

# Das Inertialsystem vor dem Forum der Naturforschung.

Kritisches und Antikritisches.

Von

**Ludwig Lange.**

(Tübingen.)

---

Der festliche Tag, der zur Herausgabe dieser Schrift Veranlassung gegeben, bietet mir willkommene Gelegenheit, nach jahrelangem Schweigen in philosophischen Dingen auf's Neue zur Feder zu greifen. Wohl wissend, dass zur Ehrung unseres Altmeisters das Beste gerade gut genug ist, hätte ich gern an die Begründung einer neuen Idee meine Kräfte gesetzt. Da jedoch neue, dauerhafte und keimfähige Ideenfrüchte jeweilen nicht mühelos auf der Straße aufzulesen sind, so bitte ich den Leser, mit der im Nachfolgenden angestrebten Revision einer älteren Lieblingsidee vorlieb nehmen zu wollen. Vielleicht erscheint die Wiederaufnahme des fallen gelassenen Fadens zur Genüge gerechtfertigt, wenn ich erwähne, dass er in den seit seiner Anspinnung verflossenen sechzehn oder achtzehn Jahren von Seiten der Kritiker zu wiederholten Malen unter die Lupe genommen und auf seine Festigkeit untersucht worden ist. Mit den Urtheilen, die über das Erzeugniss gefällt worden sind, kann ich, alles in allem, recht wohl zufrieden sein. Nicht nur die Philosophie, sondern auch die Himmelskunde, Erdkunde, Mathematik und Physik haben, wenigstens in einigen ihrer Vertreter, meiner Theorie das Zeugniss ausgestellt, dass sie in Richtung auf die sicherere Grundlegung der Mechanik einen wesentlichen Fortschritt bedeute; und wenn ein wohlwollender Referent jenseits der Alpen es fertig gebracht hat, mich mit dem »celebrimo autore dell' istoria del materialismo« zu verwechseln, so kann mir dies in mehr als einer Hinsicht nur schmeichelhaft sein. Doch

Scherz bei Seite: ich bin überaus erstaunt gewesen zu sehen, in welchem Maße meine Ideen, nachdem einer anfänglichen recht günstigen Aufnahme eine beträchtliche Pause geringerer Beachtung gefolgt war, gerade neuerdings wieder der Prüfung unterworfen zu werden scheinen. Diese Wahrnehmung allein ist es auch gewesen, was mich ermutigt hat, die verlassene Arbeit wieder aufzunehmen.

Dass übrigens die Begriffsbildung des Inertialsystems noch keinen Eingang in den eisernen Bestand der physikalischen und astronomischen Compendien gefunden hat, wird denjenigen nicht im geringsten Wunder nehmen, der da weiß, dass die Maurer am Bau der Wissenschaft zwar kein Bedenken tragen, mit oft überraschender Schnelligkeit kleine, constructiv unwichtige Verzierungen, die ihnen zugereicht werden, in das wohlgefügte Ganze einzugliedern, dass aber eine wohlbegründete Vorsicht ihnen verbietet, Grundpfeiler, selbst solche, deren Morschheit allgemein anerkannt ist, vorzeitig durch neue Stützen zu ersetzen, so lange diese nicht eine jahrzehntelange Prüfung vor aller Augen erfolgreich bestanden haben.

Inwieweit sich die von mir befürworteten neuen Grundpfeiler der Bewegungslehre<sup>1)</sup> im Widerstreit der Kritiken als hinreichend gefestigt erwiesen haben, um an Stelle der alten Newton'schen zu treten, dies ist die Frage, die im Folgenden, wenn auch aus dem Standpunkte einer oratio pro domo, so doch möglichst sine ira et studio beantwortet werden soll. Dass die Newton'schen Grundpfeiler der Mechanik, soweit sie das Trägheitsgesetz und den von Newton zuerst in aller Schärfe aufgestellten Begriffsgegensatz der absoluten und relativen Bewegung angehen, in dieser Form nicht haltbar sind, wird gegenwärtig nahezu einstimmig von allen Gelehrten anerkannt, welche sich überhaupt die Mühe genommen haben, die Grundfragen der Mechanik einer selbständigen Kritik zu unterziehen. Zu meiner Zeit waren außer C. Neumann, E. Mach, H. Streintz, J. Thomson<sup>2)</sup> und mir selbst kaum irgendwelche Zeugen für jene Thatsache zu nennen, und es ist mir und Anderen wiederholt zugestoßen, dass man uns über die Berechtigung der ganzen Problemstellung recht wenig schmeichelhafte mündliche Urtheile zukommen ließ. Heute ist die Reihe der Zeugen nachgerade um eine ganz stattliche Anzahl von Namen gewachsen: ich nenne nur W. Wundt (1886), H. Seeliger (1886, Astronomie), A. König (1886, Physik), S. Günther (1890, mathe-

mathische Geographie), J. B. Stallo (1890), E. Budde (1890, Mathematik), G. Frege (1891, Mathematik), L. Weber (1891, Physik), J. G. Mac Gregor (1893, Physik), P. Johannesson (1896, Pädagogik), B. u. J. Friedländer (1896), A. Höfler (1900, Philosophie), H. Kleinpeter (1900) und A. Voss (1901, Mathematik), ohne damit die Liste erschöpfen zu wollen<sup>3</sup>). Freilich, so gründlich, wie Mach und ich, möchten nur wenige der genannten Forscher mit dem Absoluten aufgeräumt wissen.

Die Stellungnahme gegen die alte dogmatische Fundirung der Dynamik ist immerhin eine so allgemeine, dass die Fragestellung als solche einer Begründung nicht mehr zu bedürfen scheint. Zu ihrer effectvollen Beleuchtung wüsste ich keine besseren Anführungen zu machen, als die Bemerkung von H. Hertz<sup>4</sup>), »dass es« erfahrungsgemäß »sehr schwer ist, gerade die Einleitung in die Mechanik denkenden Zuhörern vorzutragen, ohne einige Verlegenheit, ohne das Gefühl, sich hier und da entschuldigen zu müssen, ohne den Wunsch, recht schnell über die Anfänge hinweg zu gelangen«. Fast noch drastischer wirkt die Vorbemerkung des Pädagogen P. Johannesson, dass seine Arbeit »nicht aus bloßer Neugier, sondern aus den Verlegenheiten entstanden« sei, »in welche das Lehren der mechanischen Grundbegriffe« ihn »versetzt hat«. »Zu Anfang lehrte ich überzeugt, was ich gelernt hatte; dann kam ich zurück von meiner Selbstgewissheit, irre gemacht durch eigene Zweifel, nicht selten beschämt durch Schülerfragen, auf welche mir die Antwort fehlte. Als Trost empfand ich, dass Andere gleich mir zu klagen hatten, dass gar erlauchte Geister eine Nachprüfung der mechanischen Voraussetzungen für nöthig hielten«<sup>5</sup>).

Wenn es sich so verhält, so wird wohl Niemand bestreiten, dass ein kurzer Hinweis auf die sachlichen Ergebnisse der neueren Forschung in jedes Lehrbuch der Physik oder Mechanik gehört. Manche tiefer veranlagte Schülernatur, und solcher gibt es nach dem überaus werthvollen Zeugniß Johannesson's genug, wird vor vorzeitiger Verzweiflung einerseits und vor thörichter Ueberschätzung der eigenen Kritik anderseits bewahrt bleiben, wenn sie auch nur andeutungsweise erfährt, eine wie rege Arbeit die neueren Kritiker den grundlegenden Fragen zugewendet haben, und wie glänzend der empirische Kern der Newton'schen Grundlegung, ungeachtet der

fadenscheinigen und überflüssigen dogmatischen Hülle, die ihn annoch verschleiert, in aller Kritik bestanden hat.

Vielleicht wird es den einen oder anderen Leser überraschen, dass ich den Namen P. Volkmann in der obigen Liste nicht aufgeführt habe. Jedenfalls habe ich dieses Verhalten zu begründen, und thue das um so lieber, als die dadurch bedingte Auseinandersetzung für das Nachfolgende von grundlegender Bedeutung sein wird. In seinen einführenden Vorlesungen über theoretische Physik und analytische Mechanik kommt nämlich Volkmann sehr ausführlich auf die grundlegenden Fragen zu sprechen; hierbei redet er jedoch den alten Newton'schen Formulierungen auf's Nachdrücklichste das Wort und erklärt es u. a., unter Berufung auf L. Boltzmann, »für ein naives, d. h. des wissenschaftlichen Betriebes unkundiges Verlangen, Alles definiren zu wollen, Nichts undefinirt zu lassen«<sup>6)</sup>. Er betont in diesem Zusammenhang, und auch anderwärts, mit einem unbestreitbaren Schein des Rechtes den »wiederholten Kreislauf der Erkenntniss« und die »gegenseitige Stützung und rückwirkende Versicherung der einzelnen Theile des Systems«<sup>7)</sup>.

Dass man gewisse (undefinirt bleibende) Elementarbegriffe voraussetzen muss, um überhaupt im Stande zu sein, Begriffe höheren Ranges zu definiren, ist zuzugeben und wird schwerlich von irgend Jemandem bestritten werden. Das Streben der Wissenschaft muss gleichwohl allzeit auf fortschreitende fundamentale Abrundung und Vertiefung des Begriffsgebäudes gerichtet sein; und der Forscher auf diesem ebenso schwierigen als interessanten Gebiete darf sich auf keinen Fall eher beruhigen, ehe nicht die thatsächlich letzten Begriffsfundamente in möglichst klares Licht gesetzt sind. Welches nun diese letzten Fundamente seien, darüber können freilich die Ansichten manchmal auseinandergehen; doch wird mir jeder moderne Forscher beipflichten, dass wissenschaftliche Begriffe, welche als Elementar- oder Fundamentalbegriffe angesehen werden wollen, auf jeden Fall die Bedingung möglicher Anschaulichkeit, Klarheit und Einfachheit erfüllen müssen. Die Newton'schen Fundamentalbegriffe des »absoluten Raumes« und der »absoluten Zeit« erfüllen aber diese Bedingungen nicht; und das Recht, sie durch aufklärende Definitionen von dem ihnen anhaftenden metaphysischen Dunkel zu befreien, wird weder Volkmann noch Boltzmann den verschiedenen Gelehrten,

die das dynamische Bezugssystem und die dynamische Zeitscala zum Gegenstand ihrer Nachforschung gemacht haben, abstreiten wollen. Beide Forscher werden ferner schwerlich in Abrede stellen, dass wohl Niemand auf Definitionen einen größeren grundsätzlichen Werth gelegt hat, als der »des wissenschaftlichen Betriebes« sehr wohl kundige Altmeister Newton, der bekanntlich seine beiden Hauptwerke, die »Principien« und die »Optik« mit je acht Definitionen eröffnet. — Das Epitheton »naiv«, durch welches Volkmann das Streben nach möglichst weitgehender definitorischer Sicherung des Begriffsgebäudes herabzusetzen sucht, ist übrigens in gewissem Sinne ein hoher Ehrentitel. Wenigstens befinde ich mich in erfreulicher Uebereinstimmung mit Mach, wenn ich betone, dass eine gewisse, geradezu klassisch zu nennende, Naivetät wohl allen wahrhaft fördernden Geistern in allen Epochen der Wissenschaft gemeinsam gewesen ist. Dass »der wissenschaftliche Betrieb«, auf welchen sich Volkmann beruft, zu verschiedenen Zeiten und in verschiedenen Schulen ein überaus verschiedener ist, bezw. gewesen ist, mag nur kurz erwähnt werden.

In der Geschichtsschreibung der Wissenschaft und vielleicht auch in einer Vorlesung für Anfänger mag der Hinweis auf die »rückwirkende Versicherung u. s. w.« allenfalls am Platze sein; im systematischen Aufbau der Wissenschaft angewandt, würde er lediglich zum Vorwand dienen, um wohlbegründeten Zweifeln mit eleganter, um nicht zu sagen frivoler Leichtfertigkeit aus dem Wege zu gehen. Um dies zu vollster Klarheit zu bringen, bedarf es nur noch der nachfolgenden Auseinandersetzung. Das physikalische Begriffssystem ist nach Volkmann »nicht etwa aufzufassen als ein System, welches nach Art eines Gebäudes von unten aufgeführt wird, sondern als ein durch und durch gegenseitiges Bezugssystem, welches nach Art eines Gewölbes oder eines Brückenbogens aufgeführt wird und fordert, dass ebenso die mannigfaltigsten Bezugnahmen auf künftige Resultate bis zu einem gewissen Grade von vornherein vorweggenommen werden müssen, wie umgekehrt bei späteren Ausführungen die mannigfaltigsten Zurückverweisungen auf frühere Verfügungen und Festsetzungen statthaben müssen«<sup>8)</sup>.

Bei solchen Gedankengängen darf sich zeitenweise der Anfänger, niemals aber der Forscher beruhigen. Denn, um im Bilde Volkmann's zu bleiben, so ist doch die Solidität eines Gewölbes oder Brücken-

bogens keineswegs eine innerliche, sie hängt vielmehr in entscheidender Weise von der Fundirung der Pfeiler ab. Eine von allem Anfang an sorgfältige Nachprüfung dieser selbst und des Bodens, auf welchem sie stehen, bleibt somit keinem erspart, der ernsthaft nach Erkenntniss der Wahrheit strebt. Darum hat Hertz, trotz Allem, was Volkmann im Vorwort gegen ihn anführt<sup>9)</sup>, ganz recht, wenn er der von Newton inauguirten Darstellung die Schuld an der Schwierigkeit beimisst, welche einem klaren Aufbau der Méchanik innewohnt; Hertz hat nur leider den Hauptmangel der Newtonschen Darstellung, die metaphysischen Dogmen des absoluten Raumes und der absoluten Zeit, unerörtert gelassen und daher das einzige sicher wirkende Mittel, um die von ihm bedauerten Schwierigkeiten aus dem Wege zu schaffen, anzuwenden versäumt<sup>10)</sup>; es geht ihm in dieser Hinsicht um keinen Deut anders, als Lagrange, der in seiner analytischen Mechanik es für das räthlichste hielt, die von Anderen (z. B. von Euler) mit großem Eifer discutirte Frage nach dem Bezugssystem des Trägheitsgesetzes »durch Todtschweigen unschädlich zu machen«.

Das, was an Volkmann's Hinweis auf die »rückwirkende Versicherung der einzelnen Theile des Systems« richtig ist, findet sich der Hauptsache nach schon in der klassisch kurzen Aufforderung ausgesprochen, welche d'Alembert einem allzu scrupulösen Mathematikstudirenden zugerufen haben soll: »Vorwärts, mein Herr, vorwärts! Die Ueberzeugung wird später kommen.« Der junge Arago fand, als er in ähnlichen Zweifeln befangen war, diesen erlösenden Spruch in einem Umschlag des Garnier'schen Lehrbuchs der Algebra angeführt. Es ist aber zweierlei, ob man einem Anfänger auf die Sprünge helfen, oder eine Theorie der physikalischen Erkenntniss begründen will. Und da darf nun doch einmal mit Nachdruck gesagt werden, dass dem Hinweis auf die »gegenseitige Stützung und rückwirkende Versicherung der einzelnen Theile des Systems« im logisch-systematischen Aufbau einer Wissenschaft, die auf mathematische Klarheit und Präcision Anspruch erhebt, alle und jede Berechtigung abgestritten werden muss.

Soll ich noch weiter auf die Ausführungen Volkmann's eingehen, so sei vor allem festgestellt, dass dieser Autor das von Newton doch offenbar sehr wichtig genommene<sup>11)</sup> »Scholium zu den

Definitionen« bei Erläuterung der Definitionen selbst, d. h. an derjenigen Stelle, wo das Interesse an diesen Dingen den Gipfelpunkt erreicht, gänzlich unbesprochen lässt, und dass er bei den Erörterungen über das Newton'sche Trägheitsgesetz die Frage des Bezugssystems mit keinem Wort berührt<sup>12)</sup>. Das »Scholium« überhaupt in dem ganzen Buche unerwähnt zu lassen, ging nicht gut an, und so finden wir an einer früheren Stelle<sup>13)</sup> die seiner Bedeutung ganz und gar nicht gerecht werdende Bemerkung: »Newton hat in erster Linie dazu beigetragen, die Galilei'sche Mechanik in sich consequent auszugestalten; hierhin möchte ich einen Theil der im Anschluss an seine Definitionen, mit denen er seine Principien beginnt, unter der Ueberschrift »Scholium« gegebenen Auseinandersetzungen rechnen über: *Tempus absolutum vel relativum, Spatium absolutum vel relativum . . .*« In eine wirkliche kritische Erörterung dieser Newton'schen Begriffe und in eine deutliche Erklärung, welchen Theil der Newton'schen Darlegungen er als wesentlich und beibehaltenswerth ansieht, tritt Volkmann auch hier gar nicht ein. Erst gegen den Schluss des Buches<sup>13)</sup> wird er ein wenig deutlicher: »Als die postulirenden Grundbegriffe des Newton'schen Systems, die hier« (nämlich in der Geophysik) »von anderer Seite eine rückwirkende Verfestigung finden, wären die Begriffe von der absoluten Orientirung in Raum und Zeit hervorzuheben. Wir sind nun einmal mit unseren Beobachtungen und Messungen auf die Erde angewiesen, und wir haben uns in Folge dessen zu vergegenwärtigen, dass beim Auf- und Ausbau unseres wissenschaftlichen Systems gerade durch unseren geocentrischen Standpunkt praktische Schwierigkeiten entstehen können. Es gibt« — Begründung dieser Behauptung fehlt — »keinen anderen Weg, diese Schwierigkeiten zu überwinden, als den durch unsere Theorien gegebenen, welche uns den absoluten Standpunkt anweisen, den praktisch einzunehmen uns ein für alle Mal versagt ist, dessen nothwendige Existenz wir aber ungeachtet uns vielleicht vorgeworfener metaphysischer Verdächtigungen theoretisch postuliren müssen.« Wie wohlthuend berührt nicht, verglichen mit diesen Ausführungen, das fast trocken vorgetragene, wenn auch dogmatisch ausgelegte Eimerexperiment des Altmeisters Isaac Newton!

Das Eigenthümlichste ist nun aber, dass Volkmann zwar sich von der »absoluten Zeit« in der That nicht emancipirt hat<sup>14)</sup>,

hingegen sichtlich das Bedürfniss empfindet, als »übersinnliches Orientierungselement«, d. h. als Surrogat für den offenbar doch unheimlichen »absoluten Raum« den Aether in die Betrachtung einzuführen<sup>15)</sup>. Darin liegt eine Inconsequenz, welche gleich mir wohl noch mancher Andere unbegreiflich finden wird, und welche in einem um so seltsameren Lichte erscheint, als Volkmann an einer anderen Stelle gegen Boltzmann schreibt: »Jedenfalls möchte ich eine vorzeitige Einführung der Atomistik in das System der Mechanik vermieden sehen«<sup>16)</sup>. Der hierauf folgenden Begründung, der ich mich vollständig anschließe, darf ich gewiss hinzufügen, dass die Einführung der Aetherhypothese in die systematische Grundlegung der Mechanik doch ebenso wenig geeignet ist, dieser »den vollkommen durchsichtigen euklidischen Charakter« zu bewahren, »den sie dank der Forschung eines Galilei und Newton erhalten hat.« Dass dem Aether eine begriffliche Hauptanforderung, die an das Bezugssystem zu stellen ist, nämlich diejenige der Starrheit, ganz und gar nicht innewohnt, soll nur nebenbei erwähnt werden. Auch discutirt Volkmann — offenbar in Anschluss an O. Lodge und Andere — ausdrücklich die Möglichkeit, dass der Aether an der Bewegung der Erde um die Sonne innerhalb der Erde oder auf ihrer Oberfläche Theil nimmt<sup>15)</sup>.

