Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik.

Von

Gottl. Friedr. Lipps.

I.

Aufgabe und Methode der Untersuchung.

§ 1.

Wenn man die Mathematik in ganz bevorzugter Weise als eine auf sichere Fundamente gegründete, fest gefügte Wissenschaft preist, so hat man wohl zunächst die Elemente, die nach Euklid's Methode behandelte Geometrie und die Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra, im Auge. In der That scheinen die Grundlagen der elementaren Mathematik keinen Anlass zu begründeten Zweifeln zu geben. An der Spitze der Geometrie stehen zwar Grundsätze, die als evidente Wahrheiten ohne Beweis aufgestellt werden; sie bestehen aber in einfachen Denknothwendigkeiten oder in selbstverständlichen Anschauungen. Es ist beispielsweise denknothwendig, Gleiches, das um Gleiches vermehrt oder vermindert wurde, wieder als Gleiches aufzufassen; es ist ferner der anschauenden Betrachtung selbstverständlich, dass zwei Gerade einer Ebene sich entweder in einem Punkte schneiden, einen Winkel bilden und somit verschiedene Richtung haben oder aber sich nicht schneiden, keinen Winkel bilden und folglich gleiche Richtung haben oder parallel sind. Und die Nothwendigkeit, solche Selbstverständlichkeiten besonders namhaft zu machen, pflegt man erst dann einzusehen, wenn man ihnen beim Weiterschreiten auf Schritt und Tritt begegnet. — Andererseits hat es die Arithmetik und Algebra mit positiven und negativen, gebrochenen und irrationalen Zahlen zu thun, die sich im Verlaufe einer Rechnung als inhaltsleere Symbole einstellen können und keinen Sinn zu haben scheinen. Deutet man aber die Zahlen als Zeichen für theilbare Gegenstände, von denen es überdies zwei, einander direct entgegengesetzte Arten gibt (z. B. als Zeichen für die Längen von Strecken, die von einem bestimmten Punkte aus in einer Geraden nach der einen oder nach der anderen Seite hin abgetragen werden können), so erhalten auch die gebrochenen und irrationalen, die positiven und negativen Zahlen einen wohl definirten Sinn.

Eine Untersuchung dieser von selbst klaren Grundlagen der elementaren Mathematik kann daher als überflüssiges Bemühen erscheinen. Der Philosoph freilich, der nach dem Wesen des Anschauens und des Erkennens fragt, wird prüfen wollen, worin denn die Evidenz der geometrischen Grundsätze besteht und was die Zahlen eigentlich zu bedeuten haben. Der mathematische Forscher ferner, der sich gewöhnt hat, für jede Behauptung einen Beweis zu fordern, wird gern sich die Aufgabe stellen, die Grundsätze der Geometrie, wenn sie nun einmal thatsächlich nicht beweisbar sind, doch wenigstens auf die geringstmögliche Anzahl zurückzuführen; auch wird ihm vielleicht eine Versinnlichung der Zahlen, die ja seine freien Schöpfungen sind, höchstens als pädagogisches Hülfsmittel zulässig erscheinen, das nicht im Wesen der Zahlen begründet sei.

Tritt man dagegen an die höhere Mathematik heran, die auf Grund der historischen Entwicklung auch neuere Mathematik genannt werden kann, so wird der an gewohnten Anschauungen und Begriffen festhaltende Verstand manche Beunruhigung empfinden. Schon ein flüchtiger Blick auf die einzelnen Untersuchungsgebiete zeigt das Vorhandensein von Schwierigkeiten, von welchen die Elemente der Mathematik frei zu sein scheinen.

Die geometrischen Gebilde, die bisher dem Blick so ruhig Stand hielten, gerathen in continuirlichen Fluss, um als geeignete Vertreter allgemeiner Klassen von Linien und Flächen gelten zu können; sie erstrecken sich ins Unendliche und sollen auch dann noch erkennbaren Gesetzen gehorchen; ja es spielt sogar gerade das, was sich im Unendlichen ereignet, eine wichtige, die Untersuchungsmethode dieser neueren Geometrie beeinflussende Rolle. — Die Operationen der Algebra (Addition, Subtraction, Multiplication und Division) werden als einfachste Beispiele allgemeiner Verknüpfungen erkannt, die zu einer formalen Operationenlehre Veranlassung geben. Während aber die positiven und negativen Zahlen die leicht verständliche Basis für das Operationensystem der Algebra bilden, besitzen die complexen Zahlensysteme, die den verallgemeinerten Operationen zu Grunde liegen, keine greifbare Existenz; das Gewand der Zahlen, in das sie sich kleiden lassen sollen, will ihnen doch zu eng werden und sie scheinen vielmehr etwas Allgemeineres von unbestimmter Natur zu sein, von dem nur vorausgesetzt wird, dass es den Verknüpfungsgesetzen der Operationenlehre Gelegenheit gibt, sich zu bethätigen. — Die Zahlen werden variabel, so dass unendliche Mannigfaltigkeiten von Zahlenwerthen entstehen können, die ebenso durch Symbole (z. B. Buchstaben) bezeichnet werden, wie vordem die fest gegebenen, unveränderlichen Zahlen. Diese Symbole werden nun Variable genannt. Insbesondere kann die Variabilität eine solche sein, dass die erzeugten Zahlenmannigfaltigkeiten continuirlich werden. Dann unterscheidet sich eine Zahl von einer zunächst folgenden nur durch einen unendlich kleinen Betrag. Die so resultirenden unendlich kleinen Differenzen, in welchen sich die Zahlenwerthe zu verschwindenden und doch noch existirenden Größen verflüchtigen, werden als Differentiale der Rechnung unterworfen und bilden trotz ihrer geheimnissvollen Existenz durch die Methoden der Differential- und Integralrechnung das mächtigste Instrument der auf die variable Zahl gegründeten Untersuchungen, die man in ihrer Gesammtheit als Analysis zu bezeichnen pflegt. Vor allem interessirt hier das Abhängigkeitsverhältniss, in welchem Variable sowohl bezüglich der Form des sie verbindenden rechnerischen Processes als auch bezüglich der Eigenschaften der durch sie dargestellten Zahlenmannigfaltigkeiten stehen können. Die eine Variable heißt dann eine Function der anderen Variablen und alle Variablen können gleichzeitig Veränderungen ihres Werthes erleiden, die im allgemeinen stetiger Natur zu sein vermögen. Es erscheint nun selbstverständlich, dass die Verhältnisse der unendlich kleinen, simultanen Veränderungen der Variablenwerthe durch Differentialquotienten bestimmbar seien; gleichwohl gibt es stetige Functionen, die nicht differentiirbar sind. Während somit Stetigkeit und Differentiirbarkeit gleichbedeutend zu sein scheinen, erweist sich die Stetigkeit als allgemeinerer Begriff, und eine neue Schwierigkeit fügt sich den bereits vorhandenen hinzu. — Jede Schranke scheint vollends die mathematische Forschung zu durchbrechen, indem sie die geometrische Deutung der Zahlenmannigfaltigkeiten und die Einkleidung der geometrischen Untersuchung in das Gewand der Analysis lehrt. In den Elementen wurde zwar schon das Verlängern und Verkürzen von Strecken als Addiren und Subtrahiren aufgefasst, und durch Construiren proportionaler Strecken (z. B. an ähnlichen Dreiecken) konnten auch Producte und Quotienten von Strecken hergestellt werden. Dadurch wurde es möglich, eine geometrische Constructionsaufgabe algebraisch zu lösen, indem man beispielsweise für die Länge einer gesuchten Strecke eine Gleichung auf Grund der Beziehungen zwischen den Bestimmungsstücken der geometrischen Figur herstellte und die Lösung dieser Gleichung geometrisch construirte. Aber einen anderen Charakter als diese algebraische Geometrie trägt die auf der geometrischen Deutung der variablen Zahl beruhende analytische Geometrie. In ihr erscheinen die geometrischen Gebilde als Punktmannigfaltigkeiten, indem die Fläche von zwei Curvenscharen, der Raum von drei Flächenscharen überzogen gedacht wird, und zwar von der Art, dass jeder Punkt der Fläche oder des Raumes als Schnitt je zweier Curven oder je dreier Flächen sich darstellt. Hierdurch wird es möglich, die Punkte einer Fläche oder des Raumes durch Coordinaten zu bestimmen, deren Länge auch durch Zahlen angegeben werden kann. Der so geschaffenen Beziehung zwischen Zahlenmannigfaltigkeiten und den eine Curve oder eine Fläche erfüllenden Punktmannigfaltigkeiten scheint kein Hinderniss im Wege zu stehen. Daher spiegeln sich die Gesetzmäßigkeiten geometrischer Gebilde in analytischen Formeln, und die letzteren sind einer selbstverständlichen Einkleidung in geometrisches Gewand fähig. Der Geometer scheint von der Fessel der beschwerlichen Anschauungsthätigkeit befreit, da er in der analytischen Formel das geschmeidige Instrument besitzt, mittelst dessen er die geometrischen Figuren erzeugt und ihre Geheimnisse ergründet — sogar die Bedingungen, unter denen sie möglich sind.

