

Die Methode der mittleren Fehler, experimentell begründet durch Versuche aus dem Gebiete des Raummafses.

Von

Dr. **Julius Merkel**

in Zittau.

(Schluss.)

Mit 1 Figur im Text.

IV. Versuche aus dem Gebiete des Raummafses.

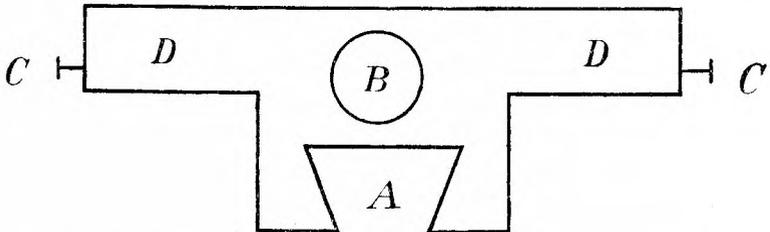
A. Technik und Methodik der Versuche.

Die Versuche wurden mit einem Apparat ausgeführt, welcher Tausendstel Millimeter einzustellen und abzulesen gestattete. Auf der Mitte eines etwa 1,20 m langen und 20 cm breiten Brettes war ein prismatischer Holzstab von 86 cm Länge, 10 mm Höhe und 35 mm Breite befestigt. Er wurde mit einem Streifen Cartonpapier bespannt, welcher eine scharfe, 0,4 mm breite schwarze Linie zeigte. In 25 mm Entfernung von diesem Stabe befand sich auf jeder Seite ein prismatischer Stab von gleicher Länge und Höhe und 25 mm Breite. Die Rinnen zwischen den drei Stäben waren in einer Breite von 10 mm in der Mitte durchbrochen. In diesen Rinnen bewegten sich zwei prismatische Stäbe von nahezu 25 mm Breite und etwa 9,5 mm Höhe und zwar von jeder Seite her bis nahe zur Mitte. Sie waren an den äußeren Enden durch metallne Querstücke fest verschraubt und an den in der Mitte nahezu zusammenstoßenden Enden durch 13 mm breite und 0,1 mm dicke Stahlplättchen mit äußerst scharfen Kanten verbunden. Um das Biegen dieser feinen Plättchen zu verhindern, wurden stärkere Stahlplatten von nur

7 mm Breite über sie geschraubt. Zwei entsprechende Platten verbanden die drei festen Holzstäbe in der Mitte und theilten die schwarze Linie in zwei gleiche Theile. An den beweglichen Stäben hingen Gewichte, welche so gewählt wurden, dass die Metallplättchen das Cartonpapier fest berührten. So wurden durch die drei feinen Plättchen aus der Linie zwei scharf begrenzte Stücke herausgeschnitten.

Die Bewegung erfolgte durch zwei Mikrometerschrauben von 13 cm Länge und 1,2 cm Durchmesser. Bei der einen betrug die Entfernung zweier benachbarter Schraubengänge 0,85 mm, bei der andern 0,84 mm. Am Ende der Schraube befand sich ein als Hebel wirkender Stab von 34 cm Länge. Hinter ihm war ein Kreis mit einem Umfange von etwa 100 cm. Ursprünglich war er in 85 Theile getheilt, so dass jedem Theil eine Länge von 0,01 mm entsprach. Später wurde jeder Theil noch in 10 Theile getheilt, von denen jeder noch immer eine Länge von etwa 1,2 mm besaß. Man konnte somit auch Tausendstel Millimeter ablesen. Doch wurde diese Eintheilung nur bei kleinen Raumstrecken (1 und 2 mm) benutzt. Der Stab wurde ursprünglich zum Drehen der Schraube benutzt, später wurde mit ihm ein hölzerner Kreisring fest verbunden, welcher die Eintheilung verdeckte und zum Drehen benutzt wurde. Nunmehr konnte die Hand nahezu dieselbe Lage beibehalten, und man hatte keine Ahnung, wo sich der feine Stift befand, der sich auf dem Theilkreis fortbewegte. Man blieb ferner völlig im Unklaren, wieviel Umdrehungen man ausgeführt hatte. Der Theilkreis trug nur die Zahlen 1 bis 85 bez. 84 und wurde jeweils so gedreht, dass beim Zusammenstoßen der Metallplättchen der Stift auf den Nullpunkt zeigte. Um die Zahl der Umdrehungen abzulesen, wurde auf dem verschiebbaren Stabe mit einem feinen Messer ein scharfer Ritz angegeben und ebenso an derselben Stelle auf dem anstoßenden festen Stabe. Nach 10 Umdrehungen wurde wieder auf dem festen Stabe die Stelle angegeben, an welcher sich der Strich des beweglichen Stabes befand, ebenso nach 20, 30, 40, . . . Umdrehungen. Diese 8,5 mm von einander entfernten Theilstriche wurden mit hartem Bleistift ausgezogen und nummerirt. Außerdem wurde ein feines Messingblech von 4 cm Länge in Theile von 0,85 mm getheilt und an der Stelle festgeschraubt, an der es gerade benöthigt

wurde. Diese Einrichtung bewährte sich sehr gut, nachdem andere Methoden mancherlei Uebelstände gezeigt hatten. Am schwierigsten war die Befestigung der Mikrometerschraube, welche nur Drehungen ausführen durfte. Anfangs wurde sie durch ein Schraubchen gehalten, welches in eine Rinne des Schraubencylinders eingriff. Diese Einrichtung erwies sich als gänzlich unbrauchbar. Alsdann wurde unmittelbar vor dem Hebel ein möglichst genauer kreisförmiger Ansatz angebracht, welcher zwischen zwei etwa 1 mm weniger tief ausgehöhlte Platten geschraubt wurde. Die Schraube bewegte ein in nebenstehender Zeichnung im Durchschnitt dargestelltes Metallstück von 3 cm Breite auf der Führung *A* vor- und rückwärts.



Letztere war auf eine möglichst ebene Metallplatte aufgeschraubt, mit der auch eine der oben genannten Platten fest verbunden war. Bei *B* ist die Schraubenmutter, welche etwa 35 Windungen besitzt. Wenngleich nur eine äußerst geringe Verschiebung (todter Gang) möglich war, so wurden doch bei *C* Schnüre angebracht, die in einiger Entfernung über Rollen führten und mit Gewichten versehen waren. Dadurch war sowohl die Verschiebung des Metallstückes beim Uebergang von der Vorwärts- zur Rückwärtsbewegung, sowie auch die Verschiebung der ganzen Schraube völlig verhindert. Minimale Verschiedenheiten der beiden Schrauben, welche durch Messung einer größeren Strecke (1,5 cm) mittelst des Sphärometers, das Hundertstel Millimeter zu bestimmen gestattete, nicht nachzuweisen waren, wurden durch den Wechsel der Raumlage ausgeglichen. An die Ansätze *D* waren die beweglichen Stäbe geschraubt. Der Apparat gestattete zunächst Strecken bis zu 10 cm Länge zu messen und einzustellen. Um größere Strecken benutzen zu können, muss man die Metallplättchen nicht am Ende der verschiebbaren Stäbe festschrauben, sondern in etwa 8, 18, 28 . . . cm Entfernung.

