# Ueber Fechner's Collectivmafslehre und die Vertheilungsgesetze der Collectivgegenstände.

Von

**Gottl. Friedr. Lipps.**

Fechner hat in einem nachgelassenen, neuerdings veröffentlichten Werke[1]) die Maßlehre der Collectivgegenstände entwickelt. Diese neue Lehre erregt das Interesse sowohl durch die Art und Weise ihrer Begründung, die sich auf die Wahrscheinlichkeitsgesetze des Zufalls stützt, als auch wegen der Möglichkeit ihrer Anwendung in einer Reihe von Wissensgebieten. Insbesondere steht sie mit der Theorie der Beobachtungsfehler in einem engen Zusammenhang. Sie benutzt diese Theorie als Ausgangspunkt der Entwickelungen. Sie streift jedoch die beschränkenden Bestimmungen, die hieraus entspringen, ab, so dass die Fehlertheorie nur als ein Glied der allgemeinen Theorie der Collectivgegenstände bestehen bleibt und durch diesen Zusammenhang selbst wieder einer freieren und tiefer gehenden Auffassung fähig wird. Ist doch nunmehr jedes Fehlergesetz zugleich ein Vertheilungsgesetz für Collectivgegenstände und jedes Vertheilungsgesetz dieser Art ein mögliches Fehlergesetz.

Diese Wechselwirkung zwischen der Fehlertheorie und der Collectivmaßlehre lässt, wie ich glaube, den wissenschaftlichen Fortschritt, der in dem Werke Fechner's vorliegt, am schärfsten zu Tag treten. Ihn hervorzuheben ist der Zweck der folgenden Zeilen.

---

1) Collectivmaßlehre von Gustav Theodor Fechner; im Auftrage der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften herausgegeben von Gottl. Friedr. Lipps. Leipzig, W. Engelmann, 1897 (X u. 483 S.). Auf dieses Werk beziehen sich die Angaben der Kapitel und Seiten in den folgenden Citaten.

Dementsprechend gebe ich zunächst eine kurze Uebersicht über die Hauptpunkte der Lehre Fechner's, um sodann das Grundproblem, das die Entwicklung von Vertheilungsgesetzen für Collectivgegenstände oder von Fehlergesetzen zum Gegenstande hat, zu behandeln.

## I.

§ 1. Die Collectivmaßlehre ist die Maßlehre der Collectivgegenstände (C.-G.). Ein C.-G. aber ist — nach Fechner's Definition[1] — ein Gegenstand, »der aus unbestimmt vielen, nach Zufall variirenden Exemplaren besteht, die durch einen Art- oder Gattungsbegriff zusammengehalten werden«.

Aus dieser Definition ist unmittelbar der große Anwendungsbereich der Collectivmaßlehre zu ersehen. »Anthropologie, Zoologie, Botanik« — sagt Fechner — »haben es überhaupt wesentlich mit C.-G. zu thun, da es sich darin nicht um eine Charakteristik einzelner Exemplare, sondern nur um das handeln kann, was einer Gesammtheit derselben zukommt, die aus dem oder jenem Gesichtspunkte als Gattung oder Art in größerer oder geringerer Weite zusammengefasst wird. Die Meteorologie bietet ... in ihren nicht periodischen Witterungsphänomenen zahlreiche Beispiele davon dar; und selbst in der Artistik lässt sich von solchen sprechen, sofern Bücher, Visitenkarten darunter gehören«.

Diese Gebiete liefern denn auch das Untersuchungsmaterial, das zur Begründung und Bewährung der Theorie benutzt wird. Insbesondere dienen hierzu die Längenmaße sächsischer Rekruten; Horizontal- und Verticalumfang europäischer Männerschädel; von Fechner selbst gemessene sechs- und fünfgliedrige Roggenhalme; Abweichungen des Thermometers und Barometers vom Normalstande; tägliche Variationen der Temperatur als Differenzen zwischen Maximum und Minimum der Tagestemperatur; tägliche Regenhöhen; Dimensionen (Länge und Breite) der Galleriegemälde.

Ganz allgemein lässt sich der Anwendungsbereich der Collectivmaßlehre charakterisiren, wenn man ihre Beziehung zur Statistik beachtet.

---

1) S. 3.

Da ein C.-G. aus unbestimmt vielen Exemplaren besteht, so erfordert seine Beschaffung stets Abzählungen oder Messungen an einer großen Menge einzelner Gegenstände. Sie beruht auf Massenbeobachtung und ist demzufolge als eine Aufgabe der Statistik zu bezeichnen.

Sofern nun die statistischen Erhebungen vorzugsweise das gesellschaftliche und wirthschaftliche Leben betreffen, wird man zunächst die hier zu Tag tretenden Massenerscheinungen, soweit sie nach Zufall variiren, mit gleichem Rechte wie die Witterungsphänomene als C.-G. auffassen und der Collectivmaßlehre unterstellen. Beispielsweise liefern die Schwankungen der Getreidepreise um einen Normalwerth unter ähnlichen Bedingungen einen C.-G. wie die Schwankungen des Thermometerstandes um den Normalstand. Hier wie dort sind zufällig wechselnde Erscheinungen von periodisch wiederkehrenden zu sondern und auf das Zutreffen der allgemeinen, für C.-G. geltenden Gesetzlichkeiten zu prüfen. Entsprechendes gilt für die Schwankungen in der Anzahl der Geburten, Eheschließungen, Todesfälle für eine örtliche und zeitliche Umgrenzung.

Die Statistik reicht jedoch weiter als die Lehre vom gesellschaftlichen und wirthschaftlichen Leben; und so wird man denn überhaupt jedes Wissensgebiet, in welchem statistische Zählungen und Messungen, oder kurz Massenbeobachtungen, den Erkenntnissinhalt vermitteln, als ein Anwendungsgebiet der Collectivmaßlehre betrachten dürfen. Allerdings ist die Verwendbarkeit ihrer Untersuchungsmethoden nicht ohne weiteres vorauszusetzen, sondern erst kritisch zu prüfen. Dabei ist als Grundbedingung festzuhalten, dass die Veränderlichkeit der beobachteten Werthe ein Spiel des Zufalls und nicht eine gesetzmäßige Wirkung bekannter Ursachen sei. Jedenfalls aber hat man in jedem, auf Statistik beruhenden Wissensgebiete die Möglichkeit einer Anwendung der Collectivmaßlehre in Betracht zu ziehen.

§ 2. Um nun einen Einblick in die Lehre Fechner's zu gewinnen, ist zunächst die Beschaffenheit der C.-G. klarzulegen.

Da es sich um eine Maßlehre handelt, kommen die Exemplare der C.-G. nur, soweit sie Maßbestimmungen gestatten, in Betracht. Sie treten somit als räumliche oder zeitliche, extensive oder intensive Quanta auf. Sie stellen dabei ein- oder mehrdimensionale Größen dar, je nachdem jedes Exemplar durch einen einzigen Maßwerth oder durch eine Mehrzahl solcher Werthe bestimmt wird. Dementsprechend sind eindimensionale und mehrdimensionale C.-G. zu unterscheiden.

Jeder räumliche C.-G. kann als mehrdimensional gelten, sofern seine Exemplare die Unterscheidung verschiedener Theile und Dimensionen gestatten, und jeder Theil sowohl wie jede Dimension eine besondere Maßzahl darbietet. Wird beispielsweise am Menschen neben der Größe noch der Brustumfang und das Gewicht unterschieden, so ist er ein dreidimensionaler C.-G.; in gleicher Weise gilt dies vom menschlichen Schädel, wenn dessen Länge, Breite und Höhe neben einander in Betracht gezogen werden. Aber auch zeitliche C.-G. können mehrdimensional sein. Die Statistik der Eheschließungen z. B. führt zu einem zweidimensionalen C.-G., wenn die Combinationen der Lebensalter von Mann und Frau auf die Häufigkeit ihres Vorkommens geprüft werden.

Hiernach müsste eine allseitig durchgeführte Maßlehre neben den eindimensionalen auch mehrdimensionale C.-G. behandeln. Es ist aber selbstverständlich, dass eine Begründung der Lehre von den eindimensionalen ausgeht. Ist nämlich die Theorie für diesen einfachen Fall entwickelt, so bietet ihre Ausdehnung auf mehrdimensionale C.-G. keine wesentliche Schwierigkeit.

Demgemäß legt Fechner durchweg eindimensionale C.-G. seinen Untersuchungen zu Grunde. Er geht zwar auch auf mehrdimensionale insofern ein, als er die Verhältnisse zwischen Dimensionen[1]) einer collectiven Behandlung unterwirft. Das Verhältniss des Horizontal- und Verticalumfangs der Schädelkapsel[2]) und die Verhältnisse der Glieder von Roggenhalmen[3]) dienen als Beispiele. Indessen stellen auch diese Verhältnisswerthe eindimensionale C.-G. dar, so dass man es nur mit solchen zu thun hat.

Die Bedeutung der Exemplare eines C.-G. besteht sonach darin, dass jedes einen bestimmten Maßwerth darbietet. Diese Werthe sind im allgemeinen einer stetigen Abstufung fähig. Sie werden aber, da der Genauigkeit der Messung stets Grenzen gesteckt sind,

---

1) Cap. XXII. Collective Behandlung von Verhältnissen zwischen Dimensionen. Mittlere Verhältnisse.

2) S. 363. 3) S. 417.

in Wirklichkeit eine discrete Mannigfaltigkeit von Zahlwerthen bilden, die, ihrer Größe nach geordnet, von einem kleinsten Werthe durch eine Reihe von Zwischenstufen zu einem größten Werthe führen. Dabei müssen nicht alle möglichen Zwischenstufen wirklich auftreten. Soweit sie aber möglich sind, bilden sie eine äquidistante Reihe, deren constantes Intervall durch den angestrebten Genauigkeitsgrad der Messung bedingt wird. Beschränkt sich z. B. die Messung auf die Angabe der Millimeter, so ist jede Größenstufe von der unmittelbar vorangehenden oder nachfolgenden um 1 mm verschieden.

Auf diese Reihe von Maßwerthen, die allgemein mit $a$ bezeichnet werden, vertheilen sich die beobachteten Exemplare eines C.-G. Zählt man nun ab, wie viel Exemplare auf eine bestimmte Größenstufe fallen, so ordnet sich jeder Stufe eine Anzahl $z$ zu und man gewinnt eine Vertheilungstafel des C.-G. Diese Zuordnung kann für die ganze Reihe der möglichen Größenstufen durchgeführt werden, wenn den in Wirklichkeit nicht auftretenden Maßwerthen die Anzahl $z = 0$ zugelegt wird.

