Beiträge zur Collectivmafslehre.

Von

Friedrich Werner.

Mit 6 Figuren im Text.

1. Das Gauß'sche Gesetz der Vertheilung von Beobachtungsfehlern hat nach zwei Richtungen hin eine Erweiterung erfahren. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die ja im Grunde eine Häufigkeitslehre gleich möglicher Fälle ist, hat von diesem Gesetz, das auch als das »einfache Exponentialgesetz« bezeichnet wird, Gebrauch gemacht und hat es nicht nur auf die Vertheilung von Beobachtungsfehlern angewendet, sondern allgemein auf Erscheinungen, die für uns den Charakter des Zufälligen tragen. Die erste derartige Erweiterung des Anwendungsbereiches rührt von Quetelet her. Wenn er auch nicht die Gauß'sche Darstellung von Wahrscheinlichkeitscurven bei seinen Erörterungen zu Grunde gelegt hat, sondern die aufgestellten Wahrscheinlichkeitscurven — oder hier besser Vertheilungscurven — mit Hülfe von Binomialcoefficienten ausdrückte, so sind doch seine Betrachtungen nichts anderes als eine erweiterte Anwendung des Gauß'schen Fehlervertheilungsgesetzes. Das spricht sich insbesondere darin aus, dass Quetelet durchaus an dem arithmetischen Mittelwerthe einer Reihe von Messungen als dem wahrscheinlichsten Werthe festhält, selbst wenn die streng symmetrische Vertheilung in Bezug auf diesen Mittelwerth, die das Gauß'sche Exponentialgesetz fordert, nicht mit der Erfahrung übereinstimmt.

Eine Uebersicht über weitere Anwendungen des Exponentialgesetzes auf andere Gebiete als die Fehlertheorie hat neuerdings Ludwig gegeben.[1]) Erwähnenswerth sind danach die Arbeiten von

1) Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik u. Physik (herausgegeben von Mehmke u. Cantor) Band 43, Heft 4, 5, Seite 230 ff.

Galton, welche sich an die von Quetelet anschließen und vielfach die Grundlage für die Untersuchungen geben, die auf zoologischem und botanischem Gebiete von Verschaffelt, de Vries, Ludwig u. a. angestellt worden sind. Als zusammenfassendes Ergebniss der in einem ausführlichen Litteraturverzeichniss angegebenen Arbeiten bietet Ludwig eine Eintheilung der bisher aufgefundenen Typen von »Variationscurven«, und zwar gründet sich diese Eintheilung wesentlich auf die Abweichungen der einzelnen Variationscurven von der normalen Wahrscheinlichkeitscurve, wie sie in dem Gauß'schen Exponentialgesetz sich darstellt. Bei der Besprechung der Versuche, diese Variationscurven analytisch auf das einfache Exponentialgesetz zu reduciren, hebt allerdings Ludwig hervor, dass nur in vereinzelten Fällen diese analytische Reduction gelungen sei, es dagegen in weitaus den meisten Fällen noch an einer solchen fehle; und hier sei daher der Punkt, wo »der Fachmathematiker der Variationsstatistik hülfreiche Hand leisten müsse«.

In diesen Worten findet das Bedürfniss einer Erweiterung des einfachen Exponentialgesetzes nach der formalen Seite hin seinen Ausdruck. Schon in der Theorie der Beobachtungsfehler, die ja den Anlass zur Formulirung des Exponentialgesetzes gegeben hatte, war von Bessel nachgewiesen worden, dass die Gültigkeit desselben keine unbeschränkte sei. Mit der Ausdehnung des Anwendungsbereiches musste die Nothwendigkeit einer formalen Erweiterung des Gauß-schen Gesetzes sich noch fühlbarer machen, vorausgesetzt, dass man eine analytische Darstellung des der Erfahrung entnommenen Materiales überhaupt noch erstrebte und sich nicht damit begnügen wollte, die Variations- oder Vertheilungscurve mit denselben absoluten Zahlen darzustellen, wie die Erfahrung und die einfache Abzählung und Ordnung sie ergeben hatten.

2. Ludwig hätte seinen Bericht über die Beziehungen zwischen der »Variabilität der Lebewesen« und dem »Gauß'schen Fehlergesetz« mit mehr positiven Ergebnissen beschließen können, wenn die »Collectivmaßlehre« Fechner's früher erschienen wäre. Dieses Werk würde in dem erwähnten Litteraturverzeichniss zwar die letzte, nichtsdestoweniger aber die bedeutsamste Stelle eingenommen haben, da Fechner den Gegenstand von allgemeineren Gesichtspunkten aufgefasst hat, als sie bisher geltend gemacht worden sind, und zudem

auch in formaler Hinsicht eine Erweiterung bringt. Eine eingehende Würdigung der Arbeit Fechner's bietet der Bericht, den der Herausgeber des Werkes, G. F. Lipps, in Wundt's Philosophischen Studien[1]) gegeben hat, sowie die Abhandlung von Bruns »Zur Collectivmaßlehre«, die ebendaselbst[2]), erschienen ist.

Es sei erlaubt, hier kurz zu wiederholen, worin Bruns das Verdienst der »Collectivmaßlehre« erblickt. Die rein mathematischen Theile der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind nur eine Lehre von der relativen Häufigkeit gleich möglicher Fälle, und die daselbst betrachteten theoretischen Häufigkeitscurven beruhen auf der gleichmäßigen Erschöpfung einer gegebenen Gesammtheit gleich möglicher Fälle. Diese gleichmäßige Erschöpfung ist nur logisch ausführbar, und die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind daher an die Bedingung geknüpft, dass Dinge existiren, die wenigstens näherungsweise die »zufälligen« Ereignisse und die theoretischen Häufigkeitscurven der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwirklichen. Der Nachweis, dass diese Bedingung erfüllt sei, bleibt nothwendig Gegenstand der Erfahrung, und Fechner hat es zuerst unternommen, diesen Nachweis in systematischer Weise zu führen. Weiterhin stellt sich als Ergebniss dar, dass die von Fechner untersuchten Häufigkeitscurven einem bestimmten Typus angehören, und zwar dem Typus des »zweiseitigen Gauß'schen Gesetzes«, welches gestattet, den Verlauf der Häufigkeitscurve darzustellen, auch wenn er nicht symmetrisch ist in Bezug auf den arithmetischen Mittelwerth der Maße des betreffenden »Collectivgegenstandes«, welchen Namen Fechner für die der Untersuchung zu Grunde liegenden Vielheiten aus den verschiedensten Gebieten der Statistik einführt.

Bruns zeigt jedoch in der erwähnten Abhandlung, dass das Verfahren Fechner's nach der rechnerischen, also formalen Seite hin einer Verbesserung fähig sei, und dass auch die Begriffsbestimmung eines Collectivgegenstandes noch eine andere, weitergehende Fassung zulasse. Ein Collectivgegenstand ist nach Fechner ein Gegenstand, »der aus unbestimmt vielen, nach Zufall variirenden Exemplaren besteht, die durch einen Art- oder Gattungsbegriff zusammengehalten werden«. Bruns definirt einen Collectivgegenstand als »eine Vielheit

1) Band XIII; S. 579 ff. 2) Band XIV; S. 339 ff.

von gleichartigen Dingen, die nach einem veränderlichen Merkmal statistisch geordnet werden kann«. Das veränderliche Merkmal, nach welchem geordnet wird, ist als Argument des Collectivgegenstandes bezeichnet. Lässt man nun die von Fechner beibehaltenen Einschränkungen fallen, dass die Werthe des Argumentes eine stetige Mannigfaltigkeit bilden sollen, und dass das veränderliche Merkmal von einem Gliede des Collectivgegenstandes zum nächsten »nach Zufall« variire, so erweitert sich das Gebiet, aus dem die Collectivmaßlehre ihr Untersuchungsmaterial entnehmen kann, ganz beträchtlich. Bei den »unstetigen« Collectivgegenständen sind dann die möglichen Werthe des Argumentes auf ein System discreter Werthe beschränkt, so z. B. wenn man Zeilen gleichmäßigen Druckes daraufhin durchzählt, wie oft in jeder Zeile ein bestimmter Buchstabe auftritt, und nun die Zahlen 0, 1, 2, u. s. w. als Argumente des auf diese Weise construirten Collectivgegenstandes auffasst. Ja, wie hier schon vorgreifend bemerkt sein mag, das Material, welches diese unstetigen Collectivgegenstände liefern, hat nicht nur den Vorzug, mit verhältnissmäßig geringer Mühe beschafft werden zu können, sondern es entspricht oft in höherem Grade den Anforderungen der Gleichartigkeit als dasjenige, welches Fechner durch mühevolle Messungen sich herstellen musste.

Hierauf werden wir im Verlaufe dieser Erörterungen noch zurückkommen, zunächst aber ist auf das rechnerische Verfahren, welches Bruns vorschlägt, einzugehen. Bereits in einer Note in den Astronomischen Nachrichten [1]) hat Bruns gezeigt, dass es möglich sei, die bei der Untersuchung von Collectivgegenständen beobachteten Curven in einer die Beobachtung erschöpfenden Weise darzustellen durch eine endliche, aber im voraus nicht feststehende Anzahl von Gliedern einer gewissen Reihenentwicklung. Der Anschluss zwischen Beobachtung und Rechnung wird dabei bewirkt durch die passende Bestimmung einer Anzahl von verfügbaren Constanten oder »Parametern«. Die Abhandlung »Zur Collectivmaßlehre« bringt eine speciellere Auseinandersetzung, und es wird an dieser Stelle nur nöthig sein, auf die daselbst abgeleiteten Resultate hinzuweisen mit dem Bemerken,

---

1) Ueber die Darstellung von Fehlergesetzen. Astronomische Nachrichten Band 143, Nr. 3429.

dass die weiterhin angeführten Gleichungsnummern sich auf diese Abhandlung [1]) beziehen.

3. Ehe wir jedoch zu der ausführlichen Rechnung übergehen, erscheint es angebracht, eine Uebersicht über das zu behandelnde Material zu geben.

Von den Fechner'schen Beispielen sind in Betracht gezogen worden:

Tafel I und II über den Vertical- beziehentlich Horizontalumfang von 450 europäischen Männerschädeln in der Reductionsstufe $i = 5$ mm [2]).

Tafel III von 2047 Studentenrecrutenmaßen in der Reductionsstufe $i = 1$ Zoll [3]).

Tafel IV der Maße des obersten Gliedes von 217 sechsgliedrigen Roggenhalmen in 2 Reductionsstufen, $i = 2$ cm, $i = 4$ cm. [4])

Dimensionen der Galleriegemälde, und zwar erschienen von den bei Fechner angeführten Tafeln [5]) wegen der unvollständigen Angabe extremer Werthe am besten die ersten beiden Tafeln geeignet, die Tafeln für Genre ($h > b$), weil die daselbst unter der Bezeichnung »Rest« angeführten Werthe der Größen z dem Werthe $m = \Sigma z$ gegenüber nicht so stark hervortreten wie bei den übrigen Tafeln, die an dieser Stelle vereinigt sind. Wir wollen die ausgewählten Tafeln mit V_h und V_b bezeichnen.

Von den meteorologischen Collectivgegenständen sind die Regenhöhen des Monates Januar für Genf nach der arithmetisch reducirten Vertheilungstafel [6]) als Beispiel VI gewählt werden.

Es sind die ersten tausend Spalten des Thesaurus logarithmorum von Vega daraufhin durchgezählt worden, wie oft in jeder Spalte eine Null in der zehnten Decimale auftritt. Herr Professor Bruns hat mir das Ergebniss zur weiteren rechnerischen Behandlung gütigst zur Verfügung gestellt. Diese Tafel, die fortan durch »*Ln*« bezeichnet werden soll, sei hier mitgetheilt:

---

1) Philosophische Studien, Band XIV, S. 339 ff.
2) Fechner, Collectivmaßlehre, S. 121 u. 280.
3) S. 129 u. 281.
4) S. 131.
5) S. 424.
6) S. 345.

Ln

a	z	a	z	a	z
0	0	5	161	10	34
1	6	6	183	11	19
2	36	7	134	12	10
3	78	8	114	13	0
4	149	9	74	14	2

und es bedeutet also

$$a: \ 8$$
$$z: 114$$

dass unter den 1000 durchgesehenen Spalten 114 Spalten vorkamen, in denen die Null 8 mal in der letzten Decimale auftrat.

Ferner verschaffte ich mir in größerer Zahl Beispiele, wie sie bereits Hagen in seiner Wahrscheinlichkeitsrechnung gebracht hat, wo er das Vorkommen des Buchstaben »*e*« in Zeilen gleichmäßigen Druckes dazu benutzt, das Gauß'sche Fehlergesetz empirisch zu begründen. Ich wählte als Unterlage Kant's Naturgeschichte und Theorie des Himmels[1]) und zählte ab, wie oft die Buchstaben »*e*«, »*n*«, »*r*«, »*s*«, »*t*« in 1000 Zeilen dieses Druckes vorkamen. Alle nicht vollen Zeilen, sowie diejenigen, welche gesperrten Druck enthielten, waren natürlich vorher gestrichen worden. Die in solcher Weise zusammengestellten Tafeln mögen in der Folge durch die Bezeichnungen *Be*, *Bn*, *Br*, *Bs*, *Bt* hervorgehoben sein.

Be

a	z	a	z	a	z
2	1	7	132	12	62
3	3	8	184	13	15
4	4	9	187	14	6
5	37	10	177	15	1
6	68	11	122	16	1

1) Ausgabe in Reclam's Universal-Bibliothek.

Bn

a	z	a	z
0	3	6	166
1	17	7	128
2	56	8	75
3	128	9	31
4	172	10	10
5	210	11	4

Bs

a	z	a	z
0	37	6	48
1	127	7	19
2	223	8	2
3	234	9	0
4	185	10	1
5	124		

Br

a	z	a	z
0	32	5	116
1	108	6	54
2	223	7	4
3	249	8	3
4	210	9	1

Bt

a	z	a	z
0	56	5	55
1	208	6	23
2	294	7	3
3	244	8	3
4	114		

Zu diesen Beispielen unstetiger Collectivgegenstände kommen noch mehrere, die ich nach den Angaben von Ludwig theils dem Botanischen Centralblatt[1]), theils Hoffmanns Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht[2]) entnommen habe. Es gehören dahin die Tafeln für das Vorkommen der Randstrahlen bei Achillea pharmica (*R Ap*), bei Centaurea Cyanus (*R Cc*), bei Chrysanthemum inodorum (*R Ci*), bei Chrysanthemum Leucanthemum (*R Cl*), und zwar sind diese Tafeln so zu verstehen, dass die Zahl der Randstrahlen oder Randblüthen in den einzelnen Blüthenköpfen dieser Compositen als Argument des Collectivgegenstandes betrachtet wird.