Selbst die Grundlagen der Geometrie kann man somit auf analytischem Wege festsetzen, und das in so gründlicher Weise, dass es den Anschein hat, als ob ganz anders organisirte Wesen als wir Menschen, die zu irgend welcher von der unsrigen abweichenden Art anschauender Erfassung der Dinge ihrer Umgebung befähigt sind, mit Erfolg bei dem analytischen Geometer Belehrung über die Grundlagen ihrer Geometrie und über die Eigenschaften ihrer geometrischen Gebilde nachsuchen könnten. Die Zahl, die in der elementaren Mathematik der Anlehnung an geometrische Vorstellungen bedürftig war, emancipirt sich und wird zur Herrscherin, die ihre geometrische Herkunft verleugnet. Denn auch als irrationale Zahl, durch welche die Zahlenmannigfaltigkeit erst stetig wird, erhält sie neuerdings eine von geometrischer Veranschaulichung freie, auf sich selbst gegründete Definition. Ist aber dies geschehen, so scheint die Zahl aus sich selbst eine stetige Mannigfaltigkeit zu gebären, und es scheint das zu Tage tretende arithmetische Punktcontinuum unsere Raum- und Zeitcontinua als specielle Fälle in sich zu fassen.

§ 2.

Aus diesen kurzen Bemerkungen wird deutlich, dass beim Betreten dieser Untersuchungsgebiete thatsächliche Schwierigkeiten zu überwinden sind. Sie finden ihren augenscheinlichen Grund in der Zulassung des Unendlichfernen in der Geometrie und des Unendlichkleinen und Unendlichgroßen in der Analysis; bei einer tiefer gehenden Betrachtung scheinen sie dagegen durch die mit Hülfe des Unendlichen gewonnene, alle Grenzen überschreitende Entwicklung der Grundbegriffe verursacht zu sein, deren vollendete Form den ursprünglichen Gehalt kaum noch erkennen lässt. Ein neuer Geist beherrscht somit offenbar diese neuere Mathematik, der zwar zu glänzenden Resultaten führt, die widerspruchslose Klarheit und Einfachheit der Grundlagen aber preiszugeben scheint.

Die Ueberwindung der bezeichneten Schwierigkeiten stellt sich nun als Aufgabe einer Untersuchung der Grundlagen dar. Eine solche Untersuchung konnte den Elementen der Mathematik gegenüber als unnöthig erscheinen, da ihre Grundlagen bloß gewohnte Anschauungen und leicht interpretirbare Begriffe aufweisen; sie zeigt sich dagegen den höher ausgebildeten mathematischen

Disciplinen gegenüber dringend nothwendig, da in ihnen thatsächliche Schwierigkeiten Begriffe und Methoden von fundamentaler Bedeutung in ein Dunkel hüllen, das nothwendig erhellt werden muss.

Die damit vollzogene Scheidung zwischen den Grundlagen der elementaren und der höheren Mathematik ist allerdings vom Standpunkte des philosophischen und mathematischen Forschers aus kaum berechtigt: den Philosophen wird der Zusammenhang der mathematischen Begriffe und Methoden mit den allgemeineren der Logik in ihrer niederen und höheren Entwicklungsstufe in gleicher Weise interessiren; und der Mathematiker wird die Grundlagen der einzelnen Untersuchungsgebiete ohne Rücksicht auf ihren elementaren oder fortgeschritteneren Gehalt mit derselben Sparsamkeit an Voraussetzungen und in derselben Reinheit, frei von fremdartigen Beimengungen, zu entwickeln suchen. Beide Standpunkte bedingen eine besondere Stellung zu den Grundlagen, die für den einen mit Rücksicht auf den Zusammenhang zwischen mathematischer und philosophischer Erkenntniss, für den anderen im Interesse einer rein mathematischen Behandlung und Ausgestaltung zu einer Untersuchung Veranlassung geben kann; dabei spielt aber eine Scheidung in niedere und höhere Mathematik keine Rolle.

Es war indessen angezeigt, diese Scheidung zu vollziehen, um die obige Aufgabebestimmung für eine Untersuchung der Grundlagen zu gewinnen, welche den thatsächlichen Bedürfnissen entspringt, die sich beim Betreten der mathematischen Untersuchungsgebiete fühlbar machen. Als vorläufiges Resultat der bisherigen Betrachtungen bietet sich somit die Einsicht dar, dass die Elemente der mathematischen Untersuchung auf einer von selbst klaren Basis ruhen, dass dagegen die ausgebildeteren Untersuchungsgebiete in ihren fundamentalen Begriffen und Methoden Schwierigkeiten aufweisen, die in der Benutzung des Unendlichen und in der kaum durch Veranschaulichung gestützten Entwicklung der Abstraction begründet zu sein scheinen, und dass somit dem Bedürfnisse Rechnung getragen werden muss, das von den Grundbegriffen der entwickelteren Disciplinen die nämliche von selbst einleuchtende Klarheit verlangt, welche die Grundlagen der Elemente auszeichnet.

§ 3.

Eine definitive Aufgabebestimmung ist allerdings damit noch nicht erreicht. Denn wie schon bemerkt wurde, beschäftigt sich der Mathematiker und der Philosoph, jeder in seiner Art, mit den Grundlagen der Mathematik. Es ist nun naturgemäß, von dem einen und von dem anderen eine Beseitigung der empfundenen Schwierigkeiten zu erwarten. Bestätigt sich diese Erwartung vollständig, so ist gar kein Grund vorhanden, die mathematischen Begriffe und Methoden einer selbständigen Untersuchung zu unterwerfen, da sie als Ausfluss rein mathematischer oder rein philosophischer Betrachtungen genügende Klärung finden würden. Sieht man sich dagegen in dieser Erwartung getäuscht und bieten somit die Grundlagen der Mathematik ein selbständiges Problem dar, so wird sich doch die Voraussetzung bestätigen, dass die Beachtung einer von rein mathematischen oder rein philosophischen Interessen beeinflussten Auffassung der Grundlagen die vorläufige Bestimmung der Aufgabe in wesentlichen Punkten modificiren und zugleich den Weg zur Lösung des Problems in seiner definitiven Gestalt weisen wird.