Man stellt dann den Zeiger auf den Nullpunkt des Kreises ein und misst die Entfernung der Metallplättchen mit Hülfe eines mit Nonius versehenen Maßstabes bis auf Zehntel Millimeter genau, was für die oben genannten Entfernungen völlig hinreicht. Das hinzukommende Stück wird mittelst des Apparates auf 0,01 mm genau gemessen. Ein bei der Messung der ersten Strecke begangener Fehler erscheint im Resultat als constanter Fehler und hat auf die Prüfung des Weber'schen Gesetzes keinen Einfluss. Misst man übrigens diese Strecke mehrere Male und benutzt man das arithmetische Mittel, so wird der begangene Fehler im Vergleich zu den Schätzungsfehlern sehr gering ausfallen. — Der im vorstehenden beschriebene Apparat hat erst nach vielfachen Aenderungen die Vollendung erlangt, welche er jetzt besitzt. Anfangs führte ich immer nur kleinere Versuchsreihen durch und beseitigte dann einzelne sich geltend machende Mängel. Nachdem der Apparat eine gewisse Vollkommenheit erreicht hatte, führte ich eine Anzahl größerer Versuchsreihen durch. Die Aufgabe war zunächst eine eng begrenzte. Es galt die Anwendbarkeit der Methode der mittleren Fehler bei einer Reihe von psychophysischen Aufgaben bei Benutzung des Princips der minimalen Aenderungen zu prüfen. Sollte letzteres möglichst rein zur Anwendung kommen, so mussten die Reize gleichzeitig beobachtet werden, und mussten die Bewegungen der Augen nach Möglichkeit ausgeschlossen bleiben. Es galt also etwa zwei neben einander liegende Strecken mit beiden Augen scharf aus deutlicher Sehweite zu fixiren und dabei die eine ganz allmählich der andern in Bezug auf die Größe gleich zu machen, indem der oben genannte Kreisring langsam gedreht wurde. Sobald die Gleichheit erreicht schien, wurde die Drehung unterbrochen. Sodann wurden die Anzahl der Drehungen und die Nummer am Theilkreis abgelesen und aufgeschrieben. Erst nach Beendigung der sämmtlichen Versuche einer Gruppe wurden die eigentlichen Werthe der eingestellten Strecken berechnet. Der Beobachtende konnte sehr bequem alles selbst ausführen, und doch war das Verfahren unwissentlich. Ich habe vielfach die Zahlen ablesen und aufschreiben lassen und nur die Drehung und Beurtheilung selbst ausgeführt, dabei aber keine abweichenden Ergebnisse erhalten. Als unzweckmäßig erwies es sich, wenn man nur die Beurtheilung

ausführte und die Bewegung der Mikrometerschrauben sowie die Ablesungen einem Gehülften überließ, weil letzterer, sobald man Halt geboten hatte, in der Regel noch etwas weiter drehte. Führt man die Drehung selbst aus, so hat man das Gefühl, als ob sie in demselben Augenblicke unterbrochen werden könne, in welchem die Reize eben gleich erscheinen. Das Ablesen und Aufschreiben der Zahlen bedingte zugleich eine kleine Ruhepause zwischen je zwei Versuchen. Gewöhnlich wurde nach 10 Versuchen eine etwas längere Pause eingeschoben.

Die psychophysischen Aufgaben, welche bisher gelöst wurden, waren:

- 1) Ein deutlich größerer Reiz ist dem Normalreiz gleich zu machen.
- 2) Desgleichen ein deutlich kleinerer Reiz.

Diese Aufgaben entsprechen völlig der Methode von Münsterberg und Higier, nur führte ich beide Aufgaben getrennt durch und nicht neben einander, weil ich das Hauptgewicht auf die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers legte und nicht auf die Ermittlung des constanten Fehlers.

- 3) Ausgehend von subjectiv gleichen Reizen ist der Reiz zu bestimmen, welcher eben größer erscheint, als der Normalreiz.
- 4) Desgleichen der Reiz, welcher eben kleiner erscheint.
- 5) Ausgehend von einem sicher doppelt so großen Reize ist der Reiz zu ermitteln, welcher das Doppelte des Normalreizes beträgt.
- 6) Desgleichen beim Ausgange von einem Reize, welcher sicher kleiner als der doppelte erscheint.
- 7) Ausgehend von einem dem Normalreiz gleichen Reize ist der Reiz zu bestimmen, der gleich der Hälfte des Normalreizes zu sein scheint.
- 8) Desgleichen beim Ausgange vom Reize 0.

B. Bestimmung des ebenunmerklichen Reizunterschiedes.

Bei der ersten ausführlichen Versuchsgruppe handelte es sich darum, einen kleineren Reiz dem Normalreize gleich zu machen. Benutzt wurden die Normalreize 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 mm. Wäh-

rend der Versuche wurden jedoch noch einzelne Mängel des Apparates verbessert, vor allem aber wurde die Ueberzeugung gewonnen, dass für die Strecken 1 mm und 2 mm die Ablesung von Hundertel Millimetern nicht genügte (hinsichtlich der Prüfung des Weber'schen Gesetzes), und dass bei dem Normalreize 100 mm die gleichzeitige Fixirung beider Strecken nicht mehr möglich war. Vermuthlich war bei diesen Versuchen die Uebung noch von erheblichem Einfluss; denn das Verhältniss des wahrscheinlichen Fehlers zum gesuchten Reize zeigte anfangs eine beträchtliche Abnahme und dann bedeutende Schwankungen. Die Werthe lagen zwischen 0,0147 und 0,0060. Da bei den verschiedenen Normalreizen die Beschaffenheit des Apparates eine verschiedene war und jedenfalls nicht mit irgendwelcher Sicherheit entschieden werden kann, welcher Ursache die bedeutende Abnahme und die Schwankungen jener Verhältnisse in der Hauptsache zugeschrieben werden sollen, sehe ich von der Veröffentlichung dieser Versuche ab. Ich betrachte sie also als Vorversuche, die zugleich den Zweck hatten, die nöthige Uebung zu erwerben. Nur die erste Reihe will ich ausführlicher mittheilen, weil sie erkennen lässt, dass bereits bei ihr die Gauß'sche Theorie vorzügliche Anwendung finden kann. Ich benutze diese Reihe zugleich, um die Anwendbarkeit der theoretischen Formeln an einem Beispiele vollständig zu charakterisiren.

Die Normaldistanz betrug 1 mm und lag zunächst rechts. Die Vergleichsdistanz wurde 50 Mal dieser Distanz gleich gemacht. Die Mittelwerthe der 5 Fractionen zu je 10 Werthen waren: 1,026; 1,036; 1,043; 1,008; 1,014, das Gesamtmittel 1,025. Die entsprechenden Werthe für die linke Lage der Normaldistanz waren: 1,003; 1,004; 0,991; 1,019; 1,022 und 1,008. Die Versuche wurden in der Weise ausgeführt, dass abwechselnd 10 Beobachtungen bei rechter und 10 Beobachtungen bei linker Raumlage ausgeführt wurden. Die verschiedenen Mittelwerthe können daher zum Theil durch eine verschiedene Einstellung des Normalreizes in Folge geringer Mängel des Apparates bedingt sein.

Ich berechne zunächst mit Rücksicht auf die beiden Gesamtmittel die Fehler nach Zahl und Größe.

Z	12	19	5	10	9	7	5	
G	0,002.	0,005.	0,008.	0,012.	0,015.	0,018.	0,022.	
11	4	3	6	2	1	5	1	
	0,025.	0,028.	0,032.	0,035.	0,038.	0,042.	0,045.	0,048.

Auf Grund dieser Fehler ergibt sich für den wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Beobachtung nach der genauen Formel II von Gauß (Abschnitt I):¹⁾

$$F = 0,01464,$$

nach der Näherungsformel V von Gauß:

$$F = 0,01473,$$

nach der Näherungsformel VI von Fechner:

$$F = 0,01469,$$

und nach der von mir abgeleiteten Formel VII:

$$F = 0,01466.$$

Der letztere Werth stimmt augenscheinlich am besten mit dem genauen Werthe überein, die Abweichungen sind durchgängig nur sehr gering. Die abgerundete Formel $F = 0,85 f$ oder mit Rücksicht auf den Werth f :

$$F = \frac{1,7 (S - zM)}{n} \dots \dots \dots (I)$$

gibt den Werth:

$$F = 0,01474.$$

Man kann sonach den Werth $F = 0,0147$ zu Grunde legen. Unter Benützung der Meyer'schen Tabelle ergibt sich dann:

δ	= 0,01.	0,02.	0,03.	0,04.	0,05.
$q \frac{\delta}{F}$	= 0,3253.	0,6506.	0,9759.	1,3012.	1,6265.
Φ	= 0,354.	0,642.	0,832.	0,934.	0,978.

Demnach liegen zwischen 0 und 0,01, 0 und 0,02 und 0 und 0,05 die Fehler: 35,4; 64,2; 83,2; 93,4; 97,8 (100 Φ) und zwischen 0 und 0,01, 0,01 und 0,02, 0,04 und 0,05 die Fehler: 35,4; 28,8; 19,0; 10,2; 4,4. Diesen berechneten Fehlerzahlen stehen die

1) Phil. Stud. IX, S. 57.

folgenden beobachteten gegenüber: 36; 26; 20; 11; 7. Diese Zahlen sprechen entschieden für die Gültigkeit der Gauß'schen Theorie.