R Ap

a	z	a	z
6	11	11	451
7	82	12	391
8	731	13	305
9	550	14	19
10	546	15	4

1) Jahrgang 1895. 2) Jahrgang 1888.

R Cc

$a =$	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12
$z =$	6,	36,	210,	149,	82,	14,	3

R Ci

a	z	a	z	a	z
10	1	18	23	26	8
11	1	19	57	27	4
12	0	20	136	28	1
13	13	21	516	29	1
14	5	22	112	30	0
15	13	23	46	31	4
16	15	24	19	32	2
17	14	25	9		

R Cl

a	z	a	z	a	z
8	2	18	132	28	55
9	0	19	175	29	36
10	4	20	321	30	35
11	3	21	739	31	41
12	21	22	330	32	38
13	71	23	229	33	41
14	79	24	130	34	32
15	75	25	88	35	11
16	100	26	68	36	3
17	94	27	45	37	2

Wie aus den Bemerkungen zu diesen Tafeln zu ersehen war, resultiren die Abzählungen, die über 3090, 500, 1000, 3000 Exemplare sich erstrecken, zuweilen aus mehreren Serien, und jede Serie gehört einem anderen Standorte an. Deshalb dürften diese Beispiele an Werth der Tafel IV von Fechner nachstehen, denn Fechner hebt ausdrücklich hervor, dass die Abzählungen an Exemplaren von demselben Standort vorgenommen seien.

Zu derselben Categorie von Beispielen gehören endlich zwei

Tafeln, in denen als Argument die Zahl der Fiederpaare der Blätter bei Fraxinus excelsior (*FFe*) und bei Pirus aucuparia (*FPa*) gilt. An je 1000 Blättern sind diese Abzählungen ausgeführt worden.

FFe

$a =$ 2,	3,	4,	5,	6,	7
$z =$ 9,	64,	227,	340,	307,	53

FPa

$a =$ 3,	4,	5,	6,	7,	8
$z =$ 7,	23,	178,	518,	232,	42

Nach einer Bemerkung von Ludwig hat Galton nachgewiesen, dass die Vertheilung der menschlichen Begabungen dem Gauß'schen Gesetze folge, indem er sich über die Abstufung der Prüfungsnoten bei den Mathematikprüfungen zu Cambridge eine Uebersicht hergestellt habe. Auch Adolph Wagner schlägt, obschon weniger in der Voraussicht, die Vertheilung nach dem Exponentialgesetze dabei bewährt zu finden, eine Statistik der geistigen Leistungen von Schulkindern vor.[1]) Ich habe nach diesen Anregungen aus den mir zu Gebote stehenden Jahresberichten der Drei-König-Schule zu Dresden die Ergebnisse der Prüfungen von 190 Abiturienten in folgender Tafel zusammengestellt:

Pr

I	I^b	II^a	II	II^b	III^a	III
$a =$ 1,	2,	3,	4,	5,	6,	7
$z =$ 2,	16,	23,	38,	46,	45,	20

Soweit man zugeben will, dass die Vertheilung von Prüfungsnoten der Vertheilung der menschlichen Begabungen entspreche, bestätigt dieses Beispiel auch wohl die Behauptung Galton's, wenn man nur statt des einfachen Exponentialgesetzes die von Bruns gegebene Reihenentwicklung annimmt.

4. An den zuletzt angeführten unstetigen Collectivgegenständen soll nun das vorgeschlagene Rechnungsverfahren zunächst auseinandergesetzt werden.

Nach der Herstellung der Vertheilungstafel ist die Berechnung

1) Die Gesetzmäßigkeit in den scheinbar willkürlichen menschlichen Handlungen. Seite 59.

der Werthe der Häufigkeitsfunction $H(x)$ für die Wechselpunkte x auszuführen, die in der Mitte zwischen den Werthen a des Argumentes liegen. Da es in der Reihenentwicklung (14) aber auf die Werthe von X_0 ankommt, so werden wir uns, wie Bruns angibt, zweckmäßiger sogleich die Werthe $2\,H(x) - 1$ verschaffen, indem wir den a-Größen den Werth $a = -\infty$ vorlegen, schrittweise die Werthe z aufsummiren und aus den so gewonnenen Summen, welche die Werthe von $^1/_2\,m\;[2\,H\,(x) - 1]$ darstellen, durch Division mit $^1/_2\,m$ die Werthe

$$2\,H(x) - 1$$

berechnen. Da die späterhin nöthigen Tabellen über die Ableitungen der Φ-Function bis zu 4 Decimalen gebraucht werden sollen, so sind natürlich auch die Werthe von

$$2\,H(x) - 1$$

stets nur 4-stellig zu rechnen.

Im Fortgange der Rechnung haben wir die vorläufigen Werthe von $D(x)$ und h zu bestimmen. Da die Zahl der Argumentwerthe a, ausgenommen bei den Tafeln $R\,Ci$ und $R\,Cl$, über 15 nicht hinausging, so sind diese Werthe von vornherein mit möglichster Genauigkeit berechnet worden, denn auch die spätere Ausgleichung, die vorgenommen werden kann, um die genauen Werthe von c und h, beziehentlich s, zu erhalten und damit wirklich die ersten Coefficienten A_1 und A_2 in der Reihenentwicklung zum Verschwinden zu bringen, erfordert immerhin einige Zeit, wenn sie auch praktisch nicht den Umfang annimmt, wie es nach der allgemeinen Auseinandersetzung scheinen könnte, die Bruns in seiner Abhandlung gibt.[1]) Die daselbst eingeführten Hülfsgrößen f und k sind echte Brüche von zumeist so geringem Betrage, dass ihre höheren Potenzen bei vierstelliger Rechnung nicht mehr berücksichtigt zu werden brauchen, und die Hülfsgröße g wird selten stark von der Einheit abweichen.

Bei dem Beispiel, das die Endnullen der Logarithmen behandelt, Ln, fand sich:

$$c = (\Sigma\,az) : (\Sigma\,z) = 6{,}024$$

und es ergab dann die Bestimmung von h aus der Gleichung

$$2h^2[(\Sigma\,z(a - c)^2) : (\Sigma\,z)] = 1$$

1) Wundt, Philosophische Studien, Bd. XIV, S. 364.

den Werth $h = 0,3179$, während die vergleichsweise nach

$$\pi(h \cdot [(\Sigma z(a-c)) : (\Sigma z)])^2 = 1$$

ausgeführte Bestimmung von h den Werth 0,3199 lieferte, sodass die letztere Art, da sie praktisch einen so geringen Unterschied von der theoretisch genaueren zeigt, für eine rasche Rechnung vortheilhafter ist. Da aber bei den unstetigen Collectivgegenständen die Argumente a immer um die Einheit wachsen, so lässt sich die Bildung der Quadrate $(a-c)^2$ vereinfachen, und es erschien daher angebracht, in allen Fällen h aus der Gleichung (30) zu bestimmen.

An die Bestimmung von c und h, beziehentlich s, schließt sich die Auswahl der Wechselpunkte x, um nach

$$y = h(x-c)$$

die Argumente y für die Φ-Function und ihre Ableitungen berechnen zu können. Da, wie schon erwähnt, die Zahl der Argumentwerthe a außer in zwei Fällen über 15 nicht hinausging, so wären die Gleichungen (28b) für sämmtliche Wechselpunkte x zu bilden gewesen. Mittels dieser Gleichungen (28b) hätten sich dann, etwa durch das Mayer'sche Ausgleichungsverfahren, die Werthe der unbekannten Coefficienten $A, \ldots, A_6$ berechnen lassen, vorausgesetzt, dass wir in der Reihenentwicklung bis zum sechsten Gliede gehen.

5. Bei den vorliegenden Beispielen empfahl sich aber statt eines mehr oder minder willkürlichen Ausgleichungsverfahrens die sogleich zu erörternde directe Bestimmungsart der Coefficienten.

Nach den Gleichungen (14) und (15), sowie (28a) sind die Coefficienten A lineare Verbindungen der Durchschnitte $D(y)$, $D(y^2), \ldots$, $D(y^6), \ldots$ und zwar haben für die sechs ersten Coefficienten die folgenden Werthe Geltung:

$$\begin{aligned}
A_1 &= -D(y)\\
A_2 &= D(y^2) - \tfrac{1}{2}\\
A_3 &= -\tfrac{2}{3}D(y^3) + D(y)\\
A_4 &= \tfrac{1}{3}D(y^4) - D(y^2) + \tfrac{1}{4}\\
A_5 &= -\tfrac{2}{15}D(y^5) + \tfrac{2}{3}D(y^3) - \tfrac{1}{2}D(y)\\
A_6 &= \tfrac{2}{45}D(y^6) - \tfrac{1}{3}D(y^4) + \tfrac{1}{2}D(y^2) - \tfrac{1}{12}
\end{aligned}$$

derart, dass die Coefficienten mit ungeradem Index von den Durchschnitten aus den ungeraden Potenzen der y, die mit geradem Index von den Durchschnitten aus den geraden Potenzen abhängen. Dabei ist zu bedenken, dass in den Gleichungen (28a) das Argument y der Größen $D[R(y)_n]$ und $D(y)$, $D(y^2)$, u. s. w. eine andre Bedeutung hat als das Argument y in den Werthen $\Phi(y)$, $\Phi(y)_1$, $\Phi(y)_2$, u. s. w. Wenn wir die Gleichung (27) berücksichtigen, so ist offenbar als Argument der Durchschnittsgrößen zu nehmen

$$y = h(a - c),$$

wo a jedesmal der dem zugehörigen Wechselpunkt x voraufgehende Werth des Argumentes des Collectivgegenstandes ist. Zur directen Bestimmung der Coefficienten A_1 bis A_6, oder vielmehr der A_3 bis A_6, da ja $A_1 = A_2 = 0$ sein soll, war es also nöthig, für jedes der betreffenden Beispiele die Durchschnitte

$$\begin{aligned} D[h\,(a - c)\,] &= [\Sigma z h\,(a - c)\,] : [\Sigma z]\,, \\ D[h^2(a - c)^2] &= [\Sigma z h^2(a - c)^2] : [\Sigma z]\,, \\ D[h^3(a - c)^3] &= [\Sigma z h^3(a - c)^3] : [\Sigma z]\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

zu bilden. Natürlich ist dabei von Vortheil, wenn die Werte c und h so genau als möglich bestimmt worden sind. Dann wird sich das Resultat

$$\begin{aligned} [\Sigma z h\,(a - c)\,] : [\Sigma z] &= 0 \\ [\Sigma z h^2(a - c)^2] : [\Sigma z] &= +\,0{,}5 \end{aligned}$$

herausstellen müssen. Die etwaigen Abweichungen hiervon geben einen Maßstab dafür, wie weit die früher ausgeführte Bestimmung von c und h den Anforderungen der Theorie entspricht, und man wird daher, ehe man zur Bildung der Durchschnitte aus den dritten und höheren Potenzen schreitet, erst die obige Controllrechnung durchführen, um eventuell die Werthe c und h verbessern zu können. Dies empfiehlt sich umsomehr, als bei den Durchschnitten aus den 5ten und 6ten Potenzen die extremen Werthe eines Collectivgegenstandes sich unter Umständen unverhältnissmäßig stark bemerkbar machen, so dass man bei sonst genauer vierstelliger Rechnung doch für die letzten Coefficienten auf die Sicherheit der 4ten und manchmal auch der 3ten Decimalstelle verzichten muss. Wenn demgegenüber die linearen Verbindungen der Durchschnittswerthe der R-Größen so beschaffen sind, dass $D(y^5)$ und $D(y^6)$ mit wesentlich geringeren Beträgen in die A-Größen eingehen, als die Werthe $D(y^2)$, $D(y^3)$,

$D(y^4)$, so kann dieser günstige Umstand doch die mit der Bildung höherer Potenzen nothwendigerweise verbundene Ungenauigkeit nicht völlig aufheben. Man wird daher in den Coefficienten A_5 und A_6 die letzte Decimale als mehr oder minder unsicher betrachten. Der Werth $\Sigma z = m$ sinkt in allen Beispielen nicht unter 100, und ich habe deshalb für die Werthe $\Sigma zh(a - c)$, $\Sigma zh^2(a - c)^2$, u. s. w. dreistellige Rechnung als vollständig ausreichend angesehen. In mehreren Fällen lieferte zwar die angegebene Controllrechnung für die Werthe A_1 und A_2 nicht den genauen Werth 0,0000, aber die Unterschiede beschränkten sich auf wenige Einheiten der 4ten Decimale, so dass bei Abrundung auf 3 Decimalen allein für die Tafeln *Bs*, *Br*, *Bn* und für die Tafel *RAp* die Werthe $A_2 = \pm 0{,}001$ sich ergeben würden. In einem einzigen Falle, bei der Tafel *R Cc*, machte sich wegen des nicht verschwindenden Werthes von A_2 eine Correction der Größe h nöthig.

In folgender Tabelle sind die Ergebnisse der Rechnung zusammengestellt:

	Ln	*Be*	*Bn*	*Br*	*Bs*	*Bt*
m	1000	1000	1000	1000	1000	1000
c	6,024	8,865	5,166	3,106	3,082	2,442
h	0,318	0,360	0,365	0,470	0,441	0,502
s	2,224	1,963	1,937	1,506	1,604	1,117
A_3	— 0,0838	+ 0,0078	— 0,0411	— 0,0533	— 0,0806	— 0,1427
A_4	— 0,0079	— 0,0033	— 0,0178	— 0,0116	— 0,0077	+ 0,0424
A_5	+ 0,0096	— 0,0051	+ 0,0074	— 0,0045	— 0,0018	— 0,0037
A_6	+ 0,0056	+ 0,0053	+ 0,0023	+ 0,0107	+ 0,0174	+ 0,0116

	RAp	*R Cc*	*FFe*	*FPa*	*Pr*
m	3090	500	1000	1000	190
c	9,981	8,638	5,031	6,071	4,71
h	0,402	0,702	0,680	0,829	0,478
s	1,758	1,007	1,040	0,853	1,478
A_3	— 0,0666	— 0,0875	+ 0,0737	+ 0,0525	+ 0,0815
A_4	— 0,0786	+ 0,0231	— 0,0243	+ 0,0699	— 0,0548
A_5	+ 0,0350	+ 0,0197	— 0,0166	+ 0,0390	— 0,0344
A_6	+ 0,0284	+ 0,0001	+ 0,0071	— 0,0053	+ 0,0142

Wenn man, wie es geschehen ist, die Coefficienten A in der Weise bestimmt, dass die ersten beiden nahezu verschwinden, so ist selbstverständlich nicht mehr nöthig, in den Gleichungen (14) für die Argumente $y = h(x - c)$ die sämmtlichen sieben Werthreihen

$$\Phi(y), \quad \Phi(y)_1, \quad \Phi(y)_2 : 2, \ldots\ldots, \Phi(y)_6 : 32$$

zu bilden. Wir können vielmehr die Werthreihen $\Phi(y)_1$ und $\Phi(y)_2 : 2$ auslassen, da wir sicher sein dürfen, dass die Bestandtheile $A_1\,\Phi(y)_1$ und $A_2\,\Phi(y)_2 : 2$ auf den rechten Seiten der Gleichungen (28b) nur ganz geringe Beiträge liefern können, zumal nach Ausweis der Tafeln $\Phi(y)_2 : 2$ höchstens den Werth $\pm$ 0,4839 erreicht.