Hiernach erhält man folgendes Schema für die Vertheilungstafel eines C.-G., wenn man das kleinste Maß durch $a_0$, das constante Intervall der Maßscala durch $i$, die Reihe der möglichen Maßwerthe durch $a_0$, $a_0 + i$, $a_0 + 2i$, .... $a_0 + ni$ und die zugehörigen Anzahlen der Exemplare des C.-G. durch $z_0$, $z_1$, $z_2$, .... $z_n$ bezeichnet:

| Maßwerthe | Anzahlen |
|---:|:---|
| $a_0$ | $z_0$ |
| $a_0 + i$ | $z_1$ |
| $a_0 + 2i$ | $z_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| (n−1) $a_0 + (n-1)\,i$ | $z_{n-1}$ |
| $a_0 + ni$ | $z_n$ |

Eine solche Vertheilungstafel bildet die Grundlage für die Untersuchung. Sie heißt die primäre Vertheilungstafel im Gegensatz zu den reducirten, die man durch Vergrößern des primären $i$ und dementsprechendes Zusammenlegen der primären $z$ gewinnt.

§ 3. Der Untersuchung liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass — wie die Definition der C.-G. sagt — die Exemplare nach Zufall variiren. Demgemäß wird die Vertheilung der Anzahlen auf die Größenstufen von den Wahrscheinlichkeitsgesetzen des Zufalls beherrscht. Die hierdurch bedingten Gesetzmäßigkeiten werden zwar nie rein hervortreten, sondern stets durch »unausgeglichene Zufälligkeiten« gestört sein. Sollen sie aber überhaupt hervortreten, so muss der C.-G. Bedingungen erfüllen[1]. Er muss insbesondere nicht nur vielzahlig, sondern auch vollzahlig in dem Sinne sein, dass die gemessenen Exemplare die möglichen Größenwerthe der Häufigkeit ihres Vorkommens entsprechend auch wirklich darbieten; er darf ferner nicht aus einer Mischung verschiedenartiger C.-G. bestehen.

Erfüllt nun ein C.-G. die nothwendigen »Requisiten« und ist er von »Abnormitäten« frei, so bietet die Vertheilungstafel als Erfolg der Herrschaft des Zufalls im allgemeinen folgendes Bild: Die kleinsten Anzahlen $z$ finden sich an den beiden Enden der Maßscala; von da wachsen die $z$-Werthe ständig, so dass in einem mittleren Theile der Scala ein einziges Maximal-$z$ auftritt.

Ist das Intervall der Maßscala klein, so wird man allerdings erst bei einer sehr großen Zahl von Exemplaren das Auftreten dieser Regelmäßigkeit erwarten dürfen. Es ist aber zu fordern, dass eine Reduction der Vertheilungstafel zu einem regelmäßigen Gange der $z$ führt oder wenigstens die unausgeglichenen Zufälligkeiten mildert. Anderenfalls wäre der C.-G. mit Abnormitäten behaftet oder aus verschiedenartigen C.-G. gemischt und zur Begründung oder Bewährung der thatsächlich für »normale« und »reine« C.-G. geltenden Gesetzlichkeiten nicht tauglich. Der Uebergang zu reducirten Vertheilungstafeln bietet somit ein Mittel, um die Erfüllung der Requisiten und das Fehlen von Abnormitäten zu constatiren.

Sichert aber das reguläre Verhalten des C.-G. eine erfolgreiche Untersuchung, so sind einestheils die Bestimmungsstücke oder Elemente abzuleiten, die den C.-G. in seiner Besonderheit charakterisiren und von anderen C.-G. unterscheiden; anderentheils ist das theoretisch gültige Vertheilungsgesetz des C.-G. zu ermitteln,

---

1) Dieselben werden im IV. Capitel: »Requisiten; Abnormitäten« ausführlich erörtert.

auf Grund dessen erst jene Elemente eine wesentliche Bedeutung gewinnen.

§ 4. Zu den Elementen[1]) gehören vor allem die Gesammtzahl $m$ der Exemplare und die Hauptwerthe, die zur Charakteristik eines C.-G. dienen und seine Unterscheidung von anderen C.-G. ermöglichen. Von letzteren kommen hauptsächlich in Betracht: das arithmetische Mittel $A$ als Durchschnittswerth, den man erhält, wenn die Summe aller Maßwerthe durch ihre Anzahl dividirt wird; der Centralwerth $C$ als Werthmitte, die ebenso viel größere Maße über sich als kleinere unter sich hat, und der dichteste Werth $D$ als wahrscheinlichster Werth, auf den das Maximal-$z$ fällt. Im Gefolge der Hauptwerthe treten die Hauptabweichungswerthe auf, die aus den Abweichungen der einzelnen Maßwerthe von den Hauptwerthen gewonnen werden. Es werden die einfache und quadratische mittlere Abweichung $\varepsilon$ und $q$ und die wahrscheinliche Abweichung $w$ unterschieden. Zugleich mit ihnen sind die Anzahlen $m'$ und $m_{,}$ der oberen und unteren Abweichungen von einem Hauptwerthe zu erwähnen. Außerdem finden auch die extremen Werthe $E'$ und $E_{,}$[2]) nach Theorie und Erfahrung Beachtung.

Das arithmetische Mittel $A$ wurde von jeher in Anspruch genommen, um als Durchschnittswerth eine Reihe zusammengehöriger Werthe zu repräsentiren. Die Bedeutung des Centralwerthes $C$ und des dichtesten Werthes $D$ dagegen hat erst Fechner hervorgehoben. Insbesondere verleiht die Einführung von $D$, mit dem das Vertheilungsgesetz des C.-G. in solidarischem Zusammenhange steht, der Lehre Fechner's das charakteristische Gepräge. Man kann daher sagen, dass die Erkenntniss der principiellen Verschiedenheit der drei Hauptwerthe $A$, $C$, $D$, verbunden mit der Feststellung solcher Eigenschaften von $D$, die dessen theoretische Bestimmung ermöglichen, den Kern der Collectivmaßlehre bildet.

§ 5. Die frühere Alleinherrschaft des arithmetischen Mittels hatte in der Fehlertheorie ihren Grund. Bei astronomischen und physikalischen Beobachtungen gilt das arithmetische Mittel $A$ der Beobachtungswerthe, die bei wiederholter Messung eines einzelnen Gegenstandes erhalten werden, als die wahrscheinlichste Bestimmung

1) S. 17—24. 2) Cap. XX. Die Extremgesetze.

des wahren Werthes und die Abweichungen der erhaltenen Maßwerthe von $A$ werden als Beobachtungsfehler aufgefasst, deren mittlerer oder wahrscheinlicher Werth eine Beurtheilung der Genauigkeit der Bestimmung von $A$ nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung gestattet. »Warum sich also« — sagt Fechner[1]) — »in dieser Lehre noch um andere Hauptwerthe kümmern, die und deren Abweichungen zur Erfüllung der Aufgabe dieser Lehre nichts helfen. Also ist auch weder von einem dichtesten Werthe noch Centralwerthe in der astronomischen und physikalischen Maßlehre die Rede, ungeachtet die verschiedenen Beobachtungswerthe eines und desselben Gegenstandes in ihr an sich ebenso gut zur Ableitung eines $D$ und $C$ Anlass geben konnten als die verschiedenen Exemplare eines C.-G. Aber es wäre müßig, eine Sonderbetrachtung derselben zuzuziehen, und geschieht jedenfalls nicht.«

Diese Betrachtungsweise der Fehlertheorie wurde nun ohne weiteres auf die C.-G übertragen. Das zeigt sich besonders deutlich in den diesbezüglichen Ausführungen Quetelet's. Es ist darum wohl nicht ohne Interesse, auf dieselben hier näher einzugehen, umsomehr, da Fechner in seinem Vorwort[2]) zur Collectivmaßlehre sagt: »Nun dürfte das Allgemeinste, Interessanteste, Verdienstlichste, was von unserer Lehre bisher vorlag, in Quetelet's Lettres sur la théorie des probabilités (1846) und seiner Physique sociale (1869) zu finden sein, und wenn man will, kann man in ihm ebenso den Vater der Collectivmaßlehre, wie in E. H. Weber den der Psychophysik sehen; doch wird man sich aus dem Verfolg des Werkes überzeugen können, wie viel Anlass doch war, nicht nur wesentlich erweiternd, sondern auch berichtigend über ihn hinauszugehen.«

§ 6. Nachdem Quetelet[3]) zunächst die Bedeutung des Mittelwerthes überhaupt hervorgehoben, unterscheidet er den wirklich existirenden Mittelwerth als eigentliches Mittel oder Mittel schlechthin von

1) S. 15. 2) S. V.

3) Lettres sur la théorie des probabilités; des moyennes et des limites. Er sagt dort zur Hervorhebung der allgemeinen Bedeutung des Mittelwerthes unter anderem (S. 60, 61): »La considération des moyennes nous est si familière, que nous l'employons, en quelque sorte a notre insu, partout où nous rencontrons des objets qui fixent notre attention et qui sont sujets à varier.« »La théorie des moyennes sert à base à toutes les sciences d'observation; elle est si simple et si

dem blos in Form einer abstracten Zahl sich darbietenden, das keine wirklich existirende Größe bezeichnet. Den charakteristischen Unterschied der beiden Arten von Mittelwerthen findet er darin, dass die Zahlen, aus denen der Mittelwerth berechnet wird, im ersten Falle sich regelmäßig um das Mittel gruppiren, im zweiten Falle aber kein Gesetz befolgen. Dies heißt in der Sprache der Collectivmaßlehre nichts anderes als: das eigentliche Mittel setzt das Bestehen eines Vertheilungsgesetzes voraus; es tritt dann und nur dann auf, wenn die gemessenen Exemplare einen C.-G. bilden. Hieraus ersieht man, dass Quetelet mit obiger Unterscheidung dem Begriffe eines C.-G. nahe kam, ohne ihn jedoch zu erkennen und zu entwickeln.