Sehr richtig ist folgende Bemerkung im Vorwort des Volkmannschen Buches: »Darin scheint mir — naturwissenschaftlich betrachtet — der Mangel jener mathematischen Darstellungen der Mechanik seit Lagrange zu liegen, dass sie die in der Natur der Sache liegenden subjectiven Elemente der Forschung ignoriren, . . .«<sup>17)</sup> Sehr wahr, in der That! Wenn man überall streng auseinanderhielte, was eine einfache Sache der Uebereinkunft, und was im Gegensatz dazu Ergebniss der Forschung ist, so würde der Wissenschaft mancher Irrweg erspart bleiben. Das »Princip der particularen Determination« oder »partiellen Convention« ist nun einmal die Grundlage jeder nüchternen Wissenschaftlichkeit auf denjenigen Erkenntnisgebieten, die von der Mathematik Anwendung machen<sup>18)</sup>. Wohl keine Bezugnahme auf meine Darlegungen hat mich aufrichtiger gefreut, als die Anerkennung, welche E. Mach in der zweiten, dritten und vierten Auflage seiner »Mechanik« der »deutlichen Hervorhebung und der zweckmäßigen Bezeichnung des Princip der particulären Determination« hat zu Theil werden lassen<sup>18)</sup>. Dass das Princip in seiner

Anwendung nicht neu ist, gebe ich gern zu. Seiner Richtigkeit und Bedeutung dürfte dieses mein Zugeständniss schwerlich irgend welchen Abbruch thun.

Zum Schluss dieser Polemik möchte ich ausdrücklich hervorheben, dass ich, ebenso wie Mach, manchen sonstigen Ausführungen Volkmann's, und insbesondere seiner Kritik der Hertz'schen Formulirung des Trägheitssatzes<sup>19)</sup> vollkommen beistimmen kann. Trotz der gegentheiligen Behauptung Volkmann's<sup>20)</sup> muss ich allerdings nach wie vor auf dem Standpunkt verharren, den mir nicht aus der Uebersetzung, sondern aus der Urschrift wohlbekannten Verfasser der »mathematischen Principien der Naturphilosophie« auch fernerhin zu den gelegentlichen Metaphysikern zu zählen. Für diesen Hang zum Mysteriösen legen nicht nur die den letzten Lebensjahren des großen Briten entstammenden theologischen Schriften<sup>21)</sup>, sondern auch das Scholium zu den Definitionen und die letzten drei Seiten der im Jahre 1713 erschienenen zweiten Auflage der »Principien« ein beredtes Zeugniss ab. Das aber ist das Bewunderungswürdigste an der Newton'schen Grundlegung der Mechanik, dass sie, weit entfernt, von dem Sturz der Newton'schen Mystik in ihren Grundfesten erschüttert zu werden, mit unverminderter Kraft und Frische auf den Trümmern weiterbesteht. Wie Alles, hat auch diese Thatsache ihren guten Grund. Nicht Newton's metaphysische Postulate des absoluten Raumes und der absoluten Zeit sind das Unsterbliche an seiner Lebensarbeit, sondern der über jede, auch über die erkenntnisstheoretisch verbrämte Metaphysik hoch erhabene nüchtern-realistische Wahrheitskern seiner Grundlegungen, den auf Jahrhunderte hinaus so leicht keine Kritik aus dem Sattel heben wird. Diesen Wahrheitskern bildet die durch das Zusammenwirken von Empirie und Rechnung tausendfältig bestätigte und bislang noch nie Lügen gestrafte Annahme, wonach es für sich selbst überlassene Punkte in beliebig großer Anzahl zutrifft, dass ein System sich construiren lässt, worin sie alle geradlinig fortschreiten; während für rein phoronomische Punktsysteme diese Constructionsmöglichkeit allgemein nur bis zur Dreizahl vorhanden ist. — —

Wenn ich auf die Auseinandersetzungen Volkmann's so ausführlich und mit so ausgesprochen polemischer Tendenz eingegangen bin, so geschah dies aus dem Grunde, weil ich in dem genannten Autor

einen der energischsten Vertreter einer erkenntnistheoretischen Richtung sehe, die ungeachtet mancher aufklärenden Bestrebung im einzelnen doch immer noch eine viel zu viel »transcendirende«<sup>22)</sup> genannt zu werden verdient; und weil ich glaube, überflüssigen Transcendirtendenzen in der Wissenschaft einen höchst unheilvollen Einfluss auf die weitere Gesamtentwicklung der menschlichen Erkenntniss zuschreiben zu müssen. Aus' Nichts schmiedet ja der Obscurantismus bessere Waffen für sein Arsenal, als aus den transcendenten Hypothesen der Wissenschaft, und nächst den in der Sache selbst liegenden Gründen ist dieser Grund wohl am meisten für mich bestimmend, wenn ich mit aller Entschiedenheit einer Beschränkung des hypothetischen Elements in der Mechanik auf das äußerste, unentbehrliche Minimum das Wort rede. Glücklicherweise zählt diejenige Gruppe der Wissenschaften, welcher A. Comte das Prädicat besonders hoher wissenschaftlicher »Exactheit« einräumen zu müssen glaubte, — mit welchem Recht, bleibe hier unerörtert — eine überwiegende Mehrzahl von angesehenen Forschern, die den Volkmann'schen Standpunkt hinsichtlich der Auffassung der mechanischen Principien nicht theilen. Dies gilt zum mindesten bei uns in Deutschland, wo, wie H. Kleinpeter in einer interessanten Programmschrift des weiteren ausführt, überhaupt ein ständig wachsendes Interesse der Naturforscher an erkenntnistheoretischen Fragen, und zugleich eine zunehmende Tendenz im aufklärenden Sinne zu beobachten ist<sup>23)</sup>.

So ist es denn auch kein Wunder, dass die größte Zahl eingehenderer Arbeiten über die Frage des dynamischen Bezugssystems deutschem Scharfsinn und Gelehrtenfleiß ihre Entstehung verdankt. Nächst den Deutschen haben die Engländer wohl am eifrigsten sich an der Discussion betheiligt. Wenn ich nun mit der Betrachtung der englischen Literatur der Gegenwart beginne, so geschieht dies natürlich nicht darum, weil ich sie der deutschen überordnete. Die Landsleute eines Gauss, Humboldt, Helmholtz, Hertz u. A. haben gewiss nicht nöthig, über den Kanal hinüberzuschielen und ängstlich zu erwägen, was die britischen Fachgenossen zu ihren Ansichten sagen werden. Lediglich der Umstand, dass es sich in der vorliegenden Abhandlung um eine Theorie handelt, welche, ungeachtet der genialen Vorarbeiten des Deutschen Kepler und des Italieners

Galilei, in ihrer Ausgestaltung wesentlich von Newton herrührt, bestimmt mich, der englischen Litteratur den Vortritt zu lassen.

Dass die Engländer von dem Glanz ihrer Sterne am Himmelsdach der Westminsterabtei, zu denen bekanntlich auch Sir Isaac Newton zählt, höchst ungern selbst nur ein Titelchen preisgeben mögen, wird man bei dem angeborenen instinctiven Sinn dieser Nation für das geschichtlich Ueberlieferte, und bei ihrem weltbekannten Nationalstolz wenig verwunderlich finden. Es hätte, angesichts der jenseits des Kanals in fundamental-mechanischen (wie in vielen anderen) Fragen im allgemeinen beliebten Gepflogenheit, die Ergebnisse festländischer Forschung nach Möglichkeit unbeachtet zu lassen, nur geringen Werth, auf die von A. Voss erwähnte Discussion des Bewegungsbegriffes in der Zeitschrift »Nature« hier ausführlich einzugehen<sup>24</sup>). Angeregt wurde diese Discussion durch zwei im Philosophical Magazine 1893 veröffentlichte, in den Wegen und Zielen des Erkenntnisstrebens stark divergirende Abhandlungen von O. Lodge und J. G. Mac Gregor<sup>25</sup>), deren letztere zur gewissenhaften Berücksichtigung kommen wird. Diese Arbeit verdient schon um deswillen allgemeine Beachtung, weil sie deutsche Gründlichkeit mit britischer Griffsicherheit in der glücklichsten Weise vereinigt. Sie zeichnet sich freilich nicht durch die der Lodge'schen Abhandlung eigene naiv-selbstgewisse Diction — bekanntlich eine britische Nationaltugend, welche im Geschäftsleben als letzte Blüthe die »businesslike smartness« zeitigt — aus; dafür beweist sie aber eine in England nicht gewöhnliche Tiefgründigkeit der Forschung, und ist zugleich die einzige englische Arbeit, welche mit anerkennenswerther Objectivität die Ergebnisse deutscher Wissenschaft verwerthet. Aus allen diesen Gründen halte ich es im Interesse des deutschen Lesers, und nachdem mir die Genehmigung seitens des Verfassers mit dankenswerther Bereitwilligkeit ertheilt worden ist, für angemessen, eine sinngetreue Uebersetzung des ersten Viertels der Mac Gregor'schen Darlegungen folgen zu lassen.

Doch zuvor noch einige wenige Worte über die Discussion in »Nature«. Greenhill, einer der Theilnehmer an dem Streit über die »behauptete Absolutheit der Rotationsbewegung« thut mir das trotz der Namen, in deren Nachbarschaft ich gerathe, höchst zweifelhafte Vergnügen an, mich mit Newton, Maxwell und Streintz zu den Verfechtern der absolutistischen Auffassung der Drehbewegung zu

rechnen, und so seine Ansicht auf eine angebliche Behauptung von mir zu stützen<sup>26)</sup>. Ein solches Missverständniß ist nur aus ungenauer Lectüre meiner Arbeiten zu erklären, und eingehender darüber zu sprechen, darf ich mir daher wohl sparen. Strenger Relativist ist außer Mac Gregor, der sich an dem Streit in »Nature« gar nicht betheiligt hat, vor allem A. E. H. Love. Er ist, wie wir weiter unten sehen werden, nicht der einzige Parteigänger Mac Gregor's, steht aber auf dem Kampfplatz der »Nature« leider ziemlich isolirt da. Seine consequente Vertheidigung des vertretenen Standpunktes hat etwas sehr Sympathisches. Ihm gegenüber suchen Greenhill, Basset und O. J. Lodge den absolutistischen Standpunkt zu retten, während Gray vom pädagogischen Standpunkte aus zwischen den Parteiführern Mac Gregor und Lodge zu vermitteln sucht.

Merkwürdig ist, dass sich fast gleichzeitig mit dem Streit in »Nature« ein ganz ähnlicher Meinungskampf in den »Annales de la société scientifique de Bruxelles« erhob; ein Kampf, der sich auch in eine Pariser Zeitschrift übertrug und bis in das Jahr 1896 fortpflanzte.<sup>27)</sup> Näheres darüber mitzutheilen, fehlt mir gegenwärtig der Raum. Es genügt hier wohl, zu erwähnen, dass E. Vicaire zu den Verfechtern des Absolutismus gehört, während P. Mansion sich, soviel ich sehe, als consequenter Relativist gibt. Diese Discussion geht anscheinend ebenso, wie die in »Nature«, auf die beiden Artikel im »Philosophical Magazine« zurück.

Hiermit wende ich mich zur Uebersetzung des Mac Gregor'schen Aufsatzes, indem ich die Bemerkung vorausschicke, dass es für den nachdenklichen deutschen Leser eine kürzere, klarere und zutreffendere Darlegung der Hauptseiten des Problems in der That kaum geben kann.

Der hier allein in Betracht kommende erste Abschnitt der Abhandlung, betitelt »Die Relativität des ersten und zweiten Bewegungsgesetzes«<sup>28)</sup>, beginnt sogleich mit einer Antikritik gegen O. Lodge:

Professor Lodge missversteht vollständig den Einwand, der in meiner Adresse<sup>29)</sup> gegen die übliche Darstellung des ersten und zweiten Bewegungsgesetzes erhoben wurde, und der schon vorher von verschiedenen Schriftstellern zum Ausdruck gebracht worden war. Er stellt es so dar, als sei es der Einwand: »Gleichförmige Bewegung ist unverständlich oder sinnlos, sofern man nicht ihre Richtung und Geschwindigkeit mit Bezug auf eine Axengarnitur (set of axes) specificirt«, während doch der wahre Einwand der ist, dass die Gesetze selber in ihrer gebräuchlichen Form unverständlich sind, sofern nicht die Axen näher angegeben werden, auf welche die gleichförmige Bewegung oder Beschleunigung, von der sie

handeln, bezogen wird. Seine Kritik schießt daher nothwendig etwas weit vom Ziel vorbei. Sie kann folgendermaßen zusammengefasst werden: 1) »Gleichförmige Bewegung ist vollkommen verständlich; und deshalb ist im Ausspruch des ersten Gesetzes eine Angabe über das Axenkreuz durchaus entbehrlich.« 2) »Zudem sind die Schwierigkeiten, welche der Specificirung der Axen entgegenstehen, praktisch unübersteiglich.«

Ad 1) wird man bemerken, dass diese These sich ganz und gar auf die Verständlichkeit der gleichförmigen Bewegung an und für sich stützt, und dass daher die Nothwendigkeit der Angabe von Axen im Falle des zweiten, oder des ersten Gesetzes in der Lodge'schen Fassung: »Ohne Kraft kann es keine Beschleunigung der Materie geben«, nicht im mindesten davon erschüttert wird. Denn in keinem von beiden Fällen wird auf »die gleichförmige Bewegung« Bezug genommen.

Während nicht zugegeben werden kann, dass »solche Begriffe wie Bezugssaxen für die Vorstellung der sogenannten gleichmäßigen Geschwindigkeit überhaupt unnöthig seien«, — indem doch »gleichmäßig« eine solche Geschwindigkeit heißt, deren Größe und Richtung bezüglich der zu ihrer näheren Bestimmung angewandten Axen keine Veränderung erleiden, — ist es nichtsdestoweniger zutreffend, dass die Bestimmung besonderer Axen zu diesem Zwecke nicht erforderlich ist. Indessen die Verständlichkeit des ersten Gesetzes setzt mehr voraus, als die bloße Vorstellung von dem, was mit Gleichförmigkeit der Geschwindigkeit gemeint ist. Denn dasselbe ist nicht eine bloße Feststellung über gleichförmige Geschwindigkeit als solche, sondern eine Behauptung des Inhaltes, dass ein Massentheilchen unter gegebenen Umständen eine gleichförmige Geschwindigkeit haben müsse. Nun kann aber eine Geschwindigkeit, welche bezüglich einer Axengarnitur gleichmäßig ist, in Hinsicht auf andere Garnituren ungleichmäßig sein. Es ist daher auf einmal klar, dass, wenn wir den gewöhnlichen Kraftbegriff anwenden, die von dem Gesetz aufgestellte Behauptung gar nicht für alle Axen gelten und folglich keinen bestimmten Sinn haben kann, es sei denn, dass man uns die Axen namhaft macht, in Bezug worauf jene Behauptung gemeint ist<sup>30)</sup>.

Vieles kann natürlich ohne nähere Bestimmung von Axen aus dem ersten und zweiten Gesetz hergeleitet werden. Die ganze dynamische Wissenschaft legt für diese Thatsache Zeugnis ab. Aber es sind, wie Streintz in dem oben genannten Werke gezeigt hat<sup>31)</sup>, viele praktische Unzuträglichkeiten und viele unnöthige Complicationen aus dem Gebrauch dieser Gesetze in ihrer unbestimmten Form hervorgegangen; und ich werde unten Gelegenheit haben, auf ein Paradoxon Bezug zu nehmen, nämlich die (angebliche) Absolutheit der Drehbewegung ungeachtet der Relativität der Bewegung, welches Paradoxon seine Lösung erhält, sobald die Relativität jener Gesetze anerkannt wird.

Die nähere Bestimmung von Axen, mit Bezug auf welche das erste und zweite Gesetz in Geltung stehen, oder m. a. W., von sogenannten dynamischen Bezugssystemen ist so keineswegs bloß ein verfeinertes Bedürfniss des pedantischen mathematischen Verstandes. Im Gegentheil, sie hilft einem empfindlichen Mangel ab. Dieser Mangel macht sich freilich bei Behandlung der einfachen Probleme der gewöhnlichen Schule nicht bemerklich. Denn die groben Experimente, welche in Elementarbüchern gewöhnlich als Ausgangspunkte der Gesetze angeführt werden, lassen erkennen, dass deren Geltung als auf im Erdkörper festgelegte Axen bezogen vorausgesetzt wird; und diese stillschweigende Art der näheren Bestimmung

ist vollkommen genügend, um z. B. die schiefe Ebene oder Rad und Welle zu besprechen. Sobald wir aber dazu übergehen, die Probleme der theoretischen Astronomie zu behandeln, so leuchtet sofort ein, dass wir mit Bezug auf jene Axen eine Gültigkeit der Gesetze nicht annehmen dürfen; und so drängt sich unserer Beachtung die Frage auf: Mit Bezug auf welche Axen müssen sie als gültig betrachtet werden? Und diese Frage fordert, nachdem sie einmal gestellt ist, unbedingt eine Beantwortung. Der kritische Student, welcher bei seinen phoronomischen Studien (study of kinematics) gesehen hat, dass Geschwindigkeit und Beschleunigung relative Begriffe sind, wird durch Professor Lodge's »scheltende oder vielleicht höfliche Epitheta« nicht überzeugt werden, dass diese Begriffe ihre Relativität verlieren, sobald sie auf die Bewegung wirklicher Körper angewandt werden.

Wenden wir uns nun zum zweiten Punkt der Kritik, so leuchtet ein, dass allerdings Demjenigen, welcher annimmt, es handle sich um die nähere Bestimmung von Axen, vermittelt deren die Größe und Richtung der Geschwindigkeiten in absoluter Weise sollen beschrieben werden können<sup>32)</sup>, die Schwierigkeiten der gestellten Aufgabe unüberwindlich scheinen müssen<sup>33)</sup>. In diesem Falle erheben sich eben diejenigen Schwierigkeiten, welche der Lösung bei jeder unbegreiflichen Problemstellung innewohnen. Dass das gegenwärtige Problem erst neuerdings in Angriff genommen worden ist, liegt gar nicht so sehr an seiner Schwierigkeit, als vielmehr an der Thatsache, dass die Nothwendigkeit seiner Lösung erst seit der vollen Erkenntniss von der relativen Wesenheit der Geschwindigkeit und Beschleunigung (ob gleichförmig oder veränderlich) offenbar geworden ist. Dass gleichwohl Schwierigkeiten vorhanden sind, erhellt schon daraus, dass nur einige wenige von den angewandten Methoden gründlich zu sein scheinen, und dass eine Anzahl von Autoren das Problem zwar in Angriff genommen, es aber halb gelöst wieder verlassen haben<sup>34)</sup>. Welcher Art jene Schwierigkeiten sind, kann am besten durch eine Skizzirung der Anstrengungen dargethan werden, welche man zu ihrer Bewältigung gemacht hat.

Wie es scheint, kommen nur zwei legitime Wege zur Auffindung dynamischer Bezugssysteme in Betracht, nämlich: 1) Nachprüfung der Beobachtungsergebnisse, zu deren Ableitung die Bewegungsgesetze ausgesprochen wurden, und eventuell Neuformulirung dieser Gesetze. 2. Der Weg, dass man ausgeht von der Annahme, da einmal die Bewegungsgesetze in ihrer unbestimmten Form zum Ueberfluss geprüft worden sind von Leuten, die durch eine Art von dynamischem Instinct befähigt waren, einen richtigen Gebrauch von ihnen zu machen, so müssen wohl Axen vorhanden sein, in Bezug auf welche sie gelten; und dass man dann dazu übergeht, diese Axen mit Hilfe der Gesetze selber zu bestimmen.

Die erste, historisch-kritische Methode ist die von Professor Mach angewandte<sup>35)</sup>. Er zeigt, wie Galilei die Gültigkeit des ersten Gesetzes hinsichtlich fester Punkte im Erdkörper beobachtete, — eine Gültigkeit, welche für kurz dauernde und wenig ausgedehnte Bewegungen an der Erdoberfläche zutrifft, — und wie Newton, als er das Gesetz auf Körperbewegungen im Weltraum anzuwenden in die Lage kam, es verallgemeinerte durch den Nachweis, dass, soweit sich entscheiden ließ, es für Planetenbewegungen in Bezug auf die weit abstehenden und allem Anschein nach relativ festen Himmelskörper in Geltung stand. Und er hält dafür, dass das erste Gesetz, wenn sein räumlicher Theil auf die Fixsterne, und sein zeitlicher Theil auf den »Drehungswinkel der Erde« bezogen

wird, als eine hinreichend genaue Annäherung für praktische Zwecke betrachtet werden darf; dass es m. e. W. eine Annäherung darstellt, die vorläufig, d. h. so lange nicht eine beträchtliche Erweiterung unserer Erfahrung eintritt, nicht übertroffen werden könne.