Diese etwaigen Beiträge bleiben immer noch zurück gegen die Widersprüche, die sich endlich bei der Vergleichung der linken Seiten X_0 mit den rechten Seiten

$$S_r = A_3 X_3 + A_4 X_4 + A_5 X_5 + A_6 X_6$$

als »unausgeglichene Zufälligkeiten« herausstellen. Der Gang dieser Widersprüche

$$W = X_0 - S_r,$$

der für die einzelnen Beispiele in folgenden Tabellen dargestellt wird, ist maßgebend dafür, ob es möglich ist, mit der Bruns'schen Reihenentwicklung eine der Erfahrung möglichst entsprechende Darstellung der Vertheilungsgesetze von Collectivgegenständen zu geben.

Ln

a	z	x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2} m W$
0	0	0,5	— 0,0130	— 0,0130	0,0000	0
1	6	1,5	— 0,0299	— 0,0241	— 0,0058	— 3
2	36	2,5	— 0,0290	— 0,0220	— 0,0070	— 4
3	78	3,5	— 0,0163	— 0,0058	— 0,0105	— 5
4	149	4,5	+ 0,0449	+ 0,0417	+ 0,0032	+ 2
5	161	5,5	+ 0,0463	+ 0,0564	— 0,0101	— 5
6	183	6,5	+ 0,0565	+ 0,0457	+ 0,0108	+ 5
7	134	7,5	+ 0,0008	+ 0,0248	— 0,0240	— 12
8	114	8,5	— 0,0125	— 0,0166	+ 0,0039	+ 2
9	74	9,5	— 0,0120	— 0,0236	+ 0,0116	+ 6
10	34	10,5	— 0,0179	— 0,0171	— 0,0008	0
11	19	11,5	— 0,0102	— 0,0088	— 0,0014	— 1
12	10	12,5	— 0,0004	— 0,0036	+ 0,0032	+ 2
13	0	13,5	— 0,0032	— 0,0012	— 0,0020	— 1
14	2	14,5	+ 0,0001	— 0,0004	+ 0,0005	0

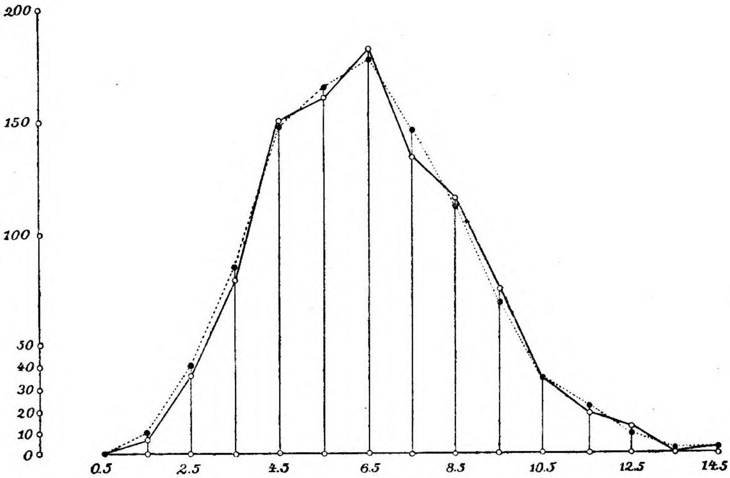

Fig. 1.

Die graphische Darstellung des Verlaufes dieser Vertheilungstafel ist ebenso wie die einiger anderer typischer Tafeln, die weiterhin folgen, so zu verstehen, dass der ausgezogene Linienzug die beobachteten Curvenpunkte verbindet, der durch die Punktirung hervorgehobene Linienzug aber die mit Hülfe der Bruns'schen Reihenentwicklung theoretisch berechneten Curvenpunkte. Der Maßstab für die als Ordinaten zu jeder Abscisse x gehörigen Werthe z ist für jede Figur beigegeben und lässt erkennen, in welcher Weise das Verhältniss zwischen den x und z in den einzelnen Fällen gewählt worden ist.

Be

a	z	x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2}m\,W$
2	1	2,5	+ 0,0008	0,0000	+ 0,0008	0
3	3	3,5	+ 0,0017	— 0,0005	+ 0,0022	+ 1
4	4	4,5	— 0,0103	— 0,0008	— 0,0095	— 5
5	37	5,5	+ 0,0033	+ 0,0013	+ 0,0020	+ 1
6	68	6,5	— 0,0026	+ 0,0058	— 0,0084	— 4
7	132	7,5	+ 0,0028	+ 0,0050	— 0,0022	— 1
8	184	8,5	+ 0,0053	— 0,0051	+ 0,0104	+ 5
9	187	9,5	— 0,0216	— 0,0129	— 0,0087	— 4
10	177	10,5	— 0,0088	— 0,0074	— 0,0014	— 1
11	122	11,5	+ 0,0098	+ 0,0032	+ 0,0066	+ 3
12	62	12,5	+ 0,0202	+ 0,0063	+ 0,0139	+ 7
13	15	13,5	+ 0,0023	+ 0,0032	— 0,0009	0
14	6	14,5	+ 0,0001	+ 0,0003	— 0,0002	0
15	1	15,5	— 0,0013	— 0,0004	— 0,0009	0
16	1	16,5	+ 0,0001	— 0,0003	+ 0,0004	0

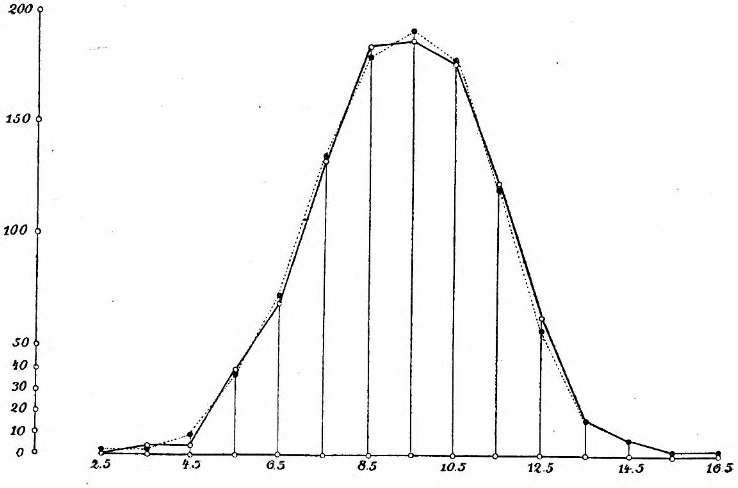

Fig. 2.

Bn

x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2}mW$
0,5	— 0,0100	— 0,0079	— 0,0021	— 1
1,5	— 0,0185	— 0,0145	— 0,0040	— 2
2,5	— 0,0168	— 0,0079	— 0,0089	— 4
3,5	+ 0,0182	+ 0,0146	+ 0,0036	+ 2
4,5	+ 0,0210	+ 0,0327	— 0,0117	— 6
5,5	+ 0,0360	+ 0,0238	+ 0,0122	+ 6
6,5	+ 0,0040	— 0,0017	+ 0,0057	+ 3
7,5	— 0,0117	— 0,0153	+ 0,0036	+ 2
8,5	— 0,0048	— 0,0121	+ 0,0073	+ 4
9,5	— 0,0027	— 0,0044	+ 0,0017	+ 1
10,5	— 0,0021	— 0,0006	— 0,0015	— 1
11,5	+ 0,0011	+ 0,0001	+ 0,0010	+ 1

Br

x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2}mW$
0,5	— 0,0193	— 0,0164	— 0,0029	— 1
1,5	— 0,0057	+ 0,0113	— 0,0056	— 3
2,5	+ 0,0389	+ 0,0367	+ 0,0022	+ 1
3,5	+ 0,0174	+ 0,0139	+ 0,0035	+ 2
4,5	— 0,0018	— 0,0114	+ 0,0096	+ 5
5,5	— 0,0125	— 0,0082	— 0,0043	— 2
6,5	+ 0,0081	— 0,0040	+ 0,0121	+ 6
7,5	— 0,0045	— 0,0028	— 0,0017	— 1
8,5	— 0,0017	— 0,0011	— 0,0006	0
9,5	0,0000	— 0,0003	+ 0,0003	0

Bs

x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2}mW$
0,5	— 0,0333	— 0,0248	— 0,0085	— 4
1,5	+ 0,0042	+ 0,0183	— 0,0161	— 8
2,5	+ 0,0574	+ 0,0552	+ 0,0022	+ 1
3,5	+ 0,0364	+ 0,0248	+ 0,0116	+ 6
4,5	— 0,0114	— 0,0135	+ 0,0021	+ 1
5,5	— 0,0084	— 0,0148	+ 0,0064	+ 3
6,5	— 0,0110	— 0,0081	— 0,0029	— 1
7,5	— 0,0001	— 0,0053	+ 0,0052	+ 3
8,5	— 0,0013	— 0,0026	+ 0,0013	+ 1
9,5	— 0,0019	— 0,0006	— 0,0013	— 1
10,5	0,0000	— 0,0001	+ 0,0001	0

Bt

a	z	x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2} m W$
0	56	0,5	— 0,0559	— 0,0379	— 0,0180	— 9
1	208	1,5	+ 0,0244	+ 0,0268	— 0,0024	— 1
2	294	2,5	+ 0,0832	+ 0,0813	+ 0,0019	+ 1
3	244	3,5	+ 0,0566	+ 0,0386	+ 0,0180	+ 9
4	114	4,5	— 0,0240	— 0,0211	— 0,0029	— 1
5	55	5,5	— 0,0281	— 0,0304	+ 0,0023	+ 1
6	23	6,5	— 0,0080	— 0,0143	+ 0,0063	+ 3
7	3	7,5	— 0,0057	— 0,0035	— 0,0022	— 1
8	3	8,5	0,0000	— 0,0004	+ 0,0004	0

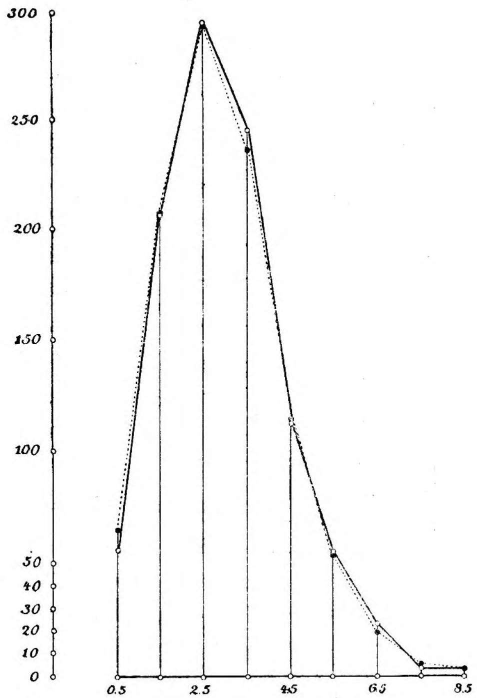

Fig. 3.

RAp

x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2}m\,W$
6,5	— 0,0406	— 0,0447	+ 0,0041	+ 6
7,5	— 0,0961	— 0,0180	— 0,0781	— 121
8,5	+ 0,1338	+ 0,0732	+ 0,0606	+ 94
9,5	+ 0,1051	+ 0,1036	+ 0,0015	+ 2
10,5	+ 0,0106	+ 0,0070	+ 0,0036	+ 6
11,5	— 0,0778	— 0,0690	— 0,0088	— 14
12,5	— 0,0603	— 0,0437	— 0,0166	— 26
13,5	+ 0,0304	+ 0,0004	+ 0,0300	+ 46
14,5	+ 0,0076	+ 0,0117	— 0,0041	— 6
15,5	+ 0,0017	+ 0,0037	— 0,0020	— 3

RCc

x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2}m\,W$
6,5	— 0,0098	— 0,0172	+ 0,0074	+ 2
7,5	— 0,0905	— 0,0254	— 0,0651	— 16
8,5	+ 0,1170	+ 0,0603	+ 0,0567	+ 14
9,5	— 0,0040	+ 0,0182	— 0,0222	— 6
10,5	— 0,0199	— 0,0286	+ 0,0087	+ 2
11,5	— 0,0075	— 0,0066	— 0,0009	0
12,5	+ 0,0001	— 0,0002	+ 0,0003	0

FFe

x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2}m\,W$
2,5	+ 0,0025	+ 0,0047	— 0,0022	— 1
3,5	+ 0,0051	+ 0,0276	— 0,0225	— 11
4,5	— 0,0096	— 0,0133	+ 0,0037	+ 2
5,5	— 0,0680	— 0,0522	— 0,0128	— 6
6,5	+ 0,0517	+ 0,0193	+ 0,0324	+ 16
7,5	+ 0,0176	+ 0,0167	+ 0,0009	0

FPa

x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2}m\,W$
3,5	+ 0,0114	+ 0,0115	— 0,0001	0
4,5	— 0,0056	+ 0,0023	— 0,0079	— 4
5,5	— 0,0873	— 0,0528	— 0,0345	— 17
6,5	+ 0,0671	+ 0,0353	+ 0,0318	+ 16
7,5	+ 0,0100	— 0,0030	+ 0,0130	+ 6
8.5	+ 0,0044	+ 0,0005	+ 0,0039	+ 2

Pr

x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2} m W$
1,5	— 0,0088	+ 0,0055	— 0,0143	— 1
2,5	+ 0,0546	+ 0,0406	+ 0,0140	+ 1
3,5	+ 0,0186	+ 0,0373	— 0,0187	— 2
4,5	— 0,0554	— 0,0575	+ 0,0021	0
5,5	— 0,0914	— 0,0838	— 0,0076	— 1
6,5	+ 0,0154	+ 0,0035	+ 0,0119	+ 1
7,5	+ 0,0590	+ 0,0401	+ 0,0189	+ 2

Schon aus der Uebersicht über die Coefficienten A können wir schließen, dass bei einigen dieser Beispiele es überflüssig gewesen ist, die Berechnung der Coefficienten bis zum 6ten auszudehnen. Die Widersprüche überschreiten zum Theil das letzte Glied der Reihenentwicklung. Freilich lässt sich von vornherein für einen bestimmten Collectivgegenstand nicht angeben, wie weit man zu gehen habe, denn wenn auch einzelne Coefficienten A gering ausfallen, so gilt das noch nicht für die folgenden Coefficienten. Dass die Rechnung in allen Fällen bis zu dem Gliede $A_6 \Phi(y)_6 : 32$ geführt wurde, geschah nur, um bei dieser ersten Anwendung des Verfahrens für die Beträge der höheren Glieder nicht auf Muthmaßungen angewiesen zu sein. Sollte das Verfahren weiterhin Anwendung finden, so wird man schrittweise vorgehen und wird abbrechen, sobald der regelmäßige Gang der Abweichungen vom Gauß'schen Gesetze verschwindet.