In Anschluss daran zeigt Quetelet die große Bedeutung der Mittelwerthe für die Wissenschaft vom Staate und von der Natur. Er benutzt insbesondere das meteorologische Beispiel der Mitteltemperaturen von Brüssel, um seine Idee über das Mittel klar zu legen. Als Mitteltemperatur eines Julitages, berechnet aus den 31 Tagestemperaturen für den 10jährigen Zeitraum 1833—1842, findet er z. B. 17°,83 der 100theiligen Scala und bemerkt hierzu[1]): »En regardant 17°,83 comme la moyenne arithmétique des 310 températures diurnes observées pendant 10 années et pendant les mois de juillet, je n'ai supposé aucune relation nécessaire entre ces 310 nombres. Cependant il pourrait se faire qu'il en existât une à mon insu, et que toutes ces valeurs ne se fussent pas présentées sans un certain ordre. C'est ce qu'il peut être intéressant de rechercher. Le moyen le plus simple pour constater une telle relation, si elle a lieu, consiste à ranger, sans aucune préoccupation, toutes les températures observées d'après leur ordre de grandeur, en les classant, par exemple, de degré en degré.«

---

naturelle, qu'on n'apprécie peut-être pas assez le pas immense qu'elle a fait faire à l'esprit humain.« »L'établissement et le développement de la théorie des moyennes formeraient un des chapitres les plus intéressants de l'histoire de l'esprit humain; c'est Archimède, ce génie remarquable à tant d'égards, qui semble avoir, dans l'antiquité, le mieux apprécié l'importance des moyennes; il en fait un usage admirable dans la recherche du centre de gravité, dont il est l'inventeur. Il a substitué la considération d'un point unique à celle d'un grand nombre de points matériels, et cette idée ingénieuse qui a été si fécondée depuis, lui mériterait, à elle seule, la reconnaissance des hommes.«

1) a. a. O. S. 77.

Indem Quetelet dies ausführt, gibt er eine reducirte Vertheilungstafel im Sinne der Collectivmaßlehre. Seine Tabelle zeigt die oben als ein Erfolg der Herrschaft des Zufalls bezeichnete Regelmäßigkeit. Denn von den 310 beobachteten Temperaturwerthen fällt auf das Intervall 17°—18°, das zugleich den Mittelwerth 17°,83 einschließt, die größte Anzahl 49 und zu beiden Seiten ordnen sich, nahezu symmetrisch, die Anzahlen der anderen Intervalle in absteigender Folge. Quetelet veranschaulicht überdies den Gang der Werthe, indem er die Anzahlen als Ordinaten in ihrer Zugehörigkeit zu den Temperaturgraden als Abscissen aufträgt und die Endpunkte der Ordinaten verbindet. Ueber die so entstehende Linie sagt er[1]: »Sa forme est en général très-irrégulière, quand il s'agit d'une moyenne arithmétique prise entre des nombres qui n'ont aucun rapport nécessaire entre eux; mais quand la moyenne n'est pas un résultat numérique purement abstrait et qu'il existe une température bien réellement en rapport avec la saison et la localité, température que des circonstances fortuites peuvent masquer plus ou moins, la courbe l'indique par sa régularité, pourvu que le nombre des observations soit suffisamment grand.«

Eine Theorie dieses Zusammenhangs zwischen Mittelwerth und regelmäßiger Gruppirung der beobachteten Werthe gibt, wie Quetelet weiterhin ausführt, die Fehlertheorie. Dass aber für die Maße verschiedener Gegenstände, falls nur ein eigentliches Mittel vorhanden ist, die nämlichen Gesichtspunkte gelten wie für die mit Fehlern behafteten Maßwerthe eines und desselben Gegenstandes, sucht er durch ausführliche Erörterungen klar zu stellen. Er sagt, dass 1000 Maße eines und desselben Brustumfangs jedenfalls die regelmäßige Gruppirung zeigen und zu einem eigentlichen Mittel, dem wahren Brustumfang, führen würden. Nicht anders wäre es, wenn 1000 Bildhauer je eine Copie gefertigt hätten und jede dieser Copien einen Maßwerth darbieten würde; nur der wahrscheinliche Fehler der Messung würde wohl größer. Setzt man aber an Stelle der 1000 Copien 1000 lebende Menschen von einem und demselben Typus, so bleiben immer noch die nämlichen Verhältnisse bestehen. Dies findet Quetelet in den Maßen des Brustumfangs englischer Soldaten bestätigt. Er

1) a. a. O. S. 79.

bemerkt hierzu[1]; »L'exemple que je viens de citer mérite, je crois, toute notre attention: il nous montre que les choses se passent absolument comme si les poitrines qui ont été mésurées avaient éte modélées sur un même type, sur un même individu, idéal si l'on veut, mais dont nous pouvons saisir les proportions par une expérience suffisamment prolongée.« Dieses ideale Individuum ist nichts anderes als der mittlere Mensch, der den Typus des Menschen darstellt und dessen Entdeckung und Charakterisirung den hauptsächlichen Inhalt der »Physique sociale« bildet.

Gleich dem mittleren Menschen besitzt aber in der Auffassungsweise Quetelet's jedes eigentliche Mittel eine Art metaphysischer Existenz. Ist es zufällig wechselnden Ursachen (causes accidentelles) unterworfen, so entstehen die vom Mittel abweichenden Exemplare ganz ebenso wie bei der Messung eines einzelnen Gegenstandes die vom wahren Werthe abweichenden Maße. Das Mittel gilt darum stets zugleich als der wahrscheinlichste Werth: es ist die wahrscheinlichste Bestimmung des wahren oder typischen Werthes. An dieser Auffassungsweise hält Quetelet auch dann noch fest, wenn an Stelle der, für die Fehler chrakteristischen symmetrischen Vertheilung auf die beiden Seiten des Mittels Asymmetrie in der Weise tritt, dass die Abweichungen vom Mittel auf der einen Seite im allgemeinen größer sind als auf der anderen, was insbesondere an den extremen Abweichungen ersichtlich wird.

Er sucht diese Erscheinung durch die Annahme von Kräften zu erklären, die auf das Mittel nach der einen Seite stärker als nach der anderen wirken, ohne zu erkennen, dass alsdann der wahrscheinlichste Werth nicht mehr mit dem arithmetischen Mittel zusammenfallen kann[2]. Es besteht sonach für Quetelet hier so wenig wie in der Fehlertheorie ein Anlass, neben dem arithmetischen Mittel $A$ noch andere Hauptwerthe wie den Centralwerth $C$ oder einen von $A$ verschiedenen dichtesten Werth $D$ zu berücksichtigen.

---

1) a. a. O. S. 137.

2) Da diese Erörterungen hauptsächlich an das meteorologische Beispiel der täglichen Variationen (variations diurnes) der Temperaturen geknüpft werden, so bot sich in der Collectivmaßlehre (Cap. XXVII. Collectivgegenstände aus dem Gebiete der Meteorologie. S. 454) Gelegenheit, auf die principiell unzulässigen Aufstellungen Quetelet's einzugehen.

§ 7. Fechner hingegen geht nicht wie Quetelet von der Annahme aus, dass für C.-G. ebenso wie für Fehlerreihen ein wahrer oder typischer Werth existiren müsse, um sodann im Verhalten der C.-G. eine Bestätigung hierfür zu suchen und vermeintlich zu finden. Er sagt vielmehr[1]: »Alle Exemplare eines C.-G., mögen sie noch so weit vom arithmetischen Mittelwerthe oder einem anderen Hauptwerthe abweichen, sind gleich wirklich und wahr, und eine vorzugsweise Berücksichtigung des einen vor den anderen aus einem für alle gleich nichtigen Gesichtspunkte hat natürlich keinen Sinn.«

Hierzu kommt die klare Erkenntniss des principiellen Zusammenhangs zwischen dem wahrscheinlichsten Werthe und dem Vertheilungsgesetze der Exemplare eines C.-G., die eine theoretisch unzulässige Bevorzugung des arithmetischen Mittels, wie sie bei Quetelet vorliegt, nicht aufkommen lässt. Schon in der Abhandlung[2]: »Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme« hat Fechner die »Gültigkeitsfrage des Princips des arithmetischen Mittels« behandelt und diesem Mittelwerthe allgemeinere Mittelwerthe, die er »Potenzmittelwerthe« nennt, zur Seite gestellt, zu denen insbesondere der Centralwerth als Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme gehört; auch hat er dort »Wahrscheinlichkeitsgesetze der Abweichungen bez. der verschiedenen Potenzmittel unter Voraussetzung der Gültigkeit ihres Princips« aufgestellt. Ihre Untersuchung führte zu der Einsicht, dass nur das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Abweichungen bez. des arithmetischen Mittels oder das Fehlergesetz mit der Erfahrung in Einklang steht und somit von den Potenzmittelwerthen nur das arithmetische Mittel als wahrscheinlichster Werth in Betracht kommen kann.

Dieses für die Fehlertheorie geltende, von Gauß aufgestellte Gesetz setzt die Wahrscheinlichkeit $W$ einer Abweichung $\pm \varDelta$ vom

1) Collectivmaßlehre, S. 16.

2) Abhandlungen der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellsch. der Wissensch. Bd. XI. 1878. — Potenzmittelwerthe sind solche Werthe, in Bezug auf welche die Summe der auf eine und dieselbe Potenz erhobenen Abweichungen ein Minimum wird. Für den Centralwerth ist die Summe der ersten Potenzen, für das arithmetische Mittel die Summe der Quadrate der Abweichungen ein Minimum. Der dichteste Werth $D$ der Collectivmaßlehre dagegen ist kein Potenzmittelwerth der bezeichneten Art.

arithmetischen Mittel $A$ innerhalb der unendlich nahen Grenzen $\Delta$ und $\Delta + d\Delta$ gleich:

$$W = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \exp[-h^2\Delta^2]\, d\Delta\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wenn $\exp[z]$ die Exponentialfunction $e^z$ und $h$ das Präcisionsmaß bezeichnet, dessen Werth aus:

$$h = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}},$$

oder mit größerer Sicherheit aus $h = 1 : q\sqrt{2}$, mit geringerer Zuverlässigkeit aus $h = 1 : 2{,}09672 \,.\, w$ zu berechnen ist, wo $\varepsilon = \frac{1}{m} \,.\, \Sigma\Delta$ die einfache mittlere Abweichung, $q = \sqrt{\frac{1}{m} \,.\, \Sigma\Delta^2}$ die quadratische mittlere Abweichung und $w$ die wahrscheinliche Abweichung angibt. Es gilt ferner für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Abweichung zwischen den Grenzen 0 einerseits und $\pm\,\Delta$ andererseits sich halte, wenn $h\Delta = t$ gesetzt wird, die Bestimmung:

$$\Phi[t] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp[-t^2]\, dt \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Da nun dieses Gauß'sche Gesetz als unmittelbare Folge davon, dass das arithmetische Mittel $A$ als wahrscheinlichster Werth vorausgesetzt wird, Symmetrie zu beiden Seiten des Mittels fordert, so kann es in der Collectivmaßlehre nur soweit Geltung haben, als eine symmetrische Vertheilung der Exemplare stattfindet. Bei asymmetrischer Vertheilung kann es dagegen nicht mehr gültig sein. Das arithmetische Mittel kann daher auch nicht mehr mit dem wahrscheinlichsten Werthe zusammenfallen, und ein anderer Werth muss dessen Rolle übernehmen. Dies gilt nicht minder für die Fehlerreihen, sobald in ihnen Asymmetrie hervortritt und die principielle Forderung einer symmetrischen Gruppirung der Abweichungen um den Mittelwerth nicht für verbindlich gehalten wird.

