. Dies festgesetzt, können wir sagen: die Beobachtung verlegt den wahren Ort W nach B, aber als gemessen wird nicht die Abscisse OB, sondern die Nummer des Theilpunktes P notirt, der B am nächsten liegt. Hierbei ist die Strecke BP der Abrundungsfehler, PW dagegen der Messungsfehler, d. h. der Unterschied zwischen dem als gemessen notirten und dem Soll-Werthe. Bei genauen Messungen richtet man es immer so ein, dass der Abrundungsfehler neben dem Beobachtungsfehler zu vernachlässigen ist, dass also zwischen Beobachtungs- und Messungsfehler nicht unterschieden zu werden braucht. Der Abrundungsfehler bewirkt, dass B sich innerhalb einer gewissen Strecke verschieben kann, ohne dass sich das entsprechende P und die als gemessen notirte Theilpunkt-Nummer ändert. Wir wollen den geometrischen Ort von B, zu dem derselbe Theilpunkt P gehört, als »Theilstrecke« bezeichnen, und diese mit der Nummer versehen, die dem entsprechenden P zukommt. Man kann dann auch sagen: als gemessen wird die Nummer der Theilstrecke notirt, in die durch die Beobachtung der Ort des gesuchten Punktes hineinverlegt wird. Liegen für W wiederholte Messungen vor, so lautet die Aufgabe der A.-R. für diesen Fall:

aus der Häufigkeit, mit der die verschiedenen Theilstrecken-Nummern in der Messungsreihe auftreten, ist die annehmbarste Festsetzung über die Lage von W und womöglich eine Schätzung der dabei übrig bleibenden Unsicherheit abzuleiten.

Die vorstehende Auseinandersetzung erscheint zunächst etwas künstlich, um so mehr, als sie in der Sache auf dasselbe hinausläuft, wie die gewöhnliche Ausdrucksweise. Sie hat jedoch den Vortheil, dass man von ihr aus unmittelbar zu den statistischen Zählungen der Psychophysik übergehen kann. Der Einfachheit halber und um die Vorstellung zu fixiren, knüpfe ich an den von Kämpfe behandelten Fall an; der für andere Aufgaben erforderliche Ansatz lässt sich an der Hand dieses einen Beispieles jedesmal ohne Schwierigkeit aufstellen.

Erzeugt werden zwei Reize, die nach einer bestimmten Regel als erster R_1 und als zweiter R_2 unterschieden werden. Beobachtet wird die Reizdifferenz

$$D = R_1 - R_2 ,$$

deren wahren und deren beobachteten Werth wir wieder durch die beiden Strecken OW und OB darstellen. Als gemessen wird jedoch nicht eine Theilstrecken-Nummer notirt, sondern eines der drei Urtheile

$$D > 0 , \quad D = 0 , \quad D < 0 ,$$

oder auch die Urtheile: das Vorzeichen von D ist positiv — nicht angebbar — negativ[1]). Die ganze Abscissenachse umfasst also nur drei Theilstrecken, nämlich:

1. die »untere« Strecke von $-\infty$ bis zu einem gewissen Punkte mit der Abscisse Z_u,

2. die »Zwischenstrecke« von Z_u bis zu einem gewissen Punkte mit der Abscisse Z_o,

3. die »obere« Strecke von Z_o bis $+\infty$.

---

1) Es kommen zuweilen »zweifelhafte« Fälle vor, in denen das Urtheil lautet: D ungleich Null, aber das Vorzeichen nicht sicher angebbar. Diese Fälle wird man, je nachdem man die drei Urtheilsklassen auf die eine oder andere Weise festsetzt, entweder als verfehlt fortlassen oder aber der mittleren Klasse zuzählen. Bei der Seltenheit dieser Fälle, wenigstens für geübte Beobachter, ist es sachlich ziemlich gleichgültig, ob man in der einen oder andern Weise verfährt.

Je nachdem der beobachtete Punkt P in eine der drei Theilstrecken fällt, gehört das Urtheil einer der drei angegebenen Klassen an. Es seien nun bei einer mit constantem D ausgeführten Versuchsreihe: V die Anzahl der Versuche, ferner P, Z, N die gezählten Häufigkeiten der drei Urtheile $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$, endlich

$$p = \frac{P}{V}, \quad z = \frac{Z}{V}, \quad n = \frac{N}{V}$$

die beobachteten relativen Häufigkeiten, zwischen denen die Gleichung

$$p + z + n = 1$$

besteht, dann hängen diese drei Zahlen p, z, n ab: von den beiden Reizen R_1, R_2 mit der Differenz D, ferner von der Zwischenstrecke mit ihren Endpunkten Z_u und Z_0, endlich von dem Gesetz, nach dem sich die Häufigkeit der Fehler regelt, die bei der Auffassung von D möglich sind. Als gesuchte Stücke treten auf: das Fehlergesetz und die Zwischenstrecke, während die Reizdifferenz bekannt ist.

Machen wir die in unserem Falle unbedenkliche Voraussetzung, dass die Werthe des Beobachtungsfehlers x ein Continuum bilden und dass das Fehlergesetz $\varphi(x)$ eine stetige Function sei, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen der Ungleichung

$$g < x < h$$

gleich dem Integral

$$\int_g^h \varphi(y)\,dy\,.$$

Setzt man

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi(y)\,dy$$

und definirt x als die Differenz »Beobachtung minus Sollwerth«, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen der Ungleichung

$$a < \text{beobachtetes } D < b$$

durch den Ausdruck

$$\psi(b - D) - \psi(a - D)$$

gegeben, worin für D sein Sollwerth gesetzt zu denken ist. Führt man für a und b die Endpunkte der drei Theilstrecken, nämlich die Größen $-\infty$, Z_u, Z_0, $+\infty$ ein und beachtet, dass die Zahlen p, z, n die beobachteten Werthe der den Theilstrecken entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind, so erhält man die drei Beobachtungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} p &= \psi(\infty) - \psi(Z_0 - D)\,, \\ z &= \psi(Z_0 - D) - \psi(Z_u - D)\,, \\ n &= \psi(Z_u - D) - \psi(-\infty)\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

die jedoch nur zwei von einander unabhängige Relationen darstellen. Denn ihre Summe führt auf die Gleichung

$$1 = \psi(\infty) - \psi(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\,dy\,,$$

die eine Identität ist, weil die Wahrscheinlichkeit, dass x irgend einen Werth zwischen den Grenzen $\pm\infty$ besitze, gleich der Gewissheit ist.

Die Gleichungen (1) enthalten vorläufig Alles, was sich auf Grund der beobachteten p, z, n an mathematischen Beziehungen zwischen den gesuchten Stücken aus der betrachteten Versuchsreihe herausholen lässt. Jede weitere Versuchsreihe liefert ein neues Gleichungssystem von der Form (1), wobei sich außer D auch die Werthe der Z und die Form von ψ ändern können. Außerdem können aber auch zwischen den Z und den sonst etwa noch in ψ auftretenden Unbekannten Relationen bestehen, die aus der besonderen Beschaffenheit der Versuchsanordnung folgen, und die deshalb von den beobachteten p, z, n unabhängig sind. Eine solche, mehrfach benutzte Relation ist die in vielen Fällen ganz plausible Bedingung

$$Z_u + Z_0 = 0\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Wir wollen uns diese Bedingungen, wenn sie gelten, immer dazu benutzt denken, um eine entsprechende Zahl von Unbekannten aus dem Ausdrucke von ψ zu eliminiren. Mit dieser Elimination sind die Bedingungen verbraucht und kommen dann nicht weiter in Betracht. Zu der Bedingung (2) will ich übrigens bemerken, dass es meistens zweckmäßig sein wird, sie nicht vorauszusetzen, sondern vielmehr Z_u und Z_0 als von einander unabhängige Unbekannte beizubehalten. Wählt man nämlich, wie das wohl immer geschehen wird, für das ψ eine Form, die nur für zufällige, von systematischen Einflüssen befreite Beobachtungsfehler Geltung hat, so sind die Gleichungen (1) nur dann richtig, wenn man die Fehlergrößen

$$-\infty, \quad Z_u - D, \quad Z_0 - D, \quad +\infty,$$

die bei der Berechnung der ψ als Argumente dienen, vorher von den etwaigen systematischen Bestandtheilen befreit hat. Unterbleibt diese Correction, z. B. weil man ihren Betrag nicht ermitteln kann, so werden bei der Auflösung die Werthe der Unbekannten um entsprechende Beträge gefälscht. Wird nun z. B. die Reizdifferenz D innerhalb einer Versuchsreihe um den constanten Betrag c fehlerhaft aufgefasst, so sind die in (1) zu benutzenden Argumente in Wirklichkeit gleich

$$-\infty + c, \quad Z_u - D + c, \quad Z_0 - D + c, \quad \infty + c,$$

oder gleich

$$-\infty, \quad (Z_u + c) - D, \quad (Z_0 + c) - D, \quad \infty.$$

Hiernach würde also bei der Auflösung von (1) die Benutzung der Bedingung (2) oder einer ähnlichen unter Umständen die Möglichkeit abschneiden, einen in D begangenen constanten Fehler zu entdecken.

Die Werthe von $\psi(x)$ sind ihrer Bedeutung nach Wahrscheinlichkeiten, also reine Verhältnisszahlen, während das Argument x eine Reizgröße bedeutet. Wählt man die zur Abmessung von x benutzte Maßeinheit k-mal kleiner, so geht der Zahlenwerth des Arguments in kx über, während doch der Werth von ψ durch diese Aenderung nicht berührt werden soll; ψ darf also nicht eine rein numerische Function, wie etwa $\sin x$ oder $\log x$ sein. Vielmehr muss die Function ψ außer dem Argument x noch wenigstens einen Parameter enthalten, dessen numerischer Werth sich ebenfalls mit der Aenderung der Maßeinheit der Reize ändert, und der so eingeht, dass aus dem Werthe von ψ die Aenderung der Maßeinheit herausfällt. Da die Zahlenwerthe solcher nothwendigen

Parameter meistens nicht im voraus bekannt sind, so gehen sie in das System (1) als weitere Unbekannte mit ein. Das einer einzelnen Versuchsreihe entsprechende System (1) enthält also im allgemeinen wenigstens drei Unbekannte, aber nur zwei von einander unabhängige Gleichungen.

Die Auflösung der Beobachtungsgleichungen setzt voraus, dass die Form von $\psi(x)$ bekannt sei. Da diese Form für eine gegebene Beobachtungsreihe nicht a priori feststeht, so ist man genöthigt, über $\psi(x)$ irgend eine plausible Annahme zu machen und ihre Zulässigkeit an den Beobachtungen zu prüfen. Wenn die Gleichungssysteme (1), die man aus mehreren Versuchsreihen erhält, gerade so viele unabhängige Bedingungen liefern, als Unbekannte vorhanden sind, so ist die geforderte Prüfung offenbar nicht möglich. Denn man kann dann, wie auch im Uebrigen $\psi(x)$ gewählt sein mag, die vorgelegten Gleichungen im allgemeinen immer streng befriedigen; die unendlich vielen denkbaren Formen von ψ haben also, so weit es sich um den Anschluss an die Beobachtungen handelt, gleiche Berechtigung. Die Möglichkeit, den Spielraum für die Wahl von ψ einzuengen, tritt erst ein, wenn überschüssige Beobachtungen vorhanden sind, wenn also die bloße Auflösung der Gleichungen durch eine Ausgleichung zu ersetzen ist.

II.

Ehe wir zur Erörterung der Frage nach dem zweckmäßigsten Ausgleichungsmodus übergehen, soll zunächst die zu behandelnde Aufgabe in allgemeinerer Gestalt aufgestellt werden, denn das vorhin besprochene Beispiel ist nur ein specieller Fall aus der Anwendung statistischer Methoden in der Psychophysik. Scheidet man die von Fall zu Fall wechselnden Umstände aus, so gelangt man zu einer Aufgabe, deren Voraussetzungen und deren Ziel folgendermaßen formulirt werden können.

Angestellt wird eine »Gruppe« von Versuchen; diese Gruppe zerfällt in q »Reihen«, die wir durch die Nummern $1, 2, \ldots q$ unterscheiden. Bei jedem einzelnen Versuche tritt eines der r einander ausschließenden Ereignisse $E_1, E_2 \ldots E_r$ ein. Diese Ereignisse sind im vorliegenden Falle Urtheile oder besser Urtheilsclassen und kommen dadurch zu Stande, dass auf dem Wege von der Herstellung und Auffassung des beurtheilten Objects bis zum Aussprechen des Urtheils Fehler begangen werden, die im allgemeinen den Charakter der Zufälligkeit besitzen, ohne dass jedoch constante Bestandtheile ausgeschlossen sind. Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen bei jedem Versuche das Eintreten der einzelnen E zu erwarten ist, hängen von gewissen Umständen ab, deren Gesammtheit wir als »Beobachtungsmodus« (abgekürzt B.-M.) bezeichnen[1]). Der mathematische Ausdruck für den B.-M. ist die Fehlerfunction oder das Fehlergesetz, welches die Häufigkeit der bei dem betrachteten B.-M. möglichen Fehler regelt.

Zu diesen allgemeinen Versuchsbedingungen treten weiter die beiden wesentlichen Voraussetzungen unserer Aufgabe. Die erste lautet: innerhalb einer »Reihe« ist der B.-M. constant und damit auch die Form der Fehlerfunction, mit der die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der einzelnen E zu berechnen sind. Die andere Voraussetzung besagt: die Fehlerfunctionen, die zu den einzelnen B.-M. oder, was dasselbe ist, zu den einzelnen Versuchsreihen gehören, sind ihrer Form nach bekannt, und damit auch die Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeiten der E; unbekannt sind nur die Werthe gewisser Parameter, die in den Fehlerfunctionen auftreten.

Es seien nun für die α-te Versuchsreihe: V_α die Zahl der Versuche, $P_{\alpha 1}$, $P_{\alpha 2} \ldots P_{\alpha r}$ die gezählten Häufigkeiten der Ereignisse E,

$$p_{\alpha 1} = \frac{P_{\alpha 1}}{V_\alpha}, \quad \ldots \quad p_{\alpha r} = \frac{P_{\alpha r}}{V_\alpha}$$

die entsprechenden relativen Häufigkeiten, $u_{\alpha 1}, \ldots u_{\alpha r}$ die Wahrscheinlichkeiten der E, sodann $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ die unbekannten Parameter, und endlich

$$E_{\alpha 1}(\xi_1 \ldots \xi_n), \quad \ldots \quad E_{\alpha r}(\xi_1 \ldots \xi_n)$$

die Ausdrücke, die sich für die u dieser Reihe aus der als bekannt vorausgesetzten Fehlerfunction ergeben, dann erhält man für die Reihennummer α die r Beobachtungsgleichungen

---

1) Ich benutze diesen Ausdruck statt des in der Wahrscheinlichkeits-Rechnung üblichen Wortes »Ursache«, das im Grunde genommen recht unglücklich gewählt ist, namentlich wenn es sich um Beobachtungen handelt.

$$p_{\alpha\lambda} = u_{\alpha\lambda} = E_{\alpha\lambda}(\xi_1 \ldots \xi_n), \quad (\lambda = 1, 2 \ldots r), \quad \ldots (3)$$

von denen immer eine die Folge der übrigen ist, weil

$$\sum_\lambda p_{\alpha\lambda} = \sum_\lambda u_{\alpha\lambda} = \sum_\lambda E_{\alpha\lambda} = 1 .$$

Die ganze Gruppe liefert also zur Bestimmung der n Unbekannten ξ qr Gleichungen von der Form (3), von denen eine gewisse Anzahl eine Folge der übrigen ist. Für uns kommt hierbei nur der Fall in Betracht, wo n kleiner ist, als die Anzahl der von einander unabhängigen Bedingungen. In diesem Falle lässt jedes Werthsystem der ξ zwischen Beobachtung und Rechnung gewisse Widersprüche von der Form

$$\Delta_{\alpha\lambda} = p_{\alpha\lambda} - E_{\alpha\lambda}(\xi_1 \ldots \xi_n)$$

übrig, die nicht gleichzeitig zum Verschwinden zu bringen sind.