Berechnet man auf Grund der Formel (I) für die 50 Werthe jeder Raumlage den wahrscheinlichen Fehler besonders, so erhält man im ersten Falle den Werth 0,0163, im zweiten Falle den Werth 0,0127. Der Mittelwerth 0,0145 stimmt nahezu mit dem obigen überein. Der wahrscheinliche Fehler ist hiernach wesentlich geringer, wenn die Vergleichsstrecke rechts liegt. Die Ursache lag darin, dass die rechte Mikrometerschraube ursprünglich besser functionirte, als die linke, bei welcher noch minimale Verschiebungen nach vor- und rückwärts vorzukommen schienen.

Legt man das Gesamtmittel für die beiden Raumlagen zu Grunde, das sich um 0,0085 von den Einzelmitteln unterscheidet, so erhält man den wahrscheinlichen Fehler 0,0155. In diesem Falle addirt sich der constante Raumfehler zum wahrscheinlichen Fehler.

Diese Ergebnisse legten die Vermuthung nahe, dass der Normalreiz beim Wechsel der Raumlage in Folge minimaler Verschiebungen der Mikrometerschrauben nicht jedesmal genau denselben Werth erhalten habe. Wäre dies der Fall gewesen, so würde sich für F ein zu großer Werth ergeben haben. Um dies zu untersuchen, stellte ich eine zweite ähnliche Versuchsreihe an, bei welcher die 50 Versuche für jede Raumlage unmittelbar hinter einander ausgeführt wurden. Hierbei erhielt ich für den wahrscheinlichen Fehler in der That einen wesentlich geringeren Werth, allein diese Versuche konnten deshalb nicht entscheidend sein, weil die Uebung bei diesen überhaupt zuerst angestellten Beobachtungsreihen von bedeutendem Einfluss gewesen sein konnte. Um über jene Vermuthung Gewissheit zu erlangen, berechnete ich die wahrscheinlichen Fehler für jeweils 10 Versuche. Ich erhielt:

$$F = 0,0109; 0,0204; 0,0145; 0,0088; 0,0160. \quad MW \ 0,0141.$$

$$F = 0,0150; 0,0112; 0,0097; 0,0112; 0,0075. \quad MW \ 0,0109.$$

Diese Berechnung zeigt, wie große Schwankungen der F -Werthe zu erwarten sind, wenn man nur jeweils 10 Versuche anstellt, sie zeigt ferner, dass der Mittelwerth für F geringer ausfällt, als wenn man je 50 Versuche zusammen behandelt. Ein solcher Unterschied zeigte sich nicht, wenn die 50 Versuche für jede Raumlage hinter

einander ausgeführt wurden, ein Umstand, welcher für die Richtigkeit meiner Vermuthung sprach. Auf diese Untersuchung der Einzelwerthe kam ich leider erst nach Beendigung der ersten 800 Versuche. Ich führte dann directe Versuche zur Prüfung meiner Mikrometerschrauben aus. Ich stellte nach einander eine Strecke von 5 mm 10 Mal ein und maß dieselbe mittelst des Sphärometers. Da ergaben sich in der That Werthe, welche etwa innerhalb der Grenzen 4,95 und 5,05 schwankten. Sie waren natürlich bei der Untersuchung größerer Strecken belanglos, mussten aber die Ergebnisse bei den kleinsten Strecken von 1 und 2 mm hinsichtlich der Prüfung des Weber'schen Gesetzes illusorisch machen. Als ich nun dazu überging, die größere Vergleichsstrecke der Normalstrecke gleichzumachen, zeigten die Einstellungen auf denselben Punkt des Theilkreises im Vergleich zu den entsprechenden Einstellungen beim Ausgange von einem kleineren Reize ebenfalls Abweichungen und zwar erheblich größere. Die Differenz war zudem für jede Mikrometerschraube eine verschieden große. Die Hauptursache waren kleine Verschiebungen der Mikrometerschrauben beim Uebergange vom Vorwärts- zum Rückwärtsdrehen. Sie waren verursacht in der Hauptsache durch Verschiebungen des kreisförmigen Ansatzes, welcher nicht fest genug angedrückt wurde, und möglicherweise durch den todtten Gang der Schraube. Schon bei den Versuchen bemerkte man bei einiger Aufmerksamkeit diese Verschiedenheit, die sich mit Hülfe des Sphärometers sicher nachweisen ließ. Wurde nämlich vom Vorwärts- zum Rückwärtsdrehen übergegangen, so bewegte sich anfangs das Metallplättchen nicht, erst nachdem man die Schraube um 2 bis 4 Theile (d. h. um 0,02 bis 0,04 mm) fortbewegt hatte, griff sie ein. Vermuthlich hatten sich die Schraubchen, welche die Mikrometerschrauben hielten, langsam gelockert, denn sonst hätte man diesen Uebelstand früher bemerken müssen. Bei den nächsten Versuchsreihen verhinderte ich diese Verschiebung dadurch, dass ich den Hebel immer nach innen drückte, später ließ ich diesen Druck durch eine Spiralfeder ausüben, schließlich durch den Zug von Gewichten, welcher zugleich den todtten Gang der Schrauben schadlos machte. Außerdem ließ ich doppelt so große Schraubchen zum Festhalten der Mikrometerschrauben anbringen, so dass das Lockerwerden derselben ebenfalls ausgeschlossen schien. Nun-

mehr konnten mit Hülfe des Sphärometers keine Verschiebungen mehr nachgewiesen werden. Die nach und nach beseitigten Nachtheile beeinflussten die Anwendbarkeit der Gauß'schen Theorie nicht. In allen Reihen fand ich dieselbe bestätigt. Wohl aber erwiesen sie sich bei der Prüfung des Weber'schen Gesetzes als störend.

Bei den folgenden aus 1200 Versuchen bestehenden Versuchsgruppen waren die Hauptnachtheile beseitigt. Ich beschränke mich auf die Mittheilung der Hauptergebnisse. Die Versuche wurden für jede Raumlage hinter einander ausgeführt und zwar an jedem Versuchstage 50 Versuche. Diese konnten mit den nöthigen Pausen in einer Versuchsstunde bequem ausgeführt werden, ohne dass eine Ermüdung eintrat. In der nachfolgenden Tabelle bezeichnet N den Normalreiz, M_{ar} das Mittel aller 50 Werthe beim Ausgang von einem größeren Reize und rechter Raumlage des Vergleichsreizes, M_{al} das entsprechende Mittel bei linker Raumlage. M_{br} und M_{bl} sind die analogen Werthe beim Ausgang von einem kleineren Reize.

Tabelle I.

N	M_{ar}	M_{al}	M_a	M_{br}	M_{bl}	M_b	M	F_a	F_b	F	$\frac{F_a}{M_a}$	$\frac{F_b}{M_b}$	$\frac{F}{M}$	C	V
1	0,934	1,011	0,972	0,976	1,027	1,002	0,987	0,0071	0,0067	0,0049	0,0073	0,0067	0,0050	-0,013	-0,015
2	1,890	1,960	1,925	1,992	2,008	2	1,962	0,0142	0,0120	0,0093	0,0074	0,0060	0,0047	-0,038	-0,019
5	4,92	4,96	4,94	4,985	5,070	5,03	4,984	0,0314	0,0281	0,0210	0,0064	0,0056	0,0042	-0,016	-0,009
10	9,85	10,07	9,96	9,94	10,16	10,05	10	0,0561	0,0551	0,0403	0,0056	0,0055	0,0040	0	-0,005
20	19,09	20,13	19,61	19,19	20,14	19,67	19,64	0,422	0,418	0,0848	0,0662	0,0059	0,0043	-0,36	-0,002
50	46,81	50,41	48,61	47,78	50,17	48,97	48,79	0,279	0,282	0,198	0,0057	0,0056	0,0041	-1,21	-0,004

Ferner ist:

$$M_a = \frac{M_{ar} + M_{al}}{2}, \quad M_b = \frac{M_{br} + M_{bl}}{2}, \quad M = \frac{M_a + M_b}{2}.$$

Die Berechnung der wahrscheinlichen Fehler F_a für M_a und F_b für M_b geschah auf Grund der Formel (VII) des Abschnitts I, die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers für M nach der Formel (IV) des Abschnitts II. An Stelle der letzteren Formel ist bei geringer Verschiedenheit von F_a und F_b die Näherungsformel:

$$F = 0,707 \cdot \frac{F_a + F_b}{2} \dots \dots \dots \text{(II)}$$

benutzt worden, welche fast dieselben Werthe liefert. Die Verhältnisse $\frac{F_a}{M_a}$, $\frac{F_b}{M_b}$ und $\frac{F}{M}$ sind für die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes ausschlaggebend. Schließlich ist $C = M - N$ der constante Fehler und $V = \frac{M_a - M}{M} = \text{const}$ eine Bedingung, welche möglicherweise bei Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes erfüllt sein kann. Sämmtliche Strecken sind in Millimetern angegeben, beim Abrunden auf 2 Decimalstellen ist die dritte Stelle mit beachtet worden.