Mir scheint aber, dass die historisch-kritische Methode uns bereits über diesen Standpunkt hinausführen dürfte. Denn wir wissen jetzt, dass die sogenannten Fixsterne gar keine festen Sterne sind; und es sind Mittel erdnen worden zur Berichtigung von Beobachtungen, die in jener Annahme gemacht worden waren. Wir wissen ebenso, dass die Bewegungsgesetze nicht gelten, soweit man sie auf eine durch den Drehungswinkel der Erde bestimmte Zeitscala bezieht; und eine rohe Correction zum Anbringen an dieser Zeitscala im Falle zeitlich lang ausgedehnter periodischer Bewegungen ist bestimmt worden. Deshalb darf das erste Gesetz in derjenigen Ausdrucksweise, die auf die Fixsterne und die Erddrehung Bezug nimmt, nicht länger als ein für alle Zwecke hinreichend genaues angesehen werden; und der genaue Ausdruck des Gesetzes, so wie dasselbe empirisch bestimmt und bei der wirklichen Arbeit angewandt wird, ändert sich von Tag zu Tag, oder wenigstens von Jahrzehnt zu Jahrzehnt. Es erhebt sich daher die Frage: Können wir die Bewegungsgesetze nicht vielleicht in derartige allgemeine Formen bringen, dass die empirischen Formen, die sie zu irgend einer Zeit haben mögen, als besondere Fälle betrachtet werden können, die durch den besonderen Stand der derzeitigen (astronomischen) Erkenntniss bedingt werden?

Die zweite der oben genannten Methoden<sup>36)</sup> ist dazu bestimmt, Gesetze von jener Art zu liefern. Man kann sagen, dass Professor J. Thomson sie angewandt hat, als er zeigte, wie auf Grund beobachteter successiver Relativpositionen von als geradlinig bewegt gegebenen Massentheilchen die Axen, in Bezug auf welche die Bahnen derselben geradlinig sind, geometrisch bestimmt werden können<sup>37)</sup>. Ebenso kann man sagen, dass W. Thomson u. Tait sie in Anwendung bringen, wenn sie auf Grund einer Ableitung aus dem ersten Gesetz zeigen, wie wir uns die Gewinnung »fester Bezugsrichtungen« denken können<sup>38)</sup>. Aber diese Autoren machen keinen Versuch, eine formale Bestimmung eines dynamischen Bezugssystemes zu geben.

Lange wandte diese nämliche Methode in der oben angeführten Abhandlung an<sup>39)</sup>, indem er seinen Vorschlag zur näheren Bestimmung auf ein rein phoronomisches (kinematical) Ergebniss gründete, nämlich, dass für drei oder weniger als drei Punkte, die relativ zu einander in ganz beliebiger Distanzänderung begriffen sind, sich stets ein Coordinatensystem, ja sogar eine unendliche Anzahl solcher Systeme finden lässt, in Bezug auf welche diese Punkte geradlinige Bahnen haben werden, während für mehr als drei solche Punkte dies nur unter besonderen Umständen möglich ist. Es folgt daraus, dass das Gesetz von der Gleichförmigkeit der Bewegungsrichtung unbeeinflusster Massentheilchen für drei solche Theilchen eine blosse Uebereinkunft darstellt, und dass es nur insoweit Erfahrungsergebniss ist, als es für mehr als drei Massentheilchen in Bezug auf ein und dasselbe System zutrifft. Von dieser Erwägung ausgehend kann gerade so, wie die dynamische Zeitscala als eine solche Zeitscala defnirt wird, bezüglich welcher ein unbeeinflusstes Massentheilchen gleichförmig fortschreitet, das dynamische Bezugssystem als ein solches System defnirt werden, in Bezug auf welches drei unbeeinflusste Theilchen auf geradlinigen Bahnen dahinschreiten. Indem Lange diese

Betrachtungen zu Ende verfolgt, schlägt er schließlich vor, das erste Gesetz in der folgenden Form auszusprechen: »Relativ zu irgend einem Coordinatensystem, in Bezug auf welches drei (gleichzeitig) vom selben Raumpunkt ausgeschleuderte und sodann unbeeinflusst gelassene Massentheilchen, die jedoch nicht in einer Geraden liegen, drei beliebige in einem Punkt zusammenlaufende geradlinige Bahnen beschreiben (die Coordinatenachsen zum Beispiel), — relativ zu einem solchen Coordinatensystem wird die Bahn auch jedes vierten unbeeinflussten Punktes geradlinig sein. Und relativ zu irgend einer Zeitscala, in Bezug auf welche ein unbeeinflusstes Theilchen hinsichtlich der oben bezeichneten Axen gleichförmig fortschreitet, wird auch jedes andere unbeeinflusste Massentheilchen in gleichförmigem Fortschritt bewegt sein, sofern seine Bewegung auf dieselben Axen bezogen wird.

Die gleiche Methode war es auch, welche ich — ohne noch auf Lange's Abhandlung gestoßen zu sein — in meiner »Adresse« anwandte, indem ich zu dem Schluss gelangte, dass die beiden ersten Gesetze Geltung haben relativ zu irgend einem unbeeinflussten Theilchen als Coordinatenursprung (point of reference), und zu geraden Linien, welche von diesem Theilchen zu anderen unbeeinflussten Massentheilchen von gleicher Geschwindigkeit, wie das erste, gezogen werden, als Bezugssachsen. Ich zeigte ferner, wie daraus folgt, dass bei Behandlung gewöhnlicher Bewegungsprobleme an der Erdoberfläche ein im Erdkörper festgelegtes Axensystem praktisch als dynamisches Bezugssystem dienen kann<sup>40</sup>.

Im Hinblick auf alle derartigen Methoden der Axenbestimmung fragt Professor Lodge: »Wie können wir die Wurfbahnen unbeeinflusster Theilchen als Axen nutzbar machen, ohne fortwährend stillschweigend das erste Gesetz anzunehmen?« — Eine Kritik in Form einer ungenauen Frage ist, weil unbestimmt, schwer zu treffen. Wenn die Verwendung solcher Wurfbahnen zur Axenbestimmung wirklich das erste Gesetz bei seiner eigenen Formulirung bereits voraussetzte, so müsste es doch leicht sein genau anzugeben, an welcher Stelle diese Voraussetzung gemacht zu werden scheine; und eine bestimmte Kritik dieser Art könnte sogleich »bei den Hörnern gepackt« (met) werden. Indessen, aus dem Zusammenhang zu schließen, ist die Frage wahrscheinlich eingegeben von der missverständlichen Auffassung, als ob die Anwendung solcher Wurfbahnen die Annahme ihrer Geradlinigkeit im absoluten Raume voraussetze, — eine Auffassung, die unmittelbar aus dem Glauben entspringt, als ob das Ziel der Axenbestimmung die Beschreibung von Geschwindigkeiten in absolutem Sinne sei. Die Absicht bei der Axenbestimmung ist aber in Wahrheit durchaus nicht darauf gerichtet, »das Unmögliche zu versuchen.« Und wenn die Bahnen unbeeinflusster Theilchen als Axen, oder zur näheren Bestimmung von Axen benutzt werden, so wird keinerlei Voraussetzung in Bezug auf ihre »Form an sich« gemacht. Dabei wird vielmehr ausdrücklich anerkannt, dass man ihnen gar keine bestimmte Form zuschreiben kann, es sei denn mit Beziehung auf andere Axen; und dass man ihnen durch Veränderung der Axen, bezüglich deren ihre Formen näher bestimmt werden, eine unendliche Anzahl von Formen ertheilen kann. Und da über ihre »Form an sich« keine Annahme gemacht wird, schließt ihre Anwendung durchaus keine Voraussetzung des ersten Gesetzes ein.

Wir werden ferner gefragt, wie wir uns in Hinsicht solcher Axen auf die Erfahrung des Menschengeschlechtes berufen können<sup>41</sup>. Da muss allerdings zugegeben werden, dass eine unmittelbare Berufung nicht möglich ist. Die

einzig zu einer solchen unmittelbaren Berufung geeigneten dynamischen Vorgänge sind solche, welche den engen Bereich des Experimentes nicht überschreiten. Wenn wir von der Besprechung der Körperbewegung an der Erdoberfläche zu der Bewegung von Körpern im Weltraum übergehen, so treten wir in Regionen ein, die außerhalb unserer directen Erfahrung liegen; und wenn das Menschengeschlecht an solchen Dingen ein Interesse nimmt, so muss es lernen, dass die von den Naturforschern behufs Anordnung der dynamischen Erscheinungen allgemein gemachten hypothetischen Annahmen einzig nach der Genauigkeit derjenigen Ableitungen beurtheilt werden dürfen, welche aus ihnen fließen.

Möglicherweise denkt Professor Lodge nicht so sehr an das Menschengeschlecht im allgemeinen, als an das Geschlecht junger Studenten. Und es ist sofort klar, dass ein Ausspruch des ersten Gesetzes, wie ihn z. B. Lange vorschlägt, zum Gebrauch in Elementarbüchern oder vor einer Classe von Anfängern nicht passend ist<sup>42)</sup>. Aber Niemand hat auch den Vorschlag gemacht, ihn in einem dieser beiden Fälle anzuwenden. Das Ziel der Schriftsteller, welche eine Lösung des in Rede stehenden Problems versucht haben, ist ein logisches, und kein pädagogisches gewesen. Der Anfänger hat nur mit einfachen Körperbewegungen an der Erdoberfläche zu schaffen. Er wird von seiner eigenen Erfahrung angeleitet, zu sehen, dass in Bezug auf im Erdkörper festgelegte Axen (sagen wir: die Nord-Süd-, Ost-West- und Nadir-Zenithaxe seines Beobachtungsplatzes) die beiden ersten Gesetze für solche einfachen Bewegungen in Geltung stehen. Alles, was auf dieser Stufe nöthig ist, ist einzig das, klar zu machen, dass die in solchen Fällen gefundene Gültigkeit der Gesetze durchaus an die Bezugnahme auf derartige Axen gebunden ist. Wenn er dann weiterhin zu solchen Aufgaben gelangt, wie es diejenigen der theoretischen Astronomie sind, so wird er sogleich sehen, dass die Bewegungsgesetze so, wie sie zuerst ausgesprochen wurden, ungenügend sind und einer Verallgemeinerung bedürfen. Und um diese Zeit wird er gelernt haben, dass Axiome nicht darnach anzunehmen oder zu verwerfen sind, ob sie unmittelbar auf seine eigene Erfahrung sich berufen oder nicht berufen, sondern darnach, ob die aus ihnen fließenden Ableitungen die Probe der Beobachtung bestehen, oder nicht bestehen.

Mach's Einwand gegen solche Arten der Axenbestimmung, wie es die soeben betrachteten sind, ist der Sache angemessener<sup>43)</sup>. Während er zugibt, dass das erste Gesetz mit ihrer Hülfe genau ausgedrückt werden kann, vertritt er doch die Ansicht, dass wir bei ihrem Gebrauch nur scheinbar eine Beziehung der Bewegung auf die Fixsterne und die Erdrotation vermeiden. Es ist auch gar kein Zweifel: bei der praktischen Beobachtung von Bewegungen an der Erdoberfläche oder im Weltraume müssen wir unmittelbar immer noch irgendwelche im Erdkörper feste Punkte, bezw. die Fixsterne, als Bezugssysteme, und die Erddrehung als Grundlage unserer Zeitscala benutzen, wobei wir aber an den rohen Beobachtungen, sofern nöthig, die etwa schon ermittelten Correctionen anbringen. Und da geben nun gerade in ihrer oben gewählten Ausdrucksweise beide Gesetze eine theoretische Rechtfertigung dieser Maßregel und zeigen den Weg an, wie die Genauigkeit der nothwendigen Correctionen nach und nach erhöht werden kann. Sofern die Bewegungsgesetze in der angeführten Form zur Annahme gelangen, kann ja sogleich gezeigt werden, dass unter den Umständen, in welchen wir uns befinden, nämlich allerseits von gewaltig weit entfernten Körpern umgeben, welche sich mit Geschwindigkeiten von anscheinend der gleichen Größen-

ordnung wie die unserige bewegen, es angängig ist, eben diese Körper als ein rohes Bezugssystem zu verwenden; dass weiterhin die Erde, so wie sie aufgebaut und gelegen ist, mit einer grob gemessen gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit in Bezug auf jene Körper in Drehung begriffen sein muss; und endlich, dass uns eben darum für die meisten praktischen Zwecke das Recht zusteht, die Fixsterne als Bezugssystem und die Erdumdrehung als Zeitscala zu benutzen. Ja noch mehr, mit jener Annahme wird es offenbar, dass die Correctionen, welche an den rohen, bezüglich dieses Raumsystemes und bezüglich dieser Zeitscala gemachten Beobachtungen anzubringen sind, in demselben Maße genauer bekannt werden müssen, als wir eine vermehrte Kenntniss von den Fixsternbewegungen und von den Massen und Bewegungen der einzelnen Glieder des Sonnensystems erlangen. So hat jene Art und Weise, das Princip der Relativität in den Bewegungsgesetzen zum Ausdruck zu bringen, über die eben erwähnten Vorzüge hinaus noch den Vortheil, welchen Mach für seine Formulirung in Anspruch nimmt, nämlich, dass ihre Tendenz dahin geht, den Fortschritt der Wissenschaft anzuspornen<sup>44</sup>).

Es kann sich natürlich herausstellen, dass die der obigen Methode zu Grunde liegende Voraussetzung unhaltbar ist, d. h. dass es in Wirklichkeit gar keine Axen gibt, in Bezug auf welche Newton's Gesetze (in mathematischer Strenge) gelten. In diesem Falle werden eben andere Axiome formulirt werden müssen. Einstweilen aber kann man doch sagen, dass die obige allgemeine Form der Gesetze uns, zum mindesten dem begrifflichen Inhalte nach (qualitatively), nicht allein den empirischen Ausdruck, den sie zur Zeit haben, als besonderen Fall an die Hand gibt, sondern dass sie auch über die früheren empirischen Ausdrucksformen Rechenschaft ablegt und die Richtung anweist, nach welcher hin wir arbeiten müssen, damit sie in Zukunft verbessert werden können.

Der erste Abschnitt von Mac Gregor's Arbeit schließt mit einer vollkommen zutreffenden Kritik der hier und da (selbst in der gegenwärtigen Literatur) auftretenden, namentlich von Streintz verfochtenen irrigen Behauptung, als sei es möglich, »absolut feste« Richtungen im Raum experimentell festzustellen. Da ich in meinem »Bewegungsbegriff« diesen Irrthum eingehend widerlegt habe, begnüge ich mich, folgende Stelle aus einer Anmerkung Mac Gregor's zu citiren, welche deutlich erkennen lässt, ein wie consequenter Relativist dieser Autor ist.

In Bezug auf im Erdkörper festgelegte Axen drehen sich die Fixsterne um die Polverbindungsline der Erde um, wohingegen in Bezug auf ein an die Fixsterne angeheftetes Axenkreuz die Erde das sich umdrehende ist. Welches ist nun die wirkliche Bewegung? Antwort: beide Bewegungen sind wirklich, so wirklich, als überhaupt irgendwelche Bewegungen sein können. Der Versuch von Foucault und andere ähnliche Versuche werden allerdings als Beweise dafür angesehen, dass es die Erde sei, was sich in Wirklichkeit umdrehe. Zufolge dem Obigen beweisen sie hierfür ganz und gar nichts; sie beweisen lediglich, dass in Hinsicht auf ein dynamisches Bezugssystem die Erde und nicht der Fixsterncomplex in Umdrehung befindlich ist. Eine Bewegung, welche in Bezug auf ein solches System näher bestimmt ist, hat nichts wirklicheres, als eine in anderer Weise

specificirte. Wohl aber finden wir, wenn die Bewegung in solcher Weise näher bestimmt wird, dass wir unsere dynamische Erfahrung vermittelst einfacherer Formeln wiedergeben können, als es möglich ist, wenn wir die Bewegung auf andere Weise specificiren. Und so lassen wir uns zu der Anschauungsweise verleiten, als sei eine auf solche Weise näher bestimmte Bewegung eine »wirkliche Bewegung«  $\alpha\alpha\tau'$   $\xi\zeta\omicron\gamma\eta\upsilon$ . (... we come to regard ... as being real)<sup>45)</sup>.

Hiermit beschließe ich die Anführungen aus Mac Gregor's Abhandlung. Ich wüsste nicht, was ich seinen, wie mir scheint, sehr objectiven Darlegungen weiter hinzufügen sollte, und enthalte mich, da es lediglich auf die Sache ankommt, auch des Nachweises im einzelnen, dass die meisten von Mac Gregor hervorgehobenen Gesichtspunkte in ganz ähnlicher Weise bereits in meinen Schriften betont worden sind. O. Lodge hat gegen die Mac Gregor'schen Widerlegungen anscheinend nichts einzuwenden gewusst; wenigstens finde ich im »Philosophical Magazine« erst 1898 wieder eine mit unserem Problem in loserer Verbindung stehende Arbeit aus seiner Feder, und in dieser nichts zur Sache gehöriges, abgesehen von der dem Geist echter Empirie innerhalb der Fundamente nicht angemessenen Bezugnahme auf den Aether<sup>46)</sup>. Für den unparteiischen Zuschauer liegt der Sieg unzweifelhaft auf der Seite Mac Gregor's.

Nebensächlich scheint es mir zu sein, ob man den von Mac Gregor vorgeschlagenen Ausdruck »dynamische Bezugssysteme« oder den von mir vorgeschlagenen »Inertialsysteme« verwendet. Der letztere scheint mir lediglich wegen seiner Kürze, seiner internationalen Verwendbarkeit (système inertiell, inertial system, sistema inerziale, инерциальная система [russ.]) und der Zusammensetzbarkeit seines ersten Bestandtheiles besonders empfehlenswerth. Es ist, glaube ich, nicht ohne Werth, kurz und aufklärend zu gleicher Zeit von »barycentrischen Inertialbahnen« oder »Inertialbeschleunigungen« reden zu können. Doch steht die Entscheidung über einen nomenclatorischen Wettbewerb dieser Art meiner Ansicht nach nicht dem einzelnen Autor, sondern nur den einschlägigen Commissionen etwaiger Fachgenossentage zu.

Damit übrigens der Leser dieser Abhandlung nicht glaubt, Mac Gregor und Love seien die einzigen Relativisten innerhalb der englischen Literatur, so will ich noch kurz auf die sehr beachtenswerthen Bücher von K. Pearson und von J. B. Stallo verweisen, welche, anscheinend ohne meine Arbeiten zu kennen, sich consequent

zur relativistischen Auffassung aller Bewegungen, auch der drehenden Bewegung bekennen<sup>47)</sup>. Ich theile vollständig Mach's Ansicht, dass das von H. Kleinpeter übersetzte Buch des geborenen Deutsch-Oldenburgers, späteren amerikanischen Bürgers und amerikanischen Gesandten in Rom, J. B. Stallo, zu den vortrefflichsten literarischen Erscheinungen der letzten Jahrzehnte des verflossenen Jahrhunderts zu rechnen ist. Den Philosophen dürfte besonders die Art und Weise interessiren, wie Stallo den früher von ihm selbst innegehabten Hegel'schen Standpunkt überwindet. Kleinpeter sagt in seiner Prossnitzer Programmschrift kurz und zutreffend: »Die Bedeutung der Stallo'schen Kritik ist nach zwei Seiten hin eine tiefgreifende: indem sie den Nachweis von dem Vorhandensein metaphysischer Elemente in der modernen Naturwissenschaft führt und die verhängnissvollen Folgen dieser wenig bekannten Thatsache enthüllt, trifft sie doppelt: die Physik in ihrer heutigen Gestaltung gerade so wie die zahlreichen metaphysischen Systeme der Vergangenheit und Gegenwart, und beide in gleich entscheidender Weise«<sup>48)</sup>.