Hieraus wird ersichtlich, dass Fechner's theoretische Aufstellungen in keiner Weise auf Quetelet's Theorie der Mittelwerthe sich stützen, sondern gerade das Unzulässige dieser Theorie erkennen lassen. Berücksichtigt man überdies, dass erst Fechner den Begriff des C.-G. entwickelte und unabhängig von Quetelet[1]) die Asymmetrie der C.-G. constatirte und, im Gegensatze zu letzterem, als allgemeinen Charakter der C.-G. erkannte, so wird man es wohl ablehnen müssen, in Quetelet den Vater der Collectivmaßlehre zu sehen. Bezüglich der Collectivmaßlehre gilt vielmehr in verstärktem Maße, was Wundt[2]) bezüglich der Psychophysik von Fechner sagt: »Bescheiden hat er selbst seinen älteren Freund Ernst Heinrich Weber den Vater der Psychophysik genannt. Aber so wahr es ist, dass die ersten Beobachtungsgrundlagen zu dem neuen Gebiete von Weber gelegt sind, so zweifellos ist es auch, dass die Tragweite dieser Untersuchungen erst von Fechner erkannt wurde, und dass er erst die exacten Methoden geschaffen hat, die für einen weiteren Fortschritt unerlässlich waren.«

§ 8. Da wesentlich in Folge des Auftretens von Asymmetrie in den Vertheilungstafeln der C.-G. die in der Fehlertheorie herrschenden Principien nicht mehr genügen, so erwächst der Collectivmaßlehre die Aufgabe, Kriterien zur Beurtheilung der Asymmetrie zu entwickeln und zu untersuchen, in wie weit die Asymmetrie zum Wesen der C.-G. gehört.

Als Merkmal der Asymmetrie dient neben der Differenz der extremen Abweichungen die Differenz $u$ der Anzahlen $m'$ und $m$, der oberhalb und unterhalb des Hauptwerthes $A$ oder $D$ liegenden Abweichungen. Die letztere Bestimmungsweise bietet (insbesondere in dem Quotienten $u : m$, wo $m$ die Gesammtzahl der Exemplare bedeutet) eine größere Sicherheit als die erstere, die in Folge der verhältnissmäßig starken Schwankungen, denen die extremen Werthe unterliegen, weniger zuverlässig ist. Da aber die stets vorhandenen unausgeglichenen Zufälligkeiten für sich allein schon eine asymmetrische Vertheilung der Exemplare zur Folge haben können, wird zwischen wesentlicher Asymmetrie, die in der Beschaffenheit des C.-G. begründet ist, und unwesentlicher oder zufälliger

1) Collectivmaßlehre, S. 66.

2) Zur Erinnerung an Gustav Theodor Fechner; Worte gesprochen an seinem Sarge am 21. Novbr. 1887. (Kuntze, G. Th. Fechner, ein deutsches Gelehrtenleben. 1892. S. 357).

Asymmetrie, die auf den unausgeglichenen Zufälligkeiten beruht, unterschieden.

Da die wesentliche Asymmetrie mit der unwesentlichen verbunden auftritt, werden in theoretischer Hinsicht »mathematische Verhältnisse der Verbindung von wesentlicher und unwesentlicher Asymmetrie« angegeben[1]) und »Formeln für den mittleren und wahrscheinlichen Werth des von rein zufälliger Asymmetrie abhängigen Unterschieds *u*« aufgestellt[2]). Von besonderem Interesse ist hier die Bewährung der zur Ableitung dieser Formeln dienenden Wahrscheinlichkeitsbestimmungen mittelst der Gewinnlisten sächsischer Lotterien[3]). Dieselben benützt Fechner in origineller Weise als einen praktisch brauchbaren Ersatz der bekannten Urne mit unendlich vielen Kugeln, die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung so vielfach zur Veranschaulichung der untersuchten Wahrscheinlichkeitsverhältnisse dient.

Bei der empirischen Feststellung der Asymmetrie in den Vertheilungstafeln der C.-G. könnte man aber zunächst vermuthen, dass in der Regel nur zufällige Asymmetrie vorhanden sei und die wesentliche nur ausnahmsweise auftrete. Denn die Mehrzahl der zur Untersuchung herangezogenen C.-G. ist nur schwach asymmetrisch. Darum schien auch die Prüfung des Gauß'schen Fehlergesetzes, die von Quetelet und anderen namentlich an den Rekrutenmaßen vorgenommen wurde, eine Bestätigung des Gesetzes zu geben. Dieser Schein verschwindet jedoch, wenn hinreichend scharfe Untersuchungsmethoden befolgt werden. Darum betont Fechner die Nothwendigkeit einer scharfen Bestimmung der Elemente der C.-G. mittelst des Interpolationsverfahrens und auf Grund reducirter Vertheilungstafeln, in denen die Zufälligkeiten und Unregelmäßigkeiten der primären Tafeln gemildert sind[4]).

Auf Grund dieser scharfen Bestimmungsmethoden findet er das asymmetrische Verhalten der C.-G. so allgemein verbreitet und in solch befriedigender Uebereinstimmung mit den theoretisch gültigen Gesetzen, dass er die wesentliche Asymmetrie für den allgemeinen Fall ansehen muss[5]), »welcher unter den unzähligen Graden, in

---

1) Cap. XIII. 2) Cap. XIV—XVI. 3) S. 229.

4) Die rechnerische Behandlung der C.-G. wird in den Cap. VII—XI gelehrt.

5) Cap. XII. Gründe für wesentliche Asymmetrie. S. 196.

welchen die Asymmetrie vorkommen kann, den, wo sie verschwindet, nur als besonderen, in aller Strenge vielleicht nie vorkommenden Fall enthält«.

»Dann ist« — fährt Fechner fort — »ein principieller Unterschied zwischen wesentlicher und unwesentlicher Asymmetrie gar nicht zu machen; alle C.-G. dürfen, ja müssen unter der Voraussetzung der asymmetrischen Wahrscheinlichkeit behandelt werden, mit Rücksicht nur, dass bei endlichem $m$ wegen unausgeglichener Zufälligkeiten die Größe und Richtung der Asymmetrie zufällig von derjenigen abweichen kann, welche bei unendlichem $m$ sich herausstellen würde; und der durchschlagende Grund, es so zu fassen, ist, dass selbst in den Fällen, wo nach den vorliegenden Wahrscheinlichkeitsformeln die Asymmetrie bezüglich $A$ möglicher Weise nur zufällig sein könnte, die ... Gesetze der Asymmetrie sich in einer mir selbst unerwarteten Allgemeinheit bestätigen.«

Insbesondere bietet die Betrachtung verwandter C.-G. (z. B. der Rekrutenmaße verschiedener Länder oder der täglichen Temperaturwerthe für die verschiedenen Monate des Jahres) die Möglichkeit, selbst in einer schwachen Asymmetrie eine wesentliche Bestimmung der C.-G. zu erkennen. Denn wenn auch der einzelne Fall, für sich allein, keine Entscheidung gestattet, kann doch die Gesammtheit der Fälle eine solche Uebereinstimmung in der Richtung der Asymmetrie (bestimmt durch das Vorzeichen von $u = m' - m_{,}$) oder einen so gesetzlichen Gang der Asymmetriewerthe zeigen, dass der Schluss auf wesentliche Asymmetrie als bindend zu gelten hat.

»So habe ich« — sagt Fechner[1]) — »bei Rekrutenmaßen ganz verschiedener Länder, soweit sie als vollzahlig anzusehen sind, die Asymmetrie bezüglich $A$ immer positiv gefunden, bei täglichen und monatlichen Regenmengen (Genf, Freiberg) für alle Monate negativ, für die verschiedensten Bauch- und Brustorgane des Menschen (nach Boyd) immer negativ gefunden. Bei den thermischen Monatsabweichungen andererseits kehrt sich die Richtung der Asymmetrie im Fortschritt der Monate durch das ganze Jahr gesetzlich um, so dass sie in den Wintermonaten positiv, in den Sommermonaten schwächer negativ, in den Zwischenmonaten dazwischen schwankend ist. Bei

1) S. 202.

den Roggenähren ist das $u$ des obersten Gliedes positiv, schwächt sich beim Herabsteigen zu den unteren Gliedern und schlägt bei den untersten ins Negative um.«

§ 9. Wenn somit die wesentliche Asymmetrie zum Begriff des C.-G. gehört, so kann weder das Gauß'sche Fehlergesetz als das allgemeine Vertheilungsgesetz der C.-G. noch der arithmetische Mittelwerth $A$ als der wahrscheinlichste oder dichteste Werth $D$ gelten. $A$ und $D$ müssen vielmehr als principiell verschieden anerkannt werden, was zur Folge hat, dass auch der Centralwerth $C$ von $A$ und $D$ theoretisch verschieden ist.

Es gilt daher, das allgemein gültige Vertheilungsgesetz zu entwickeln und hierdurch zugleich die theoretischen Eigenschaften des dichtesten Werthes $D$ zu bestimmen. Da dieses Gesetz für den Fall verschwindender Asymmetrie, der ausnahmsweise eintreten kann und sich durch Zusammenfallen der drei Werthe $A$, $C$, $D$ zu erkennen gibt, in das Gauß'sche Gesetz übergehen muss, so wird es in einer Verallgemeinerung des letzteren bestehen.