Für den Mathematiker kommen die Grundbegriffe und Methoden hauptsächlich in so weit in Betracht, als sie ein brauchbares Instrument der mathematischen Arbeit bilden. Innerhalb dieser Grenzen erhalten sie nun alle wünschenswerthe Klarheit, indem Begriffe und Methoden scharf und bestimmt definirt werden mit Rücksicht auf die Sphäre der mathematischen Untersuchungen, innerhalb deren sie zur Verwendung kommen. Zunächst können freilich diese Definitionen fremdartig und unverständlich erscheinen; sie werden aber verständlich durch die Ausführung der Operationen und das Erfassen der Gesetzmäßigkeiten, welche den Definitionen zu Grunde liegen; zugleich verlieren sie durch Angewöhnung an die mathematischen Processe das Fremdartige, das sie anfänglich haben, falls sie in den gewohnten Anschauungen keine Stütze finden.

Der Begriff des Differentialquotienten und des Integrals, die Methode des Differentiirens und des Integrirens können so, wie sie in den gangbaren Lehrbüchern entwickelt werden, als Beispiele solcher mathematischer Definitionen gelten. Auf Grund derselben kann jedermann lernen, Differentialquotienten und Integrale thatsächlich zu berechnen. Was nun ein Differentialquotient und ein Integral in einem einzelnen Falle zu bedeuten habe, kann keinem Zweifel unterliegen; es steht dies ja vor Augen, durch Symbole von feststehender Bedeutung gekennzeichnet. Das Verständniss des Begriffs des Differentialquotienten und des Integrals ergibt sich dann allmählich mittelst der mathematischen Erfahrung, die man durch die Ausführung der einzelnen Differentiations- und Integrationsprocesse sammelt. Die anfänglich schwer verständliche Definition dieser Begriffe scheint schließlich gar keine Schwierigkeit mehr zu bieten, da die mathematischen Processe, in deren Angabe die Definition wesentlich besteht, durch die mannigfache Einzelausführung bekannt und vertraut geworden sind.

Daraus wird ersichtlich, dass die rein mathematische Behandlung der Grundlagen in gewissem Sinne die oben gekennzeichneten Schwierigkeiten beseitigt: insofern nämlich, als das Fremdartige der Begriffe durch ihren scharf fixirten Gebrauch sich verliert und die nachträglich gewonnene Erfahrung das anfänglich sich regende Verlangen nach ihrer Klärung überflüssig erscheinen lässt. So erscheint dann eine besondere Untersuchung der Grundbegriffe für die weitergehenden mathematischen Disciplinen ebenso überflüssig wie für die Elemente der Mathematik; es macht sich nur der Unterschied bemerklich, dass die Grundlagen der Elemente sich direct an gewohnte, als sicher empfundene Vorstellungen anlehnen, dass dagegen die Grundlagen der Disciplinen der höheren Mathematik erst durch die mathematische Arbeit dem Geiste gewohnt und vertraut werden, dann aber als ebenso sicher empfunden werden.

Als directer Erfolg einer solchen rein mathematischen Behandlung der Grundbegriffe ist hervorzuheben, dass sie den Argwohn, die Grundlagen könnten fehlerhafte Begriffsbildungen und Methoden enthalten, völlig zerstreut. Denn die Begriffe sind als Producte der mathematischen Arbeit nicht Erzeugnisse einer dichtenden Phantasie, sondern aus thatsächlichen Bedürfnissen erwachsen; liegt darin schon eine Gewähr, dass selbst paradox erscheinende Begriffe eine Berechtigung zur Existenz haben werden, so erscheint die Annahme von etwa vorhandenen Irrthümern vollends ausgeschlossen, wenn man bedenkt, dass die Begriffe durch die mathematische Arbeit selbst einer fortwährenden Controle unterworfen werden. Da nun die Mathematik als ein harmonischer, wohl gefügter Bau sich darstellt, so erscheint es unmöglich, dass dessen reiche Gliederung auf schwankender Grundlage ruhe.

Unbedenklich ist dieser mathematische Standpunkt, soweit es sich um längst recipirte Begriffe handelt, die eine gesicherte Stellung im Rüstzeug mathematischer Forschung einnehmen und als abgeklärter Niederschlag der wissenschaftlichen Arbeit in den Darstellungen der einzelnen Lehrgebiete nach feststehenden Normen Aufnahme finden. Da kann man an sich selbst beobachten, wie die Handhabung eines solchen Begriffs allmählich das anfängliche Befremden mildert und die zunehmende Gewöhnung das Verlangen nach seiner Klärung mehr und mehr stillt. Man eignet sich ein mathematisches Taktgefühl an, das mit Sicherheit die Eigenthümlichkeit des Begriffs erfasst und die Methode für dessen richtige Verwendung lehrt. Man ist sich dann aber auch bewusst, die Grundlagen der Mathematik bloß mit Rücksicht auf die Folgerungen zu beachten, die sich aus jenen Bedingungen ergeben, nicht mit Rücksicht auf die logischen Voraussetzungen, auf denen die Grundlagen selbst wieder ruhen.

§ 4.

Eine derartige Abfindung der Grundlagen muss aber als unzureichend empfunden werden, wenn man die historische Entwicklung der fertig vorliegenden Begriffe verfolgt und bemerkt, dass ein heute recipirter Begriff früher beanstandet wurde und sich nur allmählich durch den Nachweis von seiner Brauchbarkeit Anerkennung verschaffen konnte, dass sogar vorübergehende fehlerhafte Auffassungen seine Entwicklung zu hemmen vermochten, dass insbesondere sein gegenwärtiger Entwicklungszustand nicht nothwendig ein dauernder ist, dass vielmehr noch nicht beachtete Keime den Begriff erst zu voller Entfaltung bringen können.