Die Zahl der Fehler für bestimmte Grenzen nach Berechnung und Beobachtung enthält Tab. II für F_a und Tab. III für F_b . An den Kopf der berechneten Fehlerzahlen stelle ich das Gesamtintervall, welches man sich in 4 bis 7 gleiche Theile zerlegt denken muss, an den Kopf der beobachteten Fehler stelle ich die Zahl der Werthe, die innerhalb der Grenzen $M_a \pm F_a$ und $M_b \pm F_b$ liegen.

Tabelle II.

0 und 0,03	50	0 und 0,06	56	0 und 0,14	53	0 und 0,24	47	0 und 0,48	49	0 und 1,28	53
36,4	41	36,5	46	33,3	38	36,9	38	42,0	39	56	57
29,2	24	29,3	15	27,7	32	29,5	25	31,1	24	31,7	25
18,9	21	18,8	21	19,3	9	18,7	25	17,2	15	10,2	15
9,7	11	9,7	12	11,1	11	9,5	9	7	14	1,9	3
4	2	3,9	5	5,4	5	3,8	2	2,1	7	—	—
1,4	1	1,4	1	2,2 0,7	4 1	1,2	1	0,5	1	—	—

Tabelle III.

0 und 0,025	49	0 und 0,05	52	0 und 0,12	46	0 und 0,24	48	0 und 0,48	48	0 und 1,12	50
38,8	41	42,9	46	36,9	41	37,5	43	43,2	38	29,7	34
30,0	28	31,4	28	29,5	28	29,7	27	31,5	22	25,7	22
18,3	14	16,8	18	18,7	19	18,6	16	16,6	26	19,4	16
8,6	12	6,6	7	9,5	8	9,2	11	6,5	8	12,5	15
3,1	5	1,8	1	3,8	3	3,1	2	1,8	5	7,1	8
—	—	—	—	1,2	1	1	1	0,3	1	3,4 1,4	4 1

Für die erste Verticalreihe in Tab. II würden z. B. die Einzelintervalle für die in den 6 Spalten stehenden Fehlerzahlen sein: 0 und 0,005; 0,005 und 0,01; 0,01 und 0,015; 0,015 und 0,02; 0,02 und 0,025; 0,025 und 0,03.

Die Tabelle I zeigt zunächst, dass M_b stets größer als M_a ist, dass man also beim Ausgange von einem größeren Reize einen kleineren Werth erhält, als beim Ausgange von einem kleineren Reize. Die Nachwirkung der ursprünglich sicher als verschieden beurtheilten Reize ist also so bedeutend, dass der Gleichheitspunkt noch überschritten wird. Möglicherweise kommt hier, ähnlich wie bei den Versuchen von Glass, der Umstand in Frage, dass man nicht in demselben Augenblicke die Drehung der Mikrometerschrauben unterbricht, in dem die Reize eben als gleich beurtheilt werden. Da jedoch ganz langsam gedreht wurde, dürfte der durch letzteren Umstand verursachte Fehler nur sehr unerheblich ausgefallen sein und überhaupt nur bei den kleinsten Reizen in Frage kommen können. Der Hauptgrund liegt jedenfalls darin, dass von wesentlich verschiedenen Reizen begonnen wurde und der Eindruck dieser Verschiedenheit eine Zeitlang nachwirkte. Hätte man von eben verschiedenen Reizen begonnen, so würde diese Ueberschreitung vermuthlich nicht eingetreten sein.

Bildet man die Mittelwerthe aus den Größen M_{ar} und M_{br} , also aus sämtlichen Werthen, welche bei rechter Lage der

Vergleichsdistanz erhalten wurden, so erhält man nur Werthe, die kleiner als die Normaldistanzen sind. Die Unterschiede betragen: 0,045; 0,059; 0,48; 0,150; 0,86; 2,71. Die linke Distanz wird also z. Th. bedeutend unterschätzt und daher die rechte Fehldistanz zu klein eingestellt. Die Mittel aus M_{al} und M_{bl} sind dagegen mit einer einzigen Ausnahme größer als die Normaldistanzen und zwar um die Beträge 0,02; — 0,016; 0,015; 0,11; 0,135 und 0,29. Auch hier wird also die linke Distanz unterschätzt und infolgedessen größer eingestellt. Diese Werthe stehen in ihrem Betrage wesentlich gegen die oberen zurück. Die linken Distanzen werden sonach am bedeutendsten unterschätzt, wenn sie die unveränderlichen Normaldistanzen sind. Ich werde diese Thatsache auf Grund neuer und in etwas veränderter Weise durchgeführter Versuche, deren Aufgabe die Begründung der Theorie des Raummaßes sein wird, später näher zu erklären versuchen. Da es jedoch neuerdings den Psychophysikern zum Vorwurf gemacht worden ist, dass sie zu viele Versuche anstellten und zu wenig erklärten, d. h. die Wissenschaft mit zu wenig Hypothesen bereicherten, will ich bereits an dieser Stelle eine Erklärung andeuten, welche mir nach meinen jetzigen Erfahrungen als die wahrscheinlichste erscheint. Ich möchte dadurch verhindern, dass die genannte Thatsache der Münsterberg'schen Muskelspannungstheorie zum Opfer fiele.

Meine Augen sind verschieden. Das linke ist nahezu normal, das rechte kurzsichtig. Wenn ich eine Strecke genau fixire und ihre Länge abschätze und sodann das linke Auge schließe, so halte ich die Strecke noch für ebenso lang, wenigstens liegt ein etwaiger Unterschied innerhalb der Schwelle. Ich beobachte also ange nähert aus der für das rechte Auge geltenden deutlichen Sehweite. Schließe ich das rechte Auge, so erscheint die Linie merklich kleiner bez. weiter vom Auge entfernt zu sein. Bei meinen Versuchen fixirte ich nun möglicherweise mit dem linken Auge die linke Distanz, mit dem rechten die rechte, vermuthlich aber nur vorwiegend. Die Eindrücke beider Augen wurden verschmolzen, aber die Unterschätzung der linken Distanz zeigte sich in den Ergebnissen der Versuche. Da ferner die Abschätzung der Vergleichsdistanz vermuthlich in höherem Grade gleichzeitig mit beiden Augen geschah, als die der unveränderlichen Normaldistanz, so machte sich

die Unterschätzung der linken Distanz in geringerem Maße geltend, wenn sie die Vergleichsdistanz war. Diese Thatsache wird noch besonders durch die constanten Fehler C zum Ausdruck gebracht, welche mit einer einzigen Ausnahme negativ sind. In diesem einen Falle ist die linke Distanz um gleich viel unterschätzt worden, während sie Vergleichsdistanz bez. Normaldistanz war.

Die Werthe V zeigen, abgesehen davon, dass sie negativ sind, das Weber'sche Gesetz nicht bestätigt. Diese Erfahrung machte ich schon vor vielen Jahren, als ich das Weber'sche Gesetz auf Grund der Wundt'schen Methode der Minimaländerungen prüfte. Ich stellte erst subjectiv gleiche Reize her (N), vergrößerte den einen, bis er sich sicher unterscheiden ließ (N_o) und ging dann soweit zurück, bis der Unterschied sicher wieder verschwunden war (N_u). Dann erwies sich $\frac{VN_o N_u}{N}$ oder $\frac{N_o + N_u}{2N}$ als constant.