Diese Verallgemeinerung findet Fechner für die C.-G. mit geringer verhältnissmäßiger Schwankung der Exemplare und damit zusammenhängendem schwachen Auseinanderweichen der Hauptwerthe $A$, $C$, $D$ durch folgende Bestimmungen, die sich in gleicher Weise durch ihre theoretische Einfachheit wie durch ihre praktische Brauchbarkeit auszeichnen[1]):

1) »Die Abweichungen sind statt vom arithmetischen Mittel $A$ von dem im Falle wesentlicher Asymmetrie auch wesentlich von $A$ abweichenden dichtesten Werthe $D$ zu rechnen.«

2) »Die Vertheilung der Abweichungen bez. $D$ befolgt, kurz gesagt, nach jeder beider Seiten insbesondere dieselbe Regel, als bei symmetrischer Wahrscheinlichkeit bez. $A$ für beide Seiten gemeinschaftlich befolgt wird.«

Man bezeichne nun in Uebereinstimmung mit den Festsetzungen der Collectivmaßlehre[2]), die oberhalb $D$ liegenden Abweichungen durch $\partial'$, ihre Anzahl durch $m'$ und die unterhalb $D$ liegenden durch $\partial_,$, ihre Anzahl durch $m_,$. Man setze dann:

---

1) S. 69 f. und Cap. XIX. Die Asymmetriegesetze. 2) S. 17 f.

$$e' = \frac{\Sigma \partial'}{m'}; \; e_{,} = \frac{\Sigma \partial_{,}}{m_{,}} \quad \text{und} \quad h' = \frac{1}{e'\sqrt{\pi}}; \; h_{,} = \frac{1}{e_{,}\sqrt{\pi}}.$$

Ferner möge die Wahrscheinlichkeit, dass eine Abweichung zwischen den unendlich nahen Grenzen $\partial'$ und $\partial' + d\partial'$ sich befinde, durch $W'$, die entsprechende Wahrscheinlichkeit für eine untere Abweichung durch $W_{,}$ angedeutet werden. Dann ist:

$$\left.\begin{aligned} W' &= \frac{2h'}{\sqrt{\pi}} \exp[-h'^2\partial'^2]\, d\partial' \\ W_{,} &= \frac{2h_{,}}{\sqrt{\pi}} \exp[-h_{,}^2\partial_{,}^2)\, d\partial_{,} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Hieraus ergibt sich als Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass eine obere Abweichung zwischen den Grenzen 0 und $\partial'$, eine untere zwischen 0 und $\partial_{,}$ sich halte, wenn $h'\partial' = t'$ und $h_{,}\partial_{,} = t_{,}$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} \Phi[t'] &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t'} \exp[-t^2]\, dt \\ \Phi[t_{,}] &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t_{,}} \exp[-t^2]\, dt \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

und die zu erwartende Anzahl zwischen den angegebenen Grenzen ist gleich:

$$m'\Phi[t'] \text{ resp. } m_{,}\Phi[t_{,}].$$

Werthe, die nach oben und unten gleich weit von $D$ abweichen, haben somit verschiedene Wahrscheinlichkeiten, und nur wenn $h'\partial' = h_{,}\partial_{,}$ oder $\partial' : \partial_{,} = e' : e_{,}$ sind die für beide Seiten gemeinsam bestimmten Wahrscheinlichkeiten gleich[1]).

Aus diesem, von Fechner so genannten, »zweiseitigen Gaußschen Gesetze« folgt unmittelbar, dass für den dichtesten Werth $D$ die beiderseitigen Abweichungszahlen $m'$ und $m_{,}$ sich wie die einfachen mittleren Abweichungen $e'$ und $e_{,}$ verhalten. Der dichteste Werth wird sonach durch das »Proportionalgesetz«

$$m' : m_{,} = e' : e_{,} = \frac{\Sigma \partial'}{m'} : \frac{\Sigma \partial_{,}}{m_{,}} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

definirt.

1) Cap. XIX. S. 297.

Auch für die Abstände der drei Hauptwerthe $A$, $C$, $D$ ergeben sich theoretische Bestimmungen; so nähert sich z. B. der Werth des Abstandsverhältnisses

$$p = \frac{C - D}{A - D}$$

bei abnehmender Asymmetrie dem Werthe $\frac{1}{4}\pi = 0{,}785$, und die Bedingung, dass der $p$-Werth approximativ gleich $\frac{1}{4}\pi$ sein muss, »gehört bei der Allgemeinheit, in der er sich empirisch wiederfindet, zu den schlagendsten Bewährungen unserer asymmetrischen Vertheilungsgesetze«[1]. Der $p$-Werth wird darum in den Tabellen der Elemente der C.-G. aufgeführt.

Außerdem ist noch hervorzuheben, dass der Centralwerth stets zwischen dem arithmetischen Mittel und dem dichtesten Werthe liegt (»Lagengesetz«) und folglich die Asymmetrie der Abweichungen bez. $A$ das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie die Asymmetrie bez. $D$ (»Umkehrgesetz«).

§ 10. Die Asymmetrie war indessen nicht der einzige Grund für Fechner, das Gauß'sche Fehlergesetz als nicht allgemein zutreffend für die C.-G. anzusehen[2]. Er empfindet es auch als einen Mangel (der dem einfachen Gauß'schen Gesetz und seiner Erweiterung, dem zweiseitigen G.-G. in gleicher Weise anhaftet), dass dem Wachsen der unteren Abweichungen keine theoretischen Grenzen gesteckt sind. »Es leuchtet aber ein, dass, wenn die Abweichungen von $A$ ins Negative größer als $A$ werden sollten, die abweichenden Werthe $a$ kleiner als Null werden, was unmöglich ist. Also kann das G.-G. von vornherein keine unbeschränkte Gültigkeit in Anspruch nehmen, wenn schon mit größter Approximation für Fälle gültig bleiben, wo die Abweichungen vom arithmetischen Mittel, mindestens die an Zahl weit überwiegenden, in dessen Nähe und durchschnittlich sehr klein bleiben.« Darum muss noch eine weitere Verallgemeinerung des Gauß'schen Gesetzes gegeben werden, »sofern Collectivabweichungen, wenn auch bei der Mehrzahl der C.-G., doch nicht bei allen die den Beobachtungsfehlern zukommende geringe verhältnissmäßige Schwankung um die Hauptwerthe zeigen.«

1) S. 72.
2) S. 75 f. und Cap. XXI. Die logarithmische Behandlung der C.-G.

Zu diesem Zwecke bezieht Fechner das Vertheilungsgesetz statt auf arithmetische Abweichungen vielmehr auf Verhältnissabweichungen, so dass an Stelle der Differenzen zwischen den einzelnen Maßwerthen und dem Hauptwerthe die Verhältnisse der Maßwerthe zu dem Hauptwerthe treten. Diese Auffassungsweise findet eine Stütze in der Bemerkung, dass zwar die Beobachtungsfehler »allgemein gesprochen, wenigstens bezüglich der Messung von Raumlängen, wesentlich unabhängig von der Größe des zu messenden Gegenstandes (sind), insofern nicht mit deren Größe die Maßmittel sich ändern, sich zusammensetzen, compliciren«; dass aber die Exemplare der C.-G. »im Allgemeinen in wesentlicher Abhängigkeit von ihrer Größe« variiren; wie denn kleine Thiere und kleine Pflanzen sowohl kleine Mittelwerthe als auch geringe Schwankungen der einzelnen Maße um dieselben zeigen, während große Thiere und große Pflanzen große Mittelwerthe mit großen Schwankungen haben.

Um auch in diesem Fall eine Verallgemeinerung des Gauß'schen Fehlergesetzes zu erhalten, die bei geringer Schwankung der Maßwerthe in das letztere übergeht, ersetzt Fechner die Verhältnissabweichungen $\psi = a : H$ (wo $a$ den einzelnen Maßwerth, $H$ den Hauptwerth angibt) durch ihre Logarithmen $\lambda = \log \psi = \log a - \log H$ und bemerkt hierzu, 1) dass die Abweichungen nun wiederum die Form von Differenzen haben, 2) dass die Verhältnisse der logarithmischen Differenzen mit den zugehörigen arithmetischen merklich übereinstimmen und durch letztere ersetzt werden können, sobald sie sehr klein sind. Die Behandlung der C.-G. bleibt übrigens für diese »logarithmische Verallgemeinerung des Gauß'schen Gesetzes« ganz die nämliche wie für das Gauß'sche Gesetz selbst und dessen Erweiterung zum zweiseitigen G.-G. Es müssen nur die Logarithmen der Maßwerthe für die Maßwerthe gesetzt werden. In Folge davon treten auch an Stelle des arithmetischen Mittels und des dichtesten Werthes der Maßwerthe die entsprechenden Werthe der Logarithmen der Maßwerthe, die beim Uebergang zu den ursprünglichen Werthen als geometrisches Mittel und dichtester Verhältnisswerth sich darstellen.

Dieses Vertheilungsgesetz findet an den Dimensionen der Galleriegemälde und an den täglichen Regenhöhen seine Bewährung[1]).

1) S. 342—346; 430; 443.

§ 11. Es sind sonach in der Collectivmaßlehre folgende drei Gesetze[1]) zu unterscheiden, »von denen jedes folgende als eine Verallgemeinerung und zugleich Verschärfung des vorhergehenden betrachtet werden kann«:

1) »Das reine, einfache, ursprüngliche Gauß'sche Gesetz, für die Voraussetzung symmetrischer Wahrscheinlichkeit der beiderseitigen arithmetischen Abweichungen vom arithmetischen Mittel.«

2) »Die arithmetische Verallgemeinerung des G.-G. für die Voraussetzung asymmetrischer Wahrscheinlichkeit der Abweichungen vom arithmetischen Mittel, allgemein gültig für die verschiedensten Grade der Asymmetrie, doch nur zureichend für verhältnissmäßig schwache Schwankung um die Hauptwerthe, wie sie den meisten C.-G. zukommt.«

3) »Die logarithmische Verallgemeinerung des G.-G., gültig für beliebig große Asymmetrie und beliebig große verhältnissmäßige Schwankung.«

Beide Verallgemeinerungen des Gauß'schen Fehlergesetzes hat Fechner als empirisch gültige Vertheilungsgesetze der C.-G. aufgestellt. Er hat so mit den einfachsten theoretischen Hülfsmitteln ein praktisch brauchbares, leicht anwendbares Instrument geschaffen, mit dem eine erfolgreiche Untersuchung der C.-G. möglich ist. Dies bestätigt die Collectivmaßlehre, in der jeder theoretisch motivirte Fortschritt der Untersuchung zugleich empirisch bewährt wird. Demzufolge beruht wesentlich auf den zahlreichen Vergleichstabellen zwischen Theorie und Erfahrung die überzeugende Kraft der Lehre Fechner's.

## II.

§ 12. Die beiden Verallgemeinerungen des Gauß'schen Fehlergesetzes haben jedoch, auch abgesehen von ihrer praktischen Brauchbarkeit, ein rein theoretisches Interesse. Denn sie können als Beispiele für die beiden, überhaupt möglichen, principiell verschiedenen Lösungsmethoden des Grundproblems der Collectivmaßlehre gelten.

Dieses Problem fordert die Entwicklung eines Vertheilungsgesetzes, das für einen gegebenen C.-G. approximativ gültig ist. Es

1) S. 81.

ist zugleich das Grundproblem der Fehlertheorie, da jede Fehlerreihe einen C.-G. vorstellt.

Seine Lösung scheint zunächst nur in der Weise möglich, dass — wie das Problem es verlangt — ein Vertheilungsgesetz gesucht wird, das den Gang der Tafelwerthe der C.-G. mit befriedigender Annäherung wiedergibt. An der Möglichkeit, ein solches Gesetz für *jeden* C.-G. zu entwickeln, ist nicht zu zweifeln. Denn die Vertheilung der Anzahlen $z$ auf die Größenstufen $a$ der Vertheilungstafel ist dem Zufall unterworfen. Es treten daher Wahrscheinlichkeitsverhältnisse auf, welche die Voraussetzung einer gesetzmäßigen Vertheilung gestatten, so dass es als möglich erscheint, der Abhängigkeit der $z$ von den $a$ einen mathematischen Ausdruck zu geben. Dies geschieht in der That für die C.-G. mit geringer Schwankung um die Hauptwerthe durch das zweiseitige *Gauß*'sche Gesetz. Es ist aber nun für jeden C.-G., welches auch seine Beschaffenheit sein möge, nach dieser Methode ein hinreichend sich bewährendes Vertheilungsgesetz zu finden.

Indessen gibt es noch eine zweite, indirecte Methode zur Lösung des gestellten Problems. Um sie klar zu legen, erinnere ich daran, dass die möglichen Maßwerthe $a$ eines C.-G. eine äquidistante Reihe — eine Scala — bilden, deren Intervall $i$ durch den angestrebten Genauigkeitsgrad der Messung bedingt wird (z. B. gleich 1 mm sein kann). Auf diese Maßscala bezieht sich unmittelbar die Vertheilung der Anzahlen $z$. Man kann sich aber die Aufgabe stellen, jene Scala durch eine mathematisch von ihr abhängige von solcher Art zu ersetzen, dass für die neue Scala ein vorausgesetztes Vertheilungsgesetz mit hinreichender Annäherung gültig ist. Man erhält dann mittelbar auch einen Einblick in die Gesetzmäßigkeit der Vertheilung innerhalb der ursprünglichen Maßscala.

Als ein Beispiel dieser Methode aufgefasst, erscheint, wie ich glaube, die Aufstellung des logarithmischen Vertheilungsgesetzes im richtigen Lichte. In der That ersetzt *Fechner* die Maßwerthe $a$ durch die Logarithmen $\alpha = \log a$ und, wie die $a$ eine äquidistante Reihe — eine Scala — bilden, so wird nun auch der den $a$ zugehörige Bereich der $\alpha$ in Intervalle von constanter Größe $i$ abgetheilt, so dass eine neue Scala von logarithmischen Werthen entsteht. Auf dieselbe werden die empirisch gegebenen Anzahlen $z$ vertheilt, und für die Zuordnung der neuen $z$-Werthe zu den Intervallen der logarithmischen Maßscala wird die Gültigkeit des zweiseitigen Gauß-schen Gesetzes nachgewiesen.

Hat man die Möglichkeit erkannt, auf diesem Wege eine indirecte Lösung des gestellten Problems zu finden, so kann man wünschen, für jeden C.-G. eine Function $\alpha = \psi(a)$ von solcher Art zu finden, dass für die Scala der $\alpha$-Werthe irgend ein vorausgesetztes Vertheilungsgesetz mit befriedigender Approximation gültig ist. Insbesondere kann man suchen, die Function $\alpha = \psi(a)$ der Art zu bestimmen, dass die Anzahlen $z$ sich nahezu gleichmäßig auf die neue Scala vertheilen. Die Methode würde dann ohne vorläufige Bestimmung eines geeigneten Vertheilungsgesetzes, somit von der ersten Methode unabhängig durchgeführt; denn das vorausgesetzte Gesetz hat die denkbar einfachste Form, da es constante Werthe fordert. Man kann ferner verlangen, dass nicht Erwägungen a priori die Wahl der Function $\alpha = \psi(a)$ bestimmen, wie es thatsächlich für das logarithmische Gesetz Fechner's zutrifft, sofern hier die Idee der Verhältnissabweichung den einzuschlagenden Weg wies. Alsdann ist eine vorbereitende Umsetzung der gegebenen Vertheilungstafel nöthig. Diese Vorbereitung besteht, wenn z. B. gleichmäßige Vertheilung auf die Intervalle der gesuchten Maßscala vorausgesetzt wird, darin, dass man den Gesammtbereich der $a$-Werthe in Intervalle abtheilt, von welchen jedes die gleiche Anzahl der empirisch vorhandenen $z$ enthält. Dies kann geschehen, indem man zunächst für die ganze Vertheilungstafel die Werthmitte als Centralwerth berechnet, weiterhin für die obere und untere Hälfte besonders die Werthmitte bestimmt und immer wieder für jeden, so resultirenden Theil der Tafel die Bestimmung der Werthmitte ausführt, bis eine genügend groß erscheinende Anzahl von Intervallen vorliegt. Nennt man die Grenzen der aufeinanderfolgenden Intervalle $a_1, a_2, \ldots a_n$, so besteht nunmehr die Aufgabe darin, mit Hülfe der Interpolationsrechnung eine Function $\alpha = \psi(a)$ zu bestimmen, so dass die Reihe der Functionswerthe $\alpha_1 = \psi(a_1)$, $\alpha_2 = \psi(a_2)$, $\ldots \alpha_n = \psi(a_n)$ constante Differenzen hat. Für die vorliegende Reihe der Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ist dann die Vertheilung in Wirklichkeit constant; es wird aber auch für jede andere äquidistante Reihe der $\alpha$ — für jede Maßscala der $\alpha$ — die Constanz der Vertheilung nahezu und um so befriedigender zutreffen, je größer die Anzahl der empirisch bestimmten Werthe $a_1$, $a_2, \ldots a_n$ ist, die dem Interpolationsverfahren zu Grunde gelegt wird.

Es gibt sonach in der That zwei wesentlich verschiedene Methoden zur Lösung des gestellten Problems:

1) directe Methode: Es ist ein Gesetz zu suchen, nach welchem sich die Anzahlen $z$ auf die empirisch vorliegenden Maßwerthe $a$ vertheilen;

2) indirecte Methode: Es ist eine Function $\alpha = \psi(a)$ zu suchen, so dass die Vertheilung der Anzahlen $z$ auf die Maßscala der $\alpha$ ein vorausgesetztes Gesetz befolgt.

§ 13. Eine vollständige Erledigung des Problems nach der ersten Methode macht offenbar ein Befolgen der zweiten Methode überflüssig. Ueberhaupt wird wohl die letztere nur dann in Anspruch genommen werden, wenn man darnach trachtet, den Gültigkeitsbereich eines, für eine beschränkte Klasse von C.-G. zutreffenden Vertheilungsgesetzes zu erweitern. Demgemäß wird im Folgenden der an erster Stelle bezeichnete Weg beschritten werden.

Eine allgemeine Lösung auf diesem Wege liegt bereits vor. Herr Prof. Bruns gibt in der Abhandlung[1]): »Ueber die Darstellung von Fehlergesetzen« eine interpolatorische Darstellung der reellen willkürlichen Function $\varphi(x)$, die als »Häufigkeitsfunction« für eine discrete Reihe von Argumenten $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Werthe $y_1, y_2, \ldots y_n$ annimmt, im übrigen aber Null ist. Als Hülfsmittel dient die approximative Darstellung der unstetigen Function $sg(a)$, (gesprochen signum von $a$), die den Werth $+1$, $0$ oder $-1$ annimmt, je nachdem $a$ positiv, null oder negativ ist. Dort wird auch unter Hinweis auf die Collectivmaßlehre der Nutzen, den die gegebene Darstellung bei der Untersuchung der C.-G. gewährt, hervorgehoben.

Hiervon ist das Folgende dem Grundgedanken nach unabhängig. Mit diesem ist aber die ganze Entwicklung unmittelbar gegeben. Indessen stellt § 17, der völlig auf der Bruns'schen Abhandlung beruht, den Zusammenhang mit derselben her.

Der einfache und naheliegende Grundgedanke besteht in der Einführung des Gauß'schen Fehlergesetzes als eines Princips zur Darstellung willkürlich gegebener Functionen. Wesentlich ist hierbei,

1) Astronomische Nachrichten, Bd. 143 (Mai 1897). S. 329—340.

dass dieses Gesetz ein einziges Maximum und zu beiden Seiten desselben rasch abnehmende, der Null asymptotisch sich nähernde Werthe aufweist. An seiner Stelle könnte daher jede andere Exponentialfunction, welche die bezeichneten Eigenschaften besitzt, als Darstellungsprincip benützt werden. Die Fehlerfunction hat aber die einfachste Form und ist, da für sie Tabellen in hinreichender Ausdehnung vorliegen[1]), praktisch brauchbar. Sie dient darum hier als Grundlage.

Die darzustellende Function wird als Function nur eines Argumentes vorausgesetzt. Das Darstellungsprincip ist jedoch nicht auf solche Functionen beschränkt, sondern kann unmittelbar auf Functionen mehrerer Argumente übertragen werden. Die so resultirenden Verallgemeinerungen der folgenden Entwicklungen können dann der Behandlung mehrdimensionaler C.-G. zu Grunde gelegt werden.

Die Function soll ferner für irgend welche, in beliebiger Anzahl und beliebiger Lage gegebene Argumentwerthe bestimmte reelle Werthe annehmen und im übrigen gleich Null sein. Dabei ist aber der Functionswerth nicht dem punktuell bestimmten Argumentwerthe, sondern einem kleinen, unter Umständen unendlich kleinen Bereiche des Argumentes zuzuordnen. Dies muss beachtet werden, da wesentlich hierauf die Möglichkeit einer approximativen Darstellung beruht.

Für die Functionen, welche die Vertheilungstafeln der C.-G. darbieten, ist diese Zuordnungsweise von vornherein geboten; denn die Anzahlen $z$ gehören als Functionswerthe nicht den Argumentwerthen $a$ in ihrer punktuellen Bestimmtheit zu, sondern vertheilen sich auf die Intervalle von der endlichen Größe $i$, deren Mittelpunkte mit dem in der Tabelle des C.-G. verzeichneten $a$ zusammenfallen. Die folgenden Darstellungen sind daher auf die C.-G. ohne weiteres anwendbar. Für andere Functionen, die im allgemeinen gleich Null sind und nur für bestimmte Argumentwerthe gegebene Werthe annehmen, besteht jedoch diese Möglichkeit nur dann, wenn es zulässig ist, die Functionswerthe wenigstens als einem unendlich kleinen Bereiche des Argumentes zugehörig aufzufassen.