Nach den bisher angegebenen Beispielen bestätigt sich, wie der Theorie gemäß vorauszusehen war, die Behauptung, dass die Abweichungen der Vertheilungstafeln vom einfachen Exponentialgesetz hauptsächlich durch den Coefficienten A_3 bedingt werden. Dieser und nach ihm die Coefficienten mit ungerader Nummer geben in ihrem Betrage einen Maßstab dessen, was Fechner die asymmetrische Vertheilung der Collectivgegenstände nennt. Dass gerade durch die ungeraden Glieder der Reihenentwicklung die Asymmetrie entsteht, geht aus der Bildungsweise der A_3, A_5, u. s. w. und aus dem Umstande hervor, dass $\Phi(y)_3$, $\Phi(y)_5$, u. s. w. gerade Functionen ihrer Argumente sind. Die Coefficienten mit gerader Nummer dagegen bedingen diejenigen Abweichungen vom Gauß'schen Gesetz, die sich symmetrisch zu beiden Seiten des arithmetischen Mittels der Beobachtungen vertheilen.

Von den angeführten Beispielen zeigt Bt die stärkste Asymmetrie, bei RAp und FPa findet sich A_4 größer als A_3, was immerhin bemerkenswerth ist. Die schwächste Asymmetrie und überhaupt die geringsten Abweichungen vom Gauß'schen Gesetze bietet die Tafel Be. Es ist daher wohl erklärlich, dass Hagen, obwohl er nur 110 Zeilen der Vorrede von Eytelwein's Mechanik durchgezählt hat, das Vorkommen des Buchstaben »*e*« zur empirischen Begründung des Gauß-schen Fehlergesetzes mit Erfolg heranziehen konnte.

Das Schema, nach dem wir die Ergebnisse der Rechnung mitgetheilt haben, gestattet, die betrachteten Collectivgegenstände in Bezug auf die Widersprüche, — die sich ja auch unter Zugrundelegung des erweiterten Exponentialgesetzes der unausgeglichenen Zufälligkeiten wegen noch ergeben müssen —, untereinander zu vergleichen, und es ist dabei nicht verwunderlich, dass Collectivgegenstände mit einer geringen Anzahl von Argumenten wesentlich größere Beträge der Widersprüche aufweisen als solche mit einer größeren Anzahl von Argumenten. Eine anschauliche Vorstellung von der Größe der Widersprüche erhalten wir erst durch die Angabe der Verbesserungen der einzelnen Werthe z, welche an diesen angebracht werden müssten, um vollkommene Uebereinstimmung mit der Erfahrung zu erzielen. Diese Verbesserungen der Werthe z sind von dem Betrage $^1/_2\, m\, W$ und finden sich ebenfalls in der Uebersicht für jedes a, beziehentlich das darauf folgende x verzeichnet. Wenn wir hiernach in den Vertheilungstafeln die Werthe z corrigiren, d. h. um die angegebenen Werthe $^1/_2\, m\, W$ vermindern, so stellen die nach dem Verfahren von Bruns berechneten Vertheilungstafeln die Ergebnisse der Erfahrung mit absoluter Genauigkeit dar.

6. Die Tafel RAp zeigt an mehreren Stellen Widersprüche von ziemlich hohem Betrage. Betrachten wir aber hier die Coefficienten A, so bemerken wir, dass zum mindesten das Glied $A_7\, X_7$ sich in der Reihenentwicklung wohl noch bemerkbar machen würde, und die Vermuthung, dass die in diesem Falle etwas complicirtere Vertheilungscurve bei Berücksichtigung solcher höherer Glieder eine bessere Darstellung finden könne, liegt sehr nahe. Noch unangenehmer macht sich der Umstand, dass wir an der Hand der bisher vorliegenden Tafeln für die Ableitungen der Φ-Function die Reihenentwicklung nur bis zum sechsten Gliede verfolgen können, bei den Beispielen RCi

und $R\,Cl$ geltend, die deshalb auch in der vorangehenden Uebersicht ausgelassen sind und hier eine besondere Besprechung finden sollen.

Für die Tafel $R\,Ci$ erhielt ich, wenn ich nach dem bisher angewendeten Schema verfuhr:

m	c	h	s	A_3	A_4	A_5	A_6
1000	20,75	0,3303	2,141	+ 0,0743	+ 0,5771	— 0,1611	+ 0,2647

Bilden wir mit Hülfe dieser Werthe für sämmtliche Wechselpunkte die Widersprüche, so zeigt sich, dass die Zahl der berücksichtigten Glieder für die mittleren Werthe der Tafel nicht genügt, um den Gang der Widersprüche unregelmäßig zu machen. Man kann aber die Coefficienten A mit höherer Nummer in ihrem numerischen Betrage herabsetzen, wenn man darauf verzichtet, A_1 und A_2 verschwinden zu lassen. Zunächst habe ich von der Bedingung $A_1 = 0$ abgesehen und die Reihe der Coefficienten unter der Voraussetzung $c = 21$ berechnet. Wir nähern uns damit dem Verfahren Fechner's, indem wir nämlich statt der Abweichungen vom arithmetischen Mittel die Abweichungen vom dichtesten Werthe d in Rücksicht ziehen. Uebrigens gewinnen wir dabei den Vortheil, dass die Berechnung von h einfacher ausfällt. Indem ich so in gewissem Sinne den Werth c durch den dichtesten Werth d ersetzte, erhielt ich für die beiden Tafeln die folgenden Resultate:

	$R\,Ci$	$R\,Cl$
m	1000	3000
d	21	21
h	0,3281	0,1602
s	2,155	4,415
A_1	+ 0,0820	— 0,0690
A_2	— 0,0020	0,0000
A_3	+ 0,0631	— 0,1520
A_4	+ 0,5727	+ 0,1187
A_5	— 0,0568	— 0,0001
A_6	+ 0,2286	— 0,0424

Schließlich könnte man auch von der Bedingung

$$A_2 = 0$$

abgehen, womit allerdings die Bedeutung von h und s in ähnlicher Weise wie die in c zu modificiren wäre. Voraussichtlich würden aber auch dann noch 6 Glieder der Reihenentwicklung nicht ausreichen, um die Regelmäßigkeit im Gang der Widersprüche aufzuheben, denn die Aenderungen, welche die Coefficienten A durch Einführung von d erfahren haben, sind nicht sehr bedeutend. Ich habe deshalb die Rechnung mit den angegebenen Werthen von d, h, A_1, (A_2), $A_3, \ldots, A_6$ durchgeführt und dabei an den einzelnen Wechselpunkten erhalten:

R Ci

x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2} m W$
10,5	+ 0,0020	+ 0,0007	+ 0,0013	+ 1
11,5	+ 0,0040	+ 0,0031	+ 0,0009	0
12,5	+ 0,0039	+ 0,0116	— 0,0077	— 4
13,5	+ 0,0295	+ 0,0303	— 0,0008	0
14,5	+ 0,0374	+ 0,0531	— 0,0157	— 8
15,5	+ 0,0553	+ 0,0515	+ 0,0038	+ 2
16,5	+ 0,0592	+ 0,0012	+ 0,0480	+ 24
17,5	+ 0,0196	— 0,0587	+ 0,0783	+ 39
18,5	— 0,0761	— 0,0540	— 0,0221	— 11
19,5	— 0,2025	— 0,0020	— 0,2005	— 100
20,5	— 0,2606	+ 0,0120	— 0,2726	— 136
21,5	+ 0,3046	+ 0,0190	+ 0,2856	+ 144
22,5	+ 0,2985	+ 0,1102	+ 0,1883	+ 94
23,5	+ 0,1501	+ 0,2144	— 0,0643	— 32
24,5	+ 0,0464	+ 0,1899	— 0,1435	— 72
25,5	— 0,0032	+ 0,0618	— 0,0650	— 33
26,5	— 0,0133	— 0,0369	+ 0,0236	+ 12
27,5	— 0,0134	— 0,0555	+ 0,0421	+ 21
28,5	— 0,0135	— 0,0339	+ 0,0204	+ 10
29,5	— 0,0119	— 0,0132	+ 0,0013	+ 1
30,5	— 0,0120	— 0,0037	— 0,0087	— 4
31,5	— 0,0040	— 0,0009	— 0,0031	— 2
32,5	0,0000	— 0,0001	+ 0,0001	0

$R\,Cl$

	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2} m\,W$
8,5	— 0,0034	+ 0,0003	— 0,0037	— 6
9,5	0,0079	0,0014	0,0093	— 14
10,5	+ 0,0134	+ 0,0009	0,0143	— 21
11,5	0,0254	— 0,0043	0,0211	— 32
12,5	0,0342	0,0172	— 0,0170	— 26
13,5	0,0221	0,0400	+ 0,0179	+ 27
14,5	0,0210	0,0714	0,0504	+ 76
15,5	0,0429	0,1060	0,0631	+ 95
16,5	0,0714	0,1338	0,0584	+ 88
17,5	0,1287	0,1432	+ 0,0145	+ 22
18,5	0,1839	0,1264	— 0,0575	— 86
19,5	0,2301	0,0834	0,1467	— 220
20,5	— 0,1918	— 0,0235	— 0,1683	— 252
21,5	+ 0,1205	+ 0,0367	+ 0,0838	+ 126
22,5	0,1648	0,0794	0,0854	+ 128
23,5	0,1545	0,0930	0,0615	+ 92
24,5	0,0980	0,0760	+ 0,0220	+ 33
25,5	+ 0,0368	+ 0,0372	— 0,0004	— 1
26,5	— 0,0131	— 0,0090	0,0041	— 6
27,5	0,0550	0,0488	— 0,0062	— 9
28,5	0,0699	0,0732	+ 0,0033	+ 5
29,5	0,0811	0,0800	— 0,0011	— 2
30,5	0,0806	0,0725	0,0081	— 12
31,5	0,0673	0,0573	0,0100	— 15
32,5	0,0501	0,0400	0,0101	— 15
33,5	0,0273	0,0249	— 0,0024	— 4
34,5	0,0084	0,0139	+ 0,0055	+ 8
35,5	0,0013	0,0067	0,0054	+ 8
36,5	— 0,0008	0,0029	0,0021	+ 3
37,5	+ 0,0002	— 0,0008	+ 0,0010	+ 2

Als das Gemeinsame dieser beiden Beispiele hat zu gelten, dass die Abweichungen vom einfachen Gauß'schen Gesetze, welche sich symmetrisch zu dem dichtesten Werthe vertheilen, bedeutend sind gegenüber den Abweichungen, welche die Asymmetrie hervorbringen. Da die Gültigkeit der Reihenentwicklung theoretisch feststeht, so dürfen wir, wenn auch die bisherige Rechnung in diesen Beispielen nicht ausreichend ist, doch schließen, dass die Reihenentwicklung, genügend weit fortgesetzt, eine ebenso gute Darstellung der empirischen Vertheilungscurven geben würde als in den vorangehenden Beispielen.

7. Ehe wir zur Behandlung der Vertheilungstafeln von stetigen Collectivgegenständen übergehen, wollen wir auf die beiläufig schon erwähnte Bestimmung der Coefficienten A durch Ausgleichung zurückkommen.

Um eine Anschauung davon zu gewinnen, wie weit die Resultate der Ausgleichung von der directen Rechnung abweichen, wendete ich auf das Beispiel Ln das Mayer'sche Ausgleichungsverfahren an, ohne jedoch dasselbe bis zum Schlusse durchzuführen. In dem System der für sämmtliche Wechselpunkte gebildeten Gleichungen (28 b)

$$X_0 = A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_6 X_6$$

wurde jede Gleichuug von der folgenden abgezogen, nachdem am Anfang und am Ende die Gleichungen für $x = \mp \infty$ hinzugefügt worden waren. In dieser Weise entstand das System

$$T_0 = A_1 T_1 + A_2 T_2 + \dots + A_6 T_6 .$$

Hieraus bildete ich in der vorgeschriebenen Weise die Normalgleichungen. Indem ich also jede Gleichung mit $sg(T_1)$ multiplicirte und die Producte addirte, erhielt ich die erste Normalgleichung, multiplicirte ich jede Gleichung mit $sg\,(T_2)$ und addirte die Producte, so ergab sich die zweite Normalgleichung, u. s. w. Für die linken Seiten der sechs Normalgleichungen

$$\Sigma T_0 \text{ sg } (T_1)\,, \qquad \Sigma T_0 \text{ sg } (T_2)\,, \qquad \dots, \qquad \Sigma T_0 \text{ sg } (T_6)$$

folgten damit die Werthe,

$$+0{,}1130 \quad -0{,}0076 \quad -0{,}1950 \quad -0.0938 \quad +0{,}1682 \quad +0{,}0338 .$$

Setzte ich in den rechten Seiten der Normalgleichungen, die ja lineare Verbindungen der Größen $A_1, \dots, A_6$ sind, die bereits berechneten Werthe dieser Größen ein, so erhielten damit die rechten Seiten die Werthe

$$+0{,}1057 \quad +0{,}0200 \quad -0{,}1908 \quad -0{,}0226 \quad +0{,}1578 \quad -0{,}0080 .$$

Da die Unterschiede dieser beiden Zahlenreihen nicht sehr bedeutend sind, so würde die Berechnung der Coefficienten A aus den Normalgleichungen Werthe ergeben, die wohl als brauchbar gelten dürften. Theoretisch bietet zwar die Auflösung der 6 Normalgleichungen nach den Unbekannten A keine Schwierigkeit, in praktischer Hinsicht aber ist die frühere directe Berechnung der A aus den Durchschnittsgrößen $D(y), \ldots, D(y^6)$ in unserem Falle selbstverständlich vorzuziehen. Auch wenn man auf die in der Ausgleichungsrechnung übliche Weise die Auflösung der sechs Normalgleichungen abkürzt, so erfordert doch die Bildung der Normalgleichungen und das Auflösungsverfahren, verbunden mit der Correction, die wegen des Nichtverschwindens der Werthe A_1 und A_2 sich nöthig machen wird, schließlich ebensoviel Zeitaufwand, als die directe Berechnung der Coefficienten A, an die wir uns bisher gehalten haben.