Setzt man dafür: $\sqrt{\frac{N_o}{N} \cdot \frac{N_u}{N}}$, oder $\frac{1}{2} \left\{ \frac{N_o}{N} + \frac{N_u}{N} \right\}$, so war $\frac{N_u}{N}$ nahezu gleich 1. Die Verhältnisse $\frac{N_u}{N} - 1$ zeigten bedeutende Schwankungen, wie sie bei ihren geringen absoluten Werthen erwartet werden mussten. Dagegen stimmten die Werthe $\frac{N_o}{N} - 1$ ziemlich gut überein. Den Werthen $\frac{N_u}{N} - 1$ würden die Verhältnisse V entsprechen, wenn ich bei den vorliegenden Versuchen immer von der oberen Grenze des Wundt'schen Verfahrens ausgegangen wäre. Da dies nicht der Fall war, und da nach dem obigen die Werthe V naturgemäß bedeutenden Schwankungen unterliegen, so können sie auf keinen Fall für die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes von entscheidendem Einfluss sein. Hätte ich die Versuche in der Weise behandelt, wie es von Higier geschehen ist, so würden, abgesehen davon, dass auch die Raumlagen nicht besonders berücksichtigt werden dürften, die Differenzen $M_b - M$ noch zu den wahrscheinlichen Fehlern addirt werden müssen. Zur Prüfung der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes würden sich dann die Werthe ergeben: 0,022; 0,026; 0,015; 0,011; 0,008; 0,009, die sich in

der That ähnlich verhalten, wie die von Higier¹⁾ berechneten Verhältnisse $\frac{A}{a}$. Indessen sind diese Werthe ebenso wenig entscheidend, wie die Verhältnisse V .

Dagegen zeigen die Verhältnisse $\frac{F}{M}$, sowie die Verhältnisse $\frac{F_a}{M_a}$ und $\frac{F_b}{M_b}$ das Weber'sche Gesetz sehr gut bestätigt für das Reizintervall 5 bis 50 mm, während sich für die Reize 1 und 2 mm eine geringe Abweichung geltend macht. Das ist nur dieselbe Thatsache, die auch in anderen Sinnesgebieten für kleine Reize bestätigt worden ist.

Die Tabellen II und III bestätigen die Anwendbarkeit der Gauß'schen Theorie in der schönsten Weise. Die kleineren Beobachtungsfehler treten überall häufiger auf als die großen, die beobachteten Zahlen zeigen mit wenigen Ausnahmen immer eine stetige Abnahme, und die Differenzen zwischen den berechneten und beobachteten Werthen sind meist nur gering. Dass die Uebereinstimmung so weit gehe, wie bei der Beobachtungsreihe von Bradley, kann nicht erwartet werden.

Beim Ausgange von einem größeren Reize liegen innerhalb der Grenzen $M_a \pm F_a$ im Mittel 51,3 Fehler, beim Ausgange von einem kleineren Reize innerhalb der Grenzen $M_b \pm F_b$ 48,8 Fehler. Das Mittel würde also sehr nahe 50 sein. Die Maximalabweichungen sind 6 bez. 4. Für 20 Versuche würden sich die Zahlen 1,2 und 0,8 ergeben, während bei den Versuchen von Kundt diese Werthe 3 und 2 waren. Sonach spricht auch dieses Kriterium in entschiedener Weise für die Gültigkeit der Gauß'schen Theorie. Dividirt man schließlich die obere Fehlergrenze A , welche nie überschritten und in jeder Reihe nur einmal erreicht wurde, durch den zugehörigen wahrscheinlichen Fehler, so erhält man die Werthe der folgenden Tabelle:

1) Phil. Stud. VII, S. 237.

Tabelle IV.

Δ	0,029	0,055	0,125	0,22	0,41	1,26
$\frac{\Delta}{F_a}$	4,1	3,9	4	3,9	3,4	4,5
Δ	0,023	0,048	0,120	0,21	0,41	0,98
$\frac{\Delta}{F_b}$	3,4	4	4,3	3,8	3,5	3,5

Die Mittelwerthe dieser Verhältnisse sind 3,97 und 3,75, das Gesamtmittel 3,86, ein Werth, der mit dem früher von mir¹⁾ abgeleiteten (3,84) sehr nahe übereinstimmt.

Sonach dürften diese Versuche die Brauchbarkeit der Methode der mittleren Fehler aufs schlagendste nachweisen.

C. Bestimmung des eben merklichen Unterschiedes.

Bei Bestimmung der Schwellenwerthe wurde der Vergleichsreiz dem Normalreiz subjectiv gleich gemacht. Dabei wurden die Erfahrungen der Versuche des vorigen Abschnittes berücksichtigt. Waren die so eingestellten Reize noch nicht völlig gleich, so wurde durch einen neuen Versuch der Gleichheitspunkt sicher bestimmt. Von diesem ausgehend wurde dann der Reiz ermittelt, welcher eben größer bez. kleiner erschien. Für jede Raumlage wurden wieder 50 Versuche ausgeführt. Es wurde stets mit normaler Aufmerksamkeit beobachtet, so dass die Versuche nicht anstrengend waren. Ich gebe in der folgenden Tabelle nur die Mittelwerthe für die obere und untere Schwelle und wähle dieselben Bezeichnungen wie früher, charakterisire aber die obere und untere Schwelle durch die kleinen Buchstaben *o* und *u*. Setzt man diese Buchstaben an Stelle von *a* und *b* in den Formeln und Bezeichnungen des vorigen Abschnittes, so sind dieselben ohne weiteres anwendbar. Die Zahl der Versuche beträgt wieder 1200. $\frac{C}{N}$ gibt das Verhältniss des constanten Fehlers zum Normalreiz an.

1) Phil. Stud. VII, S. 582.

Tabelle V.

N	M_o	M_u	M	F_o	F_u	F	$\frac{F_o}{M_o}$	$\frac{F_u}{M_u}$	$\frac{F}{M}$	C	V	$\frac{C}{N}$
1	1,026	0,943	0,984	0,0062	0,0094	0,0056	0,0061	0,0100	0,0057	-0,016	0,043	0,016
2	2,040	1,908	1,974	0,0104	0,0142	0,0087	0,0049	0,0074	0,0044	-0,026	0,033	0,013
5	5,072	4,868	4,970	0,0226	0,0247	0,0168	0,0045	0,0051	0,0034	-0,030	0,021	0,006
10	10,09	9,707	9,898	0,0420	0,0457	0,0310	0,0042	0,0047	0,0031	-0,102	0,019	0,010
20	20,04	19,21	19,62	0,0763	0,1042	0,0646	0,0038	0,0054	0,0033	-0,380	0,021	0,019
50	49,65	47,71	48,68	0,2307	0,2386	0,1661	0,0046	0,0050	0,0034	-1,320	0,020	0,026

Dividirt man die Werthe V durch die Mittelwerthe der Verhältnisse $\frac{F_o}{M_o}$ und $\frac{F_u}{M_u}$, so ergeben sich die folgenden Zahlen: 5,4; 5,4; 4,4; 4,3; 4,5; 4,2. Die Verhältnisse, durch welche bei der Methode der mittleren Fehler die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes geprüft wird, sind also nur $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{5}$ so groß, als die Verhältnisse, welche die Methode der ebenmerklichen Unterschiede zu dem gleichen Zwecke verwendet. Die beiden folgenden Tabellen entsprechen völlig den Tabellen II und III des vorigen Abschnitts.

Tabelle VI.

0 und 0,03	55	0 und 0,05	49	0 und 0,10	50	0 und 0,20	48	0 und 0,40	47	0 und 0,96	57
41,1	51	48,3	49	46,6	50	47,9	49	52	53	35,9	42
30,9	20	32,2	29	32,1	28	32,2	34	32,3	35	29,0	28
17,5	19	14,3	19	15,1	13	14,5	15	12,3	11	19,0	12
7,4	8	4,3	3	4,9	7	4,4	0	2,9	0	9,9	12
2,4	2	0,8	0	1,1	2	0,9	2	0,5	1	4,2 1,5	5 1

Tabelle VII.