§ 14. Zur Erläuterung des Darstellungsprincips dient am einfachsten eine Function, die nur für den Argumentwerth $a = a_0$ den gegebenen Werth $z_0$ annimmt und im übrigen gleich Null ist. Der

1) Im Anhang der Collectivmaßlehre als $t$-Tabelle I und II. S. 467—476.

erwähnten Bedingung zufolge ist hier $z_0$ einem endlichen oder unendlich kleinen Bereich $i$ des Argumentes $a$, der den Werth $a_0$ umschließt, zuzuweisen. Dann gibt, bei Zugrundelegen des Gauß'schen Fehlergesetzes, die Function:

$$\zeta = \frac{z_0 h}{\sqrt{\pi}} \exp\,[-h^2(a - a_0)^2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

unmittelbar die approximative Darstellung der vorgelegten unstetigen Function[1]).

Zur Bewährung dieser Darstellung ist aber nicht von dieser Form, sondern von dem Integral:

$$z[a_\beta;\ a_\alpha] = \int_{a_\alpha}^{a_\beta} \zeta\, da\,,$$

zwischen den Grenzen $a = a_\beta$ und $a = a_\alpha$ genommen, auszugehen. Denn es kann sich nur darum handeln, ob die Function $\zeta$ mit größerer oder geringerer Annäherung jenem Bereiche $i$ den Functionswerth $z_0$ und jedem anderen, hiervon verschiedenen Bereiche des Argumentes den Werth Null zuweist. Nimmt man nun $i$ von endlicher Größe und der Einfachheit wegen $a_0$ in der Mitte von $i$ liegend an, sodass die Intervallgrenzen $a_0 - \frac{1}{2}i$ und $a_0 + \frac{1}{2}i$ sind, so muss demnach das Integral zwischen den Grenzen $a_0 - \frac{1}{2}i$ und $a_0 + \frac{1}{2}i$ angenähert gleich $z_0$ und außerhalb dieser Grenzen nahezu gleich Null sein.

Setzt man:

$$\Phi[t] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\,[-\tau^2]\, d\tau\,,$$

so wird für $a - a_0 = \Delta$:

---

1) Für eine Function zweier Argumente $a$ und $b$, die für $a = a_0$ und $b = b_0$ den Werth $z_0$ hat und im übrigen gleich Null ist, wäre

$$\zeta = \frac{z_0 h k}{\pi} \exp\,[-h^2(a - a_0)^2 - k^2(b - b_0)^2]$$

die entsprechende Darstellung.

$$z[a_0 + \tfrac{1}{2}i;\ a_0 - \tfrac{1}{2}i] = \frac{2 z_0 h}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{1}{2}i} \exp\,[-h^2 \varDelta^2] d\varDelta = z_0 \,.\, \Phi\left[\frac{hi}{2}\right] \qquad (7a)$$

und allgemein:

$$2\,.\,z[a_\beta;\ a_\alpha] = z_0\{\Phi[h(a_\beta - a_0)] - \Phi[h(a_\alpha - a_0)]\}\,, \quad . \quad (7)$$

woraus durch Differentiation (6) wiederum folgt.

Die Annäherung dieser Darstellung hängt von der Wahl des Parameters $h$ bei gegebenem $i$ und $z_0$ ab. Dies zeigt die folgende Zusammenstellung der empirischen Functionswerthe und der Integralwerthe für die auf einander folgenden Intervalle von der Größe $i$ mit den Intervallmitten $a_{-2}$, $a_{-1}$, $a_0$, $a_1$, $a_2$. Dabei sind die Annäherungsstufen der Reihe nach durch die Wahl: $h = \frac{2}{i}, \frac{4}{i}, \frac{6}{i}$ bestimmt.

1.

| | empirisch | angenähert $hi = 2$ | angenähert $hi = 4$ |
|---|---|---|---|
| $a_{-2}$ | 0 | 0 | 0 |
| $a_{-1}$ | 0 | 8 | 0 |
| $a_0$ | 100 | 84 | 100 |
| $a_1$ | 0 | 8 | 0 |
| $a_2$ | 0 | 0 | 0 |

2.

| | empirisch | angenähert $hi = 2$ | angenähert $hi = 4$ | angenähert $hi = 6$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_{-2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $a_{-1}$ | 0 | 786,5 | 23,5 | 0 |
| $a_0$ | 10000 | 8427 | 9953 | 10000 |
| $a_1$ | 0 | 786,5 | 23,5 | 0 |
| $a_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

Es kann somit für jedes gegebene $z_0$ und $i$ der Werth $h$ so gewählt werden, dass die Darstellung jeden beliebigen Grad von Genauigkeit erreicht.

§ 15. Hieraus ergibt sich die Darstellung der allgemeinen Function, die für die Argumentwerthe $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... $a_n$ die Werthe $z_1$, $z_2$, $z_3$, ... $z_n$ annimmt und im übrigen gleich Null ist, ohne weiteres, wenn man die gegebene Function als die Summe von $n$ Functionen auffasst, deren jede nur für je einen Argumentwerth den zugehörigen $z$-Werth zeigt und sonst gleich Null ist.

Mit Rücksicht darauf, dass die Werthe $z_1$, $z_2$, ... $z_n$ im allgemeinen von einander verschieden sind und auch die den $a_1$, $a_2$ ... $a_n$

zugehörenden Intervalle $i$ unter Umständen verschiedene Größe haben können, kann man den Werth des Parameters $h$ für jede einzelne Function besonders bestimmen und

$$\left.\begin{array}{l} \zeta = \frac{z_1 h_1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-h_1^2(a_1 - a)^2\right] + \frac{z_2 h_2}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-h_2^2(a - a_2)^2\right] \quad \ldots \\ + \frac{z_n h_n}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-h_n^2(a - a_n)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_i z_i h_i \exp\left[-h_i^2(a - a_i)^2\right]. \end{array}\right\} \quad (8)$$

setzen. Es ist jedoch klar, dass die Werthe von $h$ übereinstimmend gewählt werden dürfen, so dass die einfachere Form:

$$\left.\begin{array}{l} \zeta = \frac{z_1 h}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-h^2(a - a_1)^2\right] + \frac{z_2 h}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-h^2(a - a_2)^2 \quad \ldots \right. \\ + \frac{z_n h}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-h^2(a - a_n)^2\right] = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \sum_i z_i \exp\left[-h^2(a - a_i)^2\right] \end{array}\right\} \quad (9)$$

resultirt, woraus durch Integration folgt:

$$\left.\begin{array}{l} 2 \,.\, z\,[a_\beta;\ a_\alpha] = 2 \,.\, \int\limits_{a_\alpha}^{a_\beta} \zeta\, da = \\ \sum_i z_i \,.\, \{\Phi[h(a_\beta - a_i)] - \Phi[h(a_\alpha - a_i)]\} \end{array}\right\} \quad (10)$$

Es soll nun diese Darstellung auf den beliebig gewählten Argumentwerth $a = a_0$ bezogen werden. Ersetzt man demgemäß:

$$a - a_i \quad \text{durch} \quad (a - a_0) - (a_i - a_0)\,,$$

so erhält man durch Entwicklung nach Potenzen von $a_i - a_0$ die unbedingt convergente Reihe:

$$\Phi[h(a - a_i)] = \Phi[h(a - a_0)] - \frac{h(a_i - a_0)}{1} \,.\, \Phi'[h(a - a_0)] + \frac{h^2(a_i - a_0)^2}{1\,.\,2} \,.$$
$$\Phi''[h(a - a_0)] \ \ldots + \frac{(-1)^m h^m (a_i - a_0)^m}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m} \,.\, \Phi^{(m)}[h(a - a_0)] \ \ldots,$$

wo $\Phi'$, $\Phi''$, ... $\Phi^{(m)}$ ... die Ableitungen von $\Phi$ nach $h(a - a_0)$ bezeichnen. Es wird sonach, wenn $\Sigma$ stets eine über die $n$-Werthe $i = 1 \ldots n$ erstreckte Summe bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned}
&2 \,.\, z[a_\beta;\ a_\alpha] \\
&= \Sigma z_i \,.\, \{\Phi[h(a_\beta - a_0)] - \Phi[h(a_\alpha - a_0)]\} \\
&- \frac{h}{1} \Sigma z_i(a_i - a_0) \,.\, \{\Phi'[h(a_\beta - a_0)] - \Phi'[h(a_\alpha - a_0)]\} \\
&+ \frac{h^2}{1\,.\,2} \Sigma z_i(a_i - a_0)^2 \,.\, \{\Phi''[h(a_\beta - a_0)] - \Phi''[h(a_\alpha - a_0)]\} \\
&- \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3} \Sigma z_i(a_i - a_0)^3 \,.\, \{\Phi'''[h(a_\beta - a_0)] - \Phi'''[h(a_\alpha - a_0)]\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{(-1)^m h^m}{1\,.\,2 \ldots m} \Sigma z_i(a_i - a_0)^m \,.\, \{\Phi^{(m)}[h(a_\beta - a_0)] - \Phi^{(m)}[h(a_\alpha - a_0)]\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Durch Differentiation erhält man ferner als Darstellung von (9):

$$\left.\begin{aligned}
&2 \,.\, \zeta = \Sigma z_i \,.\, \Phi'[h(a - a_0)] - \frac{h}{1} \Sigma z_i(a_i - a_0) \,.\, \Phi''[h(a - a_0)] + \\
&\frac{h^2}{1\,.\,2} \Sigma z_i(a_i - a_0)^2 \,.\, \Phi'''[h(a - a_0)] - \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3} \Sigma z_i(a_i - a_0)^3 \,. \\
&\Phi^{(IV)}[h(a - a_0)] \ldots + \frac{(-1)^m h^m}{1\,.\,2 \ldots m} \Sigma z_i(a_i - a_0)^m . \Phi^{(m)}[h(a - a_0)] \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Hier ist:

$$\Phi' = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \exp\left[- h^2(a - a_0)^2\right; \quad \Phi'' = - 2h(a - a_0) \,.\, \Phi' ;$$

$$\Phi''' = (4h^2(a - a_0)^2 - 2) . \Phi' ; \quad \Phi^{(IV)} = (- 8h^3(a - a_0)^3 + 12h(a - a_0) . \Phi' ; \ldots$$

Die gegebenen Entwicklungen sind für jeden Werth $a_0$ gültig. Wählt man insbesondere für $a_0$ das arithmetische Mittel, so wird $\Sigma z_i (a_i - a_0) = 0$, so dass in (11) und in (12) die entsprechenden Glieder wegfallen. Zugleich erhält $\Sigma z_i(a_i - a_0)^2$ den kleinstmöglichen Werth, da für das arithmetische Mittel die Summe der Quadrate der Abweichungen ein Minimum wird.

Handelt es sich aber um die approximative Darstellung der Vertheilungstafel eines C.-G., so kann $a_0$ ebenso wohl einen anderen Hauptwerth, namentlich den dichtesten Werth, vorstellen; man wird jedoch stets mit Vortheil das arithmetische Mittel als $a_0$ wählen.