Eine Ausgleichung wird vielmehr vortheilhaft nur dann angewendet werden können, wenn die Gleichungen (28b) für ein System der Größen y gebildet werden, das ein für allemal fest vorgeschrieben ist. Die Größen $X_1, X_2, \ldots$ sind dann constant, und es besteht die Auflösung der Normalgleichungen nur in der Bildung bestimmter linearer Verbindungen aus den Größen X_0 und gewissen festen Multiplicatoren.

Freilich ist hierbei Bedingung, dass die H-Größen für jeden beliebigen Wechselpunkt x mit hinreichender Sicherheit bestimmt sind. Obwohl diese Bedingung nur bei einer Minderzahl der stetigen Collectivgegenstände erfüllt sein dürfte — von den berücksichtigten Beispielen Fechner's käme nur die Tafel IV in Betracht —, so soll doch ein derartiges Ausgleichungsverfahren hier kurz auseinandergesetzt werden, damit für künftige Fälle ein solches sofort zur Hand sei.

Als ein geeignetes System empfiehlt Bruns dasjenige, in welchem die Größen y die Wurzelwerthe der R-Größen sind, weil dadurch die Maxima und Minima der Ableitungen der Φ-Function zur Geltung kommen. Es waren hiernach zunächst diese Wurzelwerthe y genauer zu bestimmen, als sich dieselben aus den Tafeln der Ableitungen der Φ-Function entnehmen ließen. Da wir uns in der Reihenentwicklung auf sechs Glieder beschränken, so kann die Ermittlung der Wurzeln y durch Auflösung algebraischer Gleichungen von höchstens drittem Grade geschehen, und wir erhalten so, geordnet nach ihrer Größe, folgende Werthe, wobei die danebengesetzten Zeichen $R_1, \ldots, R_6$ andeuten sollen, von welchen R-Größen die betreffenden y die Wurzelwerthe sind:

y		$\Phi(y)$
0,0000	$R_1 R_3 R_5$	0,0000
$\pm$ 0,4361	R_6	$\pm$ 0,4626
$\pm$ 0,5246	R_4	$\pm$ 0,5418
$\pm$ 0,7072	R_2	$\pm$ 0,6827
$\pm$ 0,9586	R_5	$\pm$ 0,8248
$\pm$ 1,2247	R_3	$\pm$ 0,9167
$\pm$ 1,3358	R_6	$\pm$ 0,9412
$\pm$ 1,6507	R_4	$\pm$ 0,9804
$\pm$ 2,0202	R_5	$\pm$ 0,9957
$\pm$ 2,3506	R_6	$\pm$ 0,9991

Entsprechend diesen 19 Argumenten ist nun ein System von 19 Gleichungen zu bilden. Die einzelnen Collectivgegenstände unterscheiden sich bis hierher nur darin, dass die linken Seiten dieser Gleichungen

$$X_0 \quad \text{oder} \quad 2H(x) - 1 - \Phi(y),$$

d. h. die mit Hülfe der Häufigkeitsfunction ausgedrückten Abweichungen vom einfachen Exponentialgesetz, verschiedene Werthe besitzen. Die Werthe $H(x)$ sind dabei als relative Häufigkeiten bis zu den Punkten x hin zu verstehen, die sich bestimmen aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} -\,2,3506 &= h(x - c) \\ -\,2,0202 &= h(x - c) \\ &\ldots\ldots \\ +\,2,0202 &= h(x - c) \\ +\,2,3506 &= h(x - c)\,. \end{aligned}$$

Wir wollen die rechten Seiten X_0 der 19 Gleichungen nunmehr in leicht verständlicher Weise durch Indices auszeichnen, so dass

$$X_0^{-9},\quad X_0^{-8},\quad \ldots,\quad X_0^{-2},\quad X_0^{-1},\quad X_0^{0},\quad X_0^{1},\quad X_0^{2},\quad \ldots,\quad X_0^{8},\quad X_0^{9}$$

die Reihe der Werthe von X_0 oder $2\,H(x) - 1 - \Phi(y)$ ist. Die nöthigen Werthe $\Phi(y)$ sind bereits bei der Tabelle der y angegeben worden.

Als erste Normalgleichung, welche das Maximum von $\Phi(y)_1$ berücksichtigt, nehmen wir dann die Gleichung, deren linke Seite wir soeben durch X_0^0 bezeichnet haben. Die zweite Normalgleichung wählen wir derart, dass das Maximum und das Minimum von $\Phi(y)_2$ zur Geltung kommt. Wir subtrahiren die Gleichung mit der linken Seite X_0^3 von der entsprechenden mit der linken Seite X_0^{-3}. Da der Werth $y = 0$, als Wurzelwerth von R_1, bereits berücksichtigt ist, so setzen wir als dritte Normalgleichung diejenige, deren linke Seite wir andeuten können durch $X_0^{-5} + X_0^5$. Die Art der Bildung der vierten, fünften und sechsten Normalgleichung wird schließlich auf die einfachste Weise durch die folgenden, zur Abkürzung dienenden Formeln erläutert:

$$
\begin{aligned}
(1) &= X_0^0 \\
(2) &= X_0^{-3} - X_0^3 \\
(3) &= X_0^{-5} + X_0^5 \\
(4) &= (X_0^{-7} - X_0^7) - (X_0^{-2} - X_0^2) \\
(5) &= (X_0^{-8} + X_0^8) - (X_0^{-4} + X_0^4) \\
(6) &= (X_0^{-9} - X_0^9) - (X_0^{-6} - X_0^6) + (X_0^{-1} - X_0^1)
\end{aligned}
$$

und die Coefficienten der A in den einzelnen Normalgleichungen sind dann aus dem folgenden Schema zu ersehen:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
(1)	+ 1,1284		− 0,5642		+ 0,8463	
(2)		+ 0,9678		− 0,9678		+ 1,4517
(3)	+ 0,5036		+ 0,5036		− 0,7554	
(4)		− 0,6549		+ 1,4003		− 2,8006
(5)	− 0,8623		− 0,2408		+ 1,2432	
(6)		+ 0,3287		− 1,1245		+ 3,4539

Dass die Auswahl der 19 Gleichungen und diese Zusammenstellung in Normalgleichungen rechnerisch vortheilhaft ist, geht schon daraus hervor, dass das System von sechs Normalgleichungen mit sechs Unbekannten in zwei Systeme mit je drei Unbekannten zerfällt. Es kommt darin auch zum Ausdruck, dass die Coefficienten A von gerader Nummer unabhängig sind von denen mit ungerader Nummer, nur dass es hier nicht die Durchschnitte aus den geraden oder ungeraden Potenzen von y sind, von denen die Coefficienten A bestimmt werden, sondern die Größen X_0^0, X_0^{-1}, X_0^{+1}, u. s. w.

Das Resultat der Auflösung der sechs Normalgleichungen ist in folgender Tafel enthalten:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
A_1	+ 0,5909		+ 0,6619			
A_3	+ 0,0337		+ 2,8367		+ 1,7007	
A_5	+ 0,4163		+ 1,0085		+ 1,1338	
A_2		+ 2,2937		+ 2,3249		+ 0,9212
A_4		+ 1,8236		+ 3,8955		+ 2,3922
A_6		+ 0,3755		+ 1,0470		+ 0,9807

Es sind also, um beispielsweise A_3 zu bestimmen, die Werthe (1), (3), (5) mit den auf der Zeile A_3 angegebenen Coefficienten + 0,0337, + 2,8367, + 1,7007 zu multipliciren und dann zu addiren.

Wie schon bemerkt, ist aber dieses einfache Verfahren zur Berechnung der Coefficienten A nur bei wenigen Collectivgegenständen anwendbar. Aus mehreren Gründen können die H-Größen nicht für jeden Wechselpunkt x mit hinreichender Sicherheit bestimmt werden. Wählt man die a-Intervalle so klein, dass die z trotz eines großen m nur kleinere Werthe besitzen, so stellt sich der Uebelstand ein, dass die Vertheilungstafel keinen annähernd regelmäßigen Gang zeigt. Eine Reduction der primären Tafeln wird sich immer nöthig machen, denn wenn es auch denkbar wäre, dass man durch übermäßige Steigerung der Zahl m schließlich einen regelmäßigen Verlauf der Zahlen z bei kleinem a-Intervall erreichen könnte, so steht dann jedenfalls das gewonnene Resultat in keinem Verhältniss zum Arbeitsaufwand.

Die Wahl der Reductionsstufe ist weniger mit Willkür verbunden als die der Reductionslage, denn für erstere kann man sich eben an die Vorschrift halten, dass eine Vertheilungstafel hergestellt werden soll, deren mittlere Werthe einen regelmäßigen Gang zeigen. Dabei bleibt es dem Zufall überlassen, auf welche Reductionslage wir schließlich kommen. Es ist sehr wohl möglich, dass eine Tafel von bestimmter Reductionsstufe in mehreren verschiedenen Reductionslagen den Anforderungen genügt, die wir im Interesse der Rechnung an den betreffenden Collectivgegenstand stellen. Welche Reductionslage dann der Rechnung zu unterwerfen sei, kann man nicht vorschreiben. Man wird aber nicht fehlgehen, wenn man die Abweichungen der verschiedenen Reductionslagen voneinander als gleichwerthig dem Betrage der unausgeglichenen Zufälligkeiten ansieht.

8. Vielleicht kann man die Schwierigkeiten, welche eine Interpolation bei den Vertheilungstafeln mit sich bringt, dadurch umgehen, dass man auf jede Art von Ausgleichung verzichtet und die stetigen Collectivgegenstände ganz nach dem früher mitgetheilten Schema für die unstetigen behandelt. Dabei sieht man freilich auch die Fehler, mit denen durch die Abrundung der Argumente des stetigen Collectivgegenstandes die Durchschnittswerthe $D(y)$, $D(y^2)$, ..., $D(y^6)$, ... behaftet werden, als unbedeutend an. Für die Durchschnitte aus den niederen Potenzen von y ist das völlig unbedenklich, für die aus höheren Potenzen können die Aenderungen unter Umständen merkliche, aber keineswegs die Größenstufe von unausgeglichenen Zufälligkeiten überschreitende Beträge erreichen.

Man wählt also außer einer geeigneten Reductionsstufe eine bestimmte Reductionslage für die Vertheilungstafel und sieht auch die Unterschiede, die daraus entspringen, dass man sich auf eine beliebige von mehreren gleich berechtigten Reductionslagen beschränkt, als irrelevant an. Die Anzahl der Argumente a ist dann in den meisten Fällen nicht allzu bedeutend, sodass man die den Collectivgegenstand charakterisirenden Bestimmungsstücke c, s und die Reihe der Coefficienten A_3, A_4, u. s. w, auf directem Wege ermitteln kann.

Im Grunde geschieht bei diesem Verfahren nichts anderes, als dass man aus der Zahl der Gleichungen, die nach dem Ansatz

$$2H(x) - 1 - \Phi(y) = A_1 \Phi(y)_1 + A_2 \Phi(y)_2 : 2 + \ldots$$

für jeden Werth des Argumentes a der primären, also nicht reducirten Vertheilungstafel zu bilden wären, eine beschränkte Anzahl nach Zweckmäßigkeitsrücksichten auswählt, aber diese Gleichungen nicht einem Ausgleichungsverfahren unterwirft, um die charakterisirenden Bestimmungsstücke zu erhalten, sondern dazu den beschriebenen directen Weg einschlägt.

Wiewohl die Häufigkeitsfunction bei den stetigen Collectivgegenständen auch für andere Werthe als die angegebenen Argumente a eine durchaus bestimmte Bedeutung hat, so benutzen wir zunächst nur die Werthe a der reducirten Tafel. Nachdem wir auf Grund der ausgewählten a und z eine Reihenentwicklung gewonnen haben, bleibt es unserem Belieben überlassen, ob wir auch für einen in der reducirten Vertheilungstafel nicht angegebenen Werth a die Größen $2\,H(x) - 1$ mit der Reihenentwicklung $\Phi(y) + A_1\,\Phi(y)_1 + \ldots$ vergleichen wollen, und wir können alsdann zur Ermittlung von $2H(x) - 1$, analog dem Verfahren Fechner's[1], bei der Interpolation zweite und höhere Differenzen berücksichtigen, wenn wir damit eine bessere Uebereinstimmung zu erzielen glauben.

Bei der Ausführung an den bereits aufgezählten Beispielen Fechner's habe ich davon abgesehen, denn es schien nicht zweifelhaft, dass eine solche Vergleichung Werthe für die Abweichungen ergeben würde, die mit den von unausgeglichenen Zufälligkeiten herrührenden auf eine Stufe zu setzen wären. Die Wahl der Reductionsstufen und Reductionslagen war dieselbe wie bei Fechner, um gegebenen Falles die Ergebnisse mit denen Fechner's vergleichen zu können. Die Tafel IV wurde in zwei Reductionsstufen zur Berechnung herangezogen. So gelangte ich zu folgenden Resultaten für die charakterisirenden Bestimmungsstücke:

	I	II	III
m	450	450	2047
c	408,24	522,34	71,75
h	0,0511	0,0447	0,1298
s	13,827	15,831	2,551
A_3	+ 0,0050	— 0,0110	+ 0,0129
A_4	— 0,0150	— 0,0040	+ 0,0213
A_5	— 0,0102	— 0,0119	— 0,0028
A_6	— 0,0002	+ 0,0019	+ 0,0133

	IV_1	IV_2	V_h	V_b
m	217	217	775	775
h	86,48	86,67	54,01	43,42
c	0,0558	0,0548	0,0226	0,0268
s	12,684	12,900	31,315	26,390
A_3	+ 0,1215	+ 0,1134	— 0,3298	— 0,3891
A_4	+ 0,0232	+ 0,0131	+ 0,1417	+ 0,2818
A_5	— 0,0042	— 0,0127	+ 0,0363	— 0,1266
A_6	+ 0,0028	+ 0,0059	— 0,0137	+ 0,1100

Die Tafel VI bleibe, wie früher die Tafeln *R Ci* und *R Cl*, einer besonderen Besprechung vorbehalten.