Als Bundesgenosse gegenüber dem Absolutismus erscheint mir ferner beachtenswerth der amerikanische Astronom S. Newcomb, Verfasser eines der besten populären Handbücher der Himmelskunde. Newcomb hat nämlich 1889 in einer kurzen Notiz darauf hingewiesen, dass die Ausdrücke »Energie« und »Arbeit« keinen bestimmten Sinn haben, solange nicht das Bezugssystem der Bewegung namhaft gemacht wird. Auf die gleiche Thatsache hatte ich bereits 1886 im »Bewegungsbegriff« aufmerksam gemacht, wie es allerdings scheint, ohne viel Beachtung zu finden<sup>49)</sup>. Da ich auf dieses Thema weiter unten<sup>50)</sup> zurückkomme, brauche ich hier in keine Erörterungen darüber einzutreten. Auf einige weitere, in mehr oder minder naher Beziehung zu unserer Hauptfrage stehende Arbeiten englisch oder französisch schreibender Autoren, die mir nur dem Titel nach bekannt geworden sind, kann ich für dieses Mal überhaupt nicht weiter eingehen<sup>51)</sup>.

Hiermit kehre ich zu den Vertretern der deutschen naturwissenschaftlichen Forschung zurück. Welche Stellung gerade die Naturforschung unserer Tage zu dem Problem des dynamischen Bezugssystemes einnimmt, dies nachzuweisen, ist ja nach dem Titel die Hauptaufgabe des vorliegenden Aufsatzes. Von dem, was die Philosophie

dazu sagt, hoffe ich später an einem anderen Orte Bericht erstatten zu können. Die Reihenfolge der Betrachtung wird der Hauptsache nach eine chronologische sein, und nur in wenigen Fällen soll aus Zweckmäßigkeitsgründen von dieser Anordnung abgewichen werden.

Eine der rückhaltlosesten Anerkennungen, die der Begriffsbestimmung des Inertialsystemes überhaupt widerfahren sind, ist diejenige von Seiten des Astronomen H. Seeliger<sup>3)</sup>. In einer recht ausführlichen Besprechung innerhalb der »Literarischen Anzeigen« der »Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft« bezeichnet Seeliger meine Festsetzungen als einen »wesentlichen Fortschritt und als einen »sehr wichtigen Beitrag zur Klarlegung« der »schwierigen und wichtigen Probleme«, die die Grundprincipien der Bewegungslehre betreffen. Der Aufsatz in den Leipziger Berichten reicht nach ihm bereits aus, um einmal vorläufig »über das, was der Verfasser angestrebt und, wie gleich hinzugefügt werden soll, auch vollkommen erreicht hat, zu orientiren«. Seeliger bespricht sodann die Newton'sche Fiction eines »absolut festen« Coordinatensystems bzw. des »absoluten Raumes«, und bezeichnet diese als »Begriffe, deren Dunkelheit durch Umschreibungen nicht weggeschafft werden kann. Es kann aber«, so fährt er fort, »nicht bezweifelt werden, dass solche Definitionen nicht geeignet sind, die Grundlage einer ganzen Wissenschaft abzugeben, und die Nothwendigkeit, hier Klarheit zu schaffen, dürfte nicht zu bezweifeln sein«.

»Dem Verfasser ist dies in ausgezeichnete und beinahe überraschend aufklärender Weise gelungen durch die Aufstellung folgender Definitionen und Lehrsätze«. Folgt: I. Die s. Z. von mir vorgeschlagene Definition des Inertialsystemes. II. Das Theorem, welches den räumlichen Theil des Gesetzes ausspricht. III. Die Definition der Inertial-Zeitscala. IV. Das Theorem, in welchem der zeitliche Theil des Gesetzes seinen Ausdruck findet. Der Referent gibt sodann einen Bericht über die analytisch-phoronomischen Entwicklungen, in welchen mir der Nachweis gelang, dass, wenn es überhaupt ein Trägheitsgesetz gibt, die oben genannten Definitionen und Theoreme den wesentlichen, durch Empirie und Rechnung bestätigten Inhalt desselben erschöpfen.

Auf die weiteren kritischen, in der Hauptsache übrigens zustimmenden Bemerkungen, die Seeliger meiner Bemängelung der in der

Astronomie meist üblichen Darstellung der sogenannten »absoluten Translation« des Sonnensystems widmet, hoffe ich an einer passenderen Stelle zurückkommen zu können<sup>52)</sup>. Dem Urtheil Seeliger's schließen sich S. Günther<sup>3)</sup> und andere Referenten an<sup>53)</sup>.

Fast gleichzeitig hiermit, vielleicht sogar noch etwas früher, sprach der verstorbene Physiker A. König in der Berliner physikalischen Gesellschaft »über die neueren Versuche zu einer einwurfsfreien Grundlegung der Mechanik«<sup>3)</sup>. Der gedruckte Bericht lautet, wie folgt: »In dem Vortrage wurde der historische Entwicklungsgang dieser Bestrebungen unter Bezugnahme auf die Literatur dargelegt und bewiesen, dass in den Abhandlungen von Hrn. Ludwig Lange eine Lösung des vorliegenden Problems bezüglich der mathematisch-mechanischen Grundlage des Beharrungsgesetzes gefunden ist, indem hier scharf unterschieden wird, was conventionelle Festsetzung (Definition) und was Erfahrungsthatsache (Theorem) ist. Herr L. Lange fasst die Resultate seiner Untersuchung folgendermaßen zusammen:« Folgen die beiden Definitionen und die beiden Theoreme. Der Bericht fährt dann fort:

»Herr P. du Bois-Reymond bemerkte, dass das Beispiel des Herrn Streintz von der Tischplatte und dem Kreisel u. A. dem Satze, jede Bewegung sei relativ, widerspreche, und dass die Vorstellung eines starren Raumes wohl eine allen mechanischen Schlussfolgerungen zu Grunde liegende Abziehung sei«.

Hierzu sei mir die folgende kurze Zwischenbemerkung gestattet. Die von der Vorstellung des relativ starren Körpers abgenommene begriffliche Abstraction des starren Raumes ist auch meiner Ansicht nach in den Grundlagen der Geometrie, Phoronomie und Dynamik unentbehrlich. Coordinatenaxen haben selbstverständlich nicht den Zweck, den Begriff des »starrten Raumes« überflüssig zu machen; sie sollen lediglich dazu dienen, die Lage räumlicher Gebilde in dem starren Raum zahlenmäßig beschreiben zu können. Etwas anderes aber, als der »starre Raum«, ist Newton's »absoluter Raum«. Denn »starre Räume« gibt es unendlich viele gegen einander bewegte<sup>54)</sup>; dagegen ist der »absolute Raum« nach Newton's Auffassung nur ein einzelner von diesen unzähligen starren Räumen; und so, wie ihn die Nachfolger Newton's bis heute auffassen, ist er der Gegenstand einer überflüssigen metaphysischen Dogmatik,

d. h. einer transcendirenden Aussage, die nicht aufklärend, sondern lediglich verdunkelnd wirkt. Den in meinen früheren Arbeiten geführten Nachweis hierfür brauche ich nicht zu wiederholen, zumal der metaphysische Charakter des »absoluten Raumes« und die Zwecklosigkeit dieses »Begriffes« von den Meisten anerkannt wird. — Das von P. du Bois Reymond erwähnte Streintz'sche Beispiel beweist genau eben so wenig, wie der Newton'sche Eimerversuch<sup>55)</sup>.

Der Bericht der Berliner »Verhandlungen« schließt mit dem Satze: »Diese Andeutung über das in der Sitzung Mitgetheilte möge hier genügen, da beabsichtigt wird, auf den Gegenstand später zurückzukommen, um zu zeigen, dass dieser durch die von Herrn A. König erwähnten neueren Arbeiten, wenn auch in mancher Hinsicht, z. B. in mathematischer, erheblich gefördert, doch erkenntnisstheoretisch noch nicht zu befriedigendem Abschluss gebracht ist«. Man muss sehr bedauern, dass die hiermit in Aussicht gestellte Discussion, soviel wenigstens aus den späteren Jahrgängen der »Verhandlungen« ersehen werden kann, unterblieben ist. Aus welchen Gründen dies geschah, ist mir nicht bekannt geworden. Am nächsten liegt es wohl, auf die in der Zwischenzeit erfolgten bahnbrechenden Entdeckungen der Fortpflanzung elektrischer Schwingungen (H. Hertz), der Kathoden- und der X-Strahlen (Lenard, Röntgen), sowie auf die Ausbildung der elektromagnetischen Lichttheorie Maxwell's und der Elektronentheorie (H. A. Lorentz u. A.) hinzuweisen. Durch diese Funde wurde die gesammte praktische und theoretische Physik in einer Weise belebt, dass die erkenntnisstheoretischen Grundfragen, ungeachtet ihrer allseitig anerkannten Wichtigkeit, eine Zeit lang nothwendig wieder etwas in den Hintergrund treten mussten.

Dass diese Fragen aber, nachdem sie einmal in Fluss gekommen, nicht wieder von der Bildfläche verschwinden konnten, ist selbstverständlich; und so zeigt denn in der ganzen Folgezeit die Literatur ein beständig wachsendes Interesse an ihnen. Die nachfolgende Uebersicht wird das zur Genüge beweisen.

C. Neumann bringt in seinem 1887 der Kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegten Aufsätze »Grundzüge der analytischen Mechanik«<sup>56)</sup> einen Abschnitt unter der Aufschrift »Definition des absoluten Axensystems«. Als eine wirkliche Definition im logisch-mathematischen Sinne kann das von ihm hier Gesagte nicht

anerkannt werden. Im Anschluss an Laplace, der von den Newton'schen Festsetzungen nur darin abweicht, dass er die Realität oder Idealität des absoluten Raumes dahingestellt sein lässt, wird ein »unbeweglicher und für die Materie durchdringlicher« Raum vorausgesetzt, auf den die absoluten Bewegungen zu beziehen seien. Ist in den Laplace'schen Worten mit »Unbeweglichkeit« lediglich »Starrheit« des Raumes gemeint, so springt nach den eben erst gemachten Ausführungen die Unbestimmtheit und Unzureichendheit jener Voraussetzung in die Augen, wie denn auch Neumann selber später zeigt, dass das Kriterium der Starrheit nicht genügt, dass vielmehr zahllose starre Coordinatensysteme existiren bezw. möglich sind, die sich wegen Drehung oder Beschleunigung gegen den »absoluten Raum« ganz und gar nicht dazu eignen, der Dynamik zu Grunde gelegt zu werden<sup>56)</sup>. Ist aber das Wort »unbeweglich« bei Laplace nicht im Sinne von »starr« verstanden, so erhebt sich sofort die Frage: »in Bezug worauf unbeweglich?«, und die ganze Fiction zerrinnt abermals in den Nebel der Sinnlosigkeit. Beachtenswerth ist dagegen an Neumann's Erklärung, obschon diese, wie bereits gesagt, den Werth einer Definition nicht besitzt, die Betonung des Umstandes, dass das Bezugssystem der Dynamik ein einheitliches sein muss. Diese Stipulirung ist zwar einerseits übertrieben, insofern jedes von den unzähligen Inertialsystemen gleich geeignet zum dynamischen Bezugssystem ist, aber andererseits sucht sie doch dasjenige, was den eigentlichen Kern des Beharrungsgesetzes ausmacht, nämlich die Geradlinigkeit der Bahnen beliebig vieler unbeeinflusster Punkte bezüglich eines und desselben Systems, zum Ausdruck zu bringen. Allein, da Neumann von der phoronomisch nachgewiesenen Thatsache, dass die geradlinige Bewegung von Punkten bis zur Dreizahl lediglich Convention ist und mehr als eine solche erst bei Ueberschreitung der Dreizahl wird, keine Notiz nimmt, fehlt seiner Darstellung der Eck- und Schlussstein. Den Körper »Alpha« scheint Neumann aufgegeben zu haben, wenigstens erwähnt er ihn in den »Grundzügen« mit keinem Worte.

Im Jahre 1889 erschien die zweite Auflage von Mach's Mechanik. In dieser, wie in allen späteren Auflagen des classischen Werkes schreibt Mach<sup>57)</sup> nach einer eingehenden Widerlegung der Streintz'schen Formulierungen: »Die Lange'sche Schrift<sup>58)</sup> scheint mir zu

dem Besten zu gehören, was über die vorliegenden Fragen gearbeitet worden ist«. Es folgt eine ziemlich ausführliche Darlegung meiner Vorschläge. Dann fährt Mach fort:

»Zunächst soll nicht bestritten werden, dass man das Trägheitsgesetz auf ein derartiges Raum- und Zeitkoordinatensystem beziehen und so ausdrücken kann. Eine solche Fassung ist wohl für die praktische Anwendung weniger geeignet als die Streintz'sche<sup>59)</sup>, dagegen der methodischen Vorzüge wegen ansprechender. Mir persönlich ist sie besonders sympathisch, da ich mich vor Jahren mit analogen Versuchen beschäftigt habe, von welchen nicht etwa Anfänge, sondern Reste stehen geblieben sind. Ich habe diese Versuche aufgegeben, weil ich die Ueberzeugung gewonnen habe, dass man durch alle diese Ausdrucksweisen (so auch durch die Streintz'sche und die Lange'sche) nur scheinbar die Beziehung auf den Fixsternhimmel und den Drehungswinkel der Erde umgeht. . . »Es scheint sehr fraglich, ob ein vierter sich selbst überlassener materieller Punkt in Bezug auf ein Lange'sches 'Inertialsystem' eine Gerade (gleichförmig) durchlaufen würde, sobald der Fixsternhimmel nicht vorhanden, oder nur nicht mit genügender Genauigkeit als unveränderlich anzusehen wäre«.

Wenn ich Mach recht verstehe, so rechnet er beispielsweise mit der Möglichkeit, dass in einem entfernteren Sternhaufen die dynamischen Bezugssysteme zu denjenigen unseres Fixsterncomplexes irgendwie gedreht sein könnten. Er hält es eben principiell für möglich, dass die Geradlinigkeit der Bahnen sich selbst überlassener Punkte relativ zum Fixsternhimmel nicht lediglich phoronomisch, sondern zugleich auf irgend eine physikalische Art und Weise durch die Lagen der Fixsternmassen bedingt sei. Beide Möglichkeiten sind im Princip zweifellos zuzugestehen<sup>60)</sup>, und es wäre ein unverzeihlicher Starrsinn, wollte man die von mir vorgeschlagene Fassung des Beharrungsgesetzes in dem Sinne ausdeuten, dass Forschungen über das Zutreffen oder Nichtzutreffen der von Mach betonten Eventualitäten von vornherein unterbunden würden. So habe ich meine Formulierung auch niemals gemeint. Indessen, das muss doch bei dieser Gelegenheit sogleich betont werden, dass der bisherige Stand der physikalisch-astronomischen Erfahrung und Theorie keinen Anhaltspunkt ergeben hat, um Mach's Vermuthungen zu stützen. Der historisch-kritisch

begründete Weg der Forschung scheint mir vielmehr in der Richtung zu liegen, dass in solchen Fällen, wo man Abweichungen für sich selbst überlassen gehaltenen Punkte von der geradlinigen Bahn beobachten sollte, es das Nächstliegende sein würde, genauer zu prüfen, ob die Annahme des Sich-selbst-überlassen-seins denn auch zutrifft, ob nicht vielmehr die einfache Voraussetzung ablenkender Kräfte ausreicht, um die beobachteten Abweichungen ausreichend zu erklären. Die Geschichte der Entdeckung des Neptun durch Leverrier und Adams wäre ein classisches Vorbild für derartige Forschungen. Auf die Bewegungen der Fixsterne selbst das Beharrungsgesetz anzuwenden, ist von dem mehr physikalischen als astronomischen Standpunkt, den Mach in dieser Frage einnimmt, der Natur der Sache nach unmöglich.

Im Anschluss an die Mach'schen Erörterungen haben B. u. J. Friedländer 1896 eine Versuchsordnung mitgetheilt, von der sie sich einen Erfolg zur Beantwortung der Frage versprechen, ob die von Mach angedeuteten Möglichkeiten thatsächlich zutreffen<sup>3)</sup>. Das möglichst rasch rotirende Schwungrad eines großen Walzwerkes soll durch seine eventuelle Einwirkung auf eine Drehwage<sup>61)</sup> den Einfluss unmittelbar benachbarter rotirender Massen auf die Bahnen sich selbst überlassener Punkte nachzuweisen gestatten. Es würde sich also, methodologisch betrachtet, um ähnliche Versuche handeln, wie sie z. B. von Cavendish zur Ermittlung der Erdmasse angestellt worden sind; auch an die fehlgeschlagenen Versuche von O. Lodge, betreffend die Mitbewegung des Aethers in rotirenden Massen, darf in diesem Zusammenhange erinnert werden. Ob die zufolge der Friedländer'schen Anordnung etwa unternommenen Experimente inzwischen ein einwandfreies Ergebniss erzielt haben, ist, soviel ich sehe, nicht bekannt geworden. Die großen technischen Schwierigkeiten hebt J. Friedländer bereits selbst hervor, und Mach seinerseits besorgt, dass das Experiment überhaupt quantitativ nicht zureichen werde, um entscheidend zu sein<sup>62)</sup>.

Der von Mach erhobene Einwand gegen meine Vorschläge, dass man durch alle diese Ausdrucksweisen nur scheinbar die Beziehung auf den Fixsternhimmel u. s. w. umgehe, hat übrigens, abgesehen von seiner soeben besprochenen materiell-physikalischen Seite, noch eine rein methodologische Seite, auf die ich nicht weiter einzugehen brauche,

da ihr Mac Gregor in dem oben wiedergegebenen Abschnitt seiner Abhandlung vollauf gerecht geworden ist<sup>63</sup>). Dass eine abstract-mathematische Formulirung des Beharrungsgesetzes, wie die von mir verfochtene, sich sehr dazu eignet, um zugleich mit einer rein physikalischen, wie der Mach'schen, der Dynamik zur Grundlage zu dienen, dürfte Mach, nach seinen bisherigen Auslassungen zu schließen, wohl nicht in Abrede stellen. Beide Formulirungsweisen müssen sich meiner Ansicht nach gerade in derselben Weise, wie es überhaupt **Empirie** und **Rechnung** thun, gegenseitig ergänzen, wenn das **Kirchhoff'sche** Ziel, wie es auch Mach in ganz ähnlicher Formulirung der analytischen Mechanik vorzeichnet, nämlich die Bewegungserscheinungen vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben, erreicht werden soll. In diesem Sinne wäre der Trägheitssatz (in der von mir befürworteten Form) etwa ähnlich anzusehen, wie das Euklidische Parallelenaxiom; so gut es über das letztere hinaus eine nicht-euklidische Geometrie gibt, ist auch eine nicht-inertiale Dynamik denkbar, ja sicherlich sogar empfehlenswerth, eine solche weiter auszubilden. So wenig aber einstweilen das Parallelenaxiom zum alten Eisen geworfen werden kann, ebensowenig wird der über das bloß Conventi-  
onelle hinausgehende inductiv begründete Kern des Galilei-Newton'schen Gesetzes aus der Dynamik ausgeschieden werden können. Auch H. Hertz, wohl der genialste und einflussreichste Vertreter der Anschauung, dass die autoritative Alleinherrschaft der Newton'schen Grundlegung fallen müsse, kann den Trägheitssatz nicht entbehren.