§ 16. Die Gültigkeit der Ausgangsformel (9) hängt von der Wahl der Werthes $h$ ab, die stets so getroffen werden kann, dass jeder beliebige Grad der Annäherung an die vorgelegten Functionswerthe erreicht wird. Dies steht außer Zweifel, da der Vergleich der gegebenen Werthe mit den für ein bestimmt gewähltes $h$ berechneten sich ganz ebenso gestaltet wie der obige Vergleich für die Function mit nur einem Werthe $z_0$.

Zur Charakterisirung der Annäherung dienen folgende Bemerkungen. Da:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-h^2 (a - a_i)^2 da = 1\right.,$$

so ist auch:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta\, da = \sum_i z_i \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-h^2 (a - a_i)^2\right] da = \Sigma z_i .$$

Die Summe der Werthe wird daher durch die angenäherte Darstellung nicht verändert, sie wird nur in anderer Weise vertheilt. Um nun die Veränderung in der Vertheilung zu beurtheilen, kann man die Abweichungen bezüglich eines zu Grunde gelegten $a_0$ einmal für die gegebenen Functionswerthe als empirischen Werth, sodann für die in (9) dargestellte Annäherung als theoretischen Werth berechnen. Die empirische Summe der $m^{\text{ten}}$ Potenzen der Abweichungen bez. $a_0$ erhält man als:

$$\Sigma z_i (a_i - a_0)^m ,$$

die theoretische Summe als:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (a - a_0)^m \zeta\, da .$$

Setzt man $a - a_0 = (a - a_i) + (a_i - a_0)$, so ergibt sich zunächst für die einfachen Abweichungen durch Ausführung der Integration:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (a - a_0) \zeta\, da = \Sigma z_i (a_i - a_0) .$$

Die Gesammtsumme der positiven und negativen Abweichungen bleibt sonach empirisch und theoretisch die nämliche, oder — anschaulicher gesagt — der Schwerpunkt der Vertheilung bleibt erhalten, wie nicht anders zu erwarten ist, da jeder gegebene Werth $z$ auf beiden Seiten des Argumentwerthes durch (9) symmetrisch vertheilt wird. Für die zweiten und höheren Potenzen der Abweichungen hängt dagegen die Uebereinstimmung zwischen empirischen und theoretischen Werthen von $h$ ab. Dies erhellt aus folgenden Beziehungen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(a-a_0)^2\zeta da=\frac{1}{2h^2}\Sigma z_i+\Sigma z_i(a_i-a_0)^2;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(a-a_0)^3\zeta da=\frac{3}{2h^2}\Sigma z_i(a_i-a_0)+\Sigma z_i(a_i-a_0)^3;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(a-a_0)^4\zeta da=\frac{3}{4h^4}\Sigma z_i+\frac{3}{h^2}\Sigma z_i(a_i-a_0)^2+\Sigma z_i(a_i-a_0)^4;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(a-a_0)^5\zeta da=\frac{15}{4h^4}\Sigma z_i(a_i-a_0)+\frac{5}{h^2}\Sigma z_i(a_i-a_0)^3+\Sigma z_i(a_i-a_0)^5;\ldots$$

u. s. w.

Es müsste sonach der Werth von $h$ unendlich groß sein, sollten die empirischen und theoretischen Abweichungssummen in absoluter Strenge übereinstimmen.

Dies hindert keineswegs, dass schon verhältnissmäßig kleine Werthe von $h$ hinreichen, um eine befriedigende Annäherung zu geben. Dabei ist im Auge zu behalten, dass — insbesondere für die Vertheilungstafeln der C.-G. — die Bedeutung einer Näherungsformel nicht darin besteht, eine bloße Copie des Ganges der gegebenen $z$-Werthe in möglichst großer Treue zu geben und etwa nur die Ecken abzurunden, die der graphisch dargestellte Verlauf der empirischen Function zeigt. Es handelt sich vielmehr um ein Ausgleichen der empirisch bestehenden Zufälligkeiten durch die angenäherte Darstellung.

Diesen Erfolg führen die Entwicklungen (11) und (12) mit sich, wenn sie mit einem bestimmten Gliede abgebrochen werden. Wie weit man hierbei zu gehen hat, hängt wesentlich von der Beschaffenheit der gegebenen Function und den Bedürfnissen der Untersuchung ab. Eine allgemeine Regel lässt sich daher in dieser Beziehung nicht aufstellen. Für C.-G. mit geringer Schwankung um die Hauptwerthe, für welche das Gauß'sche Fehlergesetz bei Zugrundelegen des arithmetischen Mittels als Ausgangswerthes $a_0$ eine rohe Annäherung gibt, sind jedenfalls nur wenige Glieder nöthig; denn das erste Glied ist ja das Gauß'sche Gesetz. Will man aber, unter Verzicht auf die logarithmische Behandlung, einem C.-G. mit starker Schwankung die Formeln (11) und (12) zu Grunde legen, so kann erst die Durchführung der Untersuchung darüber belehren, wie weit man in der Berücksichtigung der Glieder jener Formeln gehen muss.

Eine Vorbedingung für den Gebrauch der gegebenen Darstellung ist das Vorhandensein von Tabellen für die Ableitungen der Integralwerthe $\Phi$. Da solche Tabellen fehlen, so hätten auch die Formeln (11) und (12) nur unter großen Umständlichkeiten in der Collectivmaßlehre benutzt werden können. Die vorstehenden Entwicklungen mindern darum weder den praktischen Werth der Gesetze Fechner's, noch treten sie in Gegensatz zu den theoretischen Aufstellungen, die insbesondere in dem Zusatze zu der Ableitung der Asymmetriegesetze[1]) zur Begründung jener Gesetze dienen. Sie lassen vielmehr erkennen, dass Fechner durch Aufstellen des zweiseitigen Gauß'schen Gesetzes und des logarithmischen Gesetzes die in der Tabelle der $\Phi$-Werthe und in den Logarithmentafeln vorliegenden Hülfsmittel der Untersuchung in vollendeter Weise zur Ausnützung brachte.

Da die Formeln (11) und (12) keinen Uebergang zum zweiseitigen Gauß'schen Gesetze ermöglichen, so ist es noch von Interesse, hervorzuheben, dass man, von der allgemeinen Form (8) statt von (9) ausgehend, einen Anschluss an dieses Gesetz gewinnen kann. Da nämlich der Werth von $h$ für jeden einzelnen Functionswerth besonders bestimmt werden darf, so ist es auch gestattet, die unterhalb und oberhalb des dichtesten Werthes $D$ liegenden Werthe $z$ in je

1) Cap. XX.

eine Gruppe zu vereinigen, für jede Gruppe insbesondere einen Werth $h'$ resp. $h_{,}$ anzunehmen und unter Zugrundelegen des dichtesten Werthes als Ausgangswerthes $a_0$ die Entwicklung durchzuführen. Berücksichtigt man bloß das erste Glied, das die Fehlerfunction darstellt, so erhält man für jede Seite von $D$ das Gauß'sche Gesetz für welches nun $h'$ und $h_{,}$ wie in (3) zu berechnen ist.

§ 17. Es erübrigt schließlich noch, den Zusammenhang der obigen Formeln mit den von Herrn Prof. Bruns in der erwähnten Abhandlung gegebenen Entwicklungen herzustellen. Zu diesem Zwecke zeige ich, dass aus (11) die Hauptformel der Bruns'schen Abhandlung abgeleitet werden kann. Dieselbe lautet, wenn man die Argumente wie oben allgemein durch $a$ bezeichnet und $z[a_\beta;\ a_\alpha]$ für $H(a,\ h)$ setzt:

$$2.\, z[a_\beta;\ a_\alpha] = \sum_m D\{R[h(a-a_0)_m)]\}.\{\Phi^{(m)}[h(a_\beta-a_0)]-\Phi^{(m)}[h(a_\alpha-a_0)]\}.$$

Es ist somit nachzuweisen, dass:

$$\frac{(-1)^m \cdot h^m}{1\cdot 2\ldots m}\sum_i z_i(a_i-a_0)^m = D\{R[h(a-a_0)]_m\}\,.$$

Nun definirt Herr Bruns die Functionen $R_m$ durch die Gleichung:

$$\sum_m R(x)_m(2iv)^m = \exp\,(v^2 - 2ixv)\,,$$

so dass insbesondere $R_0 = 1$, und gibt folgende Eigenschaften von $R_m$ an:

$$\frac{dR(x)_m}{dx} = -\,R(x)_{m-1}$$

$$\Phi^{(m+1)}(x) = 2^m\,.\,1\,.\,2\,\ldots\,m\,.\,R(x)_m\,\Phi'(x)\,.$$

Auf Grund dieser Beziehungen leitet er den Satz ab, dass das Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi^{(p+1)}(x)\,.\,\Phi^{(q+1)}(x)}{\Phi'(x)}\,dx\,,\quad (p,\ q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)\,,$$

wenn $p$ und $q$ verschieden sind, den Werth Null und, wenn $p = q$ den Werth $2\,.\,2^p\,.\,1\,.\,2\,\ldots\,p$ annimmt.

Es ist aber $D\{R_m\}$, als Durchschnitt der Function $R_m$ nach dem Vertheilungsgesetze $\zeta$ bestimmt, gleich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R[h(a-a_0)]_m \,.\, \zeta da = \sum_i \frac{y_i h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} R[h(a-a_0)]_m \,.\, \exp\,[-h^2(a-a_i)^2]\, da\,.$$

Setzt man daher, da $a - a_0 = (a - a_i) + (a_i - a_0)$, und $\frac{dR_m}{dx} = -R_{m-1}$:

$$R[h(a-a_0)]_m = R[h(a-a_i)]_m - h(a_i - a_0) R[h(a-a_i)]_{m-1} +$$
$$\frac{h^2}{1\,.\,2}(a_i - a_0)^2 R[h(a-a_i)]_{m-2} - \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}(a_i - a_0)^3 R[h(a-a_i)]_{m-3}$$
$$\ldots + \frac{(-1)^m \,.\, h^m}{1\,.\,2 \ldots m}(a_i - a_0)^m R[h(a-a_0)]_0$$

und berücksichtigt man, dass auf Grund der Eigenschaften von $R$:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} R[h(a-a_i)]_m \exp\,[-h^2(a-a_i)^2]\, da = 0\,, \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

und $R[h(a-a_0)]_0 = 1$ ist, so erhält man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R[h(a-a_0)]_m \,.\, \zeta\, da = \frac{(-1)^m \,.\, h^m}{1\,.\,2 \ldots m} \,.\, \Sigma z_i (a_i - a_0)^m\,.$$