Die mit diesen Bestimmungsstücken ausgeführten Berechnungen für X_0 und $S_r = A_3 X_3 + A_4 X_4 + A_5 X_5 + A_6 X_6$, sowie für $W = X_0 - S_r$ ergaben für die bezeichneten Wechselpunkte:

I.

a	z	x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2} m W$
363	0	365,5	— 0,0020	— 0,0017	— 0,0003	0
368	1	370,5	— 0,0019	— 0,0024	+ 0,0005	0
373	2	375,5	— 0,0036	— 0,0014	— 0,0022	— 0,5
378	5	380,5	— 0,0093	+ 0,0015	— 0,0108	— 2,5
383	17	385,5	+ 0,0110	+ 0,0064	+ 0,0046	+ 1
388	24	390,5	+ 0,0182	+ 0,0106	+ 0,0076	+ 1,5
393	36	395,5	+ 0,0209	+ 0,0098	+ 0,0111	+ 2,5
398	41	400,5	— 0,0158	+ 0,0026	— 0,0184	— 4
403	59	405,5	— 0,0208	— 0,0074	— 0,0134	— 3
408	65	410,5	— 0,0187	— 0,0138	— 0,0049	— 1
413	65	415,5	— 0,0004	— 0,0129	+ 0,0125	+ 3
418	51	420,5	+ 0,0021	— 0,0062	+ 0,0083	+ 2
423	40	425,5	+ 0,0164	+ 0,0009	+ 0,0155	+ 3,5
428	17	430,5	— 0,0125	+ 0,0045	— 0,0170	— 4
433	19	435,5	+ 0,0131	+ 0,0048	+ 0,0083	+ 2
438	4	440,5	+ 0,0018	+ 0,0029	— 0,0011	0
443	2	445,5	— 0,0019	+ 0,0014	— 0,0033	— 1
448	2	450,5	+ 0,0023	+ 0,0004	+ 0,0019	+ 0,5
453	0	455,5	+ 0,0006	0,0000	+ 0,0006	0

II.

a	z	x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2} m W$
482	3	484,5	— 0,0035	— 0,0031	— 0,0004	0
487	6	489,5	+ 0,0020	— 0,0021	+ 0,0001	0
492	10	494,5	+ 0,0058	+ 0,0005	+ 0,0053	+ 1
497	13	499,5	— 0,0068	+ 0,0041	— 0,0109	— 2,5
502	30	504,5	+ 0,0159	+ 0,0070	+ 0,0089	+ 2
507	28	509,5	— 0,0171	+ 0,0069	— 0,0240	— 5,5
512	52	514,5	+ 0,0109	+ 0,0034	+ 0,0075	+ 1,5
517	50	519,5	— 0,0042	— 0,0016	— 0,0026	— 0,5
522	60	524,5	+ 0,0117	— 0,0050	+ 0,0167	+ 4
527	53	529,5	+ 0,0069	— 0,0048	+ 0,0117	+ 2,5
532	39	534,5	— 0,0286	— 0,0018	— 0,0268	— 6
537	43	539,5	— 0,0015	+ 0,0015	— 0,0030	— 0,5
542	30	544,5	+ 0,0150	+ 0,0032	+ 0,0118	+ 2,5
547	14	549,5	+ 0,0019	+ 0,0027	— 0,0008	0
552	12	554,5	+ 0,0111	+ 0,0009	+ 0,0102	+ 2,5
557	3	559,5	+ 0,0011	— 0,0006	+ 0,0017	+ 0,5
562	1	564,5	— 0,0056	— 0,0014	— 0,0042	— 1
567	2	569,5	— 0,0015	— 0,0015	0,0000	0
572	0	574,5	— 0,0034	— 0,0010	— 0,0024	— 0,5
577	1	579,5	+ 0,0003	— 0,0006	+ 0,0009	0

III.

a	z	x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2} m W$
60	1	60,5	+ 0,0010	+ 0,0001	+ 0,0009	+ 1
61	0	61,5	+ 0,0009	+ 0.0007	+ 0,0002	0
62	0	62,5	+ 0,0007	+ 0,0012	— 0,0005	— 0,5
63	0	63,5	— 0,0003	+ 0,0022	— 0,0025	— 2,5
64	2	64,5	— 0,0016	+ 0,0027	— 0,0043	— 4,5
65	15,5	65,5	+ 0,0037	+ 0,0019	+ 0,0018	+ 2
66	26	66,5	+ 0,0037	— 0,0004	+ 0,0041	+ 4
67	54	67,5	+ 0,0002	— 0,0021	+ 0,0023	+ 2,5
68	108	68,5	— 0,0013	— 0,0013	0,0000	0
69	172	69,5	— 0,0084	+ 0,0055	— 0,0139	— 14
70	253	70,5	— 0,0074	— 0,0019	— 0,0055	— 5,5
71	290	71,5	— 0,0218	— 0,0084	— 0,0134	— 14
72	330,5	72,5	— 0,0078	— 0,0122	+ 0,0044	+ 4,5
73	296	73,5	+ 0,0057	— 0,0072	+ 0,0129	+ 13
74	223,5	74,5	+ 0,0122	+ 0,0035	+ 0,0087	+ 9
75	142	75,5	+ 0,0115	+ 0,0103	+ 0,0008	+ 1
76	75	76,5	+ 0,0056	+ 0,0093	— 0,0037	— 4
77	38	77,5	+ 0,0043	+ 0,0040	+ 0,0003	+ 0,5
78	13	78,5	+ 0,0009	— 0,0003	+ 0,0012	+ 1
79	3,5	79,5	— 0,0015	— 0,0019	— 0,0004	— 0,5
80	2	80,5	— 0,0014	— 0,0016	+ 0,0002	0
81	1	81,5	— 0,0009	— 0,0009	0,0000	0
82	0,5	82,5	— 0,0005	— 0,0003	— 0,0002	0
83	0,5	83,5	0,0000	— 0,0001	+ 0,0001	0

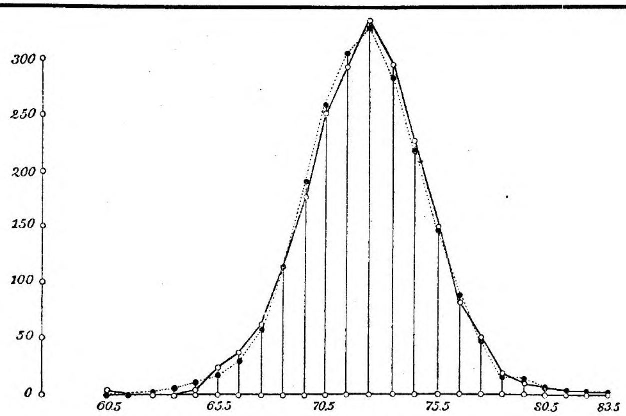

Fig. 4.

IV$_1$.

a	z	x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2} m W$
42	1	44	+ 0,0084	+ 0,0034	+ 0,0050	+ 0,5
46	0	48	0,0068	0,0070	— 0,0002	0
50	1	52	0,0117	0,0130	— 0,0013	0
54	2	56	0,0207	0,0208	— 0,0001	0
58	3	60	0,0277	0,0284	— 0,0007	0
62	5	64	0,0343	0,0312	+ 0,0031	+ 0,5
66	6	68	+ 0,0208	0,0241	— 0,0033	— 0,5
70	8	72	— 0,0140	+ 0,0046	— 0,0186	— 2
74	15	76	0,0308	— 0,0248	— 0,0060	— 0,5
78	20	80	0,0472	0,0543	+ 0,0071	+ 1
82	25	84	0,0524	0,0716	+ 0,0192	+ 2
86	25	88	0,0724	0,0682	— 0,0042	— 0,5
90	32	92	0,0186	0,0451	+ 0,0265	+ 3
94	19,5	96	— 0,0494	— 0,0128	— 0,0366	— 4
98	24,5	100	+ 0,0100	+ 0,0157	— 0,0057	— 0,5
102	15,5	104	0,0336	0,0317	+ 0,0019	0
106	10	108	0,0483	0,0339	+ 0,0144	+ 1,5
110	3	112	0,0304	0,0271	+ 0,0033	+ 0,5
114	1,5	116	0,0199	0,0176	+ 0,0023	0
118	0	120	+ 0,0082	+ 0,0094	— 0,0012	0

IV$_2$.

a	z	x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2} m W$
44	1	48	+ 0,0065	+ 0,0057	+ 0,0008	0
52	3	56	0,0195	0,0180	+ 0,0015	0
60	8	64	+ 0,0317	0,0309	+ 0,0008	0
68	14	72	— 0,0158	+ 0,0135	— 0,0023	0
76	35	80	0,0429	— 0,0439	+ 0,0010	0
84	50	88	0,0591	0,0735	+ 0,0146	+ 1,5
92	51,5	96	— 0,0328	— 0,0233	— 0,0095	— 1
100	40	104	+ 0,0455	+ 0,0307	+ 0,0148	+ 1,5
108	13	112	0,0358	0,0307	+ 0,0051	+ 0,5
116	1,5	120	+ 0,0088	+ 0,0108	— 0,0020	0

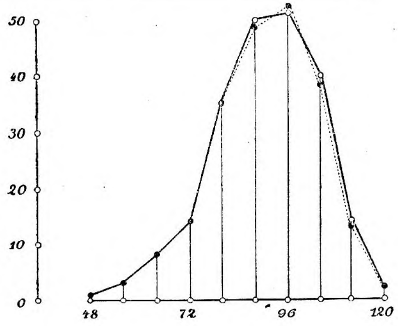

Fig. 5.

V_h.

a	z	x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2} m W$
15	30,5	20	— 0,1988	— 0,1064	— 0,0924	— 36
25	133	30	— 0,0214	— 0,0370	+ 0,0156	+ 6
35	161	40	+ 0,1827	+ 0,0732	+ 0,1095	+ 42,5
45	127,5	50	0,2684	0,1844	+ 0,0840	+ 32,5
55	75,5	60	0,2096	0,2429	— 0,0333	— 13
65	70	70	0,1515	0,2187	— 0,0672	— 26
75	47	80	0,0698	0,1267	— 0,0569	— 22
85	39,5	90	+ 0,0156	+ 0,0144	+ 0,0012	+ 0,5
95	20,5	100	— 0,0400	— 0,0704	+ 0,0304	+ 12
105	12,5	110	0,0760	0,1056	+ 0,0296	+ 11,5
115	11,5	120	0,0849	0,0986	+ 0,0137	+ 5,5
125	12,5	130	0,0725	0,0708	— 0,0017	— 0,5
135	12,5	140	0,0495	0,0415	— 0,0080	— 3
145	7,5	150	0,0340	0,0203	— 0,0137	— 5,5
155	11	160	— 0,0070	0,0084	+ 0,0014	+ 0,5
165	3	170	+ 0,0002	— 0,0030	+ 0,0032	+ 1

V_b.

a	z	x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2} m W$
5	5	10	— 0,1924	— 0,0646	— 0,1278	— 49,5
15	88	20	— 0,1348	+ 0,0109	— 0,1457	— 56,5
25	190,5	30	+ 0,1204	0,0801	+ 0,0403	+ 15,5
35	167,5	40	0,2670	0,1101	0,1569	+ 61
45	100,5	50	0,2263	0,1120	0,1143	+ 44,5
55	62,5	60	0,1143	0,1102	+ 0,0041	+ 1,5
65	58,5	70	+ 0,0494	0,0994	— 0,0500	— 19,5
75	31,5	80	— 0,0175	+ 0,0591	0,0766	— 29,5
85	18	90	0,0592	— 0,0050	— 0,0542	— 21
95	21	100	0,0506	0,0590	+ 0,0084	+ 3,5
105	8	110	0,0503	0,0777	0,0274	+ 10,5
115	10	120	0,0324	0,0644	0,0320	+ 12,5
125	2,5	130	0,0287	0,0396	+ 0,0109	+ 4
135	1,5	140	0,0256	0,0192	— 0,0064	— 2,5
145	5	150	0,0129	0,0075	0,0054	— 2
155	2,5	160	— 0,0065	0,0023	— 0,0042	— 1,5
165	2,5	170	0,0000	— 0,0005	+ 0,0005	0

Zur befriedigenden Darstellung der Tafeln V_h und V_b ist hiernach die Reihenentwicklung noch um einige Glieder weiterzuführen; für die anderen Tafeln aber erweist sich das Verfahren in dem angewendeten Umfange als völlig ausreichend.

9. Fechner hat die Tafeln I und III einer vergleichsweisen Berechnung nach dem einfachen und nach dem zweiseitigen Gauß-schen Gesetze unterworfen. Sein Verfahren, die empirischen Werthe der z mit den theoretischen in Vergleich zu setzen, weicht etwas von dem unsrigen ab. Wir erhalten als absolute Summe der Abweichungen der z-Werthe vom einfachen Exponentialgesetz bei Tafel I die Größe 39, Fechner dagegen 46; wir finden weiter unter Zugrundelegung der Reihenentwicklung als theoretisches Gesetz für die absolute Summe der noch vorhandenen Abweichungen den Werth 32. Bei Fechner ergibt sich als absolute Summe der Abweichungen der z-Werthe bei Annahme des zweiseitigen Gauß'schen Gesetzes die Größe 42. Das Verhältniss 39 : 32 ist hier günstiger als das Verhältniss 46 : 42. Es spricht sich darin aus, dass die absolute Summe der Abweichungen von dem theoretischen Gesetz bei der Reihenentwicklung sich stärker verringert als beim zweiseitigen Gauß'schen Gesetz. Bei der Tafel III gibt Fechner zwischen den Absolutsummen der Abweichungen der z-Werthe vom einfachen und vom zweiseitigen Gauß'schen Gesetz das Verhältniss 90 : 72 an. Wir finden ein ungünstigeres Verhältniss. Die absolute Summe der Abweichungen der z-Werthe vom einfachen Exponentialgesetz ist 105,5, diejenige der Abweichungen von dem zu einer Reihenentwicklung erweiterten Vertheilungsgesetz ist 84,5.

Diese Thatsachen würden wenig zu Gunsten des abweichend von Fechner eingeschlagenen Verfahrens zur Behandlung der Collectivgegenstände sprechen, wenn wir nicht erwägen wollten, wie starke Sprünge sich noch in den angewendeten Vertheilungstafeln zeigen. Eine weitere Reduction derselben ist nicht wohl angängig, und es drängt sich die Vermuthung auf, dass weder das Fechner'sche Verfahren, noch auch das von Bruns hier zu einer genauen Darstellung der Beobachtung führen kann, und zwar deshalb, weil das Beobachtungsmaterial selbst kein geeignetes ist. Wir werden bei stetigen Collectivgegenständen von der besprochenen Art zu dem Schlusse kommen, dass Ungleichartigkeit des Materiales die unausgeglichenen Zufälligkeiten zu relativ hohen Beträgen anwachsen lässt. Auch andre Rechnungsmethoden, denen sich Collectivgegenstände unterwerfen ließen, würden daran nichts ändern: die Thatsache, dass selbst eine so allgemeine Reihenentwicklung zur genauen Darstellung nicht genügt, ist darin begründet, dass das Material ungleichartig ist, nicht ausreicht, oder sonstwie unseren Forderungen nicht entspricht.

Nur eine weitgehende Reduction der Vertheilungstafeln vermag in solchen Fällen, wie etwa aus IV_1 und IV_2 hervorgeht, eine bessere Uebereinstimmung zwischen dem theoretischen und dem empirischen Vertheilungsgesetze herzustellen. Dabei aber werden die Erfahrungsgrundlagen, aus denen wir das theoretische Vertheilungsgesetz ableiten, immer mehr beschränkt, und immer weniger haben wir das Recht, das gewonnene Vertheilungsgesetz anzuwenden auch für andere Werthe des Argumentes a, als sie gerade in der Vertheilungstafel angegeben sind.