0 und 0,035	48	0 und 0,07	49	0 und 0,10	46	0 und 0,20	53	0 und 0,40	49	0 und 0,96	50
30,1	29	36,5	32	41,5	43	44,3	53	46,8	38	34,7	36
27,5	25	29,3	34	31,0	35	31,7	27	32,1	35	28,4	25
19,4	19	18,8	23	17,3	14	16,1	13	15,0	15	19,2	20
12,1	14	9,7	7	7,3	5	6,0	4	4,9	9	10,5	13
6,3	6	3,9	2	2,3	3	1,6	3	1	3	4,7	5
2,9 1,2	4 3	1,4 0,3	1 1	—	—	—	—	—	—	1,8	1

Während bei den Versuchen der vorigen Gruppe die Mittelwerthe aus sämmtlichen Zahlen bei linker Lage der Vergleichsdistanz mit einer einzigen Ausnahme größer waren als die Normaldistanzen, sind sie jetzt sämmtlich kleiner. Die Abweichungen sind aber verhältnissmäßig gering und zeigen keine regelmäßige Abnahme. Dagegen zeigen die Mittelwerthe aus M_{or} und M_{ur} genau dasselbe Verhalten, wie bei den Versuchen des vorigen Abschnittes die Mittel aus M_{ar} und M_{br} . Die Abweichungen von den Normaldistanzen nehmen stetig zu und entsprechen in ihrem Gange den Werthen C . Die meisten sind nahezu doppelt so groß. Die absoluten Werthe der Verhältnisse $\frac{C}{N}$ nehmen anfangs zu und dann ab. Es zeigt sich somit auch hier eine klar ausgesprochene Unterschätzung der linken Strecke, wenn die rechte den variablen Reiz bildet. Ist hingegen die linke Strecke der variable Reiz, so werden beide Reize nahezu gleich beurtheilt.

Die Verhältnisse $\frac{F_o}{M_o}$, $\frac{F_u}{M_u}$ und $\frac{F}{M}$ nehmen erst ab und sind dann constant. Dasselbe Verhalten zeigen hier die Verhältnisse V . Für das Gebiet 5 bis 50 mm vermag ich zwei Strecken eben zu unterscheiden, wenn ihr Unterschied $\frac{1}{50}$ der Normalstrecke beträgt. Diese Versuche bestätigen somit die Gültigkeit des Weber'schen

Gesetzes abgesehen von der auch hier hervortretenden unteren Abweichung in der schönsten Weise.

Aus den Tabellen VI und VII geht ferner die Anwendbarkeit der Gauß'schen Theorie der Beobachtungsfehler klar hervor. Die Zahl der beobachteten Werthe stimmt in völlig hinreichender Weise mit der Zahl der berechneten Werthe überein. Bei Bestimmung der oberen Schwelle liegen innerhalb der Grenzen $M_o \pm F_o$ im Mittel 51 Fehler, bei Ermittlung der unteren Schwelle innerhalb der Grenzen $M_u \pm F_u$ im Mittel 49,2, also ist das Gesamtmittel wieder nahezu 50. Die größten Abweichungen nach beiden Seiten betragen 7 und 4, also für 20 Versuche 1,4 und 0,8. Diese Ergebnisse sprechen ebenfalls entschieden für die Gültigkeit der Gauß'schen Theorie. Bilden wir auch hier die Quotienten aus den größten Fehlern Δ und den wahrscheinlichen Fehlern, so erhalten wir die Werthe der folgenden Tabelle:

Tabelle VIII.

Δ	0,025	0,039	0,095	0,180	0,36	0,96
$\frac{\Delta}{F_o}$	4,0	3,8	4,2	4,3	4,7	4,2
Δ	0,033	0,065	0,100	0,200	0,37	0,95
$\frac{\Delta}{F_u}$	3,5	4,6	4,0	4,4	3,6	4

Das Mittel beträgt 4,1, ist also etwas höher als bei den Versuchen des vorigen Abschnittes.

D. Bestimmung der doppelten Reize.

Nach Beendigung der beiden letzten Versuchsgruppen wurde eine Reihe von Versuchen ausgeführt, welche lediglich eine Wiederholung dieser Versuche bei gewissen Normalreizen bildeten. Für jede Raumlage wurden nur 20 Versuche ausgeführt, so dass zur Berechnung eines wahrscheinlichen Fehlers 40 Bestimmungen vorlagen. Ich erhielt dabei ausschließlich Werthe, welche innerhalb der Grenzen der Werthe der beiden letzten Abschnitte lagen. Damit

war zugleich gezeigt, dass die Zahl der Versuche nicht mehr von Einfluss ist, sobald dieselbe eine gewisse Höhe erreicht hat. Da nun die Versuche bei Ausführung von jeweils 50 Versuchen bei jeder Raumlage für jeden Normalreiz zwei Tage erforderten, da ferner die Rechnungen, wie sie für die Versuche der beiden vorigen Gruppen durchgeführt wurden, verhältnissmäßig viel Zeit beanspruchten, und da schließlich die Versuche der beiden folgenden Gruppen nicht dieselbe Bedeutung beanspruchen können, so beschränkte ich mich auf je 20 Versuche und suchte die Rechnungen nach Möglichkeit zu vereinfachen. Ich will das von mir eingeschlagene und am Schlusse des ersten Abschnitts gekennzeichnete Verfahren an einem Beispiele erörtern.

Die Normaldistanz ist 1 mm. Es sollte, ausgehend von einem Reize von etwa 3 mm, die doppelte Distanz hergestellt werden. Da die ersten Werthe nahe an 2 Umdrehungen lagen, wurden $1\frac{1}{2}$ Umdrehungen ausgeführt, und dann wurde der Theilkreis so gestellt, dass der Zeiger auf dem Nullpunkte stand. Dann ergaben die Ablesungen bei rechter Raumlage der Vergleichsdistanz:

0,475; 0,484; 0,497; 0,495; 0,531; 0,542; 0,535; 0,517; 0,482; 0,487; } MW 0,5041
 0,485; 0,513; 0,555; 0,525; 0,489; 0,504; 0,495; 0,494; 0,505; 0,473. }

Bei linker Raumlage waren die Werthe:

0,531; 0,552; 0,571; 0,567; 0,574; 0,497; 0,506; 0,512; 0,577; 0,516; } MW 0,5437
 0,558; 0,558; 0,567; 0,558; 0,546; 0,565; 0,493; 0,562; 0,562; 0,503. }

Um den wahrscheinlichen Fehler zu finden, wurden für die beiden Gruppen die Werthe herausgeschrieben, welche größer als 0,5041 und 0,5437 waren. Ihre Summe S ist im ersten Falle 4,223, im zweiten Falle 7,317. Das Product ZM hat die Werthe: $8 \cdot 0,5041 = 4,033$ und $13 \cdot 0,5437 = 7,068$. Demnach erhält die Differenz $S - ZM$ die Werthe: 0,19 und 0,249 und der wahrscheinliche Fehler ergibt sich aus:

$$F = \frac{1,7 (0,19 + 0,249)}{40} = 0,0187.$$

Zum Schluss erst wurden die eingestellten Strecken bestimmt und zwar ergab sich für die Strecke rechter Hand: $0,85 \cdot 1,5 + 0,504 = 1,78$ mm und für die Strecke linker Hand: $0,84 \cdot 1,5 + 0,544 = 1,80$ mm, also im Mittel 1,79 mm.

Tabelle IX.

N	M_0	M_u	M	F_0	Z_0	F_u	Z_u	F	$\frac{F_0}{M_0}$	$\frac{F_u}{M_u}$	$\frac{F}{M}$	C	V	$\frac{C}{N}$
1	1,79	1,65	1,72	0,0187	18	0,0171	19	0,0127	0,0104	0,0104	0,0074	-0,28	0,041	0,280
2	3,867	3,61	3,74	0,0246	20	0,0245	19	0,0174	0,0084	0,0068	0,0047	-0,262	0,035	0,131
5	9,59	8,82	9,20	0,041	16	0,044	17	0,030	0,0043	0,0050	0,0033	-0,795	0,042	0,159
10	19,51	17,46	18,48	0,094	17	0,091	17	0,065	0,0048	0,0052	0,0035	-1,515	0,055	0,151
20	38,99	34,87	36,93	0,157	21	0,189	16	0,123	0,0040	0,0054	0,0033	-3,07	0,056	0,153

Für die rechte Raumlage ist $M \pm F = 0,5228$ bis $0,4854$, für die linke: $0,5624$ bis $0,5250$. Die innerhalb dieser Grenzen liegenden Werthe wurden unterstrichen und gezählt. Es sind im vorliegenden Falle 18. Auf 100 Versuche würde das 45 geben.

Ich stelle nunmehr die Hauptergebnisse der Versuche in einer Tabelle zusammen und behalte die Bezeichnungen des vorigen Abschnittes bei. M_0 bezeichnet hier den doppelten Reiz beim Ausgange von einem größeren Reize, M_u denselben Werth beim Ausgange von einem kleineren Reize. Z_0 ist die Zahl der Fehler, welche innerhalb der Grenzen $M_0 \pm F_0$ liegen, und Z die Zahl der innerhalb der Grenzen $M_u \pm F_u$ gelegenen Fehler.