Die im Jahre 1890 erschienene »Allgemeine Mechanik« von E. Budde<sup>3</sup>) nimmt, wie bei einem gedrängten Compendium begreiflich, auf die neueren, den Bewegungsbegriff berührenden Einzelforschungen keinerlei Bezug. Gleichwohl darf sie in diesem Zusammenhang besprochen werden; denn sie legt ein erfreuliches Zeugniß dafür ab, dass die moderne Mechanik, offenbar nicht zum wenigsten unter Mach's Einfluss, immer allgemeiner das Bedürfniss fühlt, selbst Grundrissen und Lehrbüchern eine zwar kurze, aber zu weiterem Nachdenken anregende Besprechung der fundamentalen Fragen einzuverleiben. Natürlich darf der Leser in dem Rahmen eines Werkes, wie es Budde zu schreiben unternommen, eine nach allen Seiten erschöpfende und das Für und Wider der gemachten Verbesserungs-

vorschläge kritisch abwägende Besprechung der in Rede stehenden Grundfrage gar nicht erwarten. Budde geht, wie die Mehrzahl der neueren Mechaniker, davon aus, zu betonen, « dass die Ortsbestimmung ihrer Natur nach relativ« ist; »sie hat nur einen Sinn, insofern ihr ein als gegeben vorausgesetztes Coordinatensystem zu Grunde gelegt wird«<sup>64</sup>). Er unterscheidet ferner, wie es ebenfalls fast alle neueren Verfasser ähnlicher Werke thun, mit principieller Strenge zwischen Phonomie und Dynamik, und kommt in dem der letzteren gewidmeten zweiten Hauptstücke seines Buches auch auf die Frage des dynamischen Bezugssystems näher zu sprechen. Er führt hier gleich anfänglich aus, dass eine Bezugnahme auf das triviale geocentrische, d. h. mit dem Erdkörper fest verbundene System genügt, um die ersten dynamischen Grundbegriffe, insbesondere den Kraftbegriff, zunächst einmal im Rohbau aufzuführen<sup>64</sup>). Dann zeigt er, dass das Galilei'sche Princip nicht in jedem beliebigen Coordinatensystem gelten kann, dass seine bis dahin vorausgesetzte Gültigkeit mit Bezug auf den Erdkörper überhaupt nur eine annähernde ist, und dass die Natur, soviel bekannt, schlechterdings keinen einzigen Körper darbietet, der dem Beharrungsgesetz unmittelbar und in theoretischer Strenge zu Grunde gelegt werden dürfte<sup>64</sup>). Er schließt diese Betrachtungen mit einer Erörterung ab, die in den folgenden Hauptsätzen gipfelt: »Wir nehmen vorläufig an, es existire in der Welt wenigstens ein Coordinatensystem, in welchem das Galilei'sche Princip streng gültig ist. Dasselbe soll ‚Fundamentalsystem‘ heißen«. . . »Bis zum ausdrücklichen Widerruf führen wir von jetzt ab alle Rechnungen unter Zugrundelegung eines Fundamentalsystems; die in ihm bestimmten Geschwindigkeiten, Kräfte etc. sollen kurz als ‚absolute‘ Geschwindigkeiten etc. bezeichnet werden, und wo keine Zweideutigkeit eintreten kann, als ‚Geschwindigkeiten etc.‘ schlechthin. — Dabei behalten wir im Auge, dass die Erde nicht sehr weit vom Fundamentalsystem verschieden ist, rohere Resultate der Rechnung also auf der Erde bestätigt werden können«<sup>64</sup>).

Gegen diese Ausführungen habe ich folgendes einzuwenden. Erstens will mir die Ausdrucksweise: »es existire in der Welt« wenigstens ein Coordinatensystem u. s. w., durchaus nicht gefallen. Der reale Kern des Gesetzes wird doch, wie ich nicht weiter

auszuführen brauche, viel treffender wiedergegeben mit einer Erörterung des Inhaltes, dass ein solches System lediglich phoronomisch möglich oder »construirbar« ist: freilich, um die merkwürdige Bedeutung dieser Constructionsöglichkeit in ihrem ganzen Gehalt zu erfassen, müsste man den phoronomischen Nachweis vorausschicken, dass für drei oder weniger als drei materielle Punkte jene Annahme eine Selbstverständlichkeit enthält, und dass sie erst für eine Mehrzahl bewegter Punkte einen überraschenden Inhalt gewinnt. Vor einem solchen ausführlicheren Nachweis mag nun Budde im Rahmen seines Werkes zurückgeschreckt sein. Meiner Ansicht nach ist indessen die aufklärende Wirkung, die damit erreicht würde, eine so überaus bedeutende und Gewinn bringende, dass es auf zwei oder drei weitere dadurch bedingte Textseiten in einem Handbuch der Mechanik schwerlich ankommen kann.

Zweitens möchte ich nochmals dringend davor warnen, die alten Ausdrücke »absolute Geschwindigkeit« u. s. w. aus purer Bequemlichkeit beizubehalten, und wenn es selbst, wie bei Budde offenbar, nur im übertragenen Sinne und ohne metaphysische Hintergedanken geschähe. Wenn man die Relativität der Bewegung im Princip anerkennt, so ist ein derartiger Sprachgebrauch allermindestens formell inconsequent. Er ist aber, aus höheren Gesichtspunkten betrachtet, weit mehr als das; denn er öffnet überflüssigen Transcendirtendenzen — wie sie in dem abergläubischen Nährboden der Menschenseele nun einmal unendlich tief eingewurzelt sind, — Thür und Thor. Solange die Darstellungen der Mechanik sich nicht entschließen können, das Wort »absolut« gänzlich aus dem Sprachschatz zu verbannen, solange wird das metaphysische Gespenst des absoluten Raumes aus den Köpfen der Lernenden nun und nimmer verschwinden<sup>65</sup>).

Der zur Vereinfachung der Gleichungen oftmals sehr zweckdienliche Hinweis auf die constructive Möglichkeit unendlich vieler (geradlinig und gleichförmig ohne Drehung gegen einander bewegter) Fundamentalsysteme kommt bei Budde in der principiellen Darstellung jedenfalls zu kurz. Dass der Ausdruck »Fundamentalsystem« an begrifflicher Prägnanz dem Ausdruck »Inertialsystem« erheblich nachsteht, mag zum Schluss noch kurz erwähnt werden<sup>66</sup>). Alles in Allem stehe ich aber nicht an zuzugeben, dass die Budde'schen Erörterungen,

verglichen mit denjenigen vieler früherer Lehrgänge der Mechanik, einen ganz beträchtlichen Fortschritt bedeuten.

Im Jahre 1891 hat G. Frege unter dem Titel »Ueber das Trägheitsgesetz« eine eingehende Studie zu meinem »Bewegungsbegriff« veröffentlicht<sup>3)</sup>. Diese Arbeit hat zwar ihren Platz in einer fachphilosophischen Zeitschrift gefunden, und enthält auch in der That viele beachtenswerthe philosophische Darlegungen; da indessen einige der Frege'schen Criticismen mich zu Ergebnissen führen, welche — als Grundlage sich anschließender weiterer Erwägungen — am besten an dieser Stelle meines Aufsatzes Platz finden, so darf die Besprechung der Frege'schen Studie hier nicht unterbleiben; um so weniger, als sie die Arbeit eines Fachmathematikers ist.

»Was das heißt ‚ein Körper bewegt sich‘ oder ‚ist in Ruhe‘, scheint so klar zu sein, dass nichts zu erklären übrig bleibt. Die unten genannte lesenswerthe Schrift ist dazu geeignet, aus dieser falschen Sicherheit aufzustören und zu weiterem Nachdenken anzuregen«<sup>67)</sup>. . . . »Wenn man eine Frage«, wie diejenige nach dem Bezugssystem der Bewegungsgesetze, »nicht beantworten kann, so kann man sie wenigstens hinter der Wolke einer ungenauen Redeweise verschwinden lassen, was in unserem Falle besonders angenehm ist; denn wollte man sie als offene behandeln, so würde die Grundlage der ganzen Physik zu schwanken scheinen«<sup>67)</sup>. Weiterhin erwähnt Frege — in Uebereinstimmung mit mir und P. Johannesson<sup>68)</sup> — dass die Newton'schen Aufstellungen über Raum, Zeit und Bewegung (als absolute Wesenheiten) bei ihrem Urheber theologisch begründet sind, eine Begründungsweise, die dem heute herrschenden Geschmack in der wissenschaftlichen Mechanik jedenfalls ganz und gar nicht zusage; auch stellt er fest, dass Newton sich mit seiner Begründung des Trägheitsgesetzes im Kreise bewegt<sup>69)</sup>. Meine Behauptung, dass Newton's absoluter Raum und absolute Zeit nicht einmal nothwendige Uebel, sondern überflüssige Producte des »esprit métaphysique« sind, hält gleichwohl Frege für über das Ziel hinausgeschossen; er beruft sich hierbei auf die empirische Ausstattung, die den »absoluten Raum mit den wahrnehmbaren Erscheinungen in Zusammenhang« bringe<sup>69)</sup>, indem nämlich das Trägheitsgesetz mit Bezug auf ihn ausgesprochen werde. Diese empirische Ausstattung ermögliche es sehr wohl, Aussagen über die Bewegungen zu dem absoluten

Raum zu machen. Hierzu möchte ich mich beschränken, eine Stelle aus meinem »Bewegungsbegriff« zu erneutem Abdruck zu bringen. Es heißt da<sup>70)</sup>: »Wenn nicht Newton dogmatisch seinem absoluten Raum die Eigenschaft eines Inertialsystems beigelegt hätte, so würde über die Bewegung zu ihm von Newton's eigenem Standpunkte aus empirisch Nichts festzustellen zu sein. Man kann sich nicht wundern, an einem ‚transcendenten Objecte‘ etwas Empirisches wiederzufinden, wenn man selber es vorher, wiewohl in etwas anderer Gestalt, künstlich« (d. h. ohne jede Begründung, rein dogmatisch) »hineinverlegt hat. Nur daraus, dass Newton seinen transcendenten absoluten Raum mit jener der Empirie zugänglichen Eigenschaft ausstattete, ist es überhaupt erklärlich, dass der Begriff der absoluten Bewegung auf so lange Zeit in die Wissenschaft übergehen konnte. Andernfalls würde er, wie ein Hirngespinnst ohne jegliche Anwendbarkeit auf gegebene Fälle, alsbald wieder daraus verschwunden sein. So aber bleibt an dem Begriffe der absoluten Bewegung doch immerhin ein werthvoller Kern, bestehend in demjenigen, was er mit dem Begriffe der Inertialdrehung gemein hat«.

Der letzte Satz dieser Selbstanführung enthält auch meine Stellungnahme zu der weiteren Bemerkung Frege's: »Mir scheint der Unterschied zwischen Newton's Lehre und der des Verfassers nicht so groß, wie diesem. Ich verkenne aber durchaus nicht, dass des Letzteren Bemühungen die Frage um ein gutes Stück gefördert haben«<sup>69)</sup>. — Ich selber habe mich niemals darüber getäuscht, dass der physikalische Kern des Begriffes des Inertialsystems nicht mein geistiges Eigenthum, sondern dasjenige des großen Briten ist. Mir lag lediglich die methodologische und erkenntnisstheoretische Aufgabe ob, von diesem Kern die überflüssige metaphysisch-dogmatische Schale loszulösen und ihn so in seiner ganzen »euklidischen Durchsichtigkeit« vor Aller Augen zu stellen. Und dass mir dies gelungen ist, erkennt Frege, wie mir scheint, im weiteren auch an, wenn er, in Umkehrung des schon oben angeführten Gedankenganges sagt, dass der nach Newton's Worten freilich transcendent reale absolute Raum in Wirklichkeit versteckter Weise dennoch mit der Erfahrung verknüpft sei, und wenn er dann fortfährt: »Es ist kein geringes Verdienst des Verfassers, an die Stelle dieser versteckten Verknüpfung eine klar ausgesprochene gesetzt zu haben. In der Newton'schen

Annahme eines einzigen absoluten Raumes ist mehr enthalten, als zur Erklärung der Erscheinungen nöthig ist. Von den unendlich vielen möglichen Inertialsystemen, die sich gegeneinander gleichförmig ohne Drehung bewegen, ist keines irgendwie ausgezeichnet, sodass man es als ruhend im absoluten Raume eher als irgend ein anderes betrachten könnte. Newton kann daher Ruhe und gleichförmige Bewegung in Bezug auf den absoluten Raum nicht auseinanderhalten, weil in der Erfahrung kein Anhalt für diese Unterscheidung gegeben ist. Diese für die Erklärung nutzlose und über die Erfahrung hinausgehende Auszeichnung eines einzigen Inertialsystemes hat Lange glücklich vermieden und insofern hat er Recht, wenn er bei Newton etwas Transcendentales tadelt<sup>71)</sup>.

Wenn Frege unmittelbar darauf sagt: »Für endgültig abgeschlossen halte ich auch nun die Frage noch keineswegs«, so pflichte ich ihm ohne jeden Vorbehalt bei. Alle echte Wissenschaftlichkeit hat von Grund aus die Tendenz, immer wieder aufs neue über sich selbst hinauszugehen. Denn jede fortschreitende Erkenntniss des Menschengeschlechts besitzt nun einmal den Charakter einer unendlichen Reihe<sup>72)</sup>, und im günstigsten Falle den Charakter einer gewissermaßen convergenten Reihe. In weiterer Verfolgung dieses Bildes darf gesagt werden, dass es mir wohl gelungen ist, für eine bis dahin zweifelhaft scheinende Reihe die Convergenz von einem gewissen Gliede an nachzuweisen, und die Grenze, der die Erkenntnissumme zustrebt, mit einer immerhin beachtenswerthen Annäherung anzugeben. Dass aber ein endgültiger Abbruch der Reihe bei dem von mir wegen seiner Wichtigkeit hervorgehobenen Gliede eine thörichte Vermessenheit sein würde, ist ohne weiteres klar. Es soll mich deshalb aufrichtig freuen, wenn Andere noch weitere Glieder hinzufügen und es recht bald gelingt, die Summe der mechanischen Fundamental-erkenntniss auf einen Grad der Genauigkeit zu bringen, wie wir ihn vergleichsweise in der Berechnung der Zahl  $\pi$  erreicht haben, die, wenn ich nicht irre, bis auf 500 Decimalen exact festgestellt ist. So wenig aber die neueren Berechnungen der Ludolph'schen Zahl die Richtigkeit der schon früher bekannten ersten Decimalen in Frage stellen, gerade so wenig werden weitere fundamentalmechanische Untersuchungen den Begriff des Inertialsystemes, als eines bis zur Dreizahl der betrachteten Massenpunkte lediglich conventionellen Coordinatensystems, über den Haufen werfen können.

Ueber die noch fehlenden Glieder der Erkenntnissreihe könnten im Anschlusse hieran eine Anzahl nicht uninteressanter Bemerkungen gemacht werden; allein es scheint mir der Sache am dienlichsten zu sein, wenn ich mich auf einige Andeutungen beschränke. Bei der Entwicklung der dynamischen Grundbegriffe musste ich nothwendig gewisse rein mathematische Elementarbegriffe, insbesondere auch den Begriff des in sich (d. h. in der Lage seiner einzelnen Punkte gegeneinander) »starrten Raumes« voraussetzen<sup>73)</sup>. Die historische Genesis und die logisch-erkenntnistheoretische Berechtigung dieser Begriffe bedarf, wie ich wohl weiß, noch mancher Aufklärung; und die von Frege auf S. 150—157 seiner Abhandlung gegebene Auseinandersetzung scheint mir sehr geeignet, die bedeutenden Schwierigkeiten, welche jenen Begriffen infolge der Relativität der Längenmessung anhaften, in drastischer Weise zu illustriren. Leider muss ich es mir für diesmal versagen, zu diesen Betrachtungen Frege's Stellung zu nehmen. Frege will ja auch durchaus nicht damit meinen Standpunkt erschüttern, sondern lediglich zeigen, wo meine Aufstellungen seiner Ansicht nach einer erkenntnistheoretischen und logischen Ergänzung bedürfen. Ergänzungen dieser Art erscheinen aber mir selbst um so wichtiger, als es sich dabei keineswegs immer um letzte kleine »zu vernachlässigende« Glieder der Erkenntnissreihe handelt, sondern zum Theil wenigstens um Glieder, die dem von mir ins Licht gerückten in der Reihenfolge vorangehen. Sollten Andere diesen Gliedern eine erhöhte Aufmerksamkeit zuwenden, so kann das Frege und mir nur willkommen sein.

Einer weiteren Ergänzung bedarf die Theorie des Inertialsystems, wie schon oben festgestellt, seitens der physikalischen und astronomischen Forschung, nämlich in der Richtung, zu ermitteln, ob ein einheitliches Bezugssystem, in Bezug worauf die Bahnen beliebig vieler sich selbst überlassener Punkte streng geradlinig sind, überhaupt construirt werden könne. Wie bereits auseinandergesetzt wurde, ist diese Annahme bisher nicht erschüttert, aber freilich auch nicht mit höchster und letzter erreichbarer Genauigkeit endgültig nachgewiesen worden<sup>74)</sup>.

Nicht zugeben kann ich es, wenn Frege sagt, man könne mir hinsichtlich der Definition des Inertialsystemes einen ähnlichen Vorwurf des Cirkels machen, wie ich ihn gegen Newton erhoben habe<sup>75)</sup>.

Missverständliche Auslegung meiner Vorschläge kann allerdings zu einem Cirkel führen; der Vorwurf trifft aber dann nicht die Sache, sondern eine irrthümliche Auffassung derselben. Allein, da von zwei anderen Autoren, wie wir sogleich sehen werden, der nämliche Einwand erhoben wird, so schließe ich, dass mir der Ausdruck dessen, was ich mit der Definition des Inertialsystemes beabsichtigte, s. Z. noch nicht in ganz unzweideutiger Weise gelungen ist. Auf jeden Fall erwächst mir die Pflicht, auf die erwähnten Criticismen ausführlich einzugehen.

Frege führt seinen Einwand mit folgenden Worten näher aus: »Die Frage, ob ein materieller Punkt ‚sich selbst überlassen‘ sei, übersteigt die Erfahrung ebenso, wie die, ob er absolut ruhe. Bei Newton war die Frage: wie unterscheiden wir wahre Bewegung von der scheinbaren? Hier ist die Frage: wie unterscheiden wir beeinflusste Bewegung von der eines sich selbst überlassenen materiellen Punktes? Bei Newton bedurften wir zur Beantwortung der Kenntniss des absoluten Raumes, die wir nicht haben; hier bedürfen wir der Kenntniss eines Inertialsystems, die uns gleichfalls fehlt. Denn, um zu wissen, ob ein gegebenes Coordinatensystem ein Inertialsystem sei, müssten wir unsere Frage schon beantwortet haben«<sup>75</sup>). Ganz ähnlich äußert sich P. Johannesson (1896): »Die dritte Eigenschaft eines in seiner Bewegung beharrenden Massentheilchens, seine Unabhängigkeit von anderen Massen, ist von den erwähnten Forschern nicht untersucht worden. Sie benutzen dieselbe bei ihren Herleitungen als etwas Selbstverständliches. In uns hat gerade sie die größeren Zweifel erregt«<sup>75</sup>) . . . . . »Man kann eben nicht umhin, die Kraft durch das Fehlen der Beharrung, und die Beharrung durch das Fehlen von Kräften zu erklären« . . . . . »Deshalb treten wir nicht den Formen bei, in denen Neumann, Streintz, Lange und Weber das Beharrungsgesetz schließlich aussprechen, da sie ein Merkmal für das Fehlen der Kraftbeziehung nicht angeben und nicht angeben können«<sup>75</sup>) . . . . . »Wie wenig aber« — mit den verschiedenen vorgeschlagenen Coordinatensystemen — »den Schwierigkeiten im Beharrungssatze abgeholfen ist, lehrt diese kurze Ueberlegung. In allen mitgetheilten Vorschlägen müssen die beharrenden Körper die Eigenschaft besitzen, dass sie ‚nicht unter dem Einfluss fremder Massen stehen‘ oder ‚sich selbst überlassen sind‘

oder ‚keinen Kräften unterliegen‘. Nach unserer Zergliederung der im Beharrungsgesetz vorhandenen Gedanken können jene Beschränkungen nur bedeuten ‚ohne räumliche Beziehung zu anderen Massen‘, weil sonst unser Gesetz zu einer leeren Selbstverständlichkeit entartet«<sup>76)</sup>.