10. Unter den unstetigen Collectivgegenständen waren uns in den Tafeln RCi und RCl solche begegnet, die Fechner als Collectivgegenstände mit verhältnissmäßig starker Schwankung bezeichnet. Bei den stetigen Collectivgegenständen haben wir uns die Tafel VI für eine besondere Betrachtung zurückgestellt. Diese Tafel unterscheidet sich von allen bisher behandelten dadurch, dass sie völlig asymmetrische Vertheilung der Werthe z aufweist, zugleich aber zeigt sie, wie die Tafeln RCi und RCl, eine sehr starke Schwankung. Fechner bemerkt nun, dass das Gauß'sche Gesetz bei sehr starker Schwankung in seiner gewöhnlichen Anwendungsweise nicht mehr ausreicht, und führt deshalb die logarithmische Behandlung der Collectivgegenstände ein. So vortheilhaft nun auch nach Fechner's Beispielen diese Behandlungsweise sein kann, so führt sie doch, bei der Tafel VI wenigstens, zu einer sehr willkürlichen Annahme über die Bedeutung von log 0, indem statt der Regenhöhe 0,0 mm die Regenhöhe 0,05 mm gesetzt wird. Mit mehr Recht hätte man, um das Auftreten von log 0 zu vermeiden, jedes Argument a in der arithmetischen Vertheilungstafel um einen bestimmten Werth vermehren können und hätte versuchen müssen, die Schwierigkeiten in der Deutung der Resultate dann auf irgend eine Weise zu lösen.

Ich habe versucht, die Tafel VI rein arithmetisch zu behandeln, jedoch unter Zugrundelegung der Abweichungen nicht vom arithmetischen Mittelwerth c, sondern vom dichtesten Werthe $d = 0{,}5$. Ich nahm an, dass hier gleichsam die Hälfte einer Gauß'schen Exponentialcurve vorliege, die ihre größte Ordinate im Abscissenwerthe Null erreicht. Demgemäß sah ich die Vertheilungscurve als vollständig symmetrisch zur Ordinatenachse an, verzichtete aber darauf, ihr für negative Werthe der Abscissen a eine Bedeutung beizulegen. Unter solchen Voraussetzungen verschwinden natürlich die Coefficienten A_1, A_3, A_5, u. s. w. Die Berechnung von h geschieht ganz nach dem früheren Schema, da ja die völlige Symmetrie hergestellt ist durch Annahme von bedeutungslosen negativen Argumenten a mit denselben Werthen z, die zu den entsprechenden positiven Argumenten a gehören. Es ergibt sich dann

$$d = 0{,}5\,, \qquad h = 0{,}1068\,, \qquad s = 6{,}618$$

Die Berechnung der Coefficienten mit gerader Nummer liefert

$$A_2 = 0{,}0000\,, \qquad A_4 = +\,0{,}5043\,, \qquad A_6 = +\,0{,}4393\,.$$

Vorauszusehen war auch hier, dass 6 Glieder, oder in unserem Falle vielmehr 2 Glieder der Reihenentwicklung nicht ausreichen. Es findet sich sogar, dass in der Nähe des dichtesten Werthes die Berücksichtigung von $A_4\,\Phi(y)_4 : 8$ allein eine bessere Uebereinstimmung ergibt, als wenn man noch $A_6\,\Phi(y)_6 : 32$ hinzunimmt. Könnte man die Glieder, deren Betrag durch A_8 und A_{10} bestimmt wird, noch heranziehen, so würde jedenfalls dieser Nachtheil wieder aufgehoben werden. Aus dem eben erwähnten Grunde sind die Resultate der weiteren Rechnung nach dem bisherigen Schema unter Rücksichtnahme allein auf das Glied $A_4\,\Phi(y)_4 : 8$ angegeben:

VI.

a	z	x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2} m W$
0,5	133	1	+ 0,2298	+ 0,0453	+ 0,1845	+ 44
1,5	88	2	0,2840	0,1311	0,1529	+ 36,5
2,5	43,5	3	0,2601	0,2022	+ 0,0579	+ 14
3,5	28	4	0,2102	0,2516	— 0,0414	— 10
4,5	27	5	0,1664	0,2754	0,1090	— 26
5,5	28	6	0,1345	0,2733	0,1388	— 33
6,5	27,5	7	0,1122	0,2483	0,1361	— 32,5
7,5	14,5	8	0,0737	0,2059	0,1322	— 31,5
8,5	16	9	0,0491	0,1530	0,1039	— 25
9,5	11,5	10	0,0254	0,0968	0,0714	— 17
10,5	12	11	0,0121	+ 0,0438	— 0,0317	— 7,5
11,5	10	12	+ 0,0026	— 0,0015	+ 0,0041	+ 1
12,5	6,5	13	— 0,0071	0,0362	0,0291	+ 7
13,5	5,5	14	0,0131	0,0595	0,0464	+ 11
14,5	3	15	0,0197	0,0720	0,0523	+ 12,5
15,5	3	16	0,0227	0,0754	0,0527	+ 12,5
16,5	2	17	0,0250	0,0721	0,0471	+ 11
17,5	5	18	0,0191	0,0644	0,0453	+ 11
18,5	1	19	0,0200	0,0544	0,0344	+ 8
19,5	3	20	— 0,0157	— 0,0439	+ 0,0282	+ 6,5
21,5	3	22	— 0,0115	— 0,0252	+ 0,0137	+ 3,5
23,5	2	24	— 0,0080	— 0,0126	+ 0,0046	+ 1
28,5	1	29	— 0,0063	— 0,0013	— 0,0050	— 1
30,5	1	31	— 0,0042	— 0,0004	— 0,0038	— 1
32,5	1	33	— 0,0021	— 0,0001	— 0,0020	— 0,5
40,5	1	41	0,0000	0,0000	0,0000	0

Wollten wir hiernach die Werthe z der Vertheilungstafel verbessern, so würden wir bereits beim Argument $a = 13$ auf negative Werthe z stoßen. In diesem Sinne ist aber die obige Rechnung gar nicht aufzufassen. Es sollte vielmehr nur gezeigt werden, dass die Absolutsumme der Abweichungen vom theoretischen Gesetz abnimmt, wenn wir statt des einfachen Exponentialgesetzes die Reihenentwicklung benutzen, sei dieselbe auch nur unvollständig.

Vergleichen wir trotz der Unzulänglichkeit unsrer Rechnung die

Ergebnisse mit denen Fechner's, so erkennen wir, dass für die arithmetische Behandlungsweise die Reihenentwicklung nicht nur theoretisch, sondern auch praktisch einen Fortschritt bedeutet. Leugnen lässt sich freilich nicht, dass unter Umständen die logarithmische Behandlungsweise weniger Arbeitsaufwand erfordern kann, und es wird, auch wenn die Tafeln für die Ableitung der Function Φ erweitert würden, das Fechner'sche Verfahren in manchen Fällen vorzuziehen sein, vorausgesetzt natürlich, dass man Willkürlichkeiten von der besprochenen Art vermeidet.

11. Im Anschluss an die Tafel VI sei hier noch einigen Bemerkungen über einen wichtigen Typus von Vertheilungscurven Raum gegeben. Es sind dies die Curven für die Vertheilung der Lebensalter oder auch die Absterbetafeln einer bestimmten Generation. Dieselben haben bisher keine vollständige Behandlung erfahren.

Wie solche Tafeln eingerichtet sind, darf an dieser Stelle wohl als bekannt vorausgesetzt werden. Es sei nur kurz erwähnt, dass für unsre Zwecke die einzelnen Lebensalter, in Jahren oder längeren Zeiträumen ausgedrückt, als Argumentwerthe a des Collectivgegenstandes gelten, die Zahl von Personen ein und derselben Generation, welche in diesen Lebensaltern mit dem Tode abgehen, aber ist der zugehörige Werth z. Dass man gewöhnlich umgekehrt verfährt und demnach von den während eines bestimmten Zeitraumes Gestorbenen die erreichten Lebensalter als Argumente a und die Zahlen, welche angeben, wie oft diese Lebensalter erreicht worden sind, als die z-Werthe anzusehen hat, kommt auf dasselbe hinaus. Lexis hat nun[1]), um ein gewisses Normalalter definiren zu können, nach einer starken Reduction der Argumente a, — die Intervalle zwischen den a sind nämlich auf 5 Jahre angenommen, — die Vertheilungscurve der Werthe z erst vom Argumente $a = 22{,}5$ (20 bis 25) oder gar von $a = 42{,}5$ (40 bis 45) an berücksichtigt. Die Zahlen, welche Lexis angibt, sind bereits einer Ausgleichung unterworfen, trotzdem aber zeigen sie nur zu deutlich, dass das einfache Exponentialgesetz zur Darstellung der Beobachtung nicht genügt. Obgleich diese Zahlen kein reines Beobachtungsmaterial sind und, was noch schwerer wiegt,

1) Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft. Programm. Freiburg 1877.

der in ihnen vorliegende Collectivgegenstand als unvollständig gelten muss, so habe ich doch an den beiden Sterblichkeitstabellen, die Lexis von der französischen männlichen und weiblichen Bevölkerung mittheilt, einmal versucht, ob die Darstellung der Vertheilungscurve mittels Reihenentwicklung nicht bessere Resultate liefere. Diese Erwartung ist durchaus erfüllt worden. Die Vertheilungscurven auch für diese unvollständigen Collectivgegenstände, die ich aber vorderhand als vollständige behandelt habe, sind von ähnlichem Typus wie die bei einigen unstetigen Collectivgegenständen berechneten Curven. Es fand sich für diese Sterblichkeitstafeln:

	Männl. Bevölkerung	Weibl. Bevölkerung
m	264	269
c	67,23	68,02
h	0,0566	0,0562
A_3	+ 0,0604	+ 0,0618
A_4	— 0,0595	— 0,0523
A_5	— 0,0330	— 0,0325
A_6	+ 0,0141	+ 0,0098

Der Gang der noch übrig bleibenden Widersprüche ist, wie aus Folgendem zu ersehen, unregelmäßig, und die Beträge der Widersprüche sind ziemlich gering, so dass, nach diesem Beispiele wenigstens zu schließen, das Rechnungsverfahren von Bruns auf solche Sterblichkeitstafeln mit Vortheil angewendet werden könnte.

Männliche Bevölkerung.

a	z	x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2} m W$
42,5	15	45	+ 0,0386	+ 0,0182	+ 0,0204	+ 3
47,5	16	50	0,0672	0,0483	+ 0,0249	+ 3
52,5	19	55	+ 0,0515	0,0497	+ 0,0018	0
57,5	24	60	— 0,0018	+ 0,0191	— 0,0209	— 3
62,5	32	65	0,0550	— 0,0388	— 0,0162	— 2
67,5	38	70	0,0843	0,0804	— 0,0039	— 1
72,5	40	75	0,0719	0,0720	+ 0,0001	0
77,5	38	80	— 0,0114	— 0,0250	+ 0,0136	+ 2
82,5	26	85	+ 0,0337	+ 0,0194	+ 0,0143	+ 2
87,5	12	90	0,0380	0,0349	+ 0,0031	0
92,5	4	95	+ 0,0262	+ 0,0270	— 0,0008	0

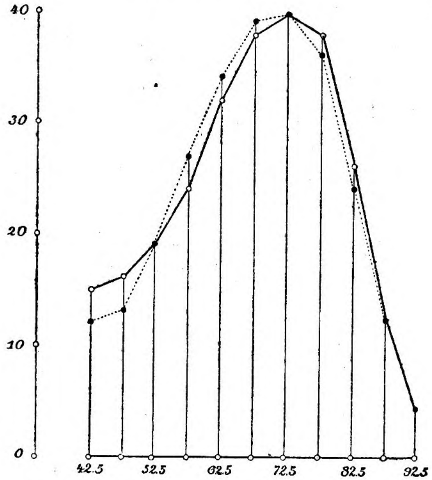

Fig. 6.

Weibliche Bevölkerung.

a	z	x	X_0	S_r	W	$\frac{1}{2} m W$
42,5	14	45	+ 0,0370	+ 0,0179	+ 0,0191	+ 3
47,5	15	50	0,0638	0,0387	+ 0,0251	+ 3
52,5	18	55	+ 0,0489	0,0445	+ 0,0044	+ 1
57,5	23	60	— 0,0032	+ 0,0172	— 0,0204	— 3
62,5	31	65	0,0593	— 0,0346	— 0,0247	— 3
67,5	39	70	0,0843	0,0736	— 0,0107	— 1
72,5	44	75	0,0532	0,0684	+ 0,0152	+ 2
77,5	38	80	— 0,0087	— 0,0270	+ 0,0183	+ 2
82,5	26	85	+ 0,0207	+ 0,0151	+ 0,0056	+ 1
87,5	14	90	0,0285	0,0325	— 0,0040	— 1
92,5	7	95	+ 0,0319	+ 0,0269	+ 0,0050	+ 1

Nicht hierin jedoch liegt die Uebereinstimmung dieser Art von Vertheilungscurven mit Curven vom Typus der Tafel VI. Man hat vielmehr die sämmtlichen Werthe a einer solchen Absterbetafel in Rücksicht zu ziehen, wenn man zwischen beiden einen Vergleich anstellen will. Die Sterblichkeit erreicht im ersten Lebensjahre ihren Maximalwerth, dann sinkt die Vertheilungscurve verhältnissmäßig rasch bis zu einem Minimum, welches etwa für die Lebensalter von 15 bis 20 Jahren eintritt. Bis hierher bietet die Curve ganz dasselbe Bild wie die Curve VI, nur dass die Schwankung noch stärker ist. Dann setzt sich gleichsam auf die Curve, deren Ordinaten bei weiterem regulären Verlauf immer mehr abnehmen sollten, ein zweiter Curvenzug von eben der Art, wie wir ihn oben kennen gelernt haben. Aus dieser secundären Erhebung oder Welle der Vertheilungscurve berechnete, wie erwähnt, Lexis das sogenannte Normalalter.

Gemäß dieser Zusammensetzung der vollständigen Vertheilungscurve aus zwei Theilen über je einen unvollständigen Collectivgegenstand ließe sich nun eine theoretische Darstellung der Sterblichkeitstafeln geben, und auf ein derartiges Verfahren ist auch bereits von Lexis hingewiesen worden. Dabei wären die Andeutungen, welche Bruns über die Modification des Rechnungsverfahrens bei unvollständigen Collectivgegenständen gibt[1]), zu benutzen. In welcher Weise dies aber zu geschehen hätte, darüber könnte erst die Ausführung an einem Beispiele Aufschluss geben. Ein solches Beispiel auszuführen, schien nach den bisher gemachten Erfahrungen über Collectivgegenstände mit verhältnissmäßig starker Schwankung nicht angängig, denn wir sind mit den bisher vorliegenden Tafeln über die Ableitungen der Φ-Function nicht im Stande, die Reihenentwicklung weit genug zu verfolgen, wenn wir auch die höheren Coefficienten A_8, A_{10}, u. s. w. auf Grund der Formeln (14), (15) und (28a) ohne Mühe berechnen können.

12. Die logarithmische Behandlungsweise wäre vielleicht fähig, wie man an der Rechnung Fechner's über die Tafel VI[2]) sieht, bessere Resultate als die arithmetische auch bei den Sterblichkeitstafeln zu liefern. Auf eine Methode, die unter Umständen den bisher erwähnten weit überlegen sein kann, deutet aber Bruns in der Bemerkung, dass sich zur Darstellung der Vertheilungscurven auch eine Reihe herleiten lasse, deren Glieder sämmtlich von der Form

$$l \,.\, \Phi(h(x - c))$$

sind. Die Constanten h und c sollen für jedes Glied einen anderen Werth besitzen, und ebenso soll sich der Betrag der gegen früher neu hinzutretenden Constanten l von Glied zu Glied ändern; nur ist die Summe sämmtlicher l gleich Eins zu setzen. Diese Darstellung deutet, sobald sämmtliche l positiv sind, darauf, dass eine Mischung mehrerer Collectivgegenstände vorliegt, die einzeln dem einfachen Exponentialgesetz gehorchen. Die Anzahl der Glieder dieser Reihenentwicklung wird sich je nach dem vorliegenden Falle richten. Be-

1) Wundt, Philosophische Studien, Bd. XIV., S. 367.
2) Collectivmaßlehre S. 346.

nutzen wir 2 Glieder, so haben wir 5 Constanten zur Verfügung: c_1, c_2, h_1, h_2 und l_1, denn l_2 muss ja der Bedingung $l_1 + l_2 = 1$ genügen. Setzen wir die Reihenentwicklung mit 3 Gliedern an, so stehen 8 Constante zur Verfügung und allgemein bei n Gliedern $3n - 1$ Constante. In dieser Hinsicht gewährt die Methode weit mehr Spielraum als diejenige, welche die Ableitungen der Φ-Function braucht. Freilich lassen sich für die Wahl der Constanten noch keine bestimmten Rechnungsvorschriften geben, und bis auf weiteres muss diese Wahl ein einfaches Probiren bleiben.

Natürlich kann auch der Fall eintreten, dass etwa die Constanten c für mehrere Glieder denselben Werth besitzen. Eine Vertheilungscurve, die völlige Symmetrie, aber relativ starke Schwankung zeigt, kann z. B. durch 2 Glieder in folgender Weise dargestellt werden:

$$2H(x) - 1 = l_1 \Phi(h_1(x-c)) + (1-l_1)\Phi(h_2(x-c)) .$$

Probeweise habe ich dies unter den Voraussetzungen

$$m = 2000, \quad c = 0{,}0, \quad l_1 = 0{,}5, \quad h_1 = 0{,}2, \quad h_2 = 1{,}0$$

ausgeführt. Die Argumente a sollten dabei die Werthe besitzen

$$\ldots, \quad -1{,}5, \quad -0{,}5, \quad +0{,}5, \quad +1{,}5, \quad \ldots.$$

Dann erhielt ich rückwärts leicht die Vertheilungstafel

a	z	a	z
— 11,5	0,5	+ 0,5	533
— 10,5	1,5	+ 1,5	179
— 9,5	3	+ 2,5	90
— 8,5	6,5	+ 3,5	69
— 7,5	12	+ 4,5	50,5
— 6,5	21	+ 5,5	34
— 5,5	34	+ 6,5	21
— 4,5	50,5	+ 7,5	12
— 3,5	69	+ 8,5	6,5
— 2,5	90	+ 9,5	3
— 1,5	179	+ 10,5	1,5
— 0,5	533	+ 11,5	0,5

Diese symmetrische Vertheilungstafel ist offenbar die eines Collectivgegenstandes von sehr starker Schwankung. Aus ihr nunmehr die oben gegebene Darstellung zu gewinnen, dürfte eine Aufgabe von ziemlicher Schwierigkeit sein. Aber die allgemeine Lösung des Problemes, aus der empirischen Vertheilungscurve die Constanten c_1, c_2, $\ldots$,

c_n, h_1, h_2, ..., h_n, l_1, l_2, ..., l_n, unter der Bedingung $\Sigma_n l_n = 1$ zu ermitteln, kann vielleicht durch willkürliche Construction von Vertheilungstafeln in der Weise, wie wir es versucht haben, gefördert werden.

13. Hiermit seien diese Ausführungen vorderhand abgeschlossen, und es mag gestattet sein, aus dem vorliegenden Materiale, wiewohl es umfassender sein könnte, einige Schlüsse in Bezug auf die Gesammtheit der Collectivgegenstände zu ziehen. Diese Schlüsse können nur formaler Natur sein, denn allein die formale Seite der Sache wird durch unsre Betrachtungen berührt. Wie das Zustandekommen der Vertheilungscurven bei Collectivgegenständen z. B. aus dem Gebiete der Botanik zu erklären sei, welche Bedeutung die vielleicht anzunehmende Mischung von mehreren Collectivgegenständen habe, das entzieht sich unserer Beurtheilung und bleibt den Wissenschaftsgebieten vorbehalten, aus denen die betreffenden Beispiele entnommen sind. Ludwig berichtet in seiner erwähnten Abhandlung schon von einer Anzahl von Versuchen, die Ergebnisse der Rechnung in solchem Sinne zu verwerthen.

In rein formaler Hinsicht könnte nun die Ausbeute der Rechnung gering erscheinen, denn dass die Collectivgegenstände im allgemeinen asymmetrische Vertheilungscurven aufweisen, das hat Fechner bereits gezeigt, und er hat auch durch Einführung des dichtesten Werthes d und durch Angabe des Unterschiedes $m' - m_{\prime}$, der Differenz der Summen der Werthe z oberhalb und unterhalb dieses dichtesten Werthes, ein bestimmtes Maß für die Asymmetrie geschaffen. Aber die Reihenentwicklung von Bruns gibt uns, sobald sie praktisch anwendbar ist, — und das ist zumeist der Fall — in den numerischen Werthen der Coefficienten A_3 und A_5, A_7, u. s. w. ein viel genaueres Maß derjenigen Abweichungen vom Gauß'schen Gesetz, welche sich unsymmetrisch zum arithmetischen Mittelwerthe vertheilen, und überdies erhalten wir in den Coefficienten A_4, A_6, u. s. w. einen sicheren Maßstab zur Beurtheilung der symmetrisch zu dem Mittelwerthe vertheilten Abweichungen.

Das Ergebniss der durchgeführten Rechnungen steht also doch wohl hinter den Ausführungen Fechner's nicht zurück. Vielleicht ließe sich auf Grund unserer Erörterungen zu einer Eintheilung der Collectivgegenstände nach rein formalen Gesichtspunkten der folgende Vorschlag machen. Der materiale Unterschied zwischen stetigen und unstetigen Collectivgegenständen kann bei Seite gelassen oder auch als formaler aufgefasst werden.

Zunächst scheidet man diejenigen Collectivgegenstände aus, die wegen des complicirten Verlaufes ihrer Vertheilungscurven auch dem zu einer Reihenentwicklung erweiterten Exponentialgesetze nur durch Zerlegung der Curve in Theile sich anpassen lassen. — Die Collectivgegenstände, bei denen die Reihenentwicklung eine die Beobachtung erschöpfende Darstellung zu geben vermag, bilden die andere, umfangreichere Classe.

Erstes Kennzeichen eines Collectivgegenstandes ist der arithmetische Mittelwerth c der Beobachtungen und die Streuung s. Je nach dem größeren oder geringeren Betrage von s kann man dann von Collectivgegenständen mit starker und schwacher Streuung sprechen. Als »positiv« beziehentlich »negativ asymmetrisch abweichend in erster Ordnung« wollen wir nun solche Vertheilungscurven bezeichnen, bei denen in der Reihendarstellung der Coefficient A_3 das positive beziehentlich negative Zeichen besitzt. »Positiv« oder »negativ asymmetrisch abweichend in der zweiten Ordnung« würden diejenigen Curven sein, deren Coefficient A_5 mit den entsprechenden Vorzeichen behaftet ist. In dieser Weise würde man die Benennung fortsetzen können. Zu bemerken ist allerdings, dass wegen der Vorzeichen der höheren Ableitungen der Φ-Function die Bezeichnungen »positiv« oder »negativ asymmetrisch abweichend« das Verhalten der Curve nicht direct kennzeichnen. Man muss vielmehr, um den Verlauf der Vertheilungscurve durch diese Ausdrücke sich anschaulich zu machen, noch auf den Gang der abgeleiteten Φ-Functionen zurückgreifen. Dabei stellt sich denn heraus, dass die Bezeichnungsweise »positiv« oder »negativ asymmetrisch abweichend« in den geraden Ordnungen für die Vertheilungscurve eigentlich den umgekehrten Sinn hat. Auch ist hinzuzufügen, dass die Bezeichnung »positiv« oder »negativ« mit der eben hervorgehobenen Einschränkung nur für die nächste Umgebung des arithmetischen Mittelwerthes mit dem wirklichen Verhalten der Vertheilungscurve übereinstimmt, und diese Umgebung muss umso enger begrenzt werden, je höhere »Ordnungen« von asymmetrischen Abweichungen wir für den Collectivgegenstand als charakteristisch heranziehen.

In entsprechender Weise wollen wir Collectivgegenstände, deren

Abweichungen vom einfachen Gauß'schen Gesetze sich symmetrisch zum arithmetischen Mittelwerthe vertheilen, kurz bezeichnen durch »positiv« oder »negativ symmetrisch abweichend«, und wollen auch hier Abweichungen »der ersten, zweiten, u. s. w. Ordnung« unterscheiden. Nennen wir demgemäß »positiv symmetrisch abweichend in der ersten Ordnung« eine Curve, für welche in der Reihendarstellung A_4 ein positives Vorzeichen besitzt, und führen diese Benennung entsprechend weiter, so sind hier ähnliche Vorbehalte bezüglich der Uebereinstimmung der Bezeichnungen mit dem Gange der Vertheilungscurven zu machen wie bei den asymmetrischen Abweichungen.

Wegen der geringen Anschaulichkeit, die der vorgeschlagenen Classification der Collectivgegenstände zukommt, ist vielleicht eine andere vorzuziehen. Doch müssen wir berücksichtigen, dass wir uns auf die formale Seite der Sache beschränken wollen. Die numerischen Beträge der Abweichungen $2\,H(x) - 1 - \Phi(y)$ sind zwar durch die Werthe der Coefficienten A_3, A_4, ... vollständig exact und eindeutig festgelegt, aber selbst wenn man sich mit dem Verlauf der Ableitungen der Function Φ genau vertraut gemacht hätte, dürfte es sehr schwierig sein, von vornherein zu überblicken, wie sich die einzelnen Beiträge der verschiedenen Glieder der Reihenentwicklung zu den Abweichungen zusammensetzen. Die Benennungen, die übrigens so gewählt sind, als ob für die Vertheilungscurven sämmtlicher Collectivgegenstände das einfache Exponentialgesetz gewissermaßen als Ideal zu gelten habe, sind also nicht in wörtlichem Sinne aufzufassen. Die Bezeichnungen, welche Ludwig einführt, wie z. B. Parabinomialcurven, geben zwar sofort eine Vorstellung über den Gang einer Vertheilungscurve, wenn man einmal einen bestimmten Typus mit einem solchen Namen belegt, aber wir haben im Verlaufe unsrer Rechnung sehr verschiedenartige Formen von Vertheilungscurven kennen gelernt und schließen mit Recht, dass diese die möglichen Fälle nicht im geringsten erschöpfen. Es schien daher gerathen, wenn man Benennungen nicht entbehren will, solche zu wählen, die sich auf neue Fälle ausdehnen lassen, ohne dass man in Verlegenheit um Namen kommt.

Es erübrigt nur noch, an einigen Beispielen zu zeigen, wie sich nach den obigen Grundsätzen die Nomenclatur, wenn man so sagen darf, eines Collectivgegenstandes gestaltet.

Die europäischen Männerschädel stellen einen Collectivgegenstand vor, der in Bezug auf das Merkmal des Verticalumfanges von ziemlich starker Streuung ist, positiv asymmetrisch abweichend in erster, negativ in zweiter Ordnung, negativ symmetrisch abweichend in erster und zweiter Ordnung. Die Abweichungen in höherer als der zweiten Ordnung können sicher vernachlässigt werden. — Die Studentenrecrutenmaße dagegen zeigen, als Collectivgegenstand aufgefasst, keine sehr starke Streuung, die Abweichungen sind positiv asymmetrisch in erster, negativ asymmetrisch in zweiter Ordnung, positiv symmetrisch in erster und zweiter Ordnung.

Die Tafel »*Bt*« stellt einen Collectivgegenstand dar von schwacher Streuung, stark asymmetrisch abweichend und zwar negativ in erster und zweiter Ordnung, positiv symmetrisch abweichend in erster und zweiter Ordnung. Die Abweichungen in höheren Ordnungen sind irrelevant. Davon abweichend bietet uns die Tafel »*R Ci*« das Beispiel eines Collectivgegenstandes von etwas stärkerer Streuung, positiv asymmetrisch abweichend in erster, negativ in zweiter Ordnung, positiv symmetrisch abweichend in erster und zweiter Ordnung. Die symmetrischen Abweichungen sind außerordentlich bedeutend, sodass zur erschöpfenden Darstellung die Abweichungen in den höheren Ordnungen heranzuziehen sind.

In solcher Weise etwa würden sich Collectivgegenstände mit Worten charakterisiren lassen, ohne dass man numerische Werthe der Bestimmungsstücke angibt. Zu modificiren wäre natürlich die vorgeschlagene Art der Eintheilung, sobald wir die Coefficienten A_1 und A_2 von Null verschiedene Werthe annehmen lassen. Da dies aber nicht die Regel ist, so sehen wir davon ab, und ebenso verzichten wir darauf, alle die Classen aufzustellen, die sich durch die Gruppirungen der positiven, beziehentlich negativen A_3, A_4, A_5, A_6 bilden ließen. Schon der obige Eintheilungsversuch bietet genug des Schematismus, und übrigens würde, sobald noch höhere Coefficienten A zu berücksichtigen sind, die getroffene Eintheilung wieder hinfällig werden.

Mit dem Ausdrucke meines herzlichen Dankes für die freundliche Anregung und Unterstützung, die mir Herr Professor Bruns bei dieser Arbeit zu Theil werden ließ, sei dieselbe beschlossen.