So blieb z. B. der Begriff der unendlich kleinen Größe, sowohl als Quotient zweier unendlich kleiner Größen als auch als Summe von unendlich vielen unendlich kleinen Größen den griechischen Geometern fremd. Selbst das Problem der Quadratur des Kreises brachte sie nicht dazu, den Kreis direct als Polygon mit unendlich vielen unendlich kleinen Seiten zu betrachten. »So lange es griechische Geometer gab«, sagt Hankel[1]), »sind dieselben immer vor jenem Abgrunde des Unendlichen stehen geblieben und haben niemals die Grenze der klaren Anschauung und des völlig widerspruchsfreien Begriffes überschritten«. Erst Kepler[2]) that diesen Schritt, indem er den wahren Gehalt der von Archimedes angewandten Exhaustionsmethode anzugeben wagte: er definirte thatsächlich den Kreis als Polygon mit unendlich vielen unendlich kleinen Seiten und konnte mittelst dieser Vereinfachung zur Berechnung der Oberfläche und des Volumens von complicirteren stereometrischen Gebilden direct gelangen, da er nun nicht mehr genöthigt war, die Berechnung eines Körpers durch diejenige von ein- und umbeschriebenen Körpern zu ersetzen. Dabei war Kepler sich bewusst, consequent auf ein von den Alten nicht erreichtes Ziel loszugehen; er sagt dies selbst, indem er nach Erörterung und Exemplification seiner Methode ausdrücklich bemerkt, dass darin das Wesen der Methode des Archimedes beruhe. Der so von Kepler erfolgreich benutzte Begriff der unendlich kleinen Größe erscheint dann in fehlerhafter Auffassung bei Cavaleri[3]), indem dieser z. B. die Strecke mit dem unendlich schmalen Ebenenstreifen identificirt und einen Flächeninhalt durch Addition von Strecken zu berechnen lehrt, welche in paralleler Richtung neben einander geschichtet das ganze Flächenstück erfüllen, während doch die Aneinanderreihung von Strecken niemals eine Fläche erzeugt. Ihre feste, mathematisch unanfechtbare Gestalt erhielten die unendlich kleinen Größen erst durch die Entwicklung der Begriffe des Differentialquotienten und des Integrals und der Methoden der Differential- und Integralrechnung, die von Leibniz und Newton begründet wurde. Nun waren feste Regeln gegeben, durch welche ihr mathematischer Gebrauch ermöglicht wurde, und ihre mathematische Bedeutung ergründet werden konnte. Die Natur der unendlich kleinen Größen selbst war aber damit keineswegs klargestellt. Bei Newton bildeten phoronomische, bei Leibniz geometrische Vorstellungen

1) Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, S. 123, Leipzig 1874.

2) Nova stereometria doliorum.

3) Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota; Bonon. 1635.

die anschauliche Basis der Begriffsentwicklung; Euler gab derselben eine rein arithmetische Wendung, indem er von endlichen Differenzen ausgehend die Differentiale als Nullen betrachtete; Lagrange schließlich suchte den Unendlichkeitsbegriff sammt seinen Widersprüchen zu vermeiden, indem er aus der gegebenen Function durch Reihenentwicklung abgeleitete Functionen, »Derivirte«, herstellte, die mit den Differentialquotienten gleichbedeutend waren[1]. Diese Verbannung des Unendlichen konnte aber nicht aufrecht erhalten werden. In Geometrie und Mechanik fanden die Differentiale und Integrale fruchtbare Verwendung und ihre analytische Begründung gewann man nun mittelst des Begriffs der Grenze, der sich variable Zahlen mehr und mehr nähern, ohne sie je zu erreichen. Im Grenzbegriff besteht demgemäß die Grundlage der Begriffsentwicklung, wie sie jetzt in gangbaren Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung gegeben wird. So sagt z. B. Serret[2]: »Lorsqu'une quantité variable tend vers la limite zéro, on dit qu'elle devient infiniment petite; on la nomme alors un infiniment petit«. Aehnlich wird von ihm auch das Unendlichgroße definirt. Er sagt dann ferner: »Ces locutions d'infiniment petit et d'infiniment grand n'ont donc pas d'autre objet que l'abbréviation du langage«. Man darf dem wohl hinzufügen, dass in der Praxis stets geometrische und phoronomische Vorstellungen die thatsächliche Einführung des Unendlichen in den Calcul vermitteln, und dass dabei die unendlich kleinen Größen nicht als eine »abkürzende Redeweise«, sondern als wirkliche Größen, mit denen man rechnet, auftreten; vielmehr scheint der »Grenzübergang« Redensart zu sein; denn thatsächlich wird er nicht vollzogen und überdies ist von ihm nur bei den ersten, einfachsten Beispielen die Rede.

§ 5.

Es lehrt dieses Beispiel, dass die mathematische Bedeutung eines in abgeschlossener Entwicklung vorliegenden Begriffs völlig feststehen, und dass doch der Begriff selbst einer schwankenden und

---

1) Vergl. Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwicklung von Leibniz bis auf Lagrange, von Weissenborn. Halle 1856.

2) Cours de calculs differentiel et intégral, t. I, p. 4. Paris 1879.

anfechtbaren Auffassung unterworfen sein kann, die zu einer besonderen Untersuchung herausfordert. Wenn man aber auch eine solche unterlassen kann im Hinblick auf den mathematischen Werth des Begriffs, den keine Kritik zu vermehren oder zu vermindern vermag, so erscheint dies nicht mehr statthaft, wenn es sich um Begriffe handelt, die noch im Werden begriffen sind oder die durch Auffinden neuer Gesichtspunkte einer bisher üblichen Auffassung sich entwinden. In solchen Fällen pflegen sich widerstreitende Anschauungen gegenüberzustehen, und es kann bloß durch eine kritische Untersuchung der Begriff geklärt und der Streit um seine Auffassung geschlichtet werden. Es sei denn, dass man aus Abneigung gegen jede rein logische Erörterung eine abwartende Stellung einnehmen wollte in der Voraussetzung, dass das mathematisch Lebenskräftige allein schließlich den Sieg davon tragen wird. Ist man aber nicht grundsätzlich einer derartigen Untersuchung abgeneigt, so wird wohl nicht bestritten werden, dass gerade für werdende und umstrittene Begriffe die Klarstellung ihrer Bedeutung die mathematischen Untersuchungen selbst zu beeinflussen befähigt ist und folglich nicht umgangen werden darf.

So sieht beispielsweise Kronecker[1]) in dem Begriffe der Zahl, im engsten Sinne genommen, die im Grunde allein berechtigte Form des Zahlbegriffs und in allen Erweiterungen und Modificationen dieses Begriffs nur Zugeständnisse an Forderungen der Geometrie und Mechanik, die bloß vorübergehende Bedeutung haben, bis es verbesserten Methoden gelingt, jene Erweiterungen und Modificationen wieder abzustreifen. Im Gegensatze hiezu sucht die irrationale Zahl durch die Definitionen von Cantor, Dedekind und Weierstraß eine von geometrischer Anschauung unabhängige Bedeutung zu erlangen, und Cantor[2]) erweitert gar den Zahlbegriff zu dem der unendlich großen Zahl, für die er die Gesetze ihrer Verknüpfung aufstellt. — In höherem Maße als der Zahlbegriff gab der von Riemann in die Mathematik eingeführte Begriff der n-dimensionalen stetigen Mannigfaltigkeit, die auch als n-dimensionaler Raum bezeichnet wird, Anlass zur augenfälligen und scharfen Hervorhebung

---

1) Ueber den Zahlbegriff. Crelle's Journal, Bd. 103, S. 337—355.

2) Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Leipzig 1883.

verschiedener Auffassungsweisen. Die Heftigkeit des Widerstreits der verschiedenen Ansichten führt zur Vermuthung, dass die Natur dieses Begriffs vielfach gänzlich missverstanden wurde, was vielleicht darin begründet ist, dass die geometrische Deutbarkeit analytischer Zahlenmannigfaltigkeit, auf welcher jene Begriffsbildung wesentlich beruht, unbesehen angenommen wurde. Es ist dieselbe indessen keineswegs so selbstverständlich, obgleich sie — wenn ich nicht irre — nirgends erörtert und zur Klärung der Sachlage benutzt wird.

Solchen umstrittenen Begriffen gegenüber versagt das Mittel, das für Begriffe von unzweifelhaft feststehender Bedeutung das Verlangen nach einer besonderen Untersuchung zu stillen vermag: die Gewöhnung an eine bestimmte Auffassungsweise ist nicht wohl durchführbar. Man müsste denn des Mephistopheles Rath befolgen: »Am besten ist's, wenn ihr auch da nur einen hört, Und auf des Meisters Worte schwört«. Oder man müsste die Geschmeidigkeit besitzen, verschiedene Auffassungsweisen trotz ihres Widerstreits als gleichberechtigt anzunehmen[1].

Die obige vorläufige Fassung des Problems einer Untersuchung der Grundlagen wird somit durch die Beachtung einer rein mathematischen Behandlung wesentlich verändert. Zunächst zeigt sich die Möglichkeit, auf eine besondere Untersuchung zu verzichten, da die mathematische Arbeit selbst von der Sicherheit der Grundlagen genügend überzeugt und eine in gewissem Sinne hinreichende Einsicht in die Natur derselben gewährt. Zwar ist dieser »mathematische« Standpunkt nur mit Mühe aufrecht zu erhalten, wenn es sich um Neubildungen oder Weiterbildungen von Begriffen handelt, da alsdann eine Erforschung der Natur der Begriffe die Richtung der mathematischen Forschung beeinflussen kann und somit direct mathematisches Interesse erregt. Es ist jedoch auch in solchen Fällen möglich, lediglich die mathematische Brauchbarkeit des Begriffs ins Auge zu fassen und das, was man als eigentliches Wesen des Begriffs bezeichnen kann, auf sich beruhen zu lassen. Die Grundlagen der Mathematik bilden daher kein Problem von selbständigem Werthe dar,

---

1) So behauptet P. du Bois-Reymond in seiner »allgemeinen Functionentheorie« die Gleichberechtigung des von ihm sogenannten Idealismus und Empirismus für die Grundbegriffe der Infinitesimalmethode. Vergl. Wundt, Logik Bd. II, S. 85.

wenn man das Interesse lediglich den mathematischen Operationen und Constructionen zuwendet, welche die mathematische Bedeutung der Begriffe erschöpfen, und wenn man sich mit der Constatirung dieser thatsächlich vorhandenen mathematischen Bedeutung begnügt. Will man aber den Grund zu dieser Bedeutung einsehen, und will man den wirklichen Denkinhalt der Begriffe verstehen, so leuchtet die Nothwendigkeit und Wichtigkeit einer eingehenden Untersuchung derselben unmittelbar ein.

Gewinnt man damit eine richtige Auffassungsweise der Aufgabe, die durch die Untersuchung der Grundlagen gelöst werden soll, so lehrt ferner die Beachtung der historischen Entwicklung der Mathematik, dass die sogenannte höhere Mathematik nicht auf neuen Grundlagen ruht, sondern nur eine consequente Weiterbildung der Elemente ist. Wenn man daher beim Betreten der einzelnen Untersuchungsgebiete die Grundlagen der Elemente als unmittelbar evident, diejenigen der weitergehenden Disciplinen aber als einer Klarstellung bedürftig empfindet, so hat dies seinen Grund nicht etwa darin, dass die Begriffe und Methoden der Elemente in ihrem Wesen unmittelbar klar erkannt würden, sondern vielmehr darin, dass der Gewöhnungsprocess, der — wie wir sahen — den Begriffen der höheren Mathematik gegenüber erst durch die mathematische Arbeit sich vollzieht, hier schon von vorn herein vollzogen ist. Denn die Anschauungen, an die sich die Elemente der Mathematik anlehnen, sind Gemeingut der Gebildeten, und eine Angewöhnung an dieselben muss nicht erst gewonnen werden. Eine solche Angewöhnung bringt aber nicht etwa eine Lösung der Schwierigkeiten mit sich, sondern verschleiert und vermehrt dieselben nur. Man erkennt dies klar, wenn man zu seiner Ueberraschung bemerkt, dass ganz einfach erscheinende Begriffe der Elemente (wie der eines Bruches oder einer irrationalen Größe), die man als selbstverständlich anzunehmen geneigt ist, den Alten ganz ähnliche Schwierigkeiten bereiteten, wie sie jetzt das Betreten der entlegeneren Regionen der mathematischen Forschung erschweren. Es zeigt sich so, dass Begriffe und Methoden der höheren Mathematik ihre Schwierigkeiten nur offener zur Schau tragen, dass aber die Grundlagen der Elemente in gleicher Weise der Untersuchung bedürftig sind.

Will man sich also nicht mit der bloßen Constatirung der mathematischen Bedeutung der Begriffe und Methoden begnügen, so ist die Untersuchung der Grundlagen der gesammten Mathematik nothwendig. Diese Untersuchung hat die Aufgabe, klarzustellen, was man sich bei den Begriffen thatsächlich zu denken hat, wie auf Grund der Begriffe die Methoden sich entwickeln, und worin der Grund zu der in der Mathematik hervortretenden Bedeutung der Begriffe liegt.

§ 6.

Die Lösung des nunmehr genauer bestimmten Problems führt in das Gebiet der Philosophie, insofern ihr die Aufgabe zufällt, die allgemeinen Regeln des Denkens aufzudecken und bis zu den Quellen der Verstandesthätigkeit vorzudringen. Die Philosophie kommt daher hier nur insoweit in Betracht, als sie in Logik und Erkenntnisstheorie besteht; als solche entwickelt sie aber die Gesetze des Denkens und die gemeinsamen Grundlagen für jegliche Art wissenschaftlicher Arbeit, deren Kenntniss als Vorbedingung zu einer erfolgreichen Bearbeitung der als Einzelwissenschaften abgegrenzten Wissensgebiete erscheint. Trotzdem gewinnen die speciellen Wissenschaften zunächst unabhängig von der Philosophie ihre Resultate und werden erst bei einem fortgeschrittenen Stadium ihrer Entwicklung auf die Grundlagen ihrer Untersuchung und dadurch auf die Frage nach dem Zusammenhange mit den allgemeinen Regeln des Denkens und den Quellen alles Erkennens aufmerksam. Die Philosophie streitet jedoch nicht mit den Einzelwissenschaften um die Herrschaft über die Objecte der wissenschaftlichen Untersuchung: der bereits gewonnene Besitzstand der Einzelwissenschaften wird durch die den speciellen Wissensgebieten sich zuwendende Philosophie nicht angegriffen; vielmehr empfängt die letztere von den ersteren Anregung zu eigener Thätigkeit, um ihrerseits wieder die Grundlagen der speciellen Wissenschaften im Zusammenhange mit den allgemeinen Gesetzen des Erkennens zu beleuchten. Diese Sachlage steht im Einklang mit der Natur des Erkenntnissvermögens, das sich bethätigen kann, ehe es selbst erforscht worden ist, das sich sogar erst bethätigen muss, um an den eigenen Producten die Regeln seines Gebrauchs, seinen Ursprung und seine Grenzen erkennen zu können. Kein feindlicher Widerstreit, sondern anregende Wechselwirkung findet somit zwischen den Interessen der Philosophie und denjenigen der Einzelwissenschaften statt, der zufolge sich für jedes besondere Wissensgebiet ein Problem herausbildet, das dem hier für die Mathematik aufgestellten entspricht, und das die Aufgabe enthält mit den Hilfsmitteln der Logik und Erkenntnisskritik die Grundlagen der einzelnen Wissenschaften zu klären. Dass diese Probleme selbständige sind und weder durch die auf sich gestellten Einzelwissenschaften, noch durch die auf ihr eigenes Gebiet beschränkte Philosophie gelöst werden können, vielmehr den Grenzgebieten zwischen Philosophie und Specialwissenschaften angehören, bedarf wohl keines weiteren Beweises; denn die Gesichtspunkte, welche die Untersuchung leiten, gibt die Philosophie, das Material aber, das untersucht werden soll, gehört den einzelnen Wissenschaften an. Allerdings ist es möglich, dass philosophische Interessen dabei im Vordergrunde stehen, und dass dann — wie Wundt dies in seiner Logik thut — die angedeuteten Probleme den erkenntnisstheoretischen und logischen Untersuchungen zugesellt werden. Dann ist aber auch die Philosophie nicht ein von den einzelnen Wissenschaften abgetrenntes Gebiet, sondern im Sinne Wundt's Wissenschaftslehre, die auf der breiten Basis der Einzelwissenschaften ruhend das gesammte wissenschaftliche Erkennen zu einem einheitlichen Systeme vereinigt.