In verwandtem Sinne äußert sich auch H. Kleinpeter (1900):

Die von Lange aufgestellten Definitionen und Theoreme »sind jedenfalls geeignet, die wirkliche Bedeutung des Trägheitsgesetzes in ein helleres Licht zu rücken; als einwurfsfrei und als eine endgültige Lösung können sie jedoch nicht betrachtet werden. Einmal ist es schwer einzusehen, wie eine praktische Bestimmung des Coordinatensystems durchzuführen wäre, die ja doch möglich sein muss, wenn das Gesetz irgend welchen Werth haben soll; dann ist dasselbe auch in rein theoretischer Beziehung keineswegs correct formulirt. Es fehlt nämlich eine Bestimmung darüber, was man unter ‚sich selbst überlassenen Punkten‘ zu verstehen habe. Ob ein Punkt als ein solcher zu betrachten ist oder nicht, lässt sich ja durch keine anderweitige Erfahrung feststellen. Wenn aber der Ausdruck so viel bedeuten soll, als von Kräften unbeeinflusst, so ist, da ja dies nur nach dem Trägheitsgesetze beurtheilt werden kann, der Cirkel offenbar, und die Hauptschwierigkeit bleibt bestehen«<sup>76)</sup>.

Zunächst muss ich auf diese Einwendungen erwidern, dass ich über die große Schwierigkeit, die eine scharfe begriffliche Erklärung der Bedingung des »Sich-selbst-überlassen-seins« darbietet, schon früher sehr eingehend nachgedacht habe, und dass der Vorwurf Johannes-son's, dieser Begriff werde irrthümlicher Weise »als etwas Selbstverständliches« vorausgesetzt, mir gegenüber ungerechtfertigt ist. In meiner allerersten Arbeit über das Beharrungsgesetz bin ich, wie Jedermann nachlesen kann, in dieser Hinsicht den Vorschlägen von Mach und Maxwell beigetreten, von denen der erstere bei Johannes-son erwähnt und zwar abgelehnt, aber doch immerhin als ein nennenswerther Versuch anerkannt wird<sup>77)</sup>. In meinen späteren Arbeiten habe ich freilich diesen an andere Autoren sich anlehnenden Standpunkt nicht aufs Neue festgelegt, weil er mir selbst nicht mehr genügte; ich zog es vielmehr vor, die Frage einstweilen offen zu lassen, einestheils um das, was mir zunächst die Hauptsache zu sein schien, nicht durch verwirrendes Beiwerk zu verschleiern, andernteils, weil ich die ganz richtigen Ideen, die ich von der Sache hatte, noch

nicht in einwandfreier Weise zu formuliren wusste. Wer die nächsten Seiten dieser Abhandlung aufmerksam durchliest, wird finden, dass auch jener letzten begrifflichen Schwierigkeit des Beharrungsgesetzes ohne große Umstände abzuhelfen ist.

Ehe ich jedoch zu diesen Erörterungen übergehe, möchte ich vorerst zu dem Einwand Kleinpeter's Stellung nehmen, dass meine Definition des Inertialsystemes keine praktische Bestimmung der dynamischen Bezugsaxen durchführbar mache, »die ja doch möglich sein muss, wenn das Gesetz irgend welchen Werth haben soll«. — Die Definition des Inertialsystemes sollte so, wie ich sie gab, überhaupt gar nicht der unmittelbaren praktischen Construction eines Inertialsystems dienen, sondern lediglich das methodologische Prototyp aller praktischen Constructionen dynamischer Bezugssysteme darstellen. In diesem Sinne habe ich an mehreren Orten von der »idealen Construction des Inertialsystemes« gesprochen und keinen Zweifel darüber gelassen, dass die praktischen realen Constructionen sich von jener Idealconstruction, wenn auch nicht methodologisch, so doch physikalisch betrachtet, erheblich unterscheiden<sup>78)</sup>. Diese praktischen Methoden, wie z. B. diejenigen, welche auf der Benutzung gyroscopischer Erscheinungen oder des Foucault'schen Pendels beruhen, stellen in der That nichts anderes, als eine durch die Verhältnisse gebotene, mehr oder minder complicirte Ausgestaltung jenes Prototypes dar, und sind logisch von genau demselben Gesichtspunkt zu beurtheilen, wie zahlreiche andere praktische Ausgestaltungen prototypisch einfacher Begriffe, die die mathematischen und physikalischen Disciplinen aufweisen. Der Begriff der geraden Linie wird z. B. praktisch ausgestaltet durch das Lineal; und gerade dieses Analogon ist überaus lehrreich für unseren Fall, wie die nachfolgende Erwägung zeigt. Wiewohl die Theorie des Inertialsystemes den mathematisch und erkenntnistheoretisch werthvollen Nachweis erbringt, dass im Princip drei materielle Punkte zur näheren Bestimmung des der Dynamik zu Grunde zu legenden starren Raumes nothwendig und hinreichend sind, so wird man bei allen praktischen Ausgestaltungen der Theorie mehr als drei materielle Punkte brauchen; genau so, wie das Lineal einer großen Menge von Materie um die darzustellende Gerade herum bedarf, um überhaupt möglich zu sein. Das Inertialsystem wird daher natürlich von dem nämlichen

**Skepticismus** getroffen, der auf alle hohen und höchsten mathematischen Abstractionen angewandt werden kann, nämlich: eine äußerste begriffliche »Destillation« des Wirklichen zu sein. Solche »Destillationen« oder Abstractionen kann aber einmal die mathematische Physik just so wenig entbehren, als die reine Mathematik; und so wenig diese den Begriff der geraden Linie aufgeben darf, genau ebenso wenig jene den Begriff des Inertialsystemes und die prototypische Idealconstruction eines solchen.

Der springende Punkt des von Frege, Johannesson und Kleinpeter erhobenen gemeinsamen Einwandes lässt sich nun dahin präcisiren: Da Lange an die drei Fundamentalpunkte seines Inertialsystemes die Bedingung des Unbeeinflusstseins knüpft, über deren Erfülltsein oder Nichterfülltsein doch nur die Geradlinigkeit oder Krummlinigkeit ihrer Bahnen Auskunft zu geben vermag, so bleibt ein Cirkel bestehen. —

Wenn sich der Begriff des Inertialsystemes mit seiner prototypischen Idealconstruction vollkommen deckte, so müsste ich das allerdings zugeben. Ich würde mich alsdann sogar genöthigt sehen, die Anerkennung, die sowohl Frege als auch Kleinpeter meinem Versuch zollen, dass er nämlich über die wirkliche Bedeutung des Beharrungsgesetzes ein wesentlich helleres Licht verbreitet habe, mit Dank abzulehnen. Der Cirkel ist aber, soviel mir wenigstens scheint, lediglich ein formeller und kein sachlicher; er trifft einzig den sprachlichen Ausdruck der vorgeschlagenen Idealconstruction, nicht aber den begrifflichen Inhalt der Partialconvention als solcher. Dies erhellt in voller Deutlichkeit, wenn ich darauf hinweise, dass die analytischen Entwicklungen, die der Definition des Inertialsystemes vorangehen, rein phoronomischer Natur sind. Die Wurzel der ganzen Auseinandersetzung liegt doch in dem rein phoronomisch geführten Nachweis, dass die geradlinige Bewegung von  $n$  Punkten in Bezug auf einen und denselben starren Raum Sache der bloßen Convention über diesen Raum ist solange die Bedingung  $n \leq 3$  zutrifft; dass dagegen, wenn für  $n > 3$  ein starrer Raum phoronomisch möglich ist, worin alle  $n$  Punkte geradlinig fortschreiten, dies als ein höchst merkwürdiges Zusammenreffen, sozusagen als ein »singulärer Fall« betrachtet werden muss, vergleichbar etwa der »zufälligen« Lage von mehr als drei Punkten

in einer und derselben Ebene. Dass dieser Nachweis gelungen ist, und zwar unabhängig von der Bedingung des Unbeeinflusstseins der Punkte, überhaupt ohne jede dynamische Voraussetzung, daran zweifelt schwerlich irgend ein Mathematiker. Aus dieser Wurzel aber ergibt sich nun der Kern der weiteren Darstellung in folgendem Sinne: Der einzige, einer klaren Vorstellung zugängliche Inhalt des Beharrungsgesetzes ist der, dass für »sich selbst überlassene Punkte« jener singuläre Fall zutrifft.

Da nun, wohlgemerkt, erst bei dieser Aussage der Kraftbegriff in die Betrachtung eingeführt wird, so treffen die Schwierigkeiten, die, wie Jedermann zugibt, der einwandfreien Definition des Kraftbegriffes anhaften, lediglich den materiellen dynamischen Inhalt des Beharrungsgesetzes selbst; sie berühren aber nicht im geringsten den phoronomisch geführten Nachweis, dass dieser Inhalt mit einer Partialconvention auf Grund dreier Fundamentalpunkte zutreffend und erschöpfend wiedergegeben wird.

Man ersieht, beiläufig bemerkt, aus der nicht allzu scharf präcisirten Form des gemachten Einwandes deutlich, dass die seit Kant, Wronski und Ampère allgemein betonte Nothwendigkeit, zwischen Phoronomie und Dynamik zu unterscheiden, noch nicht in ihrer vollen Bedeutung beachtet worden ist. Es mag auch sein, dass der von den Absolutisten gemachte Versuch, die Nothwendigkeit eben dieser Unterscheidung für das Dogma der »absoluten Bewegung« auszubeuten, gerade die consequenten Relativisten vielfach verleitet, die Grenzlinie zu übersehen. Dass sich die Unterscheidung zwischen Phoronomie und Dynamik gleichwohl auch mit dem consequentesten Relativismus verträgt, braucht hier kaum nachgewiesen zu werden.

In den vorstehenden Ausführungen ist andeutungsweise bereits das Zugeständniss enthalten, dass die s. Z. von mir vorgeschlagene Fassung des Beharrungsgesetzes in der Form noch nicht den höchsten erreichbaren Grad der Klarheit und Einwandfreiheit aufweist. Ich ziehe heutigentags eine etwas andere Formulirung des Gesetzes vor, in der die theoretische Idealconstruction des Inertialsystems nicht mehr die grundlegende Definition, sondern nur mehr ein Corollarium derselben bildet. Während nämlich der Ausspruch des Gesetzes, oder richtiger gesagt, derjenige seines räumlichen Theiles, einfach auf die Annahme der phoronomischen Möglichkeit eines Systems gerad-

liniger Bahneinzeichnung für beliebig viele ( $n > 3$ ) sich selbst überlassene Punkte reducirt, und einem solchen Systeme der Name »Inertialsystem« beigelegt wird, dient die ehemals als Definition vorangestellte Idealconstruction (auf Grund dreier Punkte) immer noch als thunlichst vereinfachtes Prototyp aller praktischen realen Methoden, die zur Construction von Inertialsystemen angewandt werden können. Gegenüber einer solchen Fassung ist jedenfalls der Einwand des Cirkels, wie ihn Frege, Johannesson und Kleinpeter gegen die alte erhoben haben, auch nicht einmal hinsichtlich der Form aufrecht zu erhalten.

Es scheint mir gerade an dieser Stelle die passendste Gelegenheit gegeben zu sein für einen längeren Excurs, welcher die dem Kraftbegriff innewohnenden Schwierigkeiten zu beleuchten und zu ihrer Ueberwindung einiges beizutragen bestimmt ist. Ohne eine derartige Auseinandersetzung wäre ja die Aufgabe der vorliegenden Abhandlung nur halb gelöst. Da wir nun aber in verwandten Betrachtungen bereits mitten drin stehen, so ist eine Unterbrechung meiner Ausführungen zu der Frege'schen Studie wohl ausreichend gerechtfertigt.

Soll das Beharrungsgesetz in seiner allgemeinsten Form einen verständlichen Inhalt haben, so ist zu seiner Ergänzung eine begriffliche Erklärung dessen, was wir unter »Kräften« verstehen, unumgänglich nothwendig. Und zwar darf diese begriffliche Erklärung nicht auf das Beharrungsgesetz selbst, am allerwenigsten aber auf seinen definitiven allgemeinsten Ausdruck gegründet werden. Da ist es nun allerdings als ein Glück zu betrachten, dass die Wurzeln des Kraftbegriffes in ziemlich elementaren Regionen liegen, in denen sich das Bedürfniss nach einem letzten und definitiven Ausdruck des Beharrungsgesetzes noch gar nicht bemerkbar macht.

Beginnen wir, wie das in allen solchen Fällen angemessen ist, mit der psychologischen Genesis der Vorstellung von wirkenden Kräften. Die primitivste Vorstellung der Kraft ist, wie wohl Jedermann zugibt, eine anthropomorphe. Die durch uns selbst bethätigte und von »Kraftempfindung« begleitete Einwirkung auf äußere Körper, deren feste Lage oder — wenn sie, wie z. B. die central angestoßene Billardkugel, geradlinig und annähernd gleichförmig gegen den Erdraum fortschreiten, — deren Bahn wir verändern,

ist ein Erinnerungselement, welches mehr oder weniger deutlich erkennbar in alle unsere Vorstellungen von wirkenden Kräften eingeht. Sehen wir einen anderen Billardspieler durch einen Schlag mit der Hand die laufende Kugel ablenken, so schließen wir per analogiam, dass seine von einer Kraftempfindung begleitete Kraftäußerung der Ablenkung zu Grunde liegt. Tritt jetzt weiterhin eine Bahnablenkung ein durch das Hinzukommen unbelebter Körper, etwa eines anderen aufstoßenden Balles, so wird auf der primitivsten mythologischen Stufe der Naturbetrachtung mit Nothwendigkeit die Vorstellung Platz greifen, dass in dem hinzugetretenen Körper auch wieder eine mit Kraftempfindung verbundene Thätigkeit vorhanden sei<sup>79)</sup>. Hier ist der Punkt, wo die Wege der nüchternen wissenschaftlichen Forschung von denen des kindlichen phantasievollen Glaubens abseits führen. Der Vertreter der nüchternen Erkenntniss lässt sich an einer geometrischen Beschreibung der geschehenen Ablenkung und einer möglichst allgemeingültigen Formel, welche die Größe und Richtung der Ablenkung für jeden besonderen Fall vorherzusagen gestattet, genügen; über die inneren quasi-seelischen Zustände der Körper, die nach Ansicht des mythologisirenden Denkers mit der gegenseitigen Einwirkung verknüpft sind, grübelt er grundsätzlich nicht nach, stellt sie sogar meistens geradezu in Abrede<sup>80)</sup>.

Eine weitere überaus wichtige Stufe in der Entwicklung unserer Vorstellungen von bewegenden Kräften bilden unsere Erfahrungen über die Schwere. Einen nicht unterstützten Körper sehen wir fallen. Wir beobachten, dass unsere mit Kraftempfindung verbundene Willensäußerung im Stande ist, seinen Fall aufzuhalten, und dass unsere Thätigkeit dabei genau von der gleichen Art ist, wie wenn wir der mit Kraftempfindung gepaarten Willensäußerung eines anderen Lebewesens entgegenwirken. Wir schließen nun daraus nicht, dass der fallende Stein von einer geistigen Potenz nach unten gezogen werde<sup>81)</sup>, sondern begnügen uns zu sagen: Der Stein befindet sich unter irgend welchen uns nicht näher bekannten Umständen, die die nämliche Wirkung hervorbringen, als ob Jemand an ihm zöge. Das Phänomen und seine thunlichst genaue Vorhersage gestattende Beschreibung nach Maß und Zahl ist, zunächst wenigstens, der einzige Gegenstand der Wissenschaft; und wenn diese auf einer

späteren Stufe den Versuch macht, das Phänomen auf hypothetische Bewegungen verborgener Massen, etwa der Jonen zurückzuführen, so lässt sie auch dabei die seelischen Vorgänge, die von der mythologisirenden Phantasie vorausgesetzt werden, grundsätzlich aus dem Spiel.

Das Phänomen des irdischen Falles bildete zweifellos für Newton den psychologischen Ausgangspunkt zu seiner Theorie der Planetenbewegung<sup>82)</sup>. Da sein Kraftbegriff ebenso, wie sein Bewegungsbegriff, keineswegs den höchsten gegenwärtig erreichbaren Standpunkt der Aufklärung vertritt, so weicht unser weiterer Gedankengang erheblich von dem seinigen ab; der Ausgangspunkt aber ist derselbe.

Dehnen wir also jetzt unsere Betrachtung auf ein System von  $n$  materiellen »der Massenanziehung unterworfenen« Punkten oder, um möglichst anschaulich zu bleiben, auf das Planetensystem aus. Der nüchterne Kern der Newton-Laplace'schen Theorie ist dann ungefähr der folgende. Legt man durch den Sonnenmittelpunkt als Ursprung ein Axensystem, in welchem die von der Sonne aus zu den Fixsternen hin gezogenen Radien eine unveränderliche Richtung beibehalten, so lassen sich die Bewegungen eines jeden Planeten in Bezug auf dieses System zunächst einmal eindeutig beschreiben; d. h. man kann für jeden durch den Drehungswinkel der Erde näher bestimmten Zeitpunkt denjenigen Raumpunkt des genannten Coordinatensystems, in welchem sich beispielshalber Venus befindet, geometrisch angeben. Jetzt fragt es sich weiter: gibt es vielleicht allgemeine Formeln — nach Analogie der für die Fall- und Wurfbewegung auf der Erde aufgestellten —, in welchen die Coordinaten der Venus als Functionen der Zeit dermaßen ausgedrückt sind, dass die in jedem Zeitpunkte von ihr eingenommene Lage durch einfache Einsetzung des Zeitwerthes in die Gleichungen rechnerisch angegeben werden kann?

Die Antwort lautet: Ja, es gibt solche Formeln, und zwar lassen sich dieselben ohne alle metaphysischen Voraussetzungen entwickeln, indem man von den folgenden formalen Festsetzungen ausgeht.

Wir definiren zunächst rein phoronomisch, was unter der Beschleunigung eines Punktes zu jenem Coordinatensystem zu verstehen sei. Sodann ordnen wir in Gedanken einem jeden Gliede des Sonnensystems einen gewissen, noch unbekanntem, seinem Betrage nach erst durch Beobachtung und Rechnung zu ermittelnden constanten

Coefficienten zu —, das nüchterne Aequivalent seiner »Masse« —, und machen weiterhin folgende Annahmen, über deren Zulässigkeit, wohl gemerkt, wiederum erst die Uebereinstimmung oder Nichtübereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung entscheiden soll, nämlich:

1) Die Beschleunigung unseres Planeten ist in jedem Augenblicke die Resultante von ebensoviel Beschleunigungscomponenten, als andere benachbarte Körper vorhanden sind. So gibt es eine von der Sonne herrührende Beschleunigungscomponente, eine von der Erde herrührende, eine vom Mercur herrührende, u. s. w. Alle diese einzelnen Beschleunigungscomponenten, nach einfachen geometrischen Sätzen zusammengesetzt, ergeben zusammen die beobachtete Gesamtbeschleunigung.

2) Die Richtung derjenigen Beschleunigungscomponente unseres Planeten, welche der Sonne zugeschrieben wird, stimmt mit der von der Venus nach der Sonne hin gezogenen Verbindungslinie überein; ihre Größe bestimmt sich als ein Product, in welches das reciproke Quadrat des jeweiligen Abstandes zwischen Sonne und Venus als ein Factor, und der der Sonne zugeordnete noch unbekannte Massencoefficient als anderer Factor eingeht. Und in analoger Weise bestimmen sich Richtung und Größe aller übrigen Beschleunigungscomponenten des Planeten Venus, die wir der Erde, dem Mercur und anderen benachbarten Himmelskörpern zuschreiben.

Auf Grund dieser, ganz und gar keine metaphysischen Begriffe erfordernden Annahmen gelingt es alsdann, Formeln zu entwickeln, welche bei passender Werthung der Massencoefficienten gestatten, durch einfache Einsetzung der in einem bestimmten Augenblicke beobachteten numerischen Werthe für Lage, Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit der einzelnen Glieder des Sonnensystems den Ort der Venus für spätere Zeitpunkte in mit der Beobachtung übereinstimmender Weise vorherzusagen<sup>83)</sup>.

Die vorstehende, nur die Hauptpunkte der astronomischen Bahnbestimmungsmethoden skizzirende, dem Mathematiker gleichwohl vielleicht schon etwas weitläufig erscheinende Auseinandersetzung zeigt, dass der richtig verstandene astronomische Kraftbegriff, solange wir das heliocentrische Fixsternsystem und den Drehungswinkel der Erde der räumlich-zeitlichen Beschreibung der Planetenbewegungen zu Grunde

legen, von jedem mystischen Dunkel und von jedem Cirkel vollkommen frei ist. Und darin gebe ich Mach und Hertz<sup>84)</sup> vollständig Recht, dass die Theorie der Planetenbewegungen auf absehbare Zeit mit der Zugrundelegung des heliocentrischen Fixsternsystems und des Drehungswinkels der Erde sich wird begnügen dürfen. Denn die Thatsache, dass ein bedeutender Theil der Fixsterne gegen die übrigen in Abstandsveränderungen begriffen ist, fällt neben den doch einmal unvermeidlichen Beobachtungsfehlern und den rechnerischen » Vernachlässigungen«, welche in die Bestimmung der Planetenörter eingehen, nicht erheblich ins Gewicht. Anders aber gestaltet sich die Sache, wenn wir anfangen, wie die Astronomie als beobachtende Disciplin schon seit bald zwei Jahrhunderten angefangen hat, die Bewegungen der Fixsterne und die Bewegung des Sonnensystemes als eines Ganzen zu behandeln.

Wird die, dem Vorangegangenen zufolge für die Theorie der Planetenbewegung vollständig gelungene, Elimination des metaphysischen Kraftbegriffes auch bei späteren stellardynamischen Untersuchungen durchführbar sein? Und wird sich auch hier der gerügte Cirkel umgehen lassen? — — Obwohl wir uns bei dieser Gelegenheit auf ein in der Hauptsache noch überaus wenig betretenes Gebiet wagen müssen, soll doch der Versuch gemacht werden, auf beide Fragen eine möglichst klare und bestimmte Antwort zu ertheilen.

Vorausgeschickt sei die Bemerkung, dass eine Dynamik der Fixsternbewegungen, wenn man von der Theorie der mehrfachen Sterne (Doppelsterne) und der ihnen zuzurechnenden veränderlichen Sterne des Algoltypus absieht, bis jetzt meines Wissens noch gar nicht versucht worden ist. Alle von der Astronomie gemachten Aussagen über die sogenannten » wahren Eigenbewegungen« der Fixsterne und über die sogenannte » absolute Translation« der Sonne sind rein phoronomischen Charakters; sie betreffen lediglich Geschwindigkeiten, und niemals Beschleunigungen. Wenn man beispielsweise das Raumsystem näher angeben soll, auf welches sich die von den Astronomen angenommene » absolute Translation« der Sonne bezieht, so führt eine sorgfältige Erwägung aller angewandten Methoden zu dem merkwürdigen Ergebniss, dass dieses Raumsystem mit Newton's » absolutem Raum« oder, um in unserer weniger geheimnissvollen Terminologie zu reden, dass es mit dem barycentrischen Inertial-

system des Universums phoronomisch durchaus nicht zusammenzufallen braucht<sup>85)</sup>. Es deutlich zu definiren, hält in Folge der ungemein verwickelten Beschaffenheit der zu ihm führenden Rechnungen außerordentlich schwer; am nächsten dürfte man der Wahrheit kommen, wenn man es als dasjenige Raumsystem kennzeichnet, in Bezug auf welches die Summe der Geschwindigkeitsquadrate aller — oder gewisser herausgehommener — Glieder des Fixsterncomplexes jederzeit ein Minimum darstellt. Wenigstens dürfte ein derart definirtes Raumsystem dem Ideal, welches den bisherigen Errechnern der Sonnentranslation vorzuschweben scheint, noch am nächsten kommen. Dass von einer Bezugnahme auf ein mit dem Schwerpunkt des Universums fest verbundenes und, dynamisch betrachtet, inertiales System gar nicht die Rede sein kann, außer höchstens durch reinen Zufall, dies folgt schon aus dem Umstande, dass die bis heute gänzlich unbekanntenen Massen der Fixsterne<sup>86)</sup> in die Rechnung natürlich gar nicht einbezogen werden konnten. Aus allem Vorangegangenen folgt nun, dass zu demjenigen, was die Planetarastronomie als »wahre Bewegungen« der Planeten bezeichnet (nämlich dynamisch wohl charakterisirte Revolutionen gegen das heliocentrische Inertialsystem), die sogenannten »wahren Eigenbewegungen« der Fixsterne und der Sonne schlechterdings nicht die geringste begriffliche Analogie darbieten; der Gleichklang des Wortes »wahr« ist das einzige »tertium comparationis«, und noch dazu ein sehr gefährliches, wie die historische Thatsache beweist, dass ein Astronom von dem Range Argelander's auf jenen Gleichklang ein schon aus logischen Gründen ganz hin-fälliges Argument stützen konnte.

Die Behauptungen des vorigen Absatzes eingehender zu begründen, darf ich mir hier wohl schon um deswillen sparen, weil der erste Anhang meines »Bewegungsbegriffes« sich recht ausführlich über den Gegenstand verbreitet. Die Stichhaltigkeit meiner Kritik ist inzwischen nicht nur von G. Frege, sondern auch von H. Seeliger, von letzterem wenigstens in den Hauptpunkten, anerkannt worden<sup>87)</sup>.

Wenn es nun nach dem Vorangegangenen auch feststeht, dass bislang zu einer Dynamik der Fixsterneigenbewegungen noch nicht einmal die ersten Schritte unternommen worden sind, so ist doch die Hoffnung, dass es gelingen werde, eine solche zu begründen, keineswegs aufzugeben. Die Grundfrage muss bei derartigen Untersuchungen

von allem Anfang an die sein: Wie lässt sich ein zur dynamischen Behandlung der Fixsternbewegungen geeignetes Bezugssystem praktisch festlegen?

Ehe wir zur Beantwortung dieser Frage übergehen, sei mir folgende Vorbemerkung gestattet. Es ist eine eigenthümliche Beobachtung, die man in allen Zweigen des Naturerkennens machen kann, dass die Aufgaben, welche die Natur dem menschlichen Verstande darbietet, nicht durchweg die allgemeinste, complicirteste Form, sondern zum Theil wenigstens besondere, die Berechnung vereinfachende Formen annehmen. So wäre z. B. das Trägheitsgesetz wahrscheinlich noch heute unentdeckt, wenn nicht für beschränkte irdische Bewegungen der Erdrum mit hinreichender Genauigkeit als ein inertialruhiger Raum betrachtet werden dürfte. Ein ferneres Beispiel: das Bewegungsproblem für drei annähernd gleich große gravitirende Massen (Dreikörperproblem) ist bis heute analytisch nicht als gelöst zu erachten; nur der Umstand, dass in unserem Sonnencomplex eine Masse vor allen anderen weitaus präponderirt, setzte Kepler, Newton, Laplace und ihre Nachfolger in den Stand, die Bewegungen des Sonnensystems in die bekannten Formeln zu bringen.

Analog vereinfachende Umstände dürften nun auch für den Fixsterncomplex zutreffen, wenn auch solche von wesentlich anderem Charakter. Man kann nämlich mit großer Wahrscheinlichkeit annehmen: Dass die Entfernung der meisten Fixsterne von einander eine im Vergleich zu ihrer eigenen Größe und Masse so ungeheure ist, dass sie einander auf Jahrhunderte, vielleicht selbst auf Jahrtausende hinaus keine merklichen Beschleunigungen in Bezug auf das barycentrische Inertialsystem des Complexes ertheilen, vielmehr so gut wie geradlinig und gleichförmig gegen dasselbe fortschreiten. Bis zu welchen Zeitepochen hin diese vereinfachende Approximation ausgedehnt werden darf, dies muss natürlich eine, mindestens über mehrere Jahrzehnte fortzusetzende, Erfahrung erst lehren; die bisher angestellten Beobachtungen dürften darüber ebenso wenig entscheiden, als etwa ein kurzes annähernd geradlinig und gleichförmig durchlaufenes Stück der Neptunbahn gestattet, die Bahnelemente dieses Planeten zu ermitteln. Unsere Annahme trägt m. e. W. den Stempel einer vorläufigen, unter den Vorbehalt jederzeit möglicher Correction gestellten Hypothese, wie die Astronomie solche gar nicht selten macht.

Wenn nun diese Hypothese zutrifft, so ist dasjenige Inertialsystem, in welchem der Schwerpunkt des Sonnensystems ruht, auf folgender Grundlage bestimmbar. Man greift einige wenige, sagen wir z. B. drei Fixsterne  $s_1, s_2, s_3$  von bekannter Parallaxe (deren Sonnenabstand also mit befriedigender Genauigkeit numerisch feststeht), aus dem Complex heraus, und stellt für drei oder vier auf einander folgende, weit genug von einander getrennte Epochen  $t, t', t'', t'''$  nachstehende Größen durch astronomische Beobachtung fest:

1) Die Winkel  $s_1 S s_2, s_1 S s_3, s_2 S s_3$ , in welchen  $S$  die Sonne bezeichnet<sup>88</sup>).

2) Die Geschwindigkeiten, mit welchen sich die Abstände  $S s_1, S s_2$  und  $S s_3$  in jeder der genannten Epochen, womöglich auch in den dazwischenliegenden Zeiten, verkleinern bzw. vergrößern.

Dann wird es, die Richtigkeit unserer Vermuthung vorausgesetzt, im Princip sehr wohl möglich sein, dasjenige Inertialsystem, rücksichtlich dessen der Massenmittelpunkt unseres Sonnencomplexes ruht, constructiv-phoronomisch festzulegen. Die praktische Ausführung dieser rechnerischen Idee muss freilich den Fachleuten der Himmelskunde überlassen werden. Denn so einleuchtend und principiell einfach dieselbe in logischer Hinsicht ist, so wird ihre Verwirklichung zunächst noch auf manche nicht geringe Schwierigkeiten stoßen, die sich schon aus den großen, durchaus nothwendigen Beobachtungsperioden zur Genüge erklären. Wir müssen daher hier ganz zufrieden sein, die anzuwendende Constructionsmethode in logisch einwandfreier Weise skizzirt zu haben. Aus methodologischem Gesichtspunkt betrachtet kennzeichnet sich dieselbe, wie kaum ausgeführt zu werden braucht, als eine bloße praktische Ausgestaltung der prototypischen Idealconstruction des Inertialsystemes<sup>89</sup>).

Macht man nun nach geschehener Construction die Beobachtung, dass in Bezug auf das construirte Coordinatensystem noch eine erhebliche Anzahl weiterer Fixsterne auf Jahrhunderte oder Jahrtausende hinaus geradlinig und gleichförmig bewegt sind, zum Theil vielleicht ihren Ort überhaupt nicht verändern, so findet damit unsere Vermuthung ihre endgültige Bestätigung, sie tritt aus der Reihe der bloßen provisorischen Hypothesen hinüber in die Kategorie der anerkannten wissenschaftlichen Thatsachen. Wir werden alsdann berechtigt sein, in dem construirten System ein heliocentrisches Inertialsystem

von weit höherem Präzisionsgrade, als das jetzt übliche heliocentrische Fixsternsystem ihn aufweist, anzuerkennen. Etwa zur Kenntniss gelangende Fälle, wo andere Fixsterne zum »höheren heliocentrischen Inertialsystem« — so könnte man das construirte System kurz und zutreffend nennen, — nicht geradlinig fortschreiten, sondern vielmehr in (stellarastronomisch bemessen) kurzen Zeiträumen von der geradlinigen Bahn abweichen, würden meiner Meinung nach nur den Anstoß geben, in ähnlicher Weise, wie es im Gebiet der Planetarstronomie wiederholt geschehen ist, nach ablenkenden Massen zu fahnden. So würde vielleicht auch dem Problem der stellarastronomischen Massenberechnung früher oder später eine methodologisch solide Basis gegeben werden können.

Das höhere heliocentrische Inertialsystem wäre natürlich noch nicht die allerletzte Instanz der astronomischen Ortsbestimmung und Dynamik. Wünschenswerth wäre es vielmehr, auf das höhere barycentrische Inertialsystem des Fixsterncomplexes zuzusteuern; und als oberste, wohl niemals zu verwirklichende Idealinstanz müsste das exacte barycentrische Inertialsystem des Universums stets im Hintergrund aller unserer Betrachtungen bestehen bleiben. Rein geometrisch betrachtet deckt sich das letztere vollständig mit Newton's »absolutem Raum«; den Nachweis, dass der Begriff als solcher ein ungleich klarerer, von jeder Mystik entkleideter ist, darf ich mir wohl sparen.

Solange uns die Massen der Fixsterne nicht bekannt sind, werden wir uns jedenfalls mit dem höheren heliocentrischen Inertialsystem (als höchster zunächst erreichbarer Instanz) begnügen müssen. Auch die an fruchtbringenden Ideen überaus reiche Astrophysik hat, soviel mir bekannt, bis jetzt keine Methode angegeben, welche mit Aussicht auf Erfolg zur Bestimmung der Massen vereinzelt stehender Fixsterne herangezogen werden könnte; insbesondere würden die photometrischen Methoden doch wohl nur unter Zugrundelegung sehr gewagter Hypothesen Rückschlüsse auf die Massen der Fixsterne gestatten.

Wenn es übrigens dereinst gelingen sollte, das höhere barycentrische Inertialsystem des Fixsterncomplexes zu construiren, so wird sich voraussichtlich für die Translationsrichtung der Sonne ein ganz anderer Apex herausstellen, als es der zur Zeit angenommene rein phoronomische Durchschnittsapex im Sternbild des Hercules ist.

Hiermit muss ich dieses äußerst interessante Wissensgebiet der Stellarastronomie verlassen.

Frege, bei dessen Studie zum Bewegungsbegriff wir zu Beginn des vorstehenden Excurses stehen geblieben waren, sagt an einer späteren Stelle: »Was nun die Frage nach der Realität der Bewegung betrifft, so droht sie, wie mir scheint, in einen Wortstreit auszuarten«<sup>90)</sup>. Es könne sich, so meint er, »nur darum handeln, ob der Unterschied zwischen beschleunigter und nicht beschleunigter Bewegung, oder, wie Lange sagt, zwischen Inertialdrehung und Inertialruhe«<sup>91)</sup> real ist. — Im Anschluss an diese und die ihnen nachfolgenden Erörterungen Frege's dürfte die kurze Bemerkung genügen, dass ich die Wirklichkeit (Objectivität) eines Unterschiedes zwischen bloß phoronomischer Drehung und Inertialdrehung nicht nur nicht bestritten, sondern sogar recht energisch betont habe. Es ist aber etwas ganz anderes, ob man jenen Unterschied als objectiv ansieht, oder ob man die Inertialdrehung für eine »wirkliche« Bewegung hält, die rein phoronomische Drehung dagegen — z. B. die tägliche Umdrehung des Firmaments — als nur »scheinbar« betrachtet. Soviel ich übrigens Frege verstehe, scheint er weit entfernt zu sein, dieser letzteren Anschauungsweise beizutreten. Mir scheint jedenfalls die Frage nach der »wirklichen« und »scheinbaren« Bewegung, und die Frage nach der Angemessenheit dieser Ausdrücke durchaus nicht auf einen bloßen Wortstreit hinauszulaufen. Die von mir (und mehreren anderen Autoren) vertretene Anschauung stellt als oberstes Princip die Relativität der Bewegung auf; sie leugnet damit aber nicht die Objectivität oder Realität der Bewegung als Distanzänderung, sie sagt vielmehr ganz im Gegentheil, dass jede Ortsveränderung eine reale Bewegung sei; sie liest aus den vielen Arten der Bewegung eine bestimmte, nämlich die Inertialdrehung, nicht in dem Sinne aus, als ob sie reeller sei denn andere bloß phoronomische Drehungen, sondern nur als einen methodologisch-dynamisch vor anderen auszeichnenden Fall, der bei der analytischen Behandlung der Bewegungsvorgänge eine besondere grundlegende Beachtung verdient. Frege selbst vindicirt mir wenige Seiten später den »Ruhm«, die Grenzlinie zwischen dem Inertiell-Ruhigen und Nicht-Inertiellruhigen »zuerst deutlich gesehen zu haben«<sup>90)</sup>.

Im Jahre 1891, also annähernd gleichzeitig mit Frege's Aufsatz,

erschien eine Schrift von L. Weber unter dem Titel »Ueber das Galilei'sche Princip«<sup>3)</sup>. Der auf dem Boden der physikalischen Forschung stehende Verfasser geht auf die das Beharrungsgesetz betreffenden Arbeiten der meisten früheren Autoren, so auch auf die meinigen, nicht näher ein; ich habe daher nicht nöthig, das Inertialsystem gegen Einwände von seiner Seite zu vertheidigen. Dagegen erwächst mir die Aufgabe, die Weber'schen Vorschläge zu einer besseren Formulirung des Beharrungssatzes meinerseits einer Prüfung zu unterziehen.

Weber schließt seine Erörterungen ab mit einer Definition des Begriffes »universell-geradlinig-gleichförmige Bewegung« und mit dem die Stelle des Beharrungsgesetzes vertretenden Theorem: »Wenn auf einen materiellen Punkt keine Kräfte einwirken, besitzt er eine universell-geradlinig-gleichförmige Bewegung. Und umgekehrt«<sup>92)</sup>.

Statt nun Weber's Definition im Wortlaute zu citiren, ziehen wir es vor, vollkommen sinngetreu und dabei möglichst deutlich anzugeben, nach welchem Kriterium Weber unterscheidet, ob ein ihm gegebener Punkt universell-geradlinig-gleichförmig bewegt sei, oder nicht. Zu diesem Zwecke verbindet nämlich Weber mit dem fraglichen Punkte ein Coordinatensystem, dessen Axenrichtungen er in jedem Augenblicke so gelegt denkt, dass die darauf bezogene  $\Sigma(\frac{1}{2}mv^2)$  des Weltalls ein Minimum wird. Er untersucht sodann, ob der Massenmittelpunkt der Welt rücksichtlich des durch die Minimumgleichung definirten Systems geradlinig-gleichförmig bewegt sei. Trifft dies zu, so bezeichnet Weber den der Untersuchung unterworfenen gegebenen Punkt selbst als »universell-geradlinig-gleichförmig bewegt«; wo nicht, spricht er ihm die »universell-geradlinig-gleichförmige Bewegung« ab.

Man könnte vielleicht fragen, warum Weber nicht einfach gesagt habe: »Wir beziehen in der Dynamik alle Bewegungen, also auch die im Beharrungsgesetze ausgesprochenen, auf dasjenige Raumsystem, auf welches bezogen die  $\Sigma(\frac{1}{2}mv^2)$  des Universums jederzeit ein Minimum ist«. Weber muss jedenfalls Gründe gehabt haben, diese Formulirung zu vermeiden. In der That, hätte er das Bezugssystem der Dynamik solchergestalt definirt, so ließe sich nachweisen, dass seine Absicht, an Stelle des Newton'schen absoluten Raumes damit ein geometrisch äquivalentes System von minder mysteriösem Charakter einzusetzen,

streng mathematisch betrachtet, missglückt wäre. Man kann nämlich folgendes, zunächst rein phoronomisches Problem aufstellen: »Für einen Complex von ganz bedingungslos, auch ohne irgendwelche dynamische Voraussetzungen, bewegten Massenpunkten<sup>93)</sup> soll das Coordinatensystem construirt werden, in Bezug auf welches die  $\Sigma (\frac{1}{2} mv^2)$  jederzeit ein Minimum ist«. Die mir von fachmännischer Seite mitgetheilte Lösung dieser Aufgabe<sup>94)</sup> führt, sobald wir die specialisirende Annahme machen, die Bewegung des Massencomplexes sei den dynamischen Bewegungsgesetzen, im übrigen aber lediglich inneren Newton'schen Centralkräften unterworfen, welche von den betrachteten Punkten selber ausgehen, zu folgendem Ergebniss:

»Das System jederzeit minimaler  $\Sigma (\frac{1}{2} mv^2)$  ist mit dem Schwerpunkt des Massencomplexes fest verbunden; dennoch ist es, im allgemeinen wenigstens, keineswegs mit dem barycentrischen Inertialsystem des Complexes gleichwerthig. Vielmehr dreht es sich gegen dasselbe in gesetzmäßiger Weise um eine Axe, deren Lage, ebenso wie die Winkelgeschwindigkeit der Drehung fortwährendem Wechsel unterworfen ist. Um zunächst die Lage der Drehungsaxe für einen gegebenen Augenblick zu bestimmen, hat man die derzeitige Lage und Gestalt des (fortwährender Aenderung unterworfenen) centralen Trägheitsellipsoides des Complexes festzustellen. Verbindet man nun den Berührungspunkt, in welchem dieses Ellipsoid von der sogenannten »Ebene maximaler Flächenconstante« tangirt wird, mit dem Schwerpunkte des Complexes, so stellt die Verbindungslinie die gesuchte Drehungsaxe dar. Die Winkelgeschwindigkeit der Drehung gleicht dem Product jener Maximalflächenconstante in den Abstand der Berührungsebene vom Schwerpunkt und den Abstand des Berührungspunktes vom Schwerpunkt«<sup>94)</sup>.

Dass es mit der soeben behaupteten Drehung seine Richtigkeit hat, bestätigt übrigens schon die Betrachtung des Zweikörperproblems. Denkt man sich die Massen der Sonne und Erde in ihren Mittelpunkten concentrirt, so ändert das bekanntlich an den Bahngleichungen nichts. Dasjenige Coordinatensystem nun, in welchem für diesen Fall der Ausdruck  $\Sigma (\frac{1}{2} mv^2)$  jederzeit ein Minimum ist, dreht sich offenbar mit derselben Geschwindigkeit und in derselben Richtung gegen das barycentrische Inertialsystem des Complexes, wie die Verbindungslinie beider Punkte.

Fasst man jetzt das Universum als einen dynamisch wie oben charakterisirten Complex auf — und die Astronomen werden sicher geneigt sein, dies zu thun —, so ergibt sich, dass das System allzeit kleinster  $\Sigma (\frac{1}{2} m v^2)$  des Weltalls gegen das barycentrische Inertialsystem desselben, oder, was geometrisch auf das gleiche hinausläuft, gegen den »absoluten Raum« Newton's sehr wohl in Drehung begriffen sein kann. Nimmt man dagegen an, dass die oben gegebene dynamische Charakterisirung des Complexes dem Weltall nicht zukomme, so ist die Behauptung, das System jederzeit kleinster  $\Sigma (\frac{1}{2} m v^2)$  repräsentire ein phoronomisch strenges Aequivalent des »absoluten Raumes«, erst recht nicht zu begründen. Ein Beispiel wird dies noch deutlicher machen. Die Massentheilchen eines in Rotation begriffenen »starrten« Körpers bilden einen Complex, in welchem keine Centralkräfte als wirksam angenommen werden, wofür aber die rein geometrische Bedingung Platz greift, dass die Abstände der einzelnen Punkte von einander sich nicht ändern dürfen. Auch in diesem Falle lehrt die einfache Anschauung, dass das System jederzeit kleinster  $\Sigma (\frac{1}{2} m v^2)$  gegen den von Newton angenommenen absoluten Raum in Drehung befindlich ist.

Die Behauptung indessen, das Bezugssystem der Dynamik sei in einer, den »absoluten Raum« ersetzenden, Weise zu definiren als das System jederzeit kleinster  $\Sigma (\frac{1}{2} m v^2)$  des Weltalls, hat Weber in dieser Form gar nicht aufgestellt; und insofern richtet sich die vorstehende Kritik scheinbar nicht direct gegen ihn, sondern gegen eine vielleicht übereilte Consequenz aus seinen Ausführungen, die allerdings so nahe liegt, dass sie sicherlich schon mehr als ein Leser gezogen hat. Indessen bei genauer Prüfung finden wir, dass Weber auf S. 38 seiner Schrift eine Behauptung verfißt, die den nämlichen, und vielleicht noch schwereren Bedenken unterliegen dürfte. Es heißt da, das mit einem beliebigen gegebenen Punkt fest verbundene System allzeit kleinster universeller  $\Sigma (\frac{1}{2} m v^2)$  weise constante Axenrichtungen gegen den »absoluten Raum« auf. Wäre diese Behauptung in ihrer Allgemeinheit richtig, so müsste sie (im Widerspruch mit dem Vorangegangenen) insbesondere auch für das mit dem Schwerpunkt des Universums verbundene System jederzeit kleinster universeller  $\Sigma (\frac{1}{2} m v^2)$  zutreffen; und es wäre daher nicht einzusehen, weshalb Weber nicht einfach »das Bezugs-

system der Dynamik« auf dieser Basis definirt hat. P. Johanneson macht übrigens die Bemerkung, dass ihm Weber's Rechnungen, die zu der Behauptung auf S. 38 seiner Schrift führen, auf einem Kreisschlusse zu beruhen scheinen<sup>95</sup>). Wie dem auch sei, der Charakter der Rechnung als einer bloßen Näherungsrechnung dürfte leicht zu erweisen sein.

Mit einer Annäherung natürlich, die für Zwecke der Physik und der Planetarastronomie genügen würde, ist es immerhin gestattet, das mit dem Schwerpunkt des Weltalls verbundene System kleinster  $\Sigma$  ( $\frac{1}{2}mv^2$ ) dem barycentrischen Inertialsystem gleichzusetzen; und zwar einfach darum, weil es sich gegen das für diese Zwecke ziemlich ebenso gut ausreichende heliocentrische Fixsternsystem nur langsam dreht. Für stellardynamische Untersuchungen dagegen dürfte das Weber'sche System als Fundamentalsystem ganz ungeeignet sein.

Dass das oben skizzirte Kriterium Weber's, darüber zu entscheiden, ob ein gegebener Punkt »universell-geradlinig-gleichförmig bewegt« sei, so wie es lautet, gar keine gemeinsame Bezugnahme mehrerer gleichzeitig der Untersuchung unterworfenen Punkte auf ein einheitliches Bezugssystem an die Hand gibt, ist im Vorigen implicite schon ausgesprochen. Da die Untersuchungen der Dynamik ein einheitliches Bezugssystem gebieterisch verlangen, so ist das ein weiterer offenkundiger Mangel der Formulirung. Wie mir übrigens scheint, würde sich überhaupt ein strenger Nachweis gar nicht führen lassen, dass für  $n$  nach Weber's Kriterium »universell-geradlinig-gleichförmig bewegte« Punkte ein einheitliches Coordinatensystem construierbar sei, in welchem sie alle geradlinig bewegt wären.

Dass es äußerst bedenklich ist, beim Ausspruch des Beharrungsgesetzes den Begriff des Massenquantums bereits vorauszusetzen, und dass ferner die Massenwerthe des Universums zum überwiegenden Theile gar nicht bekannt sind, auch wohl niemals bekannt werden dürften, soll nur kurz angedeutet werden. Diese beiden Mängel der Weber'schen Formulirung sind, wie mir scheint, auch in keiner Weise zu beseitigen, und der letztere von ihnen bringt es mit sich, dass eine praktische Ausgestaltung des Vorschlages, selbst wenn dieser theoretisch einwandfrei wäre, zu den unmöglichen Dingen gehört. Das eben erachte ich als den entscheidendsten Vorzug der

von Mac Gregor und mir verfochtenen Begriffsbildung, dass sie methodologisch ein für alle Mal die Richtung anzeigt, wo auf jeder bereits erreichten Stufe der physikalischen bzw. astronomischen Erkenntniss der praktische Fortschritt zu höherer, d. h. einem umfassenderen Complex bewegter Körper gerecht werdender Präcision zu suchen ist<sup>96</sup>). Die Unmöglichkeit, aus den Weber'schen Vorschlägen irgendwelchen Vortheil für die praktische Construction von Bezugssystemen zu ziehen, würde meines Erachtens selbst dann ihre Einführung in die Principien der Mechanik ausschließen, wenn sie in theoretischer Strenge das leistete, was sie zu leisten vorgiebt, nämlich eine Ersetzung des Newton'schen »absoluten Raumes«.

Im Anschlusse hieran möchte ich noch erwähnen, dass ich den von Weber in seiner Definition angewandten Ausdruck »lebendige Kraft« bisher absichtlich vermieden habe. Die »lebendige Kraft« ist, streng genommen, kein phoronomischer, sondern ein durch und durch dynamischer Begriff, der die Bezugnahme auf irgend ein Inertialsystem voraussetzt. Es ist nicht das geringste dagegen einzuwenden, wenn Jemand die ungeheuren phoronomischen Geschwindigkeiten, welche die Fixsterne in Bezug auf den Erdraum besitzen, mit  $v$  bezeichnet, und in diesem Sinne von einer  $\Sigma(\frac{1}{2}mv^2)$  des Universums redet. Dieser Ausdruck bezeichnet dann aber nichts weniger, als eine echte (kinetische) Energiesumme, er hat vielmehr den Charakter einer Pseudo-Energie. So unzweifelhaft es nämlich zutrifft, dass die lebendige Kraft eines Massencomplexes nichts absolutes ist, sondern je nach demjenigen der unzähligen möglichen Inertialsysteme, welches wir gerade der Betrachtung zu Grunde legen, einen ganz verschiedenen Werth besitzt, so stimmt doch nur die auf irgend ein Inertialsystem bezogene  $\Sigma(\frac{1}{2}mv^2)$  begrifflich mit demjenigen überein, was die Dynamik als »lebendige Kraft« bezeichnet; und nur für die so verstandene lebendige Kraft gilt auch der Satz von der »Erhaltung der Energie«. Man kann mithin das Weber'sche System jederzeit kleinster  $\Sigma(\frac{1}{2}mv^2)$  nicht als ein solches bezeichnen, in welchem die »lebendige Kraft« des Weltalls ein Minimum werde; denn weder in jenem System selbst, noch vor allem in den zum Vergleich der Werthe  $\Sigma(\frac{1}{2}mv^2)$  herangezogenen, dagegen rotirenden Systemen hat der Ausdruck die Bedeutung einer echten (kinetischen) Energiesumme. — Im Zusammenhang hiermit muss noch das Nachfolgende gesagt werden.

Unter der unendlich mannigfaltigen Schar (geradlinig und gleichförmig ohne Drehung) gegeneinander bewegter Inertialsysteme gibt es offenbar ein ganz bestimmtes, in Bezug auf welches gemessen die lebendige Kraft eines von äußeren Kräften unbeeinflussten Massencomplexes kleiner ist, als bei Bezugnahme auf jedes andere Inertialsystem. Wie bekannt, ist dieses Bezugssystem kleinster Summe der lebendigen Kräfte das barycentrische Inertialsystem des betrachteten Complexes; die betrachtete Minimalsumme selbst aber ist ein dem Complex innewohnender objectiver Werth. Dass er ebensowenig eine absolute Bedeutung hat, als die kinetische Energie überhaupt, braucht wohl kaum gezeigt zu werden. In diesem Sinne ist meiner Ansicht nach die von Newcomb angeregte Frage, ob die Energie etwas relatives, wie er sagt, oder etwas absolutes sei, zu beantworten: die Energie eines Complexes ist etwas relatives; dennoch hat jeder Complex ein ihm eigenthümliches objectives Energieminimum.

Zum Schluss darf ich vielleicht noch darauf hinweisen, dass ähnliche Ideen, wie die Weber'schen, auch mich eine Zeit lang beschäftigt haben. Am Schluss des ersten Anhangs meines Bewegungsbegriffes, welcher sich betitelt »Ueber die sogenannte absolute Translation der Sonne«, sind als Reste derartiger Erwägungen die folgenden Sätze stehen geblieben: »In diesem Sinne könnte das räumliche Coordinatensystem, worauf von Rechts wegen die mittlere Bewegung eines Fixsternes gegen den ganzen Complex zu beziehen wäre, etwa definirt werden als dasjenige Coordinatensystem, worin die Summe der Geschwindigkeitsquadrate aller Fixsterne jederzeit ein Minimum ist. Nur fehlt es leider gegenwärtig und vielleicht für immer an Mitteln, um dieses Coordinatensystem und die darauf bezüglichen Bewegungen genauer zu bestimmen«<sup>97</sup>). — Schon damals war ich mir darüber klar, dass das betreffende System, selbst wenn man die Massencoefficienten einführen wollte (was ich mit Rücksicht auf deren gänzliche Unbekanntheit unterließ), nicht den Werth eines Inertialsystemes haben kann, dass den darauf bezogenen Bewegungen vielmehr lediglich die Bedeutung von dynamisch unverwerthbaren Durchschnitts- oder Mittelbewegungen zukommt<sup>98</sup>).

Im Jahre 1894 kamen die »Principien der Mechanik« von

H. Hertz heraus. Bei der allgemein sehr hoch eingeschätzten Bedeutung, die dieses Werk für das Gesamtgebiet der mathematischen Physik beanspruchen darf, und in Anbetracht des Umstandes, dass die Urtheile der Zeitgenossen über den Sinn und Werth der Hertz'schen Fundamentänderung noch immer nicht in einheitlichem Sinne geklärt zu sein scheinen, muss hier auf eine dem Werk gerecht werdende Darstellung des von seinem Urheber angestrebten allgemeinen Zieles verzichtet werden. Sicher ist vor allem das eine, dass die von Hertz versuchte Zurückführung der Fernkräfte auf cyclische Zwangläufigkeiten weiter verfolgt zu werden verdiente, als es bisher geschehen ist. Freilich, um die supponirten Zwangläufigkeiten physikalisch zu erklären, würde man den Satz von der Undurchdringlichkeit und Starrheit fester Körper (letzteres bekanntlich ein sehr *cum grano salis* zu nehmendes »Gesetz«) kaum entbehren können; damit würden aber offenbar Contactkräfte in die Grundlagen der Mechanik eingeführt, die ihrem Wesen nach schließlich nicht erklärlicher sind, als Fernkräfte. Andererseits würde, wie schon Mach betont hat<sup>99)</sup>, zum Zwecke einer »ökonomischen« Idealreconstruction realer dynamischer Phänomene, als Basis auch die rein formal-mathematische Definition der Zwangläufigkeit — ohne physikalischen Hintergrund — ausreichen.

Wir haben bekanntlich zwei Richtungen in der neueren Theorie der Materie nebeneinander: die eine, atomistische, will die Contactwirkungen auf Fernkräfte in hypothetischer Weise zurückführen; die andere sucht gerade umgekehrt die Fernkräfte zu erklären. Bei der Endlichkeit des Menschengestes wird man bekanntlich nie über gewisse unerklärt bleibende Erkenntniselemente hinauskommen, und es dürfte im Princip ziemlich gleichgültig sein, ob man die Erkenntnisreihe von vorn nach hinten, oder von hinten nach vorn liest. Beide Weisen haben unzweifelhaft ihre Berechtigung. Den Vorzug würde höchstens diejenige Darstellung verdienen, welche im Mach'schen Sinne »ökonomischer« oder, in der Sprechweise der Mathematiker ausgedrückt, eleganter erscheint. Und da wird wohl allgemein anerkannt werden, dass manche Ableitungen der Hertz'schen Idealmechanik diesem Ziel der Einfachheit und Eleganz in überraschendem Maße gerecht geworden sind.

Die Hertz'sche Grundlegung als solche scheint mir gleich-

wohl nicht über allen Zweifel erhaben zu sein. Die Verschmelzung des Trägheitssatzes mit dem Princip des kleinsten Zwanges ist recht bedenklich. Ein scheinbarer Vortheil dieser Verschmelzung könnte zwar vielleicht darin gefunden werden, dass von allen Leitsätzen der Mechanik derjenige des »kleinsten Zwanges« als einziger die Eigenthümlichkeit hat, ohne Zugrundelegung eines bestimmten Bezugssystems einer klaren Vorstellung zugänglich zu sein. Allein eine Anwendung des Hertz'schen combinirten Trägheitssatzes ist in Strenge nur möglich, wenn der Fall der zwanglosen Beharrung als eigentliche Grundlage im voraus betrachtet wird. Thut man das aber, so drängt sich die Frage des Bezugssystemes als Grundfrage aller Dynamik, auch der Hertz'schen, mit nicht wegzuleugnender Dringlichkeit auf. Nun ist, wie oben schon einmal erwähnt wurde, Hertz auf Newton's Scholium gar nicht näher eingegangen; überhaupt scheint er zu einer ausführlicheren Besprechung der Streitfrage nicht aufgelegt gewesen zu sein. Dass er aber mindestens der absolutistischen Bewegungstheorie nicht das Wort geredet wissen wollte, geht schon aus den Artikeln 303 und 304 der »Principien« hervor, in deren ersterem er ausspricht, »dass wir durch thatsächliche Bestimmung mit Hülfe unserer Sinne doch keine Zeit genauer festlegen können, als sie sich messen lässt mit Hülfe der besten Chronometer, keine Lage genauer, als sie sich beziehen lässt auf ein mit dem entfernteren Fixsternhimmel ruhendes Coordinatensystem«<sup>100</sup>). Dem Physiker kann dieser Standpunkt genügen. Wie aber Mac Gregor nachgewiesen hat, führt schon die historisch-kritische Betrachtung der mechanischen Principien mit Nothwendigkeit über ihn hinaus<sup>101</sup>), und der Stellar-astronom dürfte außer Stande sein, etwas mit ihm anzufangen.

Auf die im Jahre 1896 erschienene Programmschrift von P. Johannesson<sup>3</sup>) habe ich schon mehrfach, zuletzt bei Besprechung der Frege'schen Studie Bezug genommen. Im Nachfolgenden muss ich noch einigen weiteren Criticismen des Verfassers zu begegnen suchen.

Ein sehr offenkundiger Irrthum scheint es mir zu sein, wenn Johannesson der von Neumann, und ebenso von mir und vielen Anderen geübten Kritik des Ausdruckes »geradlinige Bahn« die eigentliche Spitze abbrechen zu sollen glaubt, indem er es so darstellt, als liege in dieser Kritik eine Anzweifelung des »Begriffes

der Geraden« schlechthin. »Den Begriff der Geraden anzweifeln, statt ihn als gegeben anzunehmen, heißt den Irrgängen derer folgen, welche das Merkmal der unbedingten Wahrheit suchten«<sup>102</sup>). Diesem und den daran anschließenden Sätzen Johannesson's ist entgegenzuhalten, dass weder Neumann, noch irgend einer seiner Nachfolger mit der geübten Kritik jemals den »Begriff der Geraden« hat treffen wollen; denn es ist doch zweierlei, ob ich die dogmatische beziehungslose Geradlinigkeit einer Punktbahn, oder ob ich den »Begriff der Geraden« anzweifele!

Wenn Johannesson dann fernerhin die von mir adoptirte Neumann'sche Definition gleicher Zeitabschnitte als ungeeignet bezeichnet, »die Zeitmessung zu verbessern«, und wenn er meint, sie setze »der gangbaren Zeitvorstellung nur begriffliche Schrauben an«<sup>102</sup>), so möchte ich mir dazu folgende Bemerkung erlauben. Erstens will die Definition der Inertial-Zeitscala, so wie ich wenigstens dieselbe auffasse, gar nicht die gewöhnlichen praktischen Zeitmessungen ersetzen, sondern lediglich den Charakter derselben als partieller Conventionen im Sinne eines methodologischen Prototyps feststellen. Auch Mach's (von Johannesson gebilligte) Bezugnahme auf den Drehungswinkel der Erde ist nichts anderes als eine praktische Ausgestaltung der prototypischen Idealconstruction der Inertial-Zeitscala; und dieses Prototyp zeichnet überdies auf jeder Stufe der physikalischen, bezw. astronomischen Erkenntniss den Weg vor, auf welchem eine höhere Präcision der praktischen Zeitmessung sich wird erreichen lassen. Aber Johannesson erhebