Die Methode der mittleren Fehler, experimentell begründet durch Versuche aus dem Gebiete des Raummafses.

Von

Dr. **Julius Merkel**
in Zittau.

In meiner Abhandlung[1]) über die theoretische und experimentelle Begründung der Fehlermethoden, die sich zunächst nur mit der Methode der richtigen und falschen Fälle und ihren verschiedenartigen Anwendungen, sowie mit der Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle befasste, habe ich eine eingehendere Untersuchung der Methode der mittleren Fehler bereits angekündigt. Mit Rücksicht auf die Ergebnisse meiner neuesten Versuche und im Hinblick auf die Untersuchungen von Angell[2]) über die Schätzung von Schallintensitäten nach der Methode der mittleren Abstufungen möchte ich zunächst jene Abhandlung in zwei Punkten ergänzen.

Zuvörderst muss ich betonen, dass die Anwendbarkeit der Näherungsformeln des Abschnittes III[2]) in jedem Sinnesgebiete erst geprüft werden muss. Soweit meine Erfahrung reicht, genügt in den Fällen, in welchen man die genauen Formeln nicht benöthigt, auch die Benutzung des Werthes $A = 1$ statt der angegebenen Näherungsformel. Dies bezieht sich jedoch nur auf die Methode der mittleren Abstufungen, hinsichtlich der andern Methode habe ich noch keine Erfahrungen gesammelt. Dagegen sind die Näherungs-

1) Phil. Stud. VII, S. 558—629; VIII, S. 97—137.
2) Phil. Stud. VII, S. 613—617.

formeln bei den Methoden der richtigen und falschen Fälle und der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle überall anwendbar.

Sodann möchte ich noch auf folgende Erfahrung hinweisen. Die Methode der richtigen und falschen Fälle wurde von mir früher im Gebiete des Schallmaßes zu vielfachen Bestimmungen des Gleichheitspunktes verwandt. Bei jenen Versuchen zeigte die Versuchstechnik noch gewisse Mängel. Die einzelnen Schalle waren gewissen Schwankungen unterworfen, welche die Bildung der Urtheile richtig und falsch erleichterten. Aber auch damals war die geringste Verschiedenheit, die sich vielleicht nicht einmal auf die Intensität bezog, bestimmend für die Abgabe des Urtheils richtig oder falsch. Dieser Umstand veranlasste mich, die Prüfung des Weber'schen Gesetzes auf Grund der Methode der richtigen und falschen Fälle später ganz fallen zu lassen und diese Methode nur zur Bestimmung des Gleichheitspunktes zu verwenden. Zur Prüfung des Weber'schen Gesetzes benutzte ich die Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle, deren Theorie ich[1]) vor fünf Jahren bereits in ihren Grundzügen entwickelt habe. Bei meinem gegenwärtig zur Verwendung kommenden Apparat, welcher tadellose Schalle zu erzeugen gestattet, erwies sich bei normaler Aufmerksamkeit die Methode der richtigen und falschen Fälle überhaupt als untauglich. Da ich jedoch wiederum die eventuelle Zunahme oder Abnahme der Schallstärke mit der Fallhöhe prüfen wollte, musste ich ein anderes Verfahren zur Bestimmung der Gleichheitspunkte einschlagen. Ich benutzte auch hierzu die Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle, bestimmte zum gesuchten Reiz R die ebenmerklich verschiedenen Reize R_o und R_u und berechnete R aus der Formel: $R = \sqrt{R_o R_u}$. Die dabei zu Grunde gelegte Annahme, die Reizstärke wachse proportional der Fallhöhe, wurde dabei sehr angenähert als richtig erwiesen. Sollte übrigens der nach den Angaben Wundt's construirte Fallapparat des Leipziger Laboratoriums wesentlich besser sein als der meinige, so ist es sogar denkbar, dass die Methode der richtigen und falschen Fälle auch bei Bestimmung der mittleren Abstufung versagt, d. h., dass man mit Benutzung der Urtheile $>$, $=$, $< M$ (M der mittlere Reiz) bei normaler Auf-

---

1) Phil. Stud. IV, S. 257—261. Ausführl. Phil. Stud. VII, S. 606—612.

merksamkeit auf Fehlschläge geräth. Vorausgesetzt wird dabei, dass die Versuche nur für eine Zeitlage ausgeführt werden; durch den Wechsel der Zeitlage und die Anwendung der Methode der unvollständigen Elimination constanter Fehler kann man den Fehlschlägen leicht entgehen, natürlich auch bei Anwendung der Methode der richtigen und falschen Fälle zur Bestimmung des Gleichheitspunktes. Doch erheischt die Elimination des Zeitfehlers noch eine genauere Untersuchung. Sollten die oben genannten Fehlschläge wirklich eintreten, so müsste man auch hier die Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle anwenden und die obere und untere Grenze von M ermitteln. Bei Bestimmung der oberen Grenze hätte man nur die Urtheile $> M$ und $= M$ und bei Bestimmung der unteren Grenze nur die Urtheile $< M$ und $= M$ zuzulassen. Vereinzelt auftretende Urtheile $< M$ im ersten und $> M$ im zweiten Falle würden zu den Gleichheitsurtheilen zu schlagen sein. Ich werde diese Methode und den Einfluss der Zeitfolge an anderer Stelle eingehender besprechen.

Ich wende mich nunmehr zur Methode der mittleren Fehler. Eine eingehende Untersuchung dieser Methode ist als ein dringendes Bedürfniss zu bezeichnen, einerseits wegen ihrer hohen Bedeutung für die Psychophysik, anderseits weil die bis jetzt vorliegenden Versuche und zwar insonderheit gerade die in den letzten Jahren veröffentlichten nur einzelnen, nicht allen Forderungen einer strengen Theorie gerecht werden. Die vorliegende Untersuchung dürfte voraussichtlich auch zum Verständniss dessen beitragen, was in meiner Arbeit über die vorhin erwähnten Fehlermethoden noch einer eingehenderen Erklärung bedarf.

Merkwürdig ist es, dass die Methode der mittleren Fehler in der Psychophysik noch so wenig Verwendung gefunden hat, dass sie in einzelnen Gebieten überhaupt völlig unbeachtet geblieben ist. Dies erscheint um so auffälliger, als gerade diese Methode einfach aus den Gebieten der Astronomie und Physik herüber genommen worden ist, d. h. aus Gebieten, in denen sie eine eingehende theoretische Begründung und vielfache praktische Anwendung gefunden hat. Ohne auf die Gründe dieser Thatsache jetzt näher einzugehen, will ich zunächst die Theorie dieser Methode entwickeln mit Rücksicht auf ihre Anwendbarkeit im Gebiete der Psychophysik. Sodann will ich die Methodik der Versuche näher charakterisiren, wie sie die entwickelte Theorie erheischt. Schließlich will ich die neueren Untersuchungen an diesem Maßstabe prüfen und an einer Reihe von eigenen Untersuchungen die Vorzüglichkeit dieser Methode nachzuweisen suchen.

I. Theorie der Methode der mittleren Fehler.

Bei der Methode der mittleren Fehler wird vorausgesetzt, dass eine gesuchte Größe x viele Male beobachtet worden sei. Die einzelnen Ergebnisse (x_1, x_2, x_3, ... x_n) werden naturgemäß mit größeren oder kleineren Fehlern behaftet sein. Der wahrscheinlichste Werth von x wird das arithmetische Mittel M der einzelnen Beobachtungen sein. Die Größen $\lambda_1 = M - x_1$, $\lambda_2 = M - x_2 \ldots\ldots \lambda_n = M - x_n$ stellen dann die Abweichungen (Fehler) der beobachteten Werthe vom arithmetischen Mittel dar. Unter dem wahrscheinlichen Fehler versteht man dann diejenige Fehlergrenze, welche gleich häufig nicht erreicht als überschritten wird. Als durchschnittlichen Fehler bezeichnet man das arithmetische Mittel aus allen Fehlern, d. h. also:

$$f = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}{n} = \frac{[\lambda]}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