Zwischen Mathematik und Philosophie ist nun die Wechselwirkung besonders fruchtbar, was durch den besonderen Charakter der Mathematik als einer mit Strenge begründeten und ausgebauten formalen Wissenschaft veranlasst wird. Ihre Erfolge erzeugen den Wunsch, ihre Methoden auf philosophische Gebiete zu übertragen. So wurde Leibniz ohne Zweifel durch die Einsicht in die weittragende Bedeutung der mathematischen Symbolik, die in der von ihm selbst begründeten Symbolik der Differentialrechnung einen neuen Triumph feierte, zu seiner Idee einer allgemeinen Begriffsschrift, der »characteristica universalis«, geführt. Und die Verwendung der algebraischen Operationen bei der Untersuchung der formalen Begriffsbeziehungen, die den »logischen Calcul« erzeugte, erfolgte wohl in Verfolgung jener Leibniz'schen Idee. Kant fand in der Mathematik eine willkommene Stütze bei der Ergründung der Möglichkeit synthetischer Urtheile a priori. Herbart gründet auf mathematische und speciell mechanische Vorstellungen seine Psychologie als Statik und Mechanik des Geistes. Empfängt, wie aus diesen Beispielen hervorgeht, die Philosophie Anregung von der Mathematik, so wirkt sie auf die letztere insbesondere dadurch zurück, dass sie die Fundamentalbegriffe von Raum, Zeit und Zahl, auf denen die Mathematik in letzter Linie beruht, aus eigenem Antrieb als elementare Bestandtheile der Erkenntnisstheorie entwickelt. Dadurch findet die Mathematik eine erkenntnisstheoretische Grundlage vorbereitet, von der aus ihre Begriffe in rein philosophischem Interesse erzeugt werden können. Sie erscheinen dann als Eigenthum der Philosophie, wenigstens insoweit als die logischen Untersuchungen zu ihrer Aufstellung führen und ihre Eigenschaften kennen lehren. Als solche unterliegen die Begriffe den jeweils vertretenen erkenntnisstheoretischen Standpunkten [1], durch welche dann auch die Mathematik bezüglich ihrer logischen Natur und ihrer Stellung im Gesammtgebiete der Wissenschaften beleuchtet werden kann.

Daraus wird klar, dass das hier vorliegende Problem einer Untersuchung der Grundlagen der Mathematik in hervorragendem Maße philosophische Interessen erregen kann, die insbesondere dann zu Tage treten, wenn die Philosophie im Sinne Wundt's als Wissenschaftslehre definirt und jenes Problem in seinem Zusammenhange mit der erkenntnisstheoretisch begründeten Logik aufgestellt wird. In solcher Weise wird es von Wundt in der Logik behandelt, und es brachte diese Behandlung auch den hier beabsichtigten Untersuchungen fördernde Anregung. Es dürfen aber jene philosophischen Interessen nicht allein im Vordergrunde stehen, wenn das Problem so aufgefasst wird, wie es sich auf mathematischem Gebiete aufdrängt. Hier entspringt es dem Bedürfnisse, die Begriffe und Methoden durch Aufdeckung ihres Zusammenhangs mit den Grundlagen und Gesetzen des Erkennens so zu erhellen, dass ihre mathematische Bedeutung klar und verständlich wird. In

---

1) Vergl. den Abschnitt über den mathematischen Realismus und Nominalismus in Wundt's Logik, Bd. II, S. 85—96.

der einheitlichen Befriedigung dieser mathematischen und jener philosophischen Interessen wird daher die Aufgabe der Untersuchung wesentlich bestehen.

§ 7.

Der Weg, der zur Erreichung dieses Zieles führt, wird somit allerdings das Gebiet der Philosophie durchziehen, jedoch in kürzester Richtung; er wird aber auch in das Gebiet der Mathematik thatsächlich hinüberführen müssen. Die Untersuchungsmethode, die sich aus dieser Vorschrift ergibt, soll nun genauer dargelegt werden.

Man kann es zunächst für das Einfachste halten, von einzelnen mathematischen Begriffen auszugehen und jeden für sich einer philosophischen Behandlung zu unterwerfen. Um hierbei einen Ausgangspunkt zu erhalten, muss man eine Definition des Begriffs zu Grunde legen, die allerdings nur vorläufig Geltung haben soll und durch die nachfolgende Untersuchung modificirt, vielleicht durch eine neue ersetzt werden kann, die aber jedenfalls den vorliegenden Begriff genügend charakterisiren muss. Durch diese Definition wird der Begriff in das Reich der Logik gerückt und dort Gegenstand einer logischen Untersuchung, aus welcher die Kenntniss der Merkmale und des Umfangs des Begriffs resultiren sollen. Die Angabe des ganzen Denkprocesses, der den Begriff erzeugt und zu dessen logisch widerspruchsloser Fassung führt, kann wohl als Wesen einer solchen Untersuchung bezeichnet werden, deren Richtung durch die anfänglich angenommene Definition bestimmt wird und deren Ziel der logisch geklärte Begriff ist. So interessant nun auch die Befolgung dieser Methode sein mag, so birgt sie doch eine bemerkenswerthe Fehlerquelle in sich. Denn wenn auch eine anfängliche, ungenügende Definition corrigirt werden kann, so gibt sie doch möglicher Weise von vorn herein der Untersuchung eine falsche Richtung, die dann auch im schließlichen Resultate zu Irrthümern führt. Es können wesentliche Momente des Begriffs in der anfänglichen Definition, fehlen und es ist keine Garantie vorhanden, dass der schließlich sich ergebende, logisch abgeklärte Begriff alle die Eigenschaften besitzt, die nothwendig sind, um ihn zu einem brauchbaren Instrumente der mathematischen Forschung zu machen. Es kann überhaupt ein und derselbe Begriff in wesentlich verschiedener Weise behandelt werden, und es resultirt alsdann nicht — was doch gefordert werden muss — ein von subjectivem Ermessen unabhängiger, eindeutig bestimmbarer Begriff aus der philosophischen Bearbeitung.

Dies zeigen beispielsweise die Untersuchungen von Frege[1]) und Husserl[2]) über den Zahlbegriff. Beide gehen vom Begriff der Anzahl aus, während in der Regel die Mathematiker (z. B. Kronecker in der citirten Abhandlung über den Zahlbegriff) den Begriff der Ordinalzahl in den Vordergrund stellen. Frege betrachtet die Zahlen als Antworten auf die Frage »Wie viel«, so dass 0 und 1 in gleicher Weise Anzahlen sind, wie 2, 3 u. s. w.; Hussert dagegen definirt — altem Brauche folgend — die Anzahl als Vielheit von Einheiten, so dass schon der Begriff der Anzahl 1 und noch mehr der Begriff der Anzahl 0 als Erweiterungen des engeren Anzahlbegriffs sich darstellen. Frege vermeidet jede Erörterung der psychologischen Grundlagen des Begriffs und behauptet ausdrücklich, dass die Psychologie dem Zahlbegriff nichts helfen könne; er gelangt zu der Erkenntniss, dass die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthalte und zwar, dass die Anzahl, welche einem Begriff F zukommt, der Umfang des Begriffs »gleichzahlig dem Begriff F« sei. Die Gleichzahligkeit wird aber nicht als eine anschauliche, sondern als eine logische eindeutige Zuordnung definirt. Sind so die Anzahlen Umfänge von Begriffen, so soll — was Frege nicht weiter ausführt — betreffs der gebrochenen und complexen Zahlen u. s. w. ähnlich verfahren werden, so dass auch diese neuen Zahlen als Umfänge von Begriffen gegeben werden. Dominirt somit bei Frege die logische Seite der Untersuchung, so betont dagegen Husserl die psychologische Basis der Begriffsbildung so sehr, dass er eine Analyse der eigentlichen Begriffe von psychologisch vorgestellten Vielheiten und Anzahlen der Unter-

1) Die Grundlagen der Arithmetik; eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Jena 1886.

2) Die Philosophie der Arithmetik; psychologische und logische Untersuchungen, I. Bd. Halle 1891.

suchung der uneigentlichen oder symbolischen Anzahlbegriffe vorangehen lässt. Die Anzahlen sind hier specialisirte Vielheiten, die Vielheiten sind »collective Verbindungen«; Vielheiten im allgemeinen sind nichts anderes als »irgend Etwas und irgend Etwas und irgend Etwas« u. s. w.; Zahlen sind Begriffe wie »Eins und Eins«; »Eins und Eins und Eins« u. s. w. Husserl steht so in bewusstem Gegensatze zu Frege. Die Gegenüberstellung der eigentlichen und uneigentlichen Anzahlen hat aber den Zweck, darüber zu belehren, dass erst die symbolischen Anzahlen eine Ausbildung der Arithmetik veranlassen, und dass diese letztere dann zu einer »allgemeinen Arithmetik im Sinne einer Operationenlehre« führt.

Ohne nun die eine und die andere Untersuchung im Einzelnen verfolgen und die von den beiden Verfassern eingenommenen Standpunkte von einem dritten Standpunkte aus bekämpfen zu wollen, darf doch darauf hingewiesen werden, dass die oben erwähnte Fehlerquelle in augenfälliger Weise sich bemerklich macht. Denn mögen sowohl Frege's als auch Husserl's Untersuchungen in vielen Punkten logisch oder psychologisch werthvoll sein, so leisten sie doch für die mathematischen Bedürfnisse nicht Genügendes, eben weil der Begriff der Ordinalzahl und des Zählens vernachlässigt wurde. Es ruht aber doch der Begriff der Zahl sowohl auf dem Zählen als auch auf den zählbaren Vielheiten. Zwar lässt sich nichts dagegen sagen, dass die Umfänge einzelner Begriffe geeignet sind, Anzahlen zu definiren; es ist auch gewiss richtig, dass die symbolischen Zahlen und nicht die an den Fingern oder an anderen anschaulich gegebenen Mengen abgezählten Zahlen eine Arithmetik veranlassen. Ich sehe aber nicht ein, wie durch solche Erörterungen der Begriff der Zahl so, wie sie als Gegenstand der mathematischen Untersuchung auftritt, Erhellung finden soll. Ist schon die Beschränkung auf die ganze Zahl bedenklich, so ist die Nichtbeachtung des Zählprocesses, der keineswegs den Begriff der Anzahl schon voraussetzt, fehlerhaft.

Man erhält die Sicherheit, den vollständigen Begriff in seinem ganzen Umfange der Untersuchung zu unterwerfen, wenn die historische Entwickelung des Begriffs zu Grunde gelegt wird. Es hat diese Methode überdies den Vortheil, die eigenthümlichen Schwierigkeiten vor Augen zu stellen, die sich der Einführung eines Begriffs in der Regel entgegenstellen, und ein Verständniss für den Grad der Ausbildung zu erwecken, den der von der Wissenschaft recipirte Begriff erhalten hat. Führt ja doch auch die Beachtung der geschichtlichen Entwickelung der Begriffe zu der Einsicht, dass das scheinbar Selbstverständliche elementarer Begriffe auf einem gewohnheitsmäßigen Anbequemen an dieselben beruht, während bei ihrer Einführung in die Wissenschaft der Widerstreit verschiedener Ansichten überwunden werden muss. Die logischen, den Begriff eigentlich klärenden Untersuchungen müssen allerdings in gleicher Weise geführt werden, wie beim Befolgen der zuerst genannten Methode; sie schließen sich jedoch an die einzelnen Stufen der historischen Entwickelung an und werden dadurch nach Möglichkeit vor Einseitigkeit und Unvollständigkeit geschützt. In Befolgung dieser Methode hat z. B. L. Lange den Bewegungsbegriff[1]) und W. Brix den Zahlbegriff[2]) behandelt.

Wenn nun auch so das Resultat der Untersuchung möglichst umfassend und vollständig werden kann, so ist doch bei der Beschränkung auf einen einzelnen Begriff die Gefahr vorhanden, dass er übermäßig hervorgehoben und seine Beziehung zu anderen Begriffen nicht beachtet wird. Es ist aber gerade das Verhältniss, in welchem verwandte oder gegensätzliche Begriffe zu einander stehen können, oft von wesentlicher Bedeutung, so dass die logische Ergründung jenes Verhältnisses als eine wichtige Aufgabe der Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik bezeichnet werden muss. So sind beispielsweise die Methoden der analytischen Geometrie auf die Abhängigkeit gegründet, in die sich die variablen Zahlen und die räumlichen Gebilde wechselweise bringen lassen; und es ist wohl ohne weiteres klar, dass dieser Zusammenhang weder durch Speculationen über den Zahlbegriff noch durch solche über den Raumbegriff erklärt werden kann, wenn dabei bloß der eine oder der andere Begriff der Untersuchung zu Grunde gelegt wird. Einer solchen Einseitigkeit mag es aber entspringen, wenn

---

1) Die geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffs und ihr voraussichtliches Endergebnis; im 3. Bd. der Philosophischen Studien.

2) Der mathematische Zahlbegriff und seine Entwicklungsformen, im 5. und 6. Bd. der Philos. Studien.

einmal der räumlichen, stetigen Größe das Uebergewicht über die Zahl, ein andermal der Zahl die Herrschaft über das Continuum eingeräumt wird. Der erstere Zustand war bei den Alten durchgehends vorhanden und pflanzte sich bis in die neuere Zeit fort. Noch in Newton's Arithmetica universalis tritt die Zahl als Verhältnis geometrischer Strecken auf. Der letztere Zustand dagegen scheint der gegenwärtig herrschende zu sein. Es tritt dies sowohl bei den Untersuchungen von Riemann und von Helmholtz[1]) über den Begriff des n-dimensionalen, räumlichen Continuums als auch bei den Definitionen der Stetigkeit, wie sie Dedekind[2]) und G. Cantor[3]) geben, zu Tage.

§ 8.