Bei diesen Versuchen wurde ohne jede Ausnahme ein Reiz, welcher noch nicht doppelt so groß war als der Normalreiz, für doppelt so groß gehalten, es zeigte sich überall ein negativer constanter Fehler. Vorausgesetzt, dass die für den constanten Fehler der beiden vorigen Versuchsgruppen gegebene Erklärung richtig ist, würden diese Versuche entschieden darauf hinweisen, dass ich den größeren Reiz vorwiegend mit dem rechten Auge fixirte und zwar in höherem Grade, wenn er rechts lag.

Der constante Reiz wurde daher stets unterschätzt. Der constante Fehler beträgt hier für $N = 2$ bis $N = 50$ mm immer nahezu denselben Bruchtheil des Normalreizes.

Das Mittel der Werthe Z_o ist 18,4, das Mittel der Werthe Z_u aber 17,6, das Gesamtmittel mithin 18. Daraus geht hervor, dass die kleineren Fehler in etwas geringerer, die größeren Fehler in höherer Zahl auftreten, als es die Gauß'sche Theorie erheischt. Um die Zahl 20 im Mittel zu erhalten, müsste man in der Formel:

$$F = 0,85f$$

für den Bruch 0,85 einen etwas höheren Werth setzen. Derselbe würde jedoch näher an 0,85 liegen als an 1. Man behält daher am besten die obigen Formel bei, da die Prüfung des Weber'schen Gesetzes darunter in keiner Weise leidet, und beachtet die Werthe Z , die eben andeuten, dass eine Abweichung vom Gauß'schen Gesetz nach der Seite der größeren Fehler zu stattfindet. Diese Abweichung hat jedenfalls darin ihren Grund, dass die Verdoppelung eines Reizes eine schwierigere Aufgabe ist, als die Herstellung gleicher Reize oder ebenmerklich verschiedener Reize.

In Bezug auf die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes verhalten sich diese Versuche ähnlich wie die des Abschnittes B. Die Verhältnisse $\frac{F_o}{M_o}$, $\frac{F_u}{M_u}$, $\frac{F}{M}$ sind vom Reize 5 an sehr constant, für die beiden ersten Reize zeigen diese Werthe ebenfalls eine nicht unerhebliche Abnahme, die jedoch z. Th. durch die Uebung bedingt sein könnte. Die Werthe V nehmen indess hier anfangs ab und dann zu, sie bilden sonach kein sicheres Kriterium für die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes. Doch ist die Constanz dieser Ausdrücke nicht nothwendig, ähnlich wie beim Abschnitt B. Higier's¹⁾ Versuche zeigen einen constanten Fehler von geringerem Betrage, aber demselben Vorzeichen. Das Verhältniss V ist negativ, wie bei meinen Versuchen unter B. Higier untersucht jedoch das Verhältniss $A = V + 1$, welches bei kleinen Werthen von V selbstredend nahezu constant ausfallen muss. Im Hinblick auf die Constanz dieser Werthe sagt Higier: »Welchen Schluss sind wir aus

1) Phil. Stud. VII, S. 289—293.

dieser Thatsache zu ziehen berechtigt? Wären a_o' und a_u' wirklich mit den gewöhnlich so bezeichneten Werthen der ebenmerklich sich vom Hauptreiz unterscheidenden Fehlreize identisch, so könnte man unbedingt auf die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes schließen. Wir haben es aber hier nicht mit ebenmerklich sich unterscheidenden Vergleichsreizen zu thun, sondern vielmehr mit solchen im Sinne der Methode der mittleren Fehler, also mit mittleren ebenunmerklich sich unterscheidenden Größen. Ich glaube daher nicht, dass man die Constanz dieses Quotienten ohne weiteres als strictes Kriterium der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes anführen darf, wie es Merkel thut.« Ich habe hierauf folgendes zu entgegnen. Die Werthe V sind abgesehen vom negativen Vorzeichen bei den Versuchen Higier's: 0,009; 0,020; 0,002; 0,007. Aus ihnen wird niemand »unbedingt« auf die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes schließen. Der größte Werth ist zehnmal so groß als der kleinste, während bei meinen Werthen der größte Werth noch nicht den doppelten Betrag des kleinsten erreicht. Auf die Schwelle beim Schallmaß übertragen würde das Ergebniss Higier's bedeuten, dass zwei Schallstärken unterschieden werden, die sich einmal verhalten wie 11 : 10 ($V = \frac{1}{10}$), das andere Mal wie 20 : 10 ($V = 1$), mit Rücksicht auf meine Werthe würden diese Verhältnisse sein 12,5 : 10 ($V = \frac{1}{4}$) und 14 : 10 ($V = \frac{2}{5}$). Die Werthe Higier's verhalten sich übrigens ebenso, wie die Werthe V des Abschnittes B. Sie sind absolut genommen ziemlich klein und daher dürfen die erheblichen Schwankungen nicht Wunder nehmen. Was nun meine frühere Stellung zu dieser Frage anbelangt, so habe ich die Werthe A bez. V bei meinen Lichtsinnversuchen¹⁾ gar nicht mitgetheilt, weil sie auch dort bedeutenden Schwankungen in Folge ihres geringen Betrages unterworfen waren. Bei Besprechung der Versuche aus dem Gebiete des Drucksinns²⁾ sage ich: »Bei diesen Versuchen waren übrigens im Gegensatze zu den Lichtsinnversuchen R_1^u und R_1^o wesentlich verschieden

1) Phil. Stud. IV, S. 562.

2) Ebenda, V, S. 264.

und überdies war durchgängig $R_1^u < R_1^o$. Es ist deshalb das Verhältniss $A = \frac{R_1^o}{R_1^u}$ neben $B = \frac{R_1}{R}$ berechnet worden. Ersteres muss sich innerhalb der Grenzen der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes als constant erweisen«. Ich habe sonach das Kriterium $A = \text{const}$ nur für die Drucksinnversuche bez. nur unter der Bedingung aufgestellt, dass $A - 1$ einen nicht zu geringen Werth besitze und $R_1^u < R_1^o$ sei. In der That erwiesen sich diese letzteren Werthe innerhalb der Grenzen der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes nicht nur für die Drucksinnversuche, sondern auch für die Schallversuche¹⁾ nahezu constant. Dagegen zeigten die Werthe A , wie ich bei Besprechung der letzten Versuchsgattung ausdrücklich hervorhebe, die untere Abweichung vom Weber'schen Gesetz nicht. Hierbei ist noch hervorzuheben, dass meine früheren Versuche nach der Methode der ebenmerklichen Unterschiede, die Versuche Higier's nach der Methode der mittleren Fehler ange stellt worden sind. Das bei der ersten Methode gebotene Verfahren lässt aber viel eher für $V = A - 1$ constante Werthe erwarten, als das Verfahren bei der Methode der mittleren Fehler.

Während nun aber Higier selbst nicht glaubt, dass man die Bedingung $A = \text{const}$ als strictes Kriterium der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes anführen darf, legt er es doch unwissentlich der Prüfung des Weber'schen Gesetzes bei seinen Versuchen über die Bestimmung des ebenunmerklichen Unterschieds und, wie es scheint, auch bei den Versuchen der doppelten Reize zu Grunde. Sonach müssten die Versuche Higier's nicht nur nach meiner Meinung, sondern auch auf Grund der Ansichten Higier's selbst, eine völlige Umarbeitung erfahren. Es würde mich freuen, wenn Higier seine werthvollen Versuche in derselben Weise bearbeitete, wie ich es in den Abschnitten B und D an meinen Versuchen gezeigt habe. Erst dann können sie über die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes entscheiden.

1) Phil. Stud. V, S. 515.

Tabelle X.

N	M_0	M_u	M	F_0	Z_0	F_u	Z_u	F	$\frac{F_0}{M_0}$	$\frac{F_u}{M_u}$	$\frac{F}{M}$	C	V	$\frac{C}{N}$
2	1,21	1,14	1,175	0,0113	18	0,0108	20	0,0078	0,0093	0,0095	0,0066	0,175	0,030	0,087
4	2,166	2,125	2,145	0,0182	21	0,0194	22	0,0132	0,0084	0,0091	0,0062	0,145	0,010	0,029
10	5,73	5,24	5,485	0,0433	19	0,0413	19	0,0299	0,0076	0,0079	0,0054	0,485	0,045	0,048
20	11,24	10,45	10,84	0,0977	21	0,0822	19	0,0636	0,0087	0,0079	0,0059	0,840	0,037	0,042
40	21,40	20,91	21,15	0,1763	22	0,1817	20	0,1266	0,0082	0,0087	0,0060	1,150	0,012	0,029

E. Bestimmung der halben Reize.

Bei diesen Versuchen handelte es sich zunächst darum, zu einem gegebenen Normalreize entweder rechts oder links einen Reiz von halber Größe nach dem Augenmaß einzustellen. Bei kleinen Reizen wurde von einem gleichen Reize, bez. vom Reize 0 begonnen, bei größeren von einem Reize, der sicher größer bez. kleiner als der halbe Reiz war. Das letztere Verfahren wurde erst angewandt, nachdem ich die Ueberzeugung gewonnen hatte, dass es ebenso gute Resultate lieferte, als das erstgenannte langwierigere Verfahren. Die Behandlungsweise und Zahl der Versuche (400) war hier dieselbe wie im vorigen Abschnitt. Unter Beibehaltung derselben Bezeichnungen bedeutet M_0 den halben Reiz beim Ausgange von einem größeren Reize, M_u den halben Reiz beim Ausgange von einem kleineren Reize. Alle übrigen Bezeichnungen der nebenstehenden Tabelle sind dann ohne weiteres verständlich.

Die für den halben Reiz gefundenen Werthe sind hiernach sämtlich zu groß, der constante Fehler ist stets positiv. Bildet man für die Versuche des vorigen Ab-

schnitts die Verhältnisse $\frac{M}{N}$, d. h. die Verhältnisse der für doppelt geschätzten Reize zu den Normalreizen, so erhält man: 1,72; 1,87; 1,84; 1,85; 1,85. Die entsprechenden Verhältnisse sind hier die Quotienten $\frac{N}{M}$, d. h. die Werthe: 1,7; 1,86; 1,82; 1,85; 1,89. Daraus geht hervor, dass bei den vorliegenden Versuchen der constante Fehler vermuthlich ebenfalls z. Th. darin seine Erklärung findet, dass die größere Strecke vorwiegend mit dem rechtem Auge fixirt, die kleinere unterschätzt wurde. Höchst wahrscheinlich wirkten bei der Entstehung des constanten Fehlers der Versuche der beiden letzten Abschnitte noch andere Ursachen mit, welche den größeren Betrag im Vergleich zu den Versuchen der Abschnitte B und C zu erklären vermögen. Indessen komme ich darauf auf Grund anderer Versuche zurück. Hier handelt es sich in erster Linie um die Prüfung der Anwendbarkeit der Gauß'schen Theorie der Beobachtungsfehler und sodann um die Prüfung der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes. Die Werthe Z weichen hier im einzelnen wie in ihrem Gesamtmittel so wenig von dem durch die Theorie geforderten Werthe ab, dass die erste Frage entschieden zu Gunsten der Gauß'schen Theorie zu entscheiden ist. Die Werthe V , deren Constanz auch hier nicht nothwendig ist, zeigen wie bei den Versuchen unter B und D wesentliche Schwankungen. Die Verhältnisse $\frac{F}{M}$ nehmen erst um geringe Beträge ab, dann um noch geringere Werthe zu, sie bestätigen das Weber'sche Gesetz jedenfalls in angenäherter Weise.

F. Die Hauptergebnisse der Versuche und Vergleichung der Verhältnisse $\frac{F}{M}$.

Ueberblicken wir sämmtliche Versuchsergebnisse noch einmal in Bezug auf die beiden Hauptfragen, so erweist sich die Gauß'sche Theorie durchaus als anwendbar, nur bei der Methode der doppelten Reize zeigt sich eine geringe Abweichung nach Seiten der größeren Fehler. Diese Versuche waren aber nicht nur an sich

die schwierigsten, sondern die gleichzeitige Fixation der beiden Reize war hier überhaupt wesentlich schwieriger, als bei den anderen Versuchsgruppen. Der Hauptvorteil der Versuche der letzten Gruppe liegt jedenfalls darin, dass bei ihr die Ausgangsreize für den Vergleichsreiz fest bestimmt oder in feste Grenzen eingeschlossen sind. Letzteres ließ sich auch bei der Methode der doppelten Reize erreichen, wenn man als Ausgangsreize ein- für allemal das 1,5- und 2,5fache festsetzte. Doch war die Verdoppelung trotzdem schwieriger als die Halbierung.

Hinsichtlich der Frage nach der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes ergibt sich eine untere Abweichung aus allen Werthen, die hier überhaupt in Frage kommen können. Die Unterschiedsempfindlichkeit nimmt bei kleinen Reizen mit denselben ab. Für mittlere und größere Reize erweist sich das Weber'sche Gesetz theils als gültig, theils zeigt sich eine freilich nur unerhebliche Abnahme der Unterschiedsempfindlichkeit mit der Zunahme der Reize. In entschiedenerer Weise zeigen diese letzte Thatsache die von mir umgerechneten Versuche Higier's auf Grund der Methode der richtigen und falschen Fälle, doch beziehen sich dieselben auf größere Reize. Für die Reize 50, 100, 150 und 200 sind die Verhältnisse $\frac{F}{M}$ bei Higier¹⁾: 0,018; 0,021; 0,023 und 0,025.

Bei meinen sämtlichen Versuchen sind die Fehler gemessen worden, mit welchen die gesuchten Reize M_0 bez. M_u behaftet waren, die Normaldistanz blieb constant. Bei der Beurtheilung der Reize sind aber jedenfalls Fehler bei Auffassung der Normalreize wie der Vergleichsreize begangen worden. Die wahrscheinlichen Fehler F beziehen sich sonach immer auf die Beurtheilung des Unterschieds der beiden Reize. Da es sich nun im vorangehenden um ebenunmerkliche, ebenmerkliche und übermerkliche Reize handelt, so sind die erhaltenen Werthe $\frac{F}{M}$ nicht unmittelbar vergleichbar. Wir müssen daher auf die bei Beurtheilung der einzelnen Reize begangenen Fehler zurückgehen. Ich führe dies für die Werthe M_a bez. M_0 durch und behalte die letztere Bezeichnung durchgängig bei.

1) Phil. Stud. VIII, S. 104.

Ist der wahrscheinliche Fehler bei Betrachtung des Unterschiedes der beiden Reize F_o , sind ferner die Fehler bei Beurtheilung von N und M_o gleich f und f_o , so ist nach den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

$$F_o = \sqrt{f^2 + f_o^2} .$$

Bei Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes ist aber:

$$f = pN ,$$

$$f_o = pM_o ,$$

worin p einen constanten, echten Bruch darstellt. Demnach wird:

$$F_o = p\sqrt{N^2 + M_o^2} ,$$

oder:

$$\frac{F_o}{\sqrt{N^2 + M_o^2}} = \frac{f}{N} = \frac{f_o}{M_o} = p (I)$$

Dieses allgemeine Kriterium für die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes kann aber bei den Versuchen der beiden ersten Gruppen wegen des geringen Unterschiedes von N und M_o durch eins der beiden folgenden ersetzt werden:

$$\frac{F_o}{0,707(N + M_o)} = p , (II)$$

$$0,707 \cdot \frac{F_o}{M_o} = p (III)$$

Nimmt man bei den Versuchen nach der Methode der doppelten Reize $N = 0,5 M_o$ an, so erhält man den meist hinreichenden Näherungswerth:

$$0,82 \frac{F_o}{M_o} = p (IV)$$

Legt man schließlich für die Methode der halben Reize den Werth $N = 2 M_o$ zu Grunde, so ergibt sich:

$$0,45 \frac{F_o}{M_o} = p (V)$$

Für die Gruppen B, C, D und E lauten diese Werthe $p : 0,0042 : 0,0030 ; 0,0036$ und $0,0036$ in Bezug auf die Mittel der Werthe $\frac{F_a}{M_a}$ bez. $\frac{F_o}{M_o}$, für welche das Weber'sche Gesetz gilt.

Diese Berechnungen zeigen, dass sogar der bei Beurtheilung eines Reizes begangene Fehler bei ganz verschiedenen Versuchsgattungen für die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes spricht, insofern er einen innerhalb geringer Grenzen sich bewegenden Bruchtheil des Normalreizes bez. des beobachteten Reizes beträgt.