Die vorstehenden Gleichungen enthalten den Ansatz der Aufgabe; die eigentliche Lösung umfasst folgende Theile:

erstens ist das Werthsystem der ξ zu suchen, das den beobachteten p »am besten« entspricht,

zweitens ist eine Schätzung für die Unsicherheit der gefundenen Werthe aufzustellen,

drittens ist zu prüfen, ob die beiden oben hervorgehobenen Annahmen, die ja zunächst nur voraussetzungsweise gelten, als zulässig anzusehen sind.

Die hier gegebene Formulirung umfasst, so viel ich sehen kann, alle bisher nach statistischer Methode durchgeführten Untersuchungen der Psychophysik, bei denen exacte Maßbeziehungen das eigentliche Ziel bilden. Für das Wesen dieser Methode und ihre mathematische Behandlung ist es gleichgültig, ob die Zahl der unterschiedenen Urtheilsclassen 2 oder 3 oder mehr beträgt: noch gleichgültiger ist die Frage, ob die Urtheile »richtig« oder »falsch« sind. Die letztere Unterscheidung stört nur die Einheitlichkeit der mathematischen Darstellung in unnöthiger Weise.

III.

Der erste Theil der vorhin formulirten Aufgabe verlangt die Auffindung der besten Lösung. Bei der Erörterung hierüber wollen wir für den Augenblick annehmen, dass statt der Gleichungen (3) ganz allgemein das System von q Gleichungen

$$v_\alpha = F_\alpha(\xi_1 \ldots \xi_n), \quad (\alpha = 1, 2 \ldots q) \quad \ldots\ldots (4)$$

zwischen den n Unbekannten ξ vorgelegt sei. Hierin sollen die v direct beobachtet oder aus Beobachtungen abgeleitet und ferner $q > n$ sein. Wegen der Fehler, die den v unvermeidlich anhaften, lässt dann im allgemeinen jedes Werthsystem der ξ oder, wie wir auch sagen wollen, jede Stelle im Werthgebiete der ξ die Widersprüche

$$\varDelta_\alpha = v_\alpha - F_\alpha(\xi_1 \ldots \xi_n) \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

übrig. Das Verhalten dieser Widersprüche muss nun dazu dienen, das »beste« Werthsystem der ξ zu finden, und zwar das relativ beste, denn die absolut besten Werthe, nämlich die wahren, kann man nicht ermitteln. Man hat seit langer Zeit versucht, auf Grund allgemein anerkannter Vordersätze ein Kennzeichen der besten Lösung abzuleiten, das unbedingte Gültigkeit beanspruchen könnte. Diese Versuche sind indessen stets daran gescheitert, dass sie an irgend einer Stelle eine Voraussetzung machen, die man nicht ohne weiteres zuzulassen braucht, und deren Zulassung auch nicht durch Gründe erzwungen werden kann. Die allgemeine Ursache dieser Fehlschläge, die auch bei künftigen Versuchen der Art immer wieder eintreten werden, ist unschwer nachzuweisen. Das wahre Kriterium für die beste Lösung, wenn es ein solches gäbe, müsste gegenüber allen anderen zu demselben Zwecke aufgestellten die Eigenschaft besitzen, stets die beste, d. h. die der Wahrheit am nächsten kommende Lösung zu geben. Das ist aber nicht möglich, weil die Fehler der beobachteten v dem Spiele des Zufalls unterworfen sind. Wegen dieses Umstandes muss man sich darauf beschränken, über die Merkmale der besten Lösung Festsetzungen zu treffen, welche, wenn sie auch nicht völlig willkürfrei sind, doch in ausreichender Weise motivirt werden können.

Wenn es sich nur darum handelt, für die Unbekannten ein annehmbares Werthsystem zu finden, so kann man die Bequemlichkeit der Rechnung obenan stellen. Ein Beispiel von solchen, rein formalen Ausgleichungsmethoden ist das Cauchy'sche Interpolations-Verfahren, das bei manchen Aufgaben sehr nützlich ist. Wenn es sich dagegen, wie bei der oben formulirten Aufgabe, zugleich um eine Fehlerkritik handelt, so sind nur solche Ausgleichungsmethoden zulässig, die auf fehlertheoretischer Grundlage beruhen. Solcher Methoden gibt es in Wahrheit unendlich viele; ich berücksichtige jedoch nur die beiden, die auch sonst bisher allein in Frage gekommen sind, weil in der Reihe der übrigen zur Zeit keine ausfindig gemacht worden ist, die in praktischer Beziehung neben jenen beiden in Betracht kommen könnte.

Die erste der beiden Methoden geht darauf aus, die »wahrscheinlichste« Lösung der Gleichungen (4) aufzufinden. Sie setzt voraus, dass in (4) die Fehlerfunctionen der v wenigstens ihrer Form nach bekannt seien, ohne diese Form selber bestimmten Einschränkungen zu unterwerfen. Wenn die Fehlerfunctionen, was vorkommen kann, gewisse, vorläufig unbekannte Parameter enthalten, so treten diese zu den ξ als weitere Unbekannte hinzu.

Die zweite Methode benutzt den Begriff des »mittleren Fehlers«, wie ihn Gauß in der grundlegenden Abhandlung »Theoria combinationis . . .« definirt hat. Die Lösung, die wir mit Gauß die »plausibelste« nennen wollen, setzt die Kenntniss der Fehlerfunctionen nicht voraus, legt jedoch der Form dieser Functionen gewisse Bedingungen auf, die nicht immer erfüllt zu sein brauchen.

Bei der in Abschnitt II gestellten Aufgabe sind beide Methoden anwendbar; jedoch stellt sich, wie ich hier vorweg anführen will, im einzelnen die Sache so. Für die wahrscheinlichste Lösung lässt sich der Ansatz ohne weiteres bilden und führt, so weit es sich um die Auffindung der Unbekannten handelt, auf glatte Rechnungsvorschriften, die mit dem Algorithmus der Methode der kl. Qu. hinsichtlich der äußeren Form identisch sind. Für die plausibelste Lösung ist der Ansatz ebenfalls einfach; um jedoch die Berechnung der Unbekannten wirklich vorzunehmen, sind gewisse Vernachlässigungen geboten, die dahin führen, dass die errechnete Lösung mit der wahrscheinlichsten identisch wird. Dieses Verhältniss kehrt sich aber geradezu um, wenn man zu den Fehlerschätzungen übergeht. Die dazu erforderlichen Entwicklungen lassen sich bei der plausibelsten Lösung streng erledigen, während bei der anderen Lösung die aus praktischen Gründen einzuführenden Vernachlässigungen thatsächlich auf die plausibelsten Werthe führen.

Hiernach kommt die Sache darauf hinaus, für die Unbekannten die eine, für die Fehler die andere Lösung zu benutzen. Da die beiden Lösungen im allgemeinen nicht identisch sind, so liegt hierin eine Inconsequenz, die jedoch praktisch ohne Belang ist. Ist die Unsicherheit der Beobachtung klein, so ist es auch, wie sich zeigen wird, der Unterschied zwischen den beiden Werthsystemen der ξ; sind die Beobachtungen roh, so genügen auch rohe Annäherungsformeln.

Im Folgenden werde ich von der wahrscheinlichsten Lösung nur kurz den Ansatz behandeln, die plausibelste Lösung dagegen so vollständig, als nöthig ist, entwickeln. Letztere hat den Vorzug der größeren Durchsichtigkeit; wenn man das eine Grundaxiom über den mittleren Fehler einmal zugestanden hat, so ist der weitere Weg allenthalben klar und bestimmt vorgeschrieben. Zunächst ist jedoch noch eine für alle Ausgleichungsmethoden gültige Bemerkung einzuschalten.

Die Aufgabe, aus den Beobachtungsgleichungen (4) die ξ zu finden, ist zunächst überbestimmt; die Elimination der ξ führt zwischen den beobachteten v zu Bedingungen, die wegen der Beobachtungsfehler nicht erfüllt sind. Schreibt man nun deswegen das System (4) in der Form der Widerspruchsgleichungen (5), so ist wiederum die Aufgabe wegen des Hinzutretens der neuen, vorläufig unbekannten Größen $\varDelta$ zunächst unbestimmt, wird aber bestimmt, sobald die Eigenschaften der »besten« Lösung festgesetzt werden. Auf Grund dieser Eigenschaften hätte man also vor allem dem System (5) noch die erforderlichen Zusatzgleichungen hinzuzufügen und dann aufzulösen. Die directe Auflösung würde nun oft genug auf erhebliche Rechenschwierigkeiten führen, da ja die Form der Functionen F und der Zusatzbedingungen recht complicirt sein kann. Die Rechenpraxis hat deshalb seit langer Zeit einen Weg eingeschlagen, der diese Schwierigkeit umgeht und zugleich den Vortheil besitzt, dass alle Ausgleichungsmethoden auf ein einfaches und einheitliches Schema gebracht werden können. Es ist nämlich, sobald die directe Aufsuchung der ξ Schwierigkeiten bietet, stets sehr viel leichter, ein angenähertes »vorläufiges« Werthsystem $\xi_{10} \cdots \xi_{n0}$ zu ermitteln. Setzt man dann

$$\xi_\mu = \xi_{\mu o} + \eta_\mu ,$$

$$F_{\alpha o} = F_\alpha(\xi_{1o} \ldots \xi_{no}) , \quad F_{\alpha\mu} = \frac{\partial F_{\alpha o}}{\partial \xi_{\mu o}} ,$$

und entwickelt die rechten Seiten von (4) nach Potenzen der η, so erhält man, wenn nur die linearen Theile der Entwickelung beibehalten werden, die Beobachtungsgleichungen (4) in der Form

$$v_\alpha = F_{\alpha o} + \sum_\mu F_{\alpha\mu}\eta_\mu , \quad (\mu = 1, 2 \ldots n) , \quad \ldots . (6)$$

und entsprechend (5) in der Gestalt

$$\Delta_\alpha = (v_\alpha - F_{\alpha o}) - \sum_\mu F_{\alpha\mu}\eta_\mu . \quad \ldots \ldots . (7)$$

Wenn sich nachträglich herausstellt, dass die vernachlässigten Terme nicht unmerklich waren, so kann das System (6) oder (7) doch dazu dienen, für das vorläufige System $\xi_{\mu o}$ eine erste Verbesserung herbeizuführen, mit der die Rechnung wiederholt wird. Dieser Uebergang auf die lineare Form setzt offenbar nur voraus, dass der Unterschied zwischen der vorläufigen und der aus der Ausgleichung entspringenden besten Lösung hinreichend klein sei; dagegen ist die Größe der Beobachtungsfehler gleichgültig.

Etwas anders liegt die Sache, wenn man bei einer Fehlerdiscussion die linearen Gleichungen ganz allgemein als Ersatz für das System (4) und (5) benutzen will. Beachtet man, dass die unvermeidlichen Beobachtungsfehler stets zwischen gewisse endliche Grenzen eingeschlossen sind, so existirt im Gebiete der ξ ein gewisses Theilgebiet (ξ), das man nicht verlassen darf, wenn nicht die Δ Werthe außerhalb der zulässigen Grenzen erhalten sollen. Dem Bereiche (ξ) entspricht dann im Gebiete der v ein bestimmter Fehlerbereich (v), den man erhält, wenn man sich für alle v den Fehlerspielraum abgegrenzt denkt. Je kleiner die Fehlergrenzen sind, desto kleiner sind dann auch die Theilgebiete (ξ) und (v). Soll nun die lineare Form für das ganze Gebiet (ξ) ohne merklichen Fehler anwendbar sein, so darf die Ausdehnung von (ξ) und (v) gewisse, durch die Natur der jedesmal behandelten Aufgabe gesteckte Grenzen nicht überschreiten. Das drückt man gewöhnlich dadurch aus, dass man sagt, die Beobachtungsfehler müssen klein oder, genauer gesprochen, hinreichend klein sein. Wie man sieht, ist diese

Forderung kleiner Fehler aus rein praktischen Ursachen entsprungen, nämlich aus dem Bedürfniss, immer nur mit linearen Gleichungen zu operiren. Wir werden die Voraussetzung hinreichend kleiner Fehler für die allgemeine fehlertheoretische Erörterung hier ebenfalls annehmen, denn man kann es als einen Erfahrungssatz hinstellen, dass Beobachtungen schon sehr roh sein müssen, wenn die Reduction auf die lineare Form unzulässig sein soll. Die erörterte Schwierigkeit fällt übrigens ganz fort, wenn die Gleichungen (4) von Hause aus linear sind, denn dann wird bei dem Uebergange auf (6) oder (7) überhaupt nichts vernachlässigt. Dass ferner, wenn es sich nur um die Verbesserung einer angenäherten Lösung handelt, die Größe der Fehler gleichgültig ist, wurde bereits oben hervorgehoben.

Die lineare Form der Beobachtungsgleichungen vorausgesetzt laufen alle Ausgleichungsvorschriften darauf hinaus, dass man aus den q Gleichungen (6) auf irgend eine Weise so viele Verbindungen oder »Normalgleichungen« herleitet, als Unbekannte vorhanden sind, nämlich n. Aus diesen Normalgleichungen leitet man dann durch Auflösung die »Finalgleichungen« ab, die die Unbekannten η in expliciter Weise liefern. Es würde nun keinen Sinn haben, zur Bildung der Normalgleichungen nichtlineare Verbindungen des Systems (6) zu benutzen, nachdem man erst absichtlich diesem System die lineare Form gegeben hat. Erzeugt man aber die Normalgleichungen aus (6) auf linearem Wege, so gilt dasselbe auch sofort von der Erzeugung der Finalgleichungen und man kann dann beide Schritte in einen einzigen zusammenziehen, oder direct aus (6) die Finalgleichungen durch lineare Verbindung herleiten. Das läuft, algebraisch gesprochen, auf Folgendes hinaus:

Jedem Coefficienten $F_{\alpha\mu}$ in (6) wird ein gewisser Multiplicator $G_{\alpha\mu}$ zugeordnet. Diese Multiplicatoren sind den Bedingungen

$$\sum_{\alpha} F_{\alpha\mu} G_{\alpha\nu} = e_{\mu\nu}$$

$$(\alpha = 1, 2 \ldots q; \quad \mu, \nu = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots\ldots (8)$$

unterworfen, sonst aber beliebig, so lange über das Ausgleichungsverfahren nichts Näheres festgesetzt ist; das Zeichen $e_{\mu\nu}$ bedeutet hierbei den Werth Null oder Eins, je nachdem die beiden Indices ungleich oder gleich sind. Multiplicirt man (6) mit $G_{\alpha\nu}$ und summirt nach α, so erhält man

$$\sum_{\alpha}(v_{\alpha} - F_{\alpha o})G_{\alpha\nu} = \sum_{\alpha,\mu}\eta_{\mu}F_{\alpha\mu}G_{\alpha\nu}$$

$$= \sum_{\mu}\eta_{\mu}e_{\mu\nu},$$

$$\sum_{\alpha}(v_{\alpha} - F_{\alpha o})G_{\alpha\nu} = \eta_{\nu}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

womit die verlangte explicite Darstellung der η geleistet ist.

Bezeichnen wir jede bestimmt festgesetzte Ausgleichungsvorschrift als »Ausgleichungsmodus« (abgekürzt A.-M.), so entspricht jedem A.-M. ein bestimmtes Multiplicatorensystem, und umgekehrt kann jedes den Bedingungen (8) genügende System von Multiplicatoren als ein A.-M. angesehen werden. Da die Zahl der Multiplicatoren gleich qn, die der Bedingungen (8) gleich n^2 ist, so bildet die Gesammtheit aller A.-M. eine Mannigfaltigkeit von $(q—n)\,n$ Dimensionen. Verbindet man die Gleichungen (7) in derselben Weise mit einander, wie (6), so wird

$$\sum_{\alpha}\Delta_{\alpha}G_{\alpha\nu} = \sum_{\alpha}(v_{\alpha} - F_{\alpha o})G_{\alpha\nu} - \sum_{\alpha,\mu}\eta_{\mu}F_{\alpha\mu}G_{\alpha\nu},$$

oder wegen (9)

$$\sum_{\alpha}\Delta_{\alpha}G_{\alpha\nu} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Diese n Gleichungen (10) sind der algebraische Ausdruck für die Bedingungen, die zu den q Gleichungen (7) hinzutreten müssen, um die Aufgabe, gleichzeitig die ξ und die Δ zu finden, zu einer völlig bestimmten zu machen.

Setzt man in (7) für die η ihre wahren Werthe η' ein, so sind, damit die Gleichungen richtig bleiben, für die Δ_{α} die wahren Beobachtungsfehler x_{α} zu setzen, also

$$x_{\alpha} = (v_{\alpha} - F_{\alpha o}) - \sum_{\alpha}F_{\alpha\mu}\eta'_{\mu},$$

woraus auf dieselbe Weise wie oben

$$\sum_{\alpha}x_{\alpha}G_{\alpha\nu} = \sum_{\alpha}(v_{\alpha} - F_{\alpha o})G_{\alpha\nu} - \eta'_{\nu} = \eta_{\nu} - \eta'_{\nu}, \quad \ldots \quad (11)$$

und weiter der Reihe nach

$$\left.\begin{aligned} \varDelta_\alpha - x_\alpha &= -\sum_\mu F_{\alpha\mu}(\eta_\mu - \eta'_\mu)\,, \\ \varDelta_\alpha &= x_\alpha - \sum_{\beta,\mu} x_\beta F_{\alpha\mu} G_{\beta\mu} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

folgt. Die Gleichungen (12) geben an, wie die nach der Ausgleichung übrig bleibenden Widersprüche von den wahren Beobachtungsfehlern abhängen.

IV.

Zu der in Abschnitt II gestellten Aufgabe zurückkehrend, haben wir zunächst die Prämissen für die beiden dort genannten Formen der Lösung zu erörtern. Da das, was über die wahrscheinlichste Lösung zu sagen ist, sich in Kürze, zusammen mit dem Ansatz für diese Lösung, erledigen lässt, so ist hier nur auf die Voraussetzungen für die plausibelste Lösung näher einzugehen. Der besseren Uebersicht wegen will ich die Prämissen in die Form von fünf Thesen kleiden und jedesmal die erforderlichen Erläuterungen sogleich anfügen. Bezüglich der daraus folgenden Lehrsätze wird es genügen, das, was weiterhin gebraucht wird, kurz zusammenzustellen; die Beweise und ebenso die Vorschriften für die numerische Rechnung findet man in den zahlreichen Lehrbüchern und Abhandlungen über die Methode der kl. Qu. mit allen Einzelheiten auseinandergesetzt. Die erwähnten Thesen lauten folgendermaßen.

Erste These. Jedem Beobachtungsfehler x entspricht eine bestimmte Fehlerfunction $\varphi(x)$; diese Function ist der mathematische Ausdruck für den Beobachtungsmodus, durch den die Beobachtung mit dem Fehler x erhalten worden ist; der Sinn der Bezeichnung B.-M. war oben angegeben worden. Bilden die x eine discrete Mannigfaltigkeit, so ist $\varphi(x)$ direct gleich der Wahrscheinlichkeit, den Fehler x zu begehen. Bilden dagegen die x ein Continuum, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen der Ungleichung

$$a < x < b$$

gleich dem Integral

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx\,,$$

das für $a = y$, $b = y + dy$ in $\varphi(y)\,dy$ übergeht. Da $\varphi(x)$ auch den Werth Null annehmen darf, so kann man als Fehlergrenzen ∞

und $-\infty$ annehmen, indem $\varphi(x)$ für alle unzulässigen Werthe von x einfach gleich Null zu setzen ist.

Diese These ist der gemeinsame Ausgangspunkt aller Fehlertheorien.

Zweite These. Ist U irgend eine Function des Fehlers x mit der Fehlerfunction $\varphi(x)$, so soll das Zeichen $D(U)$ den »Durchschnittswerth« von U bedeuten; dieser Durchschnitt ist zu bilden mit Rücksicht auf die Häufigkeit des Vorkommens der x. Je nachdem die x discret oder stetig verlaufen, hat man

$$D(U) = \Sigma U\varphi(x), \quad D(U) = \int U\varphi(x)dx,$$

wo die Summation oder Integration über das Intervall $-\infty$ bis ∞ auszudehnen ist. Die Durchschnittsgrößen

$$m_1 = D(x), \quad m_2 = \sqrt{D(x^2)}$$

heißen »Durchschnittsfehler« und »mittlerer Fehler« (abgekürzt m. F.) des betreffenden B.-M. Der Kürze halber spricht man gewöhnlich von dem m. F. einer Beobachtung, obgleich dies streng genommen unlogisch ist. Denn der einzelnen Beobachtung kommt immer nur ein bestimmter wahrer Fehler zu, während die Bildung des Durchschnittes begrifflich die Gesammtheit aller möglichen Fehler und ihr Fehlergesetz als gegeben voraussetzt. Die Vernachlässigung dieses Unterschiedes ist für gewöhnlich unschädlich, kann aber unter Umständen zu Fehlschlüssen verleiten. Wenn innerhalb einer Untersuchung verschiedene B.-M. mit den m.F. m_{21}, m_{22}, $m_{23}\ldots$ auftreten, so werden die entsprechenden »Gewichte« p_1, p_2, $p_3\ldots$ durch die Gleichungen

$$p_1 m_{21}{}^2 = p_2 m_{22}{}^2 = p_3 m_{23}{}^2 = \ldots = m_{20}{}^2$$

definirt, wo m_{20} eine willkürlich zu wählende Constante ist, die als »m.F. der Gewichtseinheit« bezeichnet wird. Man benutzt die Gewichte für den gewöhnlich eintretenden Fall, wo bei Beginn der Ausgleichung nicht die m. F. selbst, sondern nur ihre Verhältnisse bekannt sind.

Dritte These. Die Größe $m_1 = D(x)$ heißt auch der systematische oder constante Fehler, die Differenz $x - m_1$ dagegen der zufällige Fehler des betreffenden B.-M.; bei der Herleitung der plausibelsten Lösung wird stets die Bedingung $D(x) = 0$ als erfüllt vorausgesetzt. Diese Bedingung besagt, dass die Beobachtungen vor Beginn der Ausgleichung wegen des systematischen Fehlerbestandtheils corrigirt sein sollen.

In den herkömmlichen Darstellungen wird gewöhnlich die Bedingung gestellt, $\varphi(x)$ solle eine gerade Function von x, oder

$$\varphi(-x) = \varphi(x)$$

sein. Bei der Beweisführung wird aber nur die weniger enge Bedingung $D(x) = 0$ wirklich gebraucht.

Die Vorschriften zur Erkennung und Beseitigung systematischer Fehler sind von dem Object und der Methode der Beobachtungen abhängig, können also nicht in einer alle Fehler umfassenden Ausgleichungstheorie behandelt werden; sie gehören in die Theorie der betreffenden Beobachtungsmethode. Hierdurch ist die Forderung gerechtfertigt, dass die systematischen Fehler vor der Ausgleichung beseitigt sein sollen.

Vierte These. Der »mittlere Fehler« liefert das Maß für das Zutrauen, das dem B.-M. zu schenken ist. Von zwei gegebenen B.-M. ist derjenige der bessere, zu dem der kleinere m.F. oder das größere Gewicht gehört.

Dieser Satz ist ein Axiom und zwar das eigentliche Grundaxiom für den Gedankengang, den Gauß in der Theoria combinationis bei der Ableitung der plausibelsten Lösung eingeschlagen hat. Die Unbeweisbarkeit des Satzes ergibt sich aus dem Umstande, dass man mit demselben Rechte wie das Quadrat irgend eine andere gerade Potenz des Fehlers x für die Aufstellung des Gütemaßes benutzen könnte. Wenn sich nun aber auch das Axiom nicht beweisen lässt, so kann man es doch motiviren, d. h. durch Gründe annehmbar machen. Seine Motivirung beruht darauf, dass bisher kein anderes Gütemaß gefunden worden ist, das auf hinlänglich einfache Rechnungsvorschriften führt.

Wenn man die Definition des Gütemaßes eines B.-M. nicht als eine rein formale Sache betrachten will, so erlegt die dem m. F. zuertheilte Rolle den Fehlerfunctionen in Wahrheit eine gewisse Einschränkung auf. Das Axiom setzt voraus, dass, wenn mehrere

B.-M. in Bezug auf ihre Güte verglichen werden sollen, bereits eine einzige Maßzahl ausreiche, um jeden einzelnen B.-M. vollständig zu charakterisiren. Diese Bedingung ist, wie eine genauere Untersuchung lehrt, erfüllt, wenn die Fehlerfunctionen $\varphi(x)$ außer der Variablen x nur einen einzigen willkürlichen Parameter enthalten, der von einem B.-M. zum anderen verschiedene Werthe annehmen kann, aber für denselben B.-M. constant ist. Jeder m. F. ist dann durch den Parameter vollständig bestimmt, und umgekehrt. Wenn dagegen die $\varphi(x)$ mehrere Parameter enthalten, so sind letztere durch die m. F. doch nicht vollständig bestimmt. Man kann recht wohl Fehlerfunctionen mit mehreren Parametern aussinnen, die denselben m. F. besitzen und deren zugehörige B.-M. man trotzdem nicht für gleich vertrauenswürdig ansehen wird.

Fünfte These. Ist die Größe v nicht direct beobachtet, sondern aus den beobachteten Größen $u_1, u_2 \ldots$ berechnet, also

$$v = f(u_1, u_2, \ldots),$$

so entspricht den Fehlern $x_1, x_2 \ldots$ der u ein bestimmter Fehler y in v. Ferner gehört zu y eine Fehlerfunction $\psi(y)$, deren Form in ganz bestimmter Weise von f und den Fehlerfunctionen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ der u abhängt. Mit $\psi(y)$ denken wir uns die Durchschnitte $D(y)$ und $D(y^2)$ gebildet. Ist y eine lineare Function der x, so wird $D(y)$ nach dem oben Gesagten gleich Null; sind die x stets hinreichend klein, wie wir mit Rücksicht auf eine frühere Bemerkung voraussetzen, so ist y mit hinreichender Annäherung linear durch die x ausdrückbar, also $D(y)$ wieder gleich Null zu setzen. Dies vorausgeschickt soll der Ausdruck

$$\sqrt{D(y^2)} = \text{m.F.}(y)$$

als Gütemaß für die vorliegende Bestimmung von v gelten. Die hier vorgenommene Erweiterung läuft darauf hinaus, dass an Stelle des Beobachtungsmodus der allgemeinere Begriff »Bestimmungsmodus« gesetzt wird.

Zu diesen fünf Thesen wäre, um die Gauß'schen Voraussetzungen vollständig zu erhalten, als sechste noch der Satz über die Bestimmung des m. F. der Gewichtseinheit hinzuzufügen. Da wir jedoch diesen Satz weiterhin nicht brauchen, so will ich hier nur bemerken, dass die Gauß'sche Festsetzung angefochten worden ist, z. B. von Bertrand, dass aber eine genauere Untersuchung den Satz als durchaus berechtigt erkennen lässt.

Zum besseren Verständniss des Späteren ist nun noch der auf Grund obiger Thesen aufzustellende Ansatz für die plausibelste Lösung zu besprechen.

Es seien wieder (vgl. (6) und (7) in Abschnitt III) die Beobachtungsgleichungen

$$v_\alpha = F_{\alpha o} + \sum_\mu F_{\alpha\mu}\eta_\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

nebst den Widerspruchsgleichungen

$$\Delta_\alpha = (v_\alpha - F_{\alpha o}) - \sum_\mu F_{\alpha\mu}\eta_\mu \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

vorgelegt. Die v seien, wie wir der größeren Allgemeinheit wegen annehmen wollen, auf irgend eine Weise aus beobachteten Größen berechnet, und $y_1, y_2, \ldots y_q$ ihre wahren Fehler. Wenn $G_{\alpha\mu}$ irgend ein Ausgleichungsmodus ist, so ergeben sich nach (9) die η in der Form

$$\eta_\nu = \sum_\alpha (v_\alpha - F_{\alpha o}) G_{\alpha\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

und die wahren Fehler, die dieser Bestimmungsweise der η anhaften, nach (11) in der Form

$$\eta_\nu - \eta'_\nu = \sum_\alpha y_\alpha G_{\alpha\nu}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Das wahre Maß für die Güte dieser Bestimmung der η, nämlich die Größe der wahren Fehler, lässt sich nicht finden; als Ersatz hierfür tritt die Güte des Bestimmungsmodus ein, d. h. also die Größe

$$D[(\eta_\nu - \eta'_\nu)^2] = \sum_{\alpha,\beta} G_{\alpha\nu} G_{\beta\nu} D(y_\alpha y_\beta), \quad \ldots\ldots (17)$$

sobald

$$D(\eta_\nu - \eta'_\nu) = 0$$

ist. Hiernach ist der beste A.-M. derjenige, welcher den Ausdruck (17) zu einem Minimum macht. Um das Minimum zu finden, hat man zu (17) die Bedingungen (8), d. h. die allgemeine Voraussetzung aller A.-M., mit gewissen vorläufig unbestimmten Multiplicatoren versehen hinzuzufügen, und die partiellen Ableitungen nach den G einzeln gleich Null zu setzen. Ist

$$\sum_{\alpha,\beta} G_{\alpha\nu} G_{\beta\nu} D(y_\alpha y_\beta) + 2\sum_\mu g_{\mu\nu}(\sum_\alpha F_{\alpha\mu} G_{\alpha\nu} - e_{\mu\nu})$$

der zu differentiirende Ausdruck, dann erhält man die Minimumsbedingungen, wenn nach $G_{\gamma\nu}$ differentiirt wird, in der Form

$$0 = \sum_\beta G_{\beta\nu} D(y_\gamma y_\beta) + \sum_\alpha G_{\alpha\nu} D(y_\alpha y_\gamma) + 2\sum_\mu g_{\mu\nu} F_{\gamma\mu}$$

oder

$$0 = \sum_\alpha G_{\alpha\nu} D(y_\alpha y_\gamma) + \sum_\mu g_{\mu\nu} F_{\gamma\mu}\,; \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

wozu noch die allgemeinen Bedingungen (8) oder

$$\sum_\alpha F_{\alpha\mu} G_{\alpha\nu} = e_{\mu\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

hinzutreten. Die Indices α, γ, μ, ν haben die Werthe

$$\alpha, \gamma = 1, 2 \ldots q\,, \quad \mu, \nu = 1, 2 \ldots n$$

anzunehmen. Die Zahl der Gleichungen, die für ein gegebenes ν aus (18) und (19) entspringen, ist q und n; ebenso groß ist auch die Zahl der darin vorkommenden Unbekannten G und g. Da ferner ein Minimum von (17) sicher existirt, so muss auch immer wenigstens eine Lösung der Systeme (18) und (19) vorhanden sein.

Die Anwendung der Bedingungen (18) und (19) würde nun für gewöhnlich auf eine beschwerliche Rechnung führen, wenn es nicht möglich wäre, von vorn herein durch angemessene Bildung der Beobachtungsgleichungen eine erhebliche Vereinfachung herbeizuführen. Von den v haben wir vorausgesetzt, dass sie auf irgend eine Weise aus direct beobachteten Größen abgeleitet worden seien. Sind x_1, x_2 ... die Fehler der direct beobachteten Größen, dann sind die Fehler der v oder die y bestimmte Functionen der x, und zwar, unter der hier gemachten Voraussetzung hinreichend kleiner x, lineare Functionen. Ist nun U eine Function der x, die die Form des Productes

$$U = U_1 . U_2 . U_3 \ldots$$

besitzt, und kommt jedes x immer nur in einem einzigen der Factoren U_1, U_2 .. vor, so ist, wie eine einfache Ueberlegung lehrt,

$$D(U) = D(U_1) . D(U_2) . D(U_3) \ldots .$$

Richtet man es also so ein, dass jedes x immer nur in einem einzigen y vorkommt, so gilt für den Durchschnitt $D(y_\alpha y_\beta)$, wenn die Indices verschieden sind, die Gleichung

$$D(y_\alpha y_\beta) = D(y_\alpha) \cdot D(y_\beta) = 0\,,$$

und das System (18) nimmt die erheblich einfachere Gestalt

$$0 = G_{\gamma\nu} D(y_\gamma^2) + \sum_\mu g_{\mu\nu} F_{\gamma\mu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

an. Man sagt in diesem Falle, die v seien unabhängig von einander bestimmt. Die weitere Verfolgung der Bedingungen (20) und (19) führt dann auf das bekannte Schema der Methode der kleinsten Quadrate. Aus dem angeführten Grunde hat sich für die genannte Methode die Norm eingebürgert, die Beobachtungsgleichungen so anzusetzen, dass die v in dem angegebenen Sinne unabhängig von einander sind. Theoretisch nothwendig ist jedoch diese Unabhängigkeit nicht, obgleich sie sich, beiläufig bemerkt, immer herbeiführen lässt; es gibt Fälle, wo es vortheilhafter ist, die Beobachtungsgleichungen in abhängiger Gestalt anzusetzen. Ein Beispiel hierfür ist, wie wir sehen werden, gerade die Aufgabe des Abschnittes II.

Bezüglich des Falles unabhängiger Gleichungen ist nun noch wegen des Späteren an die nachstehenden Sätze zu erinnern. Es sei für die unabhängigen Beobachtungsgleichungen

$$v_\alpha - F_{\alpha 0} = \sum_\mu F_{\alpha\mu} \eta_\mu\,,$$

$$D(y_\alpha^2) = m_{2\alpha}^2\,, \quad \pi_\alpha m_{2\alpha}^2 = \text{const.} = m_{20}^2\,,$$

dann ist $m_{2\alpha}$ der m. F. zu y_α, π_α das entsprechende Gewicht und m_{20} der m. F. für die Gewichtseinheit. Multiplicirt man die Beobachtungsgleichungen mit

$$\sqrt{\pi_\alpha} = \frac{m_{20}}{m_{2\alpha}}\,,$$

so erhält man die »Fehlergleichungen«

$$(v_\alpha - F_{\alpha 0})\sqrt{\pi_\alpha} = \sum_\mu \eta_\mu F_{\alpha\mu} \sqrt{\pi_\alpha}\,,$$

die sich von dem ursprünglichen System dadurch unterscheiden, dass an die Stelle der Größen $m_{2\alpha}$ und π_α die Größen m_{20} und 1 getreten sind. Die Widersprüche der Fehlergleichungen sind dann

$$\varDelta'_\alpha = \varDelta_\alpha \sqrt{\pi_\alpha} = (v_\alpha - F_{\alpha 0})\sqrt{\pi_\alpha} - \sum_\mu \eta_\mu F_{\alpha\mu} \sqrt{\pi_\alpha}\,.$$

Der ursprüngliche Gedankengang für die plausibelste Lösung fordert, dass man den m. F. jedes einzelnen η für sich zu einem Minimum mache. Diese n Minima lassen sich aber aus einer einzigen Bedingung, nämlich

$$\sum_\alpha (\Delta'_\alpha)^2 = \text{Minimum} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

ableiten, die der Methode ihren Namen gegeben hat. Aus (21) fließen dann weiter die Normalgleichungen

$$l_\nu = \sum_\mu \eta_\mu c_{\mu\nu},$$

wo

$$l_\nu = \sum_\alpha \pi_\alpha (v_\alpha - F_{\alpha 0}) F_{\alpha\nu}, \quad c_{\mu\nu} = \sum_\alpha \pi_\alpha F_{\alpha\mu} F_{\alpha\nu} = c_{\nu\mu}.$$

Bildet man aus den $n.n$ Elementen c die Determinante C und setzt die Unterdeterminanten

$$C_{\mu\nu} = \frac{\partial C}{\partial c_{\mu\nu}}$$

an, so wird das Gewicht der Bestimmung von η_ν gleich $C : C_{\nu\nu}$, und der m. F. gleich

$$m_{20} \sqrt{\frac{C_{\nu\nu}}{C}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

wobei es unwesentlich ist, dass bei der numerischen Rechnung gewöhnlich nicht mit Determinanten operirt wird.

V.

Nach den vorstehenden Auseinandersetzungen können wir an die in Abschnitt II gestellte Aufgabe gehen, wobei die Buchstaben V, P, p, u, ξ, E die dort gegebene Bedeutung haben sollen. Zur Abkürzung des Ausdruckes setzen wir fest, dass in den Formeln und namentlich bei den Summationen als Indices die Buchstabengruppen $\alpha, \beta, \gamma\, ..,\ \lambda, \mu, \nu \ldots, \sigma, \tau, \varphi \ldots$ in der Weise gebraucht werden sollen, dass sich immer die Buchstaben

$\alpha, \beta, \gamma \ldots$ auf die Reihennummer,
$\lambda, \mu, \nu \ldots$ auf die Ereignissnummer
$\sigma, \tau, \varphi \ldots$ auf die Unbekanntennummer

beziehen, während e_{ik} wieder die früher angegebene Bedeutung hat. Die Beobachtungsgleichungen haben die Form

$$p_{\alpha\lambda} = E_{\alpha\lambda}(\xi_1 \ldots \xi_n) ; \qquad (23)$$

die wahren Werthe $u_{\alpha\lambda}$ der Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Ereignisse $E_1, E_2, \ldots E_r$ sind aus den Gleichungen

$$u_{\alpha\lambda} = E_{\alpha\lambda}(\xi_1 \ldots \xi_n) \qquad (24)$$

mit den wahren Werthen der ξ zu berechnen. Bei der Anwendung der in Abschnitt III und IV entwickelten Beziehungen ist zu beachten, dass an die Stelle des Index einer Gleichung jetzt immer eine Doppelnummer α, λ tritt, nämlich die Nummer der »Reihe« und dazu die Nummer des Ereignisses in der Reihe.

Zu dem Ansatz für die wahrscheinlichste Lösung brauchen wir folgende Sätze der Wahrscheinlichkeits-Rechnung. Sind die Versuche noch nicht angestellt, so weiß man über die ξ einstweilen weiter nichts, als dass sie innerhalb eines gewissen Gebietes irgend welche Werthe annehmen können, und die verschiedenen Werthsysteme, die man ansetzen kann, haben vorläufig gleiche Berechtigung. Bei irgend einer Hypothese über die ξ ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Gruppe von Versuchen die Ereignisse E mit den Häufigkeiten P auftreten werden, durch den Ausdruck

$$\Pi_{\alpha} V_{\alpha}! \left(\Pi_{\lambda} \frac{(E_{\alpha\lambda})^{P_{\alpha\lambda}}}{(P_{\alpha\lambda})!}\right) \qquad (25)$$

gegeben. Hat nun die Ausführung der Versuche die Häufigkeiten P wirklich ergeben, so ist die Berechtigung nicht mehr für alle Hypothesen die gleiche, sondern proportional dem Ausdrucke (25). Die berechtigtste oder wahrscheinlichste Hypothese ist also diejenige, welche (25) zu einem Maximum macht. Durch logarithmische Differentiation erhält man die Maximumsbedingung in der Form

$$\sum_{\alpha,\lambda} P_{\alpha\lambda} \frac{dE_{\alpha\lambda}}{E_{\alpha\lambda}} = 0 ,$$

wofür man wegen der Gleichungen

$$\sum_{\lambda} P_{\alpha\lambda} = V_{\alpha} , \quad P_{\alpha\lambda} = V_{\alpha} p_{\alpha\lambda} , \quad \sum_{\lambda} E_{\alpha\lambda} = 1 , \quad \sum_{\lambda} dE_{\alpha\lambda} = 0$$

auch schreiben kann

$$\sum_{\alpha,\lambda} \frac{V_{\alpha}}{E_{\alpha\lambda}} (p_{\alpha\lambda} - E_{\alpha\lambda}) dE_{\alpha\lambda} = 0 . \qquad (26)$$

Bezeichnet man mit $\xi_{\sigma 0}$ die angenäherten Werthe der wahrscheinlichsten Lösung und mit

$$\eta_\sigma = \xi_\sigma - \xi_{\sigma 0}$$

die kleinen Verbesserungen, setzt ferner

$$E_{\alpha\lambda}(\xi_{10} \ldots \xi_{n0}) = (\alpha\lambda)_0\,, \quad (\alpha\lambda)_\sigma = \frac{\partial(\alpha\lambda)_0}{\partial\xi_{\sigma 0}}\,,$$

$$E_{\alpha\lambda}(\xi_1 \ldots \xi_n) = (\alpha\lambda)_0 + \sum_\sigma \eta_\sigma(\alpha\lambda)_\sigma\,,$$

so kann man für (26) angenähert schreiben

$$\sum_{\alpha,\lambda} \frac{V_\alpha}{(\alpha\lambda)_0}(p_{\alpha\lambda} - E_{\alpha\lambda})\,dE_{\alpha\lambda} = 0\,.$$

Diese Bedingung läuft aber darauf hinaus, die Beobachtungsgleichungen

$$p_{\alpha\lambda} = E_{\alpha\lambda} = (\alpha\lambda)_0 + \sum_\sigma (\alpha\lambda)_\sigma \eta_\sigma$$

nach der Methode der kl. Qu. unter der Voraussetzung auszugleichen, dass den einzelnen Gleichungen die Gewichte $V_\alpha:(\alpha\lambda)_0$ beizulegen seien, denn diese Aufgabe fordert das Minimum von

$$\sum_{\alpha,\lambda} \frac{V_\alpha}{(\alpha\lambda)_0}(p_{\alpha\lambda} - E_{\alpha\lambda})^2\,.$$

Stellt sich nach der Ausgleichung heraus, dass die für die Gewichte benutzten $(\alpha\lambda)_0$ noch zu stark von den verbesserten Werthen der $E_{\alpha\lambda}$ abweichen, so hat man die Ausgleichung mit verbesserten Gewichten zu wiederholen, u. s. w., bis die Rechnung zum Stehen kommt. Hiermit ist offenbar die Auffindung der wahrscheinlichsten Lösung erledigt.

Wollen wir jetzt ebenso die plausibelste Lösung finden, so ist zunächst zu prüfen, ob die Voraussetzungen für die Methode der kl. Qu., die wir oben in den fünf Thesen des Abschnittes IV formulirt haben, vollständig oder doch hinreichend erfüllt sind. In Betracht kommen hierbei folgende drei Punkte: 1) Existenz einer Fehlerfunction, 2) Verschwinden des Durchschnittsfehlers, 3) Werthabschätzung des Beobachtungsmodus auf Grund eines einzigen Parameters.

Die relative Häufigkeit $p_{\alpha\lambda}$ ist der beobachtete Werth für die Größe $u_{\alpha\lambda}$, also

$$x_{\alpha\lambda} = p_{\alpha\lambda} - u_{\alpha\lambda}$$

der Beobachtungsfehler und

$$P_{\alpha\lambda} = V_\alpha (u_{\alpha\lambda} + x_{\alpha\lambda}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

die gezählte Häufigkeit des Ereignisses E_λ in der α-ten Versuchsreihe. Die Beobachtungsfehler bilden also eine discrete Mannigfaltigkeit und sind, wenn wir die Versuchsanzahlen V constant halten, Vielfache der Brüche $1 : V_\alpha$. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Häufigkeit $P_{\alpha\lambda}$ ist durch den Ausdruck

$$V_\alpha ! \frac{(u_{\alpha\lambda})^{P_{\alpha\lambda}}}{(P_{\alpha\lambda})!} \frac{(1 - u_{\alpha\lambda})^{V_\alpha - P_{\alpha\lambda}}}{(V_\alpha - P_{\alpha\lambda})!}, \quad \ldots\ldots\ldots (28)$$

gegeben, und dieser Ausdruck enthält zugleich, wenn nach (27) P durch x ausgedrückt wird, das Gesetz für den Fehler x. Die Fehlerfunction ist also vorhanden.

Zu dem Durchschnittsfehler bemerke ich, dass weiterhin eine Reihe von Durchschnittsgrößen zu berechnen ist, und dass dabei das Verschwinden von $D(x)$ sich von selbst mit ergeben wird.

Lässt man endlich in (28) der Kürze halber für den Augenblick die Indices fort und setzt

$$V! \frac{u^P (1-u)^{V-P}}{P!\,(V-P)!} = \Phi(x), \quad P = V(u+x),$$

so ist die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen der Ungleichung

$$a < x < b$$

durch $\Sigma \Phi(x)$ gegeben, wo sich die Summirung nach x über die in dem Intervall von a bis b enthaltenen Werthe der Reihe

$$\frac{0}{V}, \frac{1}{V}, \ldots \frac{V}{V}$$

zu erstrecken hat. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird nun bei dem Beweise des Bernoulli'schen Theorems über die großen Zahlen gezeigt, dass sich jene Summe näherungsweise durch ein Integral

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

ausdrücken lässt, worin $\varphi(x)$ folgendermaßen bestimmt ist. Es sei $\exp t$ das Zeichen für die Exponentialfunction von t, ferner

$$h^2 = \frac{V}{2u(1-u)},$$

dann ist

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2 x^2).$$

Dieser Ausdruck erhält nur einen Parameter, nämlich h, und ist identisch mit dem Gauß'schen Fehlergesetz. Näherungsweise ist also auch die dritte Forderung erfüllt. Der Grad der Annäherung wächst bei festgehaltenem u mit wachsendem V, nimmt dagegen bei festgehaltenem V ab, wenn sich u seinen extremen Werthen Eins oder Null nähert.

Hiernach ist die Methode der kl. Qu. zulässig, sobald man zu kleine Werthe der V und ferner bei den u die extremen Fälle vermeidet. Beide Bedingungen wird man aber schon aus anderen Gründen zu erfüllen suchen. Genauere Maßbestimmungen nach statistischer Methode setzen immer umfangreiche Versuchsreihen voraus, und betreffs der extremen Fälle ist zu beachten, dass die Ereignisse E Urtheile sind, die unter dem Einflusse unvermeidlicher Fehler zu Stande kommen. Wenn nun z. B. bei den eingangs besprochenen Reizversuchen die Reizdifferenz D so groß positiv ist, dass das Urtheil $D < 0$ unter 100 Fällen nur einmal zu erwarten ist, so wird man sagen müssen, dass dieses eine Urtheil nur durch ein besonderes Zusammentreffen größerer Fehler zu Stande gekommen ist und nahe bei der Grenze liegt, wo die unvermeidlichen Fehler aufhören und die »Versehen« anfangen. Versuchsreihen, die solche extremen Fälle enthalten, sind deshalb im Grunde genommen eine Arbeitsvergeudung, es sei denn, dass man an Stelle einer Untersuchung über das Verhalten der Hauptmasse der Fehler eine Studie über die extremen, unter gewissen Umständen noch möglichen, Fehler ausführen will. Man wird solche Versuchsreihen entweder von vornherein vermeiden oder aber, wenn sie angestellt sind, bei der Ausgleichung nachträglich ausschließen.

VI.

Bei den weiteren Entwickelungen bedürfen wir der Ausdrücke für die Durchschnitte von gewissen Producten, deren Factoren die Fehlergrößen

$$f_{\alpha\lambda} = p_{\alpha\lambda} - u_{\alpha\lambda}$$

sind. Ist ein solches Product U in der Form

$$U = U_1 \,.\, U_2 \,.\, \ldots \,.\, U_s$$

dargestellt, wo U_α nur von den f der α-ten Reihe abhängt, so ist, wie bereits erwähnt wurde,

$$D(U) = D(U_1) \,.\, D(U_2) \,\ldots\, D(U_s);$$

man darf sich also auf den Fall beschränken, wo nur eine einzige Versuchsreihe, sagen wir mit der Nummer α, vorliegt, wo deshalb die Fehlerfunction durch den Ausdruck

$$W = V_\alpha! \,\Pi_\lambda \frac{(u_{\alpha\lambda})^{P_{\alpha\lambda}}}{(P_{\alpha\lambda})!}, \quad P_{\alpha\lambda} = V_\alpha (u_{\alpha\lambda} + x_{\alpha\lambda})$$

gegeben ist. Der Durchschnitt eines nur von der betrachteten Reihe abhängigen U hat dann die Form

$$D(U) = \Sigma UW,$$

wo die Summation über alle ganzzahligen, mit der Bedingung

$$\Sigma_\lambda P_{\alpha\lambda} = V_\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

verträglichen P erstreckt werden kann, wenn man den Umstand beachtet, dass für ein ganzzahliges negatives P die Größe $P!$ unendlich wird.

Es seien jetzt: $t_1 \ldots t_r$ gewisse Hülfsvariable, ferner

$$L = \Sigma_\lambda u_{\alpha\lambda} \,.\, \exp t_\lambda, \quad M = \Sigma_\lambda u_{\alpha\lambda} t_\lambda, \quad N = L^{V_\alpha} \exp(-MV_\alpha),$$

dann gibt die Entwickelung nach dem polynomischen Lehrsatz

$$N = V_\alpha! \,\Sigma \frac{(u_{\alpha 1})^{P_{\alpha 1}} \ldots (u_{\alpha r})^{P_{\alpha r}}}{(P_{\alpha 1})! \ldots (P_{\alpha r})} \exp\left[\Sigma_\lambda t_\lambda (P_{\alpha\lambda} - V_\alpha u_{\alpha\lambda})\right],$$

wo wieder die Summe über alle ganzzahligen, der Bedingung (29) genügenden P zu erstrecken ist. Differentiirt man N partiell nach beliebig ausgewählten t, z. B. t_μ, t_ν, ..., so reproduciren sich die Summanden, jedoch unter Hinzutreten der Factoren

$$P_{\alpha\mu} - V_\alpha u_{\alpha\mu}, \quad P_{\alpha\nu} - V_\alpha u_{\alpha\nu} \cdot \quad \ldots .$$

Setzt man nach ausgeführter Differentiation die t gleich Null, so geht die Summe in den Durchschnitt

$$D[(P_{\alpha\mu} - V_\alpha u_{\alpha\mu})\,(P_{\alpha\nu} - V_\alpha u_{\alpha\nu}) \ldots .]$$

über, also von den Factoren V_α abgesehen, gerade in die Ausdrücke, die wir suchen. Man hat also nur N nach den t zu entwickeln, angemessen zu differentiiren und dann die t gleich Null zu setzen.

Die Entwickelung von L schreiben wir unter Zusammenfassung der Glieder gleicher Dimension in der Form

$$L = L_0 + \frac{L_1}{1\,!} + \frac{L_2}{2\,!} + \frac{L_3}{3\,!} + \ldots ., \quad L_k = \sum_\lambda u_{\alpha\lambda} (t_\lambda)^k,$$

wo, wegen

$$\sum_\lambda u_{\alpha\lambda} = 1,$$

$L_0 = 1$ und $L_1 = M$ ist. Weiter wird

$$\log N = V_\alpha \left\{ \log\left(1 + M + \frac{L_2}{2\,!} + \frac{L_3}{3\,!} + \ldots\right) - M \right\}.$$

Entwickelt man rechts nach den t, geht dann von dem Logarithmus zum Numerus über und setzt endlich, die Glieder gleicher Dimension in den t wieder zusammenfassend,

$$N = N_0 + N_1 + N_2 + \ldots .,$$

so wird

$$N_0 = 1$$

$$N_1 = 0$$

$$N_2 = \frac{1}{2} V_\alpha (L_2 - M^2)$$

$$N_3 = \frac{1}{6} V_\alpha (L_3 - 3ML_2 + 2M^2)$$

$$N_4 = \frac{1}{24} V_\alpha (L_4 - 3L_2^2 + 4ML_3 + 12M^2L_2 - 6M^4) + \frac{N_2^2}{2}.$$

Um die gesuchten Durchschnitte zu erhalten, ist jetzt N_1 nach t_μ, N_2 nach t_μ und t_ν, u. s. w. zu differentiiren und noch durch die entsprechende Potenz von V zu dividiren. Darnach erhält man zunächst

$$D(f_{\alpha\mu}) = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

d. h. die Durchschnittsfehler sind, wie bereits früher erwähnt wurde, sämmtlich gleich Null. Ferner wird

$$V_\alpha D(f_{\alpha\mu}f_{\alpha\nu}) = u_{\alpha\mu}e_{\mu\nu} - u_{\alpha\mu}u_{\alpha\nu})\,. \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

Sind die Indices α und β ungleich, so wird mit Rücksicht auf (30)

$$D(f_{\alpha\mu}f_{\beta\nu}) = D(f_{\alpha\mu})\,D(f_{\beta\nu}) = 0\,,$$

so dass man auch schreiben darf

$$D(f_{\alpha\mu}f_{\beta\nu}) = e_{\alpha\beta}D(f_{\alpha\mu}f_{\alpha\nu})\,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Die Durchschnitte dritter Ordnung werden weiterhin nicht gebraucht. Sie sind nicht gleich Null. Dieser Umstand ist ohne Belang, da, wie oben hervorgehoben wurde, die Annahme, dass die Fehlerfunctionen gerade seien, für die Begründung der Methode der kl. Qu. thatsächlich überflüssig ist. Die Durchschnitte vierter Ordnung werden weiterhin nur in der Verbindung

$$\begin{aligned} B = {} & D(f_{\alpha\mu}f_{\alpha\nu}f_{\alpha\xi}f_{\alpha\pi}) - D(f_{\alpha\mu}f_{\alpha\nu})\,D(f_{\alpha\xi}f_{\alpha\pi}) \\ & - D(f_{\alpha\mu}f_{\alpha\xi})\,D(f_{\alpha\nu}f_{\alpha\pi}) - D(f_{\alpha\mu}f_{\alpha\pi})\,D(f_{\alpha\nu}f_{\alpha\xi}) \end{aligned}$$

gebraucht. Bildet man in N_4 von dem Term $\frac{1}{2}(N_2)^2$ die Ableitung nach t_μ, t_ν, t_ξ, t_π, so bekommt man, von dem Factor $(V_\alpha)^4$ abgesehen, gerade die drei Subtrahenden auf der rechten Seite von B. Man erhält daher, wenn nach den vier angegebenen t der Ausdruck

$$\frac{L_4}{24} - \frac{L_2{}^2}{8} - \frac{ML_3}{6} + \frac{M^2L_2}{2} - \frac{M^4}{4}$$

differentiirt wird, gerade $B(V_\alpha)^4$. Spaltet man, die Glieder gleicher Dimension in u zusammenfassend, das B in

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4\,,$$

so wird

$$B_1(V_\alpha)^3 = u_{\alpha\mu}e_{\mu\nu}e_{\mu\xi}e_{\mu\pi}\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

$$\begin{aligned} B_2(V_\alpha)^3 = {} & -u_{\alpha\mu}(u_{\alpha\xi}e_{\mu\nu}e_{\xi\pi} + u_{\alpha\pi}e_{\mu\xi}e_{\pi\nu} + u_{\alpha\nu}e_{\mu\pi}e_{\nu\xi}) - u_{\alpha\mu}u_{\alpha\nu}e_{\nu\xi}e_{\nu\pi} \\ & - u_{\alpha\nu}u_{\alpha\xi}e_{\xi\pi}e_{\xi\mu} - u_{\alpha\xi}u_{\alpha\pi}e_{\pi\mu}e_{\pi\nu} - u_{\alpha\pi}u_{\alpha\mu}e_{\mu\nu}e_{\mu\xi}\,, \quad \ldots \quad (34) \end{aligned}$$

$$B_3(V_\alpha)^3 = 2u_{\alpha\mu}(u_{\alpha\nu}u_{\alpha\xi}e_{\xi\pi} + u_{\alpha\xi}u_{\alpha\pi}e_{\pi\nu} + u_{\alpha\pi}u_{\alpha\nu}e_{\nu\xi})$$

$$+ 2u_{\alpha\mu}(u_{\alpha\xi}u_{\alpha\pi}e_{\mu\nu} + u_{\alpha\pi}u_{\alpha\nu}e_{\mu\xi} + u_{\alpha\nu}u_{\alpha\xi}e_{\mu\pi}) \quad \ldots (35)$$

$$B_4(V_\alpha)^3 = -6u_{\alpha\mu}u_{\alpha\nu}u_{\alpha\xi}u_{\alpha\pi} \quad \ldots\ldots\ldots (36)$$

Wir setzen jetzt die Beobachtungsgleichungen, wie oben bei der wahrscheinlichsten Lösung, in der linearen Form

$$p_{\alpha\lambda} - (\alpha\lambda)_0 = \sum_\sigma \eta_\sigma(\alpha\lambda)_\sigma \quad \ldots\ldots\ldots (37)$$

an, wo für die einzelnen Größen die Relationen

$$\sum_\lambda p_{\alpha\lambda} = \sum_\lambda(\alpha\lambda)_0 = 1\,, \quad \sum_\lambda(\alpha\lambda)_\sigma = 0 \quad \ldots\ldots (38)$$

bestehen und die η die gesuchten Verbesserungen der provisorischen ξ bedeuten, mit denen die $(\alpha\lambda)$ berechnet sind. Die Multiplicatoren des gesuchten Ausgleichungsmodus lassen sich, wie früher bemerkt, einzeln den Coefficienten der η in den Beobachtungsgleichungen zuordnen. Wir bezeichnen den Multiplicator, der dem Coefficienten $(\alpha\lambda)_\sigma$ entspricht, mit $[\alpha\lambda]_\sigma$. Dann nehmen die Bedingungen (18) und (19) für den plausibelsten A.-M. die Form

$$0 = \sum_{\alpha,\lambda}[\alpha\lambda]_\sigma D(f_{\alpha\lambda}f_{\beta\mu}) + \sum_\tau g_{\tau\sigma}(\beta\mu)_\tau \quad \ldots\ldots (39)$$

$$e_{\sigma\tau} = \sum_{\alpha,\lambda}[\alpha\lambda]_\sigma(\alpha\lambda)_\tau \quad \ldots\ldots\ldots (40)$$

an. Die Bedingung (39) geht mit Rücksicht auf (31) und (32) über in

$$0 = \sum_\lambda[\beta\lambda]_\sigma \frac{u_{\beta\lambda}}{V_\beta}(e_{\lambda\mu} - u_{\beta\mu}) + \sum_\tau g_{\tau\sigma}(\beta\mu)_\tau$$

$$= [\beta\mu]_\sigma \frac{u_{\beta\mu}}{V_\beta} - \frac{u_{\beta\mu}}{V_\beta}\sum_\lambda[\beta\lambda]_\sigma u_{\beta\lambda} + \sum_\tau g_{\tau\sigma}(\beta\mu)_\tau\,.$$

Mit der Abkürzung

$$(\beta)_\sigma = \sum_\lambda[\beta\lambda]_\sigma u_{\beta\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots (41)$$

erhalten wir

$$[\beta\mu]_\sigma u_{\beta\mu} = (\beta)_\sigma u_{\beta\mu} - \sum_\tau g_{\tau\sigma}V_\beta(\beta\mu)_\tau \quad \ldots\ldots (42)$$

oder

$$[\beta\mu]_\sigma = (\beta)_\sigma - \sum_\tau g_{\tau\sigma}\frac{V_\beta(\beta\mu)_\tau}{u_{\beta\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots (43)$$

Summirt man (42) nach μ, so erhält man wegen (38) die Relation

$$\sum_\mu [\beta\mu]_\sigma u_{\beta\mu} = (\beta)_\sigma \sum_\mu u_{\beta\mu},$$

die eine Identität ist, weil

$$\sum_\mu u_{\beta\mu} = 1 .$$

Die $q.r.n$ Gleichungen (42) zerfallen also in $q.n$ Gruppen von je r Gleichungen, mit der Eigenschaft, dass innerhalb einer Gruppe jede Gleichung eine Folge der übrigen ist. Hiernach gehen qn Bedingungen verloren und es existiren unendlich viele plausibelste A.-M., die zusammen eine qn-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden. Multiplicirt man (43) mit $(\beta\mu)_\omega$ und summirt nach β und μ, so wird wegen (40)

$$e_{\sigma\omega} = \sum_{\beta,\mu} (\beta)_\sigma (\beta\mu)_\omega - \sum_\tau g_{\tau\sigma} \left(\sum_{\beta,\mu} \frac{V_\beta (\beta\mu)_\tau (\beta\mu)_\omega}{u_{\beta\mu}} \right).$$

Die erste Summe rechts verschwindet wegen (38). Wir setzen

$$c_{\tau\omega} = \sum_{\beta,\mu} \frac{V_\beta (\beta\mu)_\tau (\beta\mu)_\omega}{u_{\beta\mu}} = c_{\omega\tau},$$

bilden aus den $n.n$ Elementen c die Determinante C und setzen die Unterdeterminanten

$$\frac{\partial C}{\partial c_{\tau\omega}} = C_{\tau\omega}$$

an. Aus der gefundenen Bedingung

$$e_{\sigma\omega} = - \sum_\tau g_{\tau\sigma} c_{\tau\omega}$$

folgt dann nach bekannten Determinantensätzen sofort

$$g_{\tau\sigma} = - \frac{C_{\tau\sigma}}{C},$$

also

$$[\beta\mu]_\sigma = (\beta)_\sigma + \sum_\tau \frac{C_{\tau\sigma}}{C} \frac{V_\beta (\beta\mu)_\tau}{u_{\beta\mu}}. \quad \ldots\ldots (44)$$

Wir wollen uns jetzt die $[\beta\mu]$ durch (44) definirt denken unter der Annahme, dass die Größen $(\beta)_\sigma$ irgend welche willkürlich gewählte Werthe besitzen, und dann weiter untersuchen, wie es sich mit der Erfüllung der Bedingungen (39) und (40) für den plausibelsten A.-M. in diesem Falle verhält. Substituirt man nun das durch (44) bestimmte $[\beta\mu]$ in (40), so fallen die willkürlichen Größen $(\beta)_\sigma$

von selbst heraus, und der Rest verwandelt sich nach gehöriger Reduction in eine Identität. Damit ist also die allgemeine Bedingung aller A.-M. erfüllt. Substituirt man weiter in (39), so fallen die $(\beta)_\sigma$ wiederum von selbst heraus, und man erhält nach gehöriger Reduction die $q.r.n$ Bedingungen

$$\sum_\tau \left(\frac{C_{\tau\sigma}}{C} + g_{\tau\sigma}\right)(\beta\mu)_\tau = 0\,,$$

die gleichzeitig durch die Annahme

$$g_{\tau\sigma} = -\frac{C_{\tau\sigma}}{C}$$

erfüllt werden. Es sind also sämmtliche Bedingungen unabhängig von den Werthen der $(\beta)_\sigma$ erfüllt.

Sucht man ferner den Werth von η_σ aus

$$\eta_\sigma = \sum_{\alpha,\lambda} [\alpha\lambda]_\sigma (p_{\alpha\lambda} - (\alpha\lambda)_0)\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

so fällt $(\beta)_\sigma$ heraus und man erhält

$$\eta_\sigma = \sum_{\alpha,\lambda,\tau} (p_{\alpha\lambda} - (\alpha\lambda)_0) \frac{C_{\tau\sigma}}{C} \frac{V_\alpha(\alpha\lambda)_\tau}{u_{\alpha\lambda}}\,, \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

d. h. einen einzigen bestimmten Werth für jedes η. Setzt man in (46) für η und p die wahren Werthe η' und u, so erhält man

$$\eta_\sigma - \eta'_\sigma = \sum_{\alpha,\lambda,\tau} f_{\alpha\lambda} \frac{C_{\tau\sigma}}{C} \frac{V_\alpha(\alpha\lambda)_\tau}{u_{\alpha\lambda}}$$

und hiermit zur Berechnung des m. F. der η

$$D[(\eta_\sigma - \eta'_\sigma)^2] = \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\lambda,\mu} \sum_{\tau,\omega} D(f_{\alpha\lambda} f_{\beta\mu}) \frac{C_{\tau\sigma} C_{\omega\sigma}}{C^2} \frac{V_\alpha V_\beta (\alpha\lambda)_\tau (\beta\mu)_\omega}{u_{\alpha\lambda} u_{\beta\mu}}.$$

Dieser Ausdruck gibt, gehörig reducirt,

$$\text{m. F. } (\eta_\sigma) = \sqrt{\frac{C_{\sigma\sigma}}{C}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

Da nach dem Vorstehenden die Werthe der $(\beta)_\sigma$ völlig gleichgültig sind, so wollen wir den plausibelsten A.-M. fortan in der Form

$$[\beta\mu]_\sigma = \sum_\tau \frac{C_{\tau\sigma}}{C} \frac{V_\beta(\beta\mu)_\tau}{u_{\beta\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

benutzen, d. h. die genannten willkürlichen Größen einfach gleich Null annehmen.

Setzen wir jetzt die nach der Ausgleichung übrig bleibenden Widersprüche

$$\varDelta_{\alpha\lambda} = (p_{\alpha\lambda} - (\alpha\lambda)_0) - \sum_\sigma \eta_\sigma (\alpha\lambda)_\sigma \quad \ldots\ldots \quad (49)$$

an, so bestehen nach (10) die Gleichungen

$$\sum_{\beta,\mu} \varDelta_{\beta\mu} [\beta\mu]_\sigma = 0 \,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

die, wenn man für die $\varDelta$ ihre Ausdrücke (49) einsetzt, in die Finalgleichungen (45) oder (46) übergehen. Nach (48) können wir das System (50) in der Form

$$\sum_{\beta,\mu} \sum_\tau \varDelta_{\beta\mu} \frac{C_{\tau\sigma}}{C} \frac{V_\beta (\beta\mu)_\tau}{u_{\beta\mu}} = 0$$

schreiben. Diese n Gleichungen ersetzen wir durch ein äquivalentes System, wenn wir mit $c_{\omega\sigma}$ multipliciren und nach σ summiren. Man erhält dann

$$\sum_{\beta,\mu} \varDelta_{\beta\mu} \frac{V_\beta (\beta\mu)_\omega}{u_{\beta\mu}} = 0 \,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Wir bilden jetzt den Ausdruck

$$S = \sum_{\beta,\mu} \frac{V_\beta}{u_{\beta\mu}} (\varDelta_{\beta\mu})^2 \,,$$

dann ist die Bedingung (51) identisch mit

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \eta_\omega} \,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

Da nun S als wesentlich positive Function der η zwar ein Minimum, aber kein Maximum besitzt, so besagt (51), dass S für die plausibelste Lösung ein Minimum wird. Damit sind wir wieder bei dem gewöhnlichen Schema der Methode der kl. Qu. angelangt. Beachtet man noch die in (22) und (47) gegebenen Ausdrücke für die m. F., so erhält man folgende Vorschrift zur Auffindung der plausibelsten Werthe der η und ihrer m. F.:

aus den Beobachtungsgleichungen

$$p_{\alpha\lambda} - (\alpha\lambda)_0 = \sum_\sigma \eta_\sigma (\alpha\lambda)_\sigma$$

leite man mit den »fingirten« Gewichten

$$\frac{V_\alpha}{u_{\alpha\lambda}}$$

die Fehlergleichungen

$$(p_{\alpha\lambda} - (\alpha\lambda)_0)\sqrt{\frac{V_\alpha}{u_{\alpha\lambda}}} = \sum_\sigma \eta_\sigma (\alpha\lambda)_\sigma \sqrt{\frac{V_\alpha}{u_{\alpha\lambda}}}$$

ab und behandle diese ohne Rücksicht auf ihre gegenseitige Abhängigkeit nach dem gewöhnlichen Schema, sowohl bei der Bildung der Normalgleichungen, als auch bei ihrer Auflösung und bei der Berechnung der Gewichte der Unbekannten, indem man als m. F. der Gewichtseinheit den Werth Eins annimmt.

Die Hülfsgrößen, welche hier die Stelle der Gewichte vertreten, habe ich als fingirte Gewichte bezeichnet, denn die wahren Gewichte der einzelnen Beobachtungsgleichungen sind wegen (31) den Ausdrücken

$$\frac{V_\alpha}{u_{\alpha\lambda}(1 - u_{\alpha\lambda})}$$

proportional. Da die Größen u, mit denen die fingirten Gewichte zu berechnen sind, unbekannt bleiben, so wird man als Ersatz hierfür die Werthe der $E_{\alpha\lambda}$, also bei Beginn der Rechnung die Größen $(\alpha\lambda)_0$ als erste Annäherung benutzen, wobei dann wegen der etwa nothwendigen weiteren Verbesserung der $(\alpha\lambda)_0$ die früher bei der wahrscheinlichsten Lösung gemachte Bemerkung gilt. Hieraus folgt zugleich, dass in Wahrheit, wie bereits früher erwähnt, statt der plausibelsten Lösung die wahrscheinlichste gefunden wird. Dieser Umstand ist indessen ohne Belang, sobald die Beobachtungen überhaupt so beschaffen sind, dass sie zur sicheren Bestimmung der Unbekannten dienen können. Man kann es als einen durch hundertfältige Erprobung erhärteten Erfahrungssatz aussprechen, dass in diesem Falle mäßige Aenderungen der Gewichte ohne Bedeutung sind; die Anwendung der Methode der kl. Qu. wäre eine überflüssige und deshalb schädliche Spielerei, wenn sie eine genaue Kenntniss der Gewichte voraussetzte.

Zu den vorstehenden Rechnungsvorschriften waren wir gelangt, indem wir die oben mit $(\beta)_\sigma$ bezeichneten Hülfsgrößen einfach gleich Null setzten. Man kann nun, wie hier noch erwähnt werden mag, diese Hülfsgrößen auf unendlich viele Arten so wählen, dass man auf das herkömmliche Ausgleichungsschema kommt. Man kann es außerdem so einrichten, dass von den r Gleichungen jeder Versuchsreihe eine bestimmte nicht benutzt wird, also von vornherein als nicht vorhanden betrachtet werden darf. Alle diese Wege stehen jedoch dem hier gewählten an Einfachheit der Rechnung und an Uebersichtlichkeit nach.

VII.

Als letzter Theil der in Abschnitt II gestellten Aufgabe ist nun noch die Entwickelung der Fehlerkriterien vorzunehmen. Die Grundlage dazu bilden die nach der Ausgleichung übrig bleibenden Widersprüche $\varDelta$. Hierbei sind mehrere Möglichkeiten gegeben.

Ein erster Schritt besteht darin, dass man die $\varDelta$ darauf hin durchmustert, ob in ihrem Verhalten, was Größe oder Vorzeichen betrifft, gewisse Regelmäßigkeiten vorkommen. Das Eintreten solcher Regelmäßigkeiten kann durch Zufall verursacht sein; bei der geringen Wahrscheinlichkeit dieser Annahme wird man es indessen vorziehen, auf eine systematisch wirkende Ursache zu schließen, die in letzter Instanz darin zu suchen ist, dass die Ausdrücke für die $E_{\alpha\lambda}$ unvollständig oder unrichtig angesetzt sind. Bei der Vielgestaltigkeit der denkbaren Fälle lassen sich jedoch hierfür keine allgemeinen Vorschriften aufstellen. Es kann aber auch vorkommen, dass sich in den $\varDelta$ der Einfluss systematischer Fehlerquellen nachweisen lässt, ohne dass er gerade augenfällig hervortritt. Ein Prüfungsmittel, das z. B. von Lexis bei anderen statistischen Aufgaben wiederholt mit Erfolg benutzt worden ist, besteht in der Untersuchung der Fehlerdispersion. Ist eine Reihe wahrer Beobachtungsfehler x gegeben, zu denen eine und dieselbe Fehlerfunction $\varphi(x)$ gehört, und ist $\varphi(x)$ voraussetzungsweise bekannt, so kann man aus φ für passend gewählte Intervalle die zu erwartenden relativen Häufigkeiten der zwischen den Intervallgrenzen liegenden Fehler berechnen und diese mit entsprechenden beobachteten Häufigkeiten vergleichen. Findet zwischen Beobachtung und Rechnung eine befriedigende Uebereinstimmung statt, so ist die Dispersion »normal«, und der angenommene Ausdruck von $\varphi(x)$ als richtig anzusehen. Treten die kleinen Fehler häufiger auf, als sie nach der Formel sollen, so ist die Dispersion »unternormal«. In diesem Falle schließt man auf eine Ursache, die die Tendenz hat, die Fehler zu verkleinern und die bei der Bildung des Ausdruckes $\varphi(x)$ unberücksichtigt geblieben ist. Als solche Ursache kann der Umstand wirken, dass der Beobachter die wahren Werthe der zu beobachtenden Größen kennt und sich nicht von der daraus folgenden Voreingenommenheit frei zu machen vermag. Treten anderseits die großen Fehler häufiger auf, als sie sollen, so ist die Dispersion »übernormal«. In diesem Falle schließt man auf eine Ursache, die die Fehler vergrößert, und die wiederum in $\varphi(x)$ nicht berücksichtigt ist. Als solche kann der Umstand wirken, dass der Beobachtungsmodus innerhalb der Reihe nicht constant gewesen ist, und dass dem entsprechend das zu jeder Beobachtung gehörige $\varphi(x)$ um einen mittleren Ausdruck herumgeschwankt hat. Bei der numerischen Anwendung dieser Dispersionsmethode ersetzt man die unbekannt bleibenden x durch die nach der Ausgleichung übrig bleibenden Widersprüche Δ, wobei die Δ nöthigenfalls durch Division mit den zugehörigen m. F. auf einerlei Gewicht zu bringen sind.

Das angegebene Verfahren setzt voraus, dass eine größere Anzahl von Fehlern vorliegt, da sonst die beobachteten Häufigkeiten zu stark durch den Zufall beeinflusst werden. Es ist deshalb wünschenswerth, einen Weg ausfindig zu machen, der auch noch für kürzere Fehlerreihen anwendbar ist. Man gelangt dazu, wenn man den Gedankengang verfolgt, den Gauß bei der Herleitung des Ausdruckes für den m. F. der Gewichtseinheit eingeschlagen hat. Die Entwickelung hierfür ist zwar etwas weitläufig, jedoch sind die Endformeln einfach genug. Eine nicht unwesentliche Abkürzung der Rechnung erlangt man durch folgende Bemerkung.

Die von den η abhängigen Theile der Normalgleichungen sind nichts anderes als die partiellen Ableitungen der quadratischen Form

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma, \tau} c_{\sigma\tau}\, \eta_\sigma\, \eta_\tau\,,$$

und diese wiederum ist die Quadratsumme aus den rechten Seiten der Fehlergleichungen. Führt man nun statt der η neue Unbekannte θ durch eine lineare Transformation ein, so ändern sich dadurch die Coefficienten der Fehlergleichungen und ebenso der Normalgleichungen, dagegen bleibt jene Eigenschaft der Quadratsumme erhalten; außerdem werden die Werthe der $\varDelta$ durch die Transformation nicht berührt. Man erhält also die Normalgleichungen, wenn die transformirte quadratische Form

$$\tfrac{1}{2} \sum_{\sigma,\tau} c'_{\sigma\tau}\, \theta_\sigma\, \theta_\tau$$

bildet und partiell nach den θ differentiirt. Nun kann man es immer so einrichten, dass die transformirte Form sich in die Quadratsumme

$$\tfrac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_n^2)$$

verwandelt, also die $c'_{\sigma\tau} = e_{\sigma\tau}$ werden. Denkt man sich daher eine solche Transformation vor Beginn der ganzen Ausgleichung vorgenommen, so dürfen wir setzen

$$c_{\sigma\tau} = e_{\sigma\tau}\,, \quad C = 1\,, \quad C_{\sigma\tau} = e_{\sigma\tau}\,.$$

woraus nach (48)

$$[\beta\mu]_\sigma = V_\beta \frac{(\beta\,\mu)_\sigma}{u_{\beta\mu}}$$

folgt.

In (12) war die Relation zwischen den Widersprüchen $\varDelta$ und den wahren Fehlern x aufgestellt worden. Daraus ergibt sich bei unserer Aufgabe mit der in V und VI gebrauchten Bezeichnungsweise

$$\varDelta_{\alpha\lambda} = f_{\alpha\lambda} - \sum_{\beta,\mu} \sum_\sigma f_{\beta\mu}\, (\alpha\,\lambda)_\sigma\, [\beta\,\mu]_\sigma\,,$$

wofür wir schreiben wollen

$$\left.\begin{aligned} \varDelta_{\alpha\lambda} &= \sum_{\beta,\mu} (\alpha\,\lambda,\ \beta\,\mu)\, f_{\beta\mu}\,, \\ (\alpha\,\lambda,\ \beta\,\mu) &= e_{\alpha\beta}\, e_{\lambda\mu} - \sum_\sigma (\alpha\lambda)_\sigma [\beta\mu]_\sigma \\ &= e_{\alpha\beta}\, e_{\lambda\mu} - \sum_\sigma (\alpha\,\lambda)_\sigma (\beta\,\mu)_\sigma \frac{V_\gamma}{u_{\beta\mu}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (53)$$

Die Rechnung mit dem Symbol $(\alpha\,\lambda,\ \beta\,\mu)$ wird erleichtert, wenn man folgende unschwer zu verificirende Relationen berücksichtigt

$$\sum_\lambda (\alpha\,\lambda,\ \beta\,\mu) = e_{\alpha\beta}\,, \quad \sum_\mu (\alpha\,\lambda,\ \beta\,\mu)\, u_{\beta\mu} = e_{\alpha\beta}\, u_{\beta\lambda}\,, \quad \ldots (54)$$

$$\sum_{\alpha,\lambda} (\alpha\lambda,\ \beta\mu)\,(\alpha\lambda,\ \gamma\nu)\,\frac{V_\alpha}{u_{\alpha\lambda}} = (\beta\mu,\ \gamma\nu)\,\frac{V_\beta}{u_{\beta\mu}} = (\gamma\nu,\ \beta\mu)\,\frac{V_\gamma}{u_{\gamma\nu}}, \quad (55)$$

$$\sum_{\gamma,\nu} (\alpha\lambda,\ \gamma\nu)\,(\beta\mu,\ \gamma\nu)\,\frac{u_{\gamma\nu}}{V_\gamma} = (\alpha\lambda,\ \beta\mu)\,\frac{u_{\beta\mu}}{V_\beta} = (\beta\mu,\ \alpha\lambda)\,\frac{u_{\alpha\lambda}}{V_\alpha}, \quad (56)$$

$$(\beta\mu,\ \gamma\nu)\,\frac{V_\beta}{u_{\beta\mu}} = (\gamma\nu,\ \beta\mu)\,\frac{V_\gamma}{u_{\gamma\nu}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

Hiermit wird

$$D(\varDelta_{\alpha\lambda}\varDelta_{\beta\mu}) = \sum_{\gamma,\delta}\sum_{\nu,\xi}(\alpha\lambda,\ \gamma\nu)\,(\beta\mu,\ \delta\xi)\,D(f_{\gamma\nu}f_{\delta\xi})$$

$$= \sum_{\gamma}\sum_{\nu,\xi}(\alpha\lambda,\ \gamma\nu)\,(\beta\mu,\ \gamma\xi)\,\frac{u_{\gamma\nu}}{V_\gamma}\,(e_{\nu\xi} - u_{\gamma\xi}),$$

woraus mit Rücksicht auf (54)—(57)

$$\left.\begin{aligned} D(\varDelta_{\alpha\lambda}\varDelta_{\beta\mu}) &= D(f_{\alpha\lambda}f_{\beta\mu}) - \sum_\sigma(\alpha\lambda)_\sigma(\beta\mu)_\sigma \\ D(\varDelta_{\alpha\lambda}^2) &= D(f_{\alpha\lambda}^2) - \sum_\sigma(\alpha\lambda)_\sigma^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (58)$$

folgt. Die letzte Gleichung lehrt, dass der m. F. eines D stets kleiner ist, als der m. F. des entsprechenden p. Für die Quadratsumme S aus den Widersprüchen der Fehlergleichungen erhält man

$$S = \sum_{\alpha,\lambda}\frac{V_\alpha \varDelta^2_{\alpha\lambda}}{u_{\alpha\lambda}} = \sum(\alpha\lambda,\ \beta\mu)\,(\alpha\lambda,\ \gamma\nu)\,\frac{V_\alpha}{u_{\alpha\lambda}}\,f_{\beta\mu}f_{\gamma\nu},$$

$$S = \sum\frac{V_\beta}{u_{\beta\mu}}\,(\beta\mu,\ \gamma\nu)\,f_{\beta\mu}f_{\gamma\nu}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

woraus

$$D(S) = \sum\frac{V_\beta}{u_{\beta\mu}}\,(\beta\mu,\ \beta\nu)\,D(f_{\beta\mu}f_{\beta\nu}), \quad \ldots\ldots \quad (60)$$

$$D(S) = \sum(\beta\mu,\ \beta\mu) - \sum(\beta\mu,\ \beta\nu)\,u_{\beta\nu}$$

$$= \sum_{\beta,\mu}\left(1 - \sum_\sigma\frac{(\beta\mu)_\sigma^2 V_\beta}{u_{\beta\mu}}\right) - \sum_{\beta,\mu}u_{\beta\mu}$$

$$= qr - \sum c_{\sigma\sigma} - q,$$

$$D(S) = q(r-1) - n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

folgt. Dieser Durchschnittswerth hat offenbar folgende Bedeutung. Angenommen, man könnte die »Gruppe« von Versuchen unter genauer Innehaltung des einmal festgesetzten Programms unendlich oft in der Weise wiederholen, dass auch die B.-M. sich genau wiederholten, dann erhält man für die S Werthe, die sich nach einem bestimmten Häufigkeitsgesetz gruppiren. Der mit Rücksicht auf dieses Gesetz gebildete Mittelwerth aus den S ist dann $D(S)$. Wenn nur eine Gruppe beobachtet worden ist, so kann S nach oben oder unten von $D(S)$ abweichen; jedoch werden starke Abweichungen nur eine geringe Wahrscheinlichkeit besitzen. Um nun einen Anhalt zu haben, ob die Abweichung als groß oder klein anzusehen sei, bilden wir den Durchschnitt

$$T = D[(S - D(S))^2] = D(S^2) - (D(S))^2;$$

d. h. wir sehen $D(S)$ als den Sollwerth von S an und suchen zu letzterem den m. F. Die Differenz

$$S - D(S)$$

tritt dann an die Stelle der Fehlerdispersion und der Werth von T muss dazu dienen, anzugeben, ob die Dispersion als unternormal oder normal oder übernormal anzusehen ist. Selbstverständlich sind die dabei zu ziehenden Schlüsse immer nur Wahrscheinlichkeitsschlüsse, da ja in Wirklichkeit das S bei einer bestimmten Versuchsgruppe durch besonderes Walten des Zufalls jeden mit den Bedingungen der Aufgabe verträglichen Werth annehmen kann.

Aus (59) folgt zunächst

$$D(S^2) = \Sigma \frac{V_\beta}{u_{\beta\mu}} \frac{V_\delta}{u_{\delta\xi}} (\beta\mu, \gamma\nu)(\delta\xi, \varepsilon\pi) D(f_{\beta\mu} f_{\gamma\nu} f_{\delta\xi} f_{\varepsilon\pi}) \cdot$$

In dieser Summe verschwinden rechts alle D, bei denen nicht für die Indices β, γ, δ, ε einer der vier Fälle

$$\beta = \gamma = \delta = \varepsilon = g\,,$$

$$\beta = \gamma = g, \quad \delta = \varepsilon = h\,,$$

$$\beta = \delta = g, \quad \gamma = \varepsilon = h\,,$$

$$\beta = \varepsilon = g, \quad \gamma = \delta = h\,,$$

stattfindet, wo g und h zwei von einander verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2 \ldots q$ bedeuten. Mit Rücksicht hierauf dürfen wir $D(S^2)$ in der Form

$$\Sigma \frac{V_g}{u_{g\mu}} \frac{V_g}{u_{g\xi}} (g\mu, g\nu)\,(g\xi, g\pi)\; D(f_{g\mu} f_{g\nu} f_{g\xi} f_{g\pi})$$

$$+ \Sigma \frac{V_g}{u_{g\mu}} \frac{V_g}{u_{h\xi}} (g\mu, g\nu)\,(h\xi, h\pi)\; D(f_{g\mu} f_{g\nu})\; D(f_{h\xi} f_{h\pi})\;(1 - e_{gh})$$

$$+ \Sigma \frac{V_g}{u_{g\mu}} \frac{V_g}{u_{g\xi}} (g\mu, h\nu)\,(g\xi, h\pi)\; D(f_{g\mu} f_{g\xi})\; D(f_{h\nu} f_{h\pi})\;(1 - e_{gh})$$

$$+ \Sigma \frac{V_g}{u_{g\mu}} \frac{V_h}{u_{h\xi}} (g\mu, h\nu)\,(h\xi, g\pi)\; D(f_{g\mu} f_{g\pi})\; D(f_{h\nu} f_{h\xi})\;(1 - e_{gh})$$

schreiben, wo wegen des hinzugefügten Factors $(1 - e_{gh})$ die Indices g und h jetzt auch einander gleich sein dürfen. Schreibt man für g und h wieder β und γ, und erinnert sich des in Abschnitt VI mit B bezeichneten Ausdruckes, so erhält man für $D(S^2)$

$$+ \Sigma \frac{V_\beta^2}{u_{\beta\mu}\, u_{\beta\xi}} (\beta\mu, \beta\nu)\,(\beta\xi, \beta\pi)\,.\,B$$

$$+ \left[\Sigma \frac{V_\beta}{u_{\beta\mu}} (\beta\mu, \beta\nu)\; D\,(f_{\beta\mu} f_{\beta\nu})\right]^2$$

$$+ \Sigma \frac{V_\beta^2}{u_{\beta\mu}\, u_{\beta\xi}} (\beta\mu, \gamma\nu)\,(\beta\xi, \gamma\pi)\; D(f_{\beta\mu} f_{\beta\xi})\; D(f_{\gamma\nu} f_{\gamma\pi})$$

$$+ \Sigma \frac{V_\beta V_\gamma}{u_{\beta\mu}\, u_{\gamma\mu}} (\beta\mu, \gamma\nu)\,(\gamma\xi, \beta\pi)\; D(f_{\beta\mu} f_{\beta\pi})\; D(f_{\gamma\nu} f_{\gamma\xi})\,.$$

Von diesen vier Termen ist der zweite wegen (60) das Quadrat von $D(S)$. Der vierte Term ist identisch mit dem dritten, wie sich aus der Relation (57) und durch Vertauschung der Summationsbuchstaben ξ und π ergibt. Summirt man in dem dritten Term zunächst nach ν und berücksichtigt die Gleichung

$$\Sigma_\nu (\beta\mu, \gamma\nu)\; D(f_{\gamma\nu} f_{\gamma\pi}) = \frac{u_{\gamma\pi}}{V_\gamma} \left[(\beta\mu, \gamma\pi) - e_{\beta\gamma}\, u_{\gamma\pi}\right],$$

so erhält man zunächst für den dritten Term

$$\Sigma \frac{V_\beta}{u_{\beta\xi}} (\beta\xi, \gamma\pi)\,.\,\frac{V_\beta}{u_{\beta\mu}} (\beta\mu, \gamma\pi)\,.\,\frac{u_{\gamma\pi}}{V_\gamma}\; D(f_{\beta\mu} f_{\beta\xi})$$

$$- \Sigma \frac{V_\beta}{u_{\beta\xi}} (\beta\xi, \beta\pi)\; D(f_{\beta\mu} f_{\beta\xi})\,.\,u_{\beta\pi}$$

oder mit Rücksicht auf (57)

$$= \Sigma \frac{V_\gamma}{u_{\gamma\pi}} (\gamma\pi, \beta\mu) (\gamma\pi, \beta\xi) D(f_{\beta\mu} f_{\beta\xi}) - \Sigma V_\beta (\beta\pi, \beta\xi) D(f_{\beta\mu} f_{\beta\xi})$$

$$= \Sigma \frac{V_\beta}{u_{\beta\mu}} (\beta\mu, \beta\xi) D(f_{\beta\mu} f_{\beta\xi}) - \Sigma V_\beta D(f_{\beta\mu} f_{\beta\xi}) .$$

Die erste von diesen beiden Summen ist, wie der Vergleich mit (60) lehrt, gleich $D(S)$, die zweite ist Null, da

$$\sum_\mu f_{\beta\mu} = 0 .$$

Hiermit erhalten wir für T die Gleichung

$$T = 2D(S) + \Sigma \frac{V_\beta^2}{u_{\beta\mu} u_{\beta\xi}} (\beta\mu, \beta\nu) (\beta\xi, \beta\pi) . B .$$

Setzt man für B seinen Ausdruck ein und berücksichtigt wieder die Gleichungen (54)—(57), so wird nach gehöriger Reduction

$$T = 2D(S) + \sum_{\beta,\mu} \frac{(\beta\mu, \beta\mu)^2}{V_\beta u_{\beta\mu}}$$

$$- \sum_{\beta,\mu,\nu} \frac{1}{V_\beta} ((\beta\mu, \beta\mu) (\beta\nu, \beta\nu) + 2(\beta\mu, \beta\nu) (\beta\nu, \beta\mu)) + 2\Sigma \frac{1}{V_\beta} .$$

Die $(\beta\mu, \beta\nu)$ sind bekannte Functionen der Coefficienten der Fehlergleichungen. Indessen würde die Berechnung des vorstehenden Ausdruckes von T im allgemeinen so beschwerlich sein, dass sie praktisch nicht in Frage kommt. Da es sich aber bei der Ermittelung von T schließlich nur um eine Schätzung handelt, so darf man sich mit einer Annäherung begnügen. Aus (53) und (58) leitet man ohne Mühe die Relation

$$(\beta\mu, \beta\nu) = u_{\beta\mu} + \frac{V_\beta}{u_{\beta\nu}} D(\varDelta_{\beta\mu} \varDelta_{\beta\nu})$$

ab. Die Substitution dieses Ausdruckes in T liefert

$$T = 2D(S) + \sum_{\beta,\mu} \frac{V_\beta}{u_{\beta\mu}^3} (D(\varDelta_{\beta\mu}^2))^2 - \sum_{\beta,\mu,\nu} \frac{V_\beta}{u_{\beta\mu} u_{\beta\nu}} D(\varDelta_{\beta\mu}^2) D(\varDelta_{\beta\nu}^2)$$

$$- 2\sum_{\beta,\mu,\nu} \frac{V_\beta}{u_{\beta\mu} u_{\beta\nu}} (D(\varDelta_{\beta\mu} \varDelta_{\beta\nu}))^2 .$$

Man könnte versuchen, diesen Ausdruck dadurch zu vereinfachen, dass man für die plausibelsten Widersprüche $\varDelta$ als Annäherung die wahren Widersprüche f setzt. Dies kommt, wegen der Relation (58)

$$D(\varDelta_{\alpha\lambda}^2) = D(f_{\alpha\lambda}^2) - \sum_\sigma (\alpha\lambda)_\sigma^2,$$

darauf hinaus, dass man die $(\alpha\lambda)_\sigma$ sämmtlich gleich Null setzt, während sie in Wirklichkeit von Null verschieden sind, aber mit wachsenden V gegen Null convergiren, wie aus der Gleichung

$$1 = c_{\sigma\sigma} = \sum_{\beta,\mu} \frac{(\beta\mu)_\sigma^2 V_\beta}{u_{\beta\mu}}$$

hervorgeht. Setzt man die $(\alpha\lambda)_\sigma$ gleich Null, so geht $(\beta\mu, \beta\nu)$ in $e_{\mu\nu}$ über und man erhält für T den Ausdruck

$$T = 2D(S) + \sum_\beta \frac{1}{V_\beta}\left(\sum_\mu \frac{1}{u_{\beta\mu}} + 2 - 2r - r^2\right),$$

der sich für sehr große V dem ersten Gliede $2D(S)$ nähert. Es gibt jedoch noch einen andern, für die Rechnung nur wenig umständlicheren Weg, der die Annahme sehr großer Werthe der V nicht macht und der darin besteht, dass man für die D als Annäherung die aus den Beobachtungen folgenden $\varDelta$ selber setzt. Schreibt man für die Widersprüche der Fehlergleichungen

$$\varDelta'_{\beta\mu} = \varDelta_{\beta\mu} \sqrt{\frac{V_\beta}{u_{\beta\mu}}},$$

ferner

$$\sum_\mu (\varDelta'_{\beta\mu})^2 = F_{\beta 2}, \quad \sum_\mu \frac{(\varDelta'_{\beta\mu})^4}{u_{\beta\mu}} = F_{\beta 4},$$

so wird

$$T = 2D(S) + \sum_\beta \frac{F_{\beta 4} - 3F_{\beta 2}^2}{V_\beta} \quad \ldots\ldots \quad (62)$$

In vielen Fällen wird zur Bestimmung von T eine rohe Ueberschlagsrechnung für die F genügen.

Die Größe

$$M = \frac{S}{D(S)} = \frac{S}{q(r-1)-n}$$

ist das Analogon zu dem (m. F.)^2 der Gewichtseinheit bei den gewöhnlichen Anwendungen der Methode der kl. Qu., wo die Beobachtungsgleichungen von einander unabhängig sind. Man kann bei unserer Aufgabe M als den empirischen Werth des fingirten (m. F.)^2 einer Fehlergleichung ansehen, während der theoretische oder Sollwerth gleich Eins ist. Für den m. F. von M erhält man dann

$$\text{m.F. } (M) = \frac{\sqrt{T}}{D(S)},$$

wofür man bei großen V mit genügender Annäherung

$$\text{m.F. } (M) = \sqrt{\frac{2}{q(r-1)-n}}$$

wird setzen dürfen.

VIII.

Zur Erläuterung der vorstehenden allgemeinen Entwicklungen möge schließlich nochmals die im Eingange besprochene besondere Aufgabe erörtert werden. Bei der Kämpfe'schen Untersuchung werden rasch hintereinander zwei Schallreize erzeugt, die der Zeitfolge nach als erster R_1 und zweiter R_2 unterschieden werden. Aufgefasst wird jedoch nur die Reizdifferenz

$$D = R_1 - R_2,$$

und notirt werden die drei Urtheile

$$D > 0, \quad D = 0, \quad D < 0,$$

deren relative Häufigkeiten innerhalb einer Reihe von V Versuchen gleich den Zahlen p, z, n sein sollen. Man erhält dann die drei Beobachtungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} p &= \psi(\infty) - \psi(Z_0 - D), \\ z &= \psi(Z_0 - D) - \psi(Z_u - D), \\ n &= \psi(Z_u - D) - \psi(-\infty), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (63)$$

wo die Größen Z_0 und Z_u die Endpunkte der »Zwischenstrecke« bestimmen und ψ von dem Beobachtungsmodus abhängt, der die bei der Auffassung von D begangenen Fehler beherrscht. Bei der Bildung der Gleichungen (63) wird stillschweigend vorausgesetzt, dass innerhalb der Versuchsreihe der B.-M. und die Zwischenstrecke constant oder doch nur kleinen Schwankungen zufälliger Art um bestimmte Mittel herum unterworfen seien. Diese Annahme lässt sich nicht im voraus rechtfertigen, sondern nur nachträglich, und zwar dadurch, dass sie sich als brauchbar erweist, um die beobachteten Zahlen zusammenfassend darzustellen.

Die als erste Approximation am nächsten liegende Annahme, dass der B.-M. analytisch durch das Gauß'sche Fehlergesetz bestimmt sei, führt zu der Gleichung

$$\psi(x) = \Phi(hx) = \Phi\left(\frac{x}{U}\right), \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x dy \exp(-y^2),$$

wo Φ die bekannte Transcendente, h das Präcisionsmaß und der reciproke Werth U das »Unsicherheitsmaß« sind. Ob man h oder U benutzt, ist im Grunde gleichgültig; für die Endresultate hat jedoch U den Vortheil, dass es eine Reizgröße, also direct vorstellbar ist, während der reciproke Werth einer Reizgröße immer nur die Bedeutung einer Hülfsgröße für die Rechnung besitzt. Mit Einführung von Φ erhält man

$$\left.\begin{aligned} p &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\Phi\left(\frac{Z_0 - D}{U}\right), \\ z &= \tfrac{1}{2}\Phi\left(\frac{Z_0 - D}{U}\right) - \tfrac{1}{2}\Phi\left(\frac{Z_u - D}{U}\right), \\ n &= \tfrac{1}{2}\Phi\left(\frac{Z_u - D}{U}\right) + \tfrac{1}{2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (64)$$

Dieses System enthält zunächst drei Unbekannte, während nur zwei von einander unabhängige Bedingungen vorliegen. Setzt man

$$Z_0 = Z, \quad Z_u = -Z, \quad \ldots\ldots\ldots (65)$$

so kann man Z und U bestimmen; ich habe jedoch bereits früher erwähnt, dass es mit Rücksicht auf einen etwaigen constanten Fehler nicht zweckmäßig ist, diese Bedingung von vornherein einzuführen. Da das Gauß'sche Fehlergesetz fordert, dass die Fehler von constanten Bestandtheilen befreit seien, so sind die Argumente von Φ in (64) vorher deswegen zu corrigiren. Bedarf das beobachtete D zur Befreiung von dem constanten Fehler der Correction $+c$, so läuft dies auf dasselbe hinaus, als wenn man annimmt, dass die Beobachtung von dem constanten Fehler frei, dass aber die zu beobachtende Größe nicht D sondern $D-c$ sei. Man hätte also statt der Z in (64) $Z+c$ zu schreiben. Wir wollen jedoch diese Aenderung nicht vornehmen, sondern dafür die Z als selbständig zu bestimmende Unbekannte beibehalten. Wenn dann die Zwischenstrecke als symmetrisch zum Nullpunkt vorausgesetzt wird, so liefert der mit den errechneten Z gebildete Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}(Z_o + Z_u)$$

unmittelbar den Werth von c. In der Regel wird die Annahme (65) nützlich sein, um durch eine vorläufige Discussion der einzelnen Reihen sowohl angenäherte Werthe für die Z und U, als auch Anhaltspunkte für die zweckmäßige Zusammenfassung der Reihen zu Gruppen zu erhalten.

Werden nun die Reihen gruppenweise zusammengefasst, so ist über die etwaige Veränderung der Z und U von einer Reihe zur andern eine Festsetzung zu treffen. Treten innerhalb einer Gruppe nur kleine Änderungen von R_1 und R_2 auf, so wird man kein Bedenken tragen, als Annäherung die Z und U constant anzunehmen. Setzt man dagegen, mit dem Vorbehalt der nachträglichen Rectification, das Weber'sche Gesetz als gültig voraus, so wird man zunächst als unbekannte, aber innerhalb der Gruppe constante Parameter die Größen

$$\zeta_o = \frac{Z_o}{U}, \quad \zeta_u = \frac{Z_u}{U}$$

ansetzen. Nimmt man ferner vorläufig an, dass die bei der Auffassung von R_1 und R_2 begangenen Fehler unabhängig von einander sind, und, ebenso wie D, dem Gauß'schen Gesetze folgen, so hat man, wenn U_1 und U_2 die entsprechenden Unsicherheitsmaße sind,

$$U_1 = \zeta R_1, \quad U_2 = \zeta R_2,$$

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 = \zeta^2 (R_1^2 + R_2^2),$$

also mit der Abkürzung

$$\zeta = \frac{1}{\gamma}, \quad D' = \frac{D}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}} = \frac{R_1 - R_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}},$$

$$p = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\Phi(\zeta_o - \gamma D'),$$
$$z = \tfrac{1}{2}\Phi(\zeta_o - \gamma D') - \tfrac{1}{2}\Phi(\zeta_u - \gamma D'),$$
$$n = \tfrac{1}{2}\Phi(\zeta_u - \gamma D') + \tfrac{1}{2}.$$

Bedeuten (p), (z), (n), die mit den provisorischen Werthen der Unbekannten ζ, γ berechneten rechten Seiten von (64), Φ' die Ableitung von Φ und bezeichnet man die gesuchten Verbesserungen durch das Symbol δ, so erhält man mit den Abkürzungen

$$\Phi_o' = \Phi'(\zeta_o - \gamma D'), \quad \Phi'_u = \Phi'(\zeta_u - \gamma D')$$

die linearen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} p-(p) &= -\tfrac{1}{2}\Phi_o'\,.\,\delta\zeta_o \phantom{-\tfrac{1}{2}\Phi_u'\,.\,\delta\zeta_u} + \tfrac{1}{2}\Phi_o' D'\,.\,\delta\gamma,\\ z-(z) &= \tfrac{1}{2}\Phi_o'\,.\,\delta\zeta_o - \tfrac{1}{2}\Phi_u'\,.\,\delta\zeta_u + \tfrac{1}{2}(\Phi_u' - \Phi_o')D'\,.\,\delta\gamma,\\ n-(n) &= \tfrac{1}{2}\Phi_u'\,.\,\delta\zeta_u - \tfrac{1}{2}\Phi_u' D'\,.\,\delta\gamma. \end{aligned}\right\} \quad (66)$$

Die Berechnung der Coefficienten wird wesentlich erleichtert, wenn außer einer bequemen Tafel für Φ noch ein Täfelchen für

$$\tfrac{1}{2}\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-x^2)$$

vorhanden ist, welches direct den gemeinen Logarithmus

$$\mathrm{Log}\,(\tfrac{1}{2}\Phi'(x)) = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\pi - x^2\,\mathrm{Log}\,e$$

mit dem Argument x liefert.

Zur Bildung der Fehlergleichung hat man in (66) noch die Factoren

$$\sqrt{\frac{V}{(p)}}, \quad \sqrt{\frac{V}{(z)}}, \quad \sqrt{\frac{V}{(n)}}$$

hinzuzufügen. Hieran schließt sich dann die Bildung der Normalgleichungen, ihre Auflösung, sowie die Berechnung der übrig bleibenden Widersprüche und der Fehlergrößen. Wenn die Werthe der V innerhalb einer Gruppe nur wenig von einander verschieden sind, so kann man unbedenklich einen gemeinsamen mittleren Werth ansetzen.

Die Gleichungen (64) enthalten, wie hier nicht erst hervorzuheben ist, den Ansatz für die Methode der »richtigen und falschen

Fälle«. Die vielerörterte Frage, wie man die »gleichen« Fälle auf die beiden anderen Urtheilsklassen zu vertheilen habe, ist dabei offenbar von vornherein abgeschnitten. Die ganze Frage ist übrigens lediglich dadurch entstanden, dass man von zwei möglichen Wegen immer nur den einen und zwar den weniger zweckmäßigen eingeschlagen hat. Weil eine einzelne Versuchsreihe in den drei Gleichungen (64) drei Unbekannte, aber nur zwei unabhängige Bedingungen enthält, muss man die fehlende dritte Bedingung ergänzen. Es ist aber durchaus nicht nothwendig, diese Ergänzung, wie es bisher immer geschah, in der Weise vorzunehmen, dass man auf Grund irgend welcher Ueberlegungen eine dritte, von den Beobachtungen unabhängige Relation zwischen den drei Unbekannten aufstellt. Ja, noch mehr, diese Art der Ergänzung ist nicht einmal vortheilhaft. Denn die drei Bedingungen, die man so für die einzelne Versuchsreihe erhält, sind immer streng erfüllbar, wie man auch die Zusatzbedingung und die Form der Function ψ gewählt haben möge; die Prüfung der gemachten Voraussetzungen fordert also stets noch die Heranziehung weiterer Versuchsreihen. Wenn man nun aber einmal bei solchen Untersuchungen eine ganze Gruppe von Versuchsreihen nöthig hat, so ist es das Natürliche, diese Reihen von Anfang zusammenzufassen und sich eben dadurch die fehlenden Bedingungen zu verschaffen. Man hat dabei keine anderen Voraussetzungen zu machen, als solche, welche man auch bei dem vorhin charakterisirten Verfahren unter allen Umständen, sei es zu Anfang, sei es am Schluss, machen muss. Was aber noch wesentlicher ist, die nach Gruppen zusammenfassende Behandlung trägt ihre Controle in sich; die Grundlage für die Prüfung der Voraussetzungen sind die $\varDelta$ und ihr Zusammenhang mit den Verbesserungen der Unbekannten, und diese Stücke ergeben sich gerade in derjenigen Form, die für alle weiteren Erörterungen die geschmeidigste ist. Will man fractioniren, so kann man das thun, aber wohlbemerkt mit den Größen, die möglichst unmittelbar von den Beobachtungen abhängen, nämlich mit den Widersprüchen der Ausgleichung und mit den Fehlergleichungen. Es ist nicht Zufall, auch nicht Willkür der Rechner, sondern das Ergebniss einer bald hundertjährigen praktischen Erfahrung, wenn die Behandlung von Beobachtungen die kanonische Form angenommen hat, die man jetzt in den Vorschriften der A.-R. findet, und es ist eine selbstverständliche wissenschaftliche Sparsamkeit, wenn das Lehrgeld, das die vorzugsweise rechnenden Wissenschaften gezahlt haben, anderswo nicht noch einmal ausgegeben wird.

Die oben entwickelten Ausgleichungsvorschriften entsprechen dem Durchschnittstypus der statistischen Versuche in der Psychophysik. Es können aber Fälle eintreten, wo eine Abänderung zweckmäßig wird. Denn die A.-R. ist kein Recept, dessen Vorschriften man immer nur rein mechanisch zu befolgen hätte; gerade weil sie ein durchgebildetes Werkzeug zur Aufsuchung der relativ besten Resultate ist, nimmt sie unter Umständen das Nachdenken und das Urtheil des Rechners erst recht in Anspruch. Denkt man sich z. B. bei den Versuchen nur die p-Urtheile gezählt, also die z- und n-Urtheile nicht unterschieden, so erhält man aus jeder Reihe nur die eine Gleichung

$$p-(p)=-\tfrac{1}{2}\Phi_0'\,.\,\delta\zeta_0+\tfrac{1}{2}\Phi_0'\,D'\,.\,\delta\gamma\,, \quad \ldots\ldots \quad (67)$$

weil die andere Gleichung, welche für die beiden zusammengefassten Urtheilsklassen anzusetzen sein würde, aus (67) durch bloße Vorzeichenumkehrung entsteht. Die Versuchsgruppe liefert dann ein System von Gleichungen der Form (67), die von einander unabhängig, also ohne weiteres nach dem gewöhnlichen Schema der Methode der kl. Qu. zu behandeln sind. Der — theoretische — m. F. einer Gleichung (67) ist dabei durch den Ausdruck

$$\sqrt{(p)\,\frac{1-(p)}{V}}$$

gegeben. Macht man nun die Fiction, dass die Versuchsgruppe wiederholt worden sei und durch Zufall dieselben Zahlenwerthe für die p, z, n wie vorher ergeben habe, so kann man sich das zweite Mal nur die n-Urtheile gezählt und dem entsprechend die n-Gleichungen für sich ausgeglichen denken. Man erhält dann für ζ_0 und ζ_u je einen, für γ dagegen zwei Werthe. Selbstverständlich ist bei der weiteren Discussion die gemachte Fiction aufrecht zu erhalten, d. h. man hat die beiden Werthe von γ als aus zwei verschiedenen Versuchsgruppen hervorgegangen zu behandeln. Diese partiellen Ausgleichungen ertheilen im allgemeinen den Unbekannten kleinere Gewichte[1]) und stehen deshalb der früher entwickelten Ausgleichung in der Regel nach; gleichwohl kann es mitunter nützlich sein, sie anzuwenden. Wenn z. B. in einer Versuchsreihe (n) sehr klein wird, ohne dass (p) und (z) dem andern Extrem Eins nahe kommen, so hat man diese Reihe aus den früher angegebenen Gründen bei der einheitlichen Ausgleichung fortzulassen, während sie bei einer partiellen Ausgleichung der p-Urtheile noch benutzt werden kann. Da ferner bei diesen verschiedenen Ausgleichungsarten die beobachteten Zahlen mit verschiedenen Gewichten in die Rechnung eingehen, so ist damit unter Umständen ein Mittel gegeben, sich von gewissen Fehlern ein deutlicheres Bild zu machen.

Zum Schlusse möge noch darauf hingewiesen werden, dass die A.-R., richtig gehandhabt, noch einen anderen Dienst zu leisten vermag, der oft genug eben so wichtig ist, wie die Ableitung der plausibelsten Resultate. Eine größere Untersuchung zum Zwecke möglichst sicherer Maßbestimmungen wird man nicht auf's Gerathewohl, sondern nach einem bestimmten Programm ausführen, das auf Grund früherer Erfahrungen oder vorläufiger, zu diesem besonderen Zweck unternommener Versuche entworfen ist. Man ist dann im Stande den Ansatz für die spätere Rechnung mit wenn auch nur rohen Zahlenwerthen aufzustellen und sich im voraus ein Bild von dem Gang der Rechnung zu entwerfen. Eine solche vorläufige oder, wenn man will, fingirte Discussion kann dazu dienen, Beobachtungen, die zur Sicherheit der Resultate nur wenig beitragen würden, von vornherein aus dem Programm zu streichen, anderen dagegen, die einen wesentlichen Einfluss haben, erhöhte Beachtung zuzuwenden.

Leipzig, 12. März 1893.

1) Der Beweis hierfür beruht auf einem Satze, der sich folgendermaßen aussprechen lässt: wird durch irgend einen A.-M. eine bestimmte Unbekannte, und nur diese eine, ermittelt, so kann man dasselbe Resultat stets auch durch die Methode der kl. Qu. erhalten, vorausgesetzt, dass man statt der Gewichte, die den m. F. der Beobachtungen entsprechen, gewisse andere Zahlen — fingirte Gewichte — einführt, die unter Umständen auch negativ sein können.