Dabei werden die Vorzeichen der Fehler außer Acht gelassen. Der durchschnittliche Fehler wird größer als F ausfallen, wenn kleinere Beobachtungsfehler überwiegen, er wird gleich F sein, wenn die Beobachtungsfehler gleichmäßig wachsen; er wird kleiner als F werden, wenn die größeren Beobachtungsfehler häufiger auftreten. Entsprechen aber die Ergebnisse einer Versuchsreihe den beiden letzten Fällen, so hat überhaupt die Anwendung der Gauß'schen Theorie der Beobachtungsfehler keinen Sinn, dann genügt die Bestimmung von F und f in der oben angedeuteten Weise vollständig. Namentlich dann, wenn die Fehler angenähert regelmäßig wachsen, wie es so oft bei Beobachtungsreihen der Fall ist, welche nur aus einer geringen Zahl von Einzelversuchen bestehen, genügt es völlig, den mit dem wahrscheinlichen Fehler übereinstimmenden durchschnittlichen Fehler zu berechnen.

Im ersten Falle jedoch, in dem also kleinere Fehler häufiger auftreten als größere, berechnet man den wahrscheinlichen und mittleren Fehler F_m der einzelnen Beobachtung auf Grund der Theorie der Beobachtungsfehler nach den Formeln:

$$F = \pm\, 0{,}6745 \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2}{n-1}} = \pm\, 0{,}6745 \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}, \quad \text{(II)}$$

$$F_m = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

Um den wahrscheinlichen oder mittleren Fehler des arithmetischen Mittels zu finden, muss man F bez. F_m mit $\frac{1}{\sqrt{n}}$ multipliciren.

Die Formel (II) gilt nur für einen sehr großen Werth von n; für kleinere Werthe von n liegt F innerhalb der Grenzen:

$$F\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right) < F < F\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right), \quad \ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

worin $\varrho = 0{,}4769$ ist. Für $n = 10, 40, 100, 1000$ lauten diese Grenzwerthe:

$$0{,}85\ F < F < 1{,}15\ F,$$

$$0{,}925\ F < F < 1{,}075\ F,$$

$$0{,}95\ F < F < 1{,}05\ F,$$

$$0{,}985\ F < F < 1{,}015\ F.$$

In der Regel wird man sich mit der Berechnung des mittleren Werthes von F auf Grund der Formel (II) begnügen; man muss nur im Auge behalten, dass die Abweichungen zwischen den berechneten Werthen und den etwa aus den Versuchen unmittelbar entnommenen Werthen um so größer ausfallen werden, je kleiner n ist.

Indessen ist die Berechnung der Summe der Quadrate der einzelnen Fehler bei großem n sehr zeitraubend. Man hat daher bequemere Formeln abgeleitet, in denen die Summe der Quadrate durch die einfache Summe der Abweichungen ersetzt ist. Gegen die von Gauß aufgestellte Formel:

$$F = \frac{0{,}8453\ [\lambda]}{\sqrt{n\,(n-1)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(V)}$$

erhebt Fechner[1]) das Bedenken, dass sie für den Fall $n = 2$ keinen richtigen Werth liefere. Für $n = 2$ müssen die Abweichungen vom Mittel offenbar denselben Werth haben. Für $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ gibt Formel (II) den Werth 1,91, während Formel (V) den Werth 2,37 liefert. Offenbar sind hier beide Werthe falsch, denn in dem vorliegenden Falle ist die Hauptbedingung der Gauß'schen Theorie nicht erfüllt, d. h. es treten nicht kleinere Fehler häufiger auf als größere. Hier ist der wahrscheinliche wie auch der durchschnittliche bez. mittlere Fehler gleich 2.

Wenn sonach die Nothwendigkeit einer Correctur der Formel (V) gar nicht vorliegt, will ich doch die von Fechner abgeleitete Formel etwas genauer prüfen. Sie lautet unter der Annahme $\pi = 3$:

$$F = \frac{1,1955}{\sqrt{2n - 1}} \cdot \frac{[\lambda]}{n}$$

und ist in dieser Form der Formel (V) auf keinen Fall vorzuziehen. Die genauere Form ist:

$$F = 0,6745 \sqrt{\frac{3,14159}{2n + 3,14159 - 4}} \cdot \frac{[\lambda]}{n}.$$

Beide Formeln beziehen sich auf den wahrscheinlichen Fehler des arithmetischen Mittels. Der letzten Formel lassen sich folgende Umformungen geben:

$$F = 0,6745 \sqrt{\frac{1,57079}{n - 0,42921}} \cdot \frac{[\lambda]}{n},$$

$$F = \frac{0,8453\,[\lambda]}{n\sqrt{n - 0,42921}}.$$

Um den wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Beobachtung abzuleiten, muss man diesen Ausdruck mit $\sqrt{n}$ multipliciren. Man erhält:

$$F = \frac{0,8453\,[\lambda]}{\sqrt{n}\,(n - 0,43)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VI)}$$

Man hätte diese Formel, welche aus der von Fechner auf sehr umständlichem Wege abgeleiteten durch bloße Umformung erhalten

1) Pogg. Ann. der Physik u. Chemie. Jubelband, S. 72 u. 73.

worden ist, mit Rücksicht auf Formel (V) und in Anbetracht dessen, dass Formel (II) für $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ den Werth 1,91 gibt, aus der Gleichung:

$$\frac{0{,}8453\,[\lambda]}{\sqrt{n\,(n-y)}} = 1{,}91$$

ableiten können, welche für y den Werth 0,43 liefert.

Die Formeln (V) und (VI) unterscheiden sich nur durch die Ausdrücke $n-1$ und $n-0{,}43$ unter der Wurzel, und es ist ohne weiteres ersichtlich, dass sie bei leidlich großem n nur sehr wenig abweichende Werthe liefern müssen. Im Hinblick auf die größeren Schwankungen bei psychophysischen Versuchen wird man ohne weiteres auf den Gedanken kommen, an Stelle des Werthes $n-0{,}43$ den Werth n zu setzen, wodurch man die einfachere Formel:

$$F = \frac{0{,}8453\,[\lambda]}{n}$$

d. h. mit Rücksicht auf (I):

$$F = 0{,}8453\,f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VII)}$$

erhält. Bezeichnet man den eben gefundenen Werth von F mit A, so kann man die Formeln (V) und (VI) in folgender Weise schreiben:

$$F = A\sqrt{\frac{n}{n-1}}, \quad \text{(V')} \qquad F = A\sqrt{\frac{n}{n-0{,}43}}. \quad \text{(VI')}$$

Die Wurzelgrößen haben folgende Werthe:

$n =$	10	20	40	100
$\sqrt{\frac{n}{n-1}} =$	1,054	1,026	1,013	1,005
$\sqrt{\frac{n}{n-0{,}43}} =$	1,022	1,011	1,005	1,002.

Man kann sich hiernach bei 40 Versuchen bereits ohne jedes Bedenken der Formel (VII) bedienen. Der Factor $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ in Formel (V') entspricht übrigens der Correction wegen des endlichen n, für welche Fechner[1]) den Näherungswerth $\frac{2n}{2n-1}$ angibt. Diese Formel gibt

1) Fechner, Rev. der Hauptp. d. Psychophysik, S. 111.

für $n = 10$ den Werth 1,053, die übrigen stimmen mit den obigen überein.

Die Formel (VII) lässt sich auf folgende Weise streng ableiten.

Bekanntlich [1] ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass λ ein Fehler zwischen o und δ sei:

$$W = \frac{Z}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m\delta} e^{-t^2} dt = \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-m^2\lambda^2} d\lambda .$$

Nach dem früheren bezeichnet f das Mittel aller Abweichungen λ ohne Rücksicht auf das Vorzeichen. Um dafür einen Ausdruck zu gewinnen, muss man das Integral, anstatt es über die Grenzen $\delta = -\infty$ bis $+\infty$ auszudehnen, für die Grenzen 0 bis ∞ nehmen und verdoppeln, sowie unter dem Integralzeichen mit λ multipliciren. Man erhält auf diese Weise:

$$f = \frac{2m}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda e^{-m^2\lambda^2} d\lambda .$$

Setzt man hierin: $\lambda^2 = z$, so wird $\lambda = \sqrt{z}$, $d\lambda = \frac{dz}{2\lambda} = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$ und:

$$f = \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-m^2 z} dz = \frac{m}{m^2\sqrt{\pi}} = \frac{1}{m\sqrt{\pi}} \text{ [2]}.$$

Anderseits ist:

$$F = \frac{\varrho}{m} \text{ [3]}.$$

Demnach wird:

$$\frac{F}{f} = \varrho \sqrt{\pi} \quad \text{oder: } F = 0{,}8543 f .$$

Diese Formel stimmt völlig mit Formel (VII) überein.

Mit Rücksicht auf die Beziehung:

---

1) Meyer, Vorl. über Wahrscheinlichkeitsrechnung, S. 250.

2) Schlömilch, Aufg. zur Integralrechnung. S. 133, Aufg. 42.

3) Phil. Stud. VII, S. 574.

$$F_m = 1{,}4826\,F \quad \text{oder:}\; F = 0{,}6745\,F_m \quad \ldots \text{(VIII)}$$

erhält man:

$$F_m = 1{,}2533\,f \quad \ldots\ldots\ldots \text{(IX)}$$

und schließlich als Beziehung zwischen dem durchschnittlichen Fehler und dem Präcisionsmaß:

$$m = \frac{0{,}5642}{f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(X)}$$

Um zu untersuchen, ob und wie weit die Abweichungen bei einer ausgeführten Beobachtungsreihe dem Gesetze der zufälligen Fehler genügen, ob also die im Vorstehenden mitgetheilten Formeln Anwendung finden können, muss man sich folgender Formel[1]) bedienen:

$$Z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho \frac{\delta}{F}} e^{-t^2} dt \,.\, N = \Phi\left(\varrho \,.\, \frac{\delta}{F}\right) N. \quad \ldots \text{(XI)}$$

Man berechnet zunächst den Werth F auf Grund einer der unter (V) bis (VII) mitgetheilten Formeln. Derselbe betrage, wie bei meinen Schallversuchen: $F = 24{,}2$. Alsdann berechnet man für die willkürlich gewählten Werthe $\delta = 10, 20, 30 \ldots$ die Ausdrücke $\varrho \frac{\delta}{F}$ für $\varrho = 0{,}4769$. Das gibt:

$\delta =$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\varrho \frac{\delta}{F} =$	0,197	0,394	0,591	0,788	0,985	1,182	1,380	1,577	1,774	1,971.

Die Werthe $\varrho \frac{\delta}{F}$ entsprechen den Werthen γ in der Meyer'schen Tabelle für das Integral:

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt\,.$$

Die entsprechenden Werthe von Φ sind:

0,219 0,423 0,597 0,735 0,836 0,905 0,949 0,974 0,988 0,995.

---

1) Phil. Stud. VII, S. 574.

Sind 100 Versuche angestellt worden, so hat man die vorstehenden Zahlen mit 100 zu multipliciren, und dann liegen zwischen 0 und 10, 0 und 20, 0 und 30 ...., 0 und 100 folgende Fehler: 21,9; 42,3; 59,7; 73,5; 83,6; 90,5; 94,9; 97,4; 98,8; 99,5. Durch Subtraction ergeben sich die Fehler zwischen 0 und 10, 10 und 20, 20 und 30, ... 90 und 100, nämlich: 21,9; 20,4; 17,4; 13,8; 10,1; 6,9; 4,4; 2,5; 1,4; 0,7. Für die nämlichen Grenzen sind nunmehr in der Beobachtungsreihe die Fehler zu zählen und mit den oben berechneten zu vergleichen. Benutzen wir die genannten Fehler umgekehrt zur Berechnung von F. Wir nehmen für die Grenzwerthe die Mittelwerthe an, also 21,9 Fehler zu 5; 20,4 Fehler zu 15 u. s. w. und für die noch an 100 fehlenden 0,5 den Werth 105. Dann gibt Formel (II) $[\lambda\lambda] = 128840$ und $F = 24,33$. Ferner wird: $[\lambda] = 2879$ und mithin nach Formel (V): $F = 24,46$, nach Formel (VI): $F = 24,39$ und nach Formel (VII): $F = 34,34$. Diese Werthe sind sämmtlich etwas höher als der Werth F, von welchem ausgegangen wurde (24,2). Diese Abweichung erklärt sich daraus, dass bei den Fehlergrößen die Mittelwerthe zu Grunde gelegt wurden, während nach der Theorie etwas geringere Werthe gewählt werden müssten. Die Abweichungen zwischen den verschiedenen Werthen sind indess ganz unbedeutend. Der Werth (VII) stimmt am besten mit dem Werthe der genauen Formel (II) überein, die Abweichung beträgt nur 0,04 %, ist also völlig belanglos. Diese Ergebnisse sprechen unbedingt für Formel (VII), welche mit überaus großer Genauigkeit die größte Einfachheit verbindet.

Um ein Beispiel für die Abweichungen zwischen den berechneten und beobachteten Werthen zu geben, wähle ich die im Meyer, S. 253, abgedruckte Beobachtungsreihe von Bradley[1]), den Laplace »das Muster eines Beobachters« nennt. Die Beobachtungen hatten den Zweck, die Differenz der Rectascension zwischen der Sonne und den Sternen Ataïr und Procyon zu bestimmen, und ergaben folgende Werthe:

$$F = 0,2637'', \quad n = 470 .$$

1) Berliner Astronom. Jahrbuch 1834. S. 274.

Fehlergrenze:	Anzahl der Fehler nach der Theorie	nach d. Erfahrung	Differenz
0,0″ bis 0,1″	95	94	+ 1
0,1 » 0,2	89	88	+ 1
0,2 » 0,3	78	78	0
0,3 » 0,4	64	58	+ 6
0,4 » 0,5	50	51	— 1
0,5 » 0,6	36	36	0
0,6 » 0,7	24	26	— 2
0,7 » 0,8	15	14	+ 1
0,8 » 0,9	9	10	— 1
0,9 » 1,0	5	7	— 2
über 1″	5	8	— 3

Die im Vorstehenden charakterisirte Prüfungsmethode der Gültigkeit der Gauß'schen Theorie der Beobachtungsfehler ist jedoch ebenfalls ziemlich zeitraubend. Man kann indess auch hier auf kürzerem Wege entscheiden, ob und in wie weit die gewonnenen Versuchszahlen dem Gauß'schen Fehlergesetz unterliegen.

Hat man den Werth F_m mittels der Formel (III) bestimmt, so muss bei der Gültigkeit der Gauß'schen Theorie die Formel (IX) erfüllt sein.

So ergibt sich für die früher berechneten Fehler aus dem Gebiete des Schallmaßes $F_m = 36{,}075$, während $1{,}2533 f = 36{,}082$ ist. Diese Werthe stimmen in der That sehr gut überein. Nimmt man dagegen an, in einer Beobachtungsreihe seien die Fehler 1, 2, 3, ... 100 begangen worden, so wird $[\lambda\lambda] = 340850$, $F_m = 58{,}76$, $f = 50{,}5$ und $1{,}2533 f = 63{,}29$. In diesem Falle ist sonach Formel (IX) nicht erfüllt. Hier würde, wie schon aus dem früheren hervorgeht: $F_m = F = f$ sein. Ergeben sich die Fehler: zweimal 1, viermal 2, sechsmal 3 u. s. w. bis zwanzigmal 10, so erhält man: $[\lambda\lambda] = 6050$, $F_m = 7{,}45$, $f = 7$, also: $1{,}2533 f = 8{,}77$. Auch hier stimmt die Formel (IX) nicht. Hier müsste $F > f$ ausfallen. Benutzt man jedoch die Formeln (VII) und (VIII) zur Berechnung von F und F_m, so kann die aus diesen Formeln abgeleitete Formel (IX) nicht zur Prüfung der Gauß'schen Theorie verwandt werden. Man verfährt dann wie folgt:

1. Man bestimme den Mittelwerth M aller beobachteten Werthe x.

2. Man addire alle Werthe, welche größer als M sind. Ist ihre Summe S und ihre Zahl z, so wird:

$$f = \frac{2(S - zM)}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(XII)}$$

3. Man ermittle F aus Formel (VII), die meist in der vereinfachten Form: $F = 0{,}85 f$ hinreichen wird.

4. Man bilde die Ausdrücke $M \pm F$. Dann müssen innerhalb der Grenzen $M + F$ und $M - F$ $\frac{n}{2}$ Versuche liegen, wenn die Gauß'sche Theorie anwendbar sein soll. Von den mit den genannten Grenzen etwa übereinstimmenden Werthen x sind nur die Hälfte in Anrechnung zu bringen.

Bei dem oben benutzten ersten Beispiele liegen zwischen 0 und 20: 42,3 Fehler, zwischen 20 und 30 dagegen 17,4 Fehler. Da $F = 24{,}3$ ist, müssen noch $1{,}74 \,.\, 4{,}3 = 7{,}5$ Fehler hinzugefügt werden. Man erhält demnach 49,8, d. h. nahezu 50. Im zweiten Falle ist $F = 42{,}7$, bis dahin liegen nur 42 bis 43 Fehler, im letzten Falle endlich hat F den Werth 6, bis dahin liegen aber nur 36 Fehler.

Da die Werthe F, F_m und m sämmtlich in einfachen Beziehungen zu einander stehen, genügt die Ermittelung einer dieser Größen.

Das Kriterium für die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes besteht darin, dass:

$$\frac{F}{M} = \text{const} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(XIII)}$$

werden muss. Dabei ist jedoch vorausgesetzt, dass für jeden Normalreiz dieselbe Zahl von Beobachtungen vorliegt, da eine größere Zahl von Beobachtungen unter Umständen einen genaueren Mittelwerth gibt, also der wahrscheinliche Fehler der einzelnen Beobachtung mit der Zahl der Versuche abnehmen kann. Dies ist vielfach außer Acht gelassen worden.

Ist der Werth, um dessen Bestimmung es sich handelt, von vorn herein bekannt und etwa gleich N, so erhält man aus:

$$C = M - N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(XIV)}$$

den dem Versuchsergebnisse anhaftenden constanten Fehler.

Ist bei dem unter 4) genannten Kriterium für die Gültigkeit der Gauß'schen Theorie die Zahl der innerhalb der angegebenen Grenzen gelegenen Werthe wesentlich größer oder wesentlich kleiner als $\frac{n}{2}$, so ist die Formel (VII) nicht brauchbar. Im ersteren Falle enthalten die Versuchsergebnisse einen kleineren wahrscheinlichen Fehler, im letzteren Falle einen größeren wahrscheinlichen Fehler, als ihn Formel (VII) ergibt.

(Fortsetzung folgt im nächsten Heft.)