Diesem Streben, den einen Begriff auf Kosten eines anderen in seiner Bedeutung zu vergrößern und künstlich einen obersten Begriff aufzustellen, um alle anderen daraus abzuleiten, muss die Thatsache gegenübergestellt werden, dass die gesammten mathematischen Disciplinen ein einheitliches Ganzes darstellen, dessen Grundlagen darum auch logisch zusammengehören werden. Es muss dann aber auch jede Künstelei im Wenden und Drehen der Begriffe vermieden und jedem sein Recht gelassen werden. Dies scheint aber nur dann möglich, wenn die Grundlagen in ihrem Zusammenhange einer einheitlichen Untersuchung unterworfen werden.

Dabei soll nicht ein erkenntnisstheoretischer Standpunkt eingenommen werden, der von vornherein die mathematischen Begriffe etwa im Lichte eines Nominalismus oder eines Realismus erscheinen lässt. Es soll vielmehr die Untersuchung in einer einfachen Beschreibung der Thätigkeit des Denkens bestehen, durch welche aus letzten schlechthin gegebenen

1) Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome; populäre wissensch. Vorträge Heft III. Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen; Nachrichten der Gesellsch. d. Wissenschaften zu Göttingen 1868, Nr. 9.

2) Stetigkeit und irrationale Zahlen, § 3 und 5. Braunschweig 1872.

3) Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, § 10. Leipzig 1883.

Thatsachen die mathematischen Begriffe erzeugt werden. Jene letzten Thatsachen, die der reflectirende Geist als schlechthin gegeben empfindet, müssen zunächst aufgesucht werden. Welche Beschaffenheit aber dieselben zeigen müssen, um aus ihnen zu den mathematischen Begriffen gelangen zu können, lehrt die Beachtung der verschiedenen Arten von Objecten mathematischer Untersuchungen. Sie liegen den verschiedenen mathematischen Disciplinen zu Grunde und können somit leicht in eindeutiger Weise bestimmt werden; denn ein Schwanken kann hierbei bloß im Verlaufe der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik eintreten, wenn der früher enge Kreis der mathematischen Disciplinen sich erweitert und so auch die frühere Aufgabenbestimmung durch eine neue ersetzt werden muss. Eine solche Veränderung zeigt sich thatsächlich, wenn man vergleicht, wie z. B. Descartes in früherer Zeit und Wundt in unseren Tagen die Aufgaben der Mathematik bestimmt:

Descartes sagt[1]: »... videmus neminem fere esse, si prima tantum scholarum limina tetigerit, qui non facile distinguat ex iis quae occurrunt, quidnam ad mathesim pertineat et quid ad alias disciplinas. Quod attentius consideranti tandem innotuit, illa omnia tantum, in quibus ordo vel mensura examinatur, ad mathesim referri, nec interesse utrum in numeris vel figuris vel astris vel sonis aliove quovis objecto talis mensura quaerenda sit.« Dagegen bestimmt Wundt in seiner Logik[2] als Aufgabe der Mathematik: »die denkbaren Gebilde der reinen Anschauung sowie die auf Grund der reinen Anschauung vollziehbaren formalen Begriffsconstructionen in Bezug auf alle ihre Eigenschaften und wechselseitigen Relationen einer erschöpfenden Untersuchung zu unterwerfen«. — Trifft Descartes' Definition das Wesen der damaligen auf Untersuchungen von Größenbeziehungen ausschließlich gerichteten Mathematik, so sucht die allgemeine Fassung der Aufgaben mathematischer Untersuchung, wie Wundt sie gibt, den auf Lagebeziehungen gerichteten Problemen der neueren Geometrie, der zahlentheoretischen Erforschung der Eigenschaften ganzer Zahlen, der Lehre von den Dar-

---

1) Regulae ad directionem ingenii; reg. IV.
2) Wundt, Logik, Bd. II, S. 75.

stellungsformen functioneller Abhängigkeiten, den Untersuchungen formaler Algorithmen gerecht zu werden.

Die eine oder die andere dieser Aufgabebestimmungen soll nun hier nicht den Werth einer grundlegenden, den Charakter der Mathematik erschöpfenden Definition besitzen und als Ausgangspunkt der Untersuchung dienen. Sie sollen vielmehr nur orientiren und den Weg zur Auffindung der letzten gegebenen Thatsachen weisen, wie es in gleicher Weise ein nur oberflächlicher Blick auf die einzelnen mathematischen Disciplinen thun kann. Sie lehren indessen überdies, dass zu verschiedenen Zeiten auch das Problem einer Untersuchung der Grundlagen Verschiedenheiten aufweisen wird, die in dem jeweiligen Entwicklungszustande der Mathematik begründet sind.

Ist nun so ein geeigneter Ausgangspunkt für die Untersuchung gewonnen worden, so soll der Denkprocess, der die mathematischen Begriffe in der Weise erzeugt, wie sie in der mathematischen Wissenschaft benutzt werden, beschrieben werden. Dass hiebei erkenntnisstheoretische Standpunkte keine Verwendung finden können, ist durch den einfachen Charakter der Untersuchung, die in einer bloßen Beschreibung bestehen soll, gewährleistet, und den Zweifel, ob eine solche einfache Darlegung durchführbar sei, muss der Versuch dieselbe zu leisten beseitigen[1]. Dass ferner die so charakterisirte Untersuchung nicht Ausfluss einer das gesammte Erkennen umspannenden Theorie sein kann, scheint selbstverständlich, da eben nur das auf die Mathematik und deren Untersuchungsobjecte gerichtete Erkennen hier in Betracht kommen soll

---

1) Diese Methode hat der Verfasser bereits in seiner im Buchhandel nicht erschienenen Doctorarbeit: »Die logischen Grundlagen des mathematischen Functionsbegriffs«, Zweibrücken 1888, angedeutet und, veranlasst durch die sowohl Geometrie als auch Analysis umfassende Bedeutung des Functionsbegriffs, in kurzen Umrissen durchgeführt. Für das Gebiet der Grundlagen der Mathematik wird so dasselbe gefordert, was neuerdings Osw. Külpe in seinen Untersuchungen über »das Ich und die Außenwelt« in den Philosophischen Studien VII. und VIII. Bd. betreffs der philosophischen Arbeit überhaupt als Forderung aufstellt, indem er am Schlusse seiner Abhandlung (S. 341) die Ueberzeugung ausspricht, »dass die Erlebnisse und die Reflexion über sie allgemeingültige Thatsachen sind, deren Beschreibung in einer von individuellem Meinen und Wollen unabhängigen Form zu liefern gelingen müsse«.

Damit scheint mir das Problem einer Untersuchung der Grundlagen der Mathematik bezüglich der Aufgabe, die zu lösen, und bezüglich des Weges, der zum Zwecke der Lösung einzuschlagen sei, genügend charakterisirt. Es handelte sich darum, das Problem in seiner Selbständigkeit zu beleuchten, Stellung zu demselben zu nehmen und eine auf bloße Erörterung von Thatsachen gerichtete Lösungsart vorzuschlagen. Die Anerkennung von Bedürfnissen, die durch den bloß formalen, mathematischen Standpunkt nicht befriedigt werden, scheint mir hierfür in gleicher Weise unentbehrlich zu sein, wie der Verzicht auf die Anschauung, als könnten die mathematischen Begriffe erst durch gekünstelte logische Untersuchungen ein Recht auf Existenz erhalten.

(Fortsetzung folgt.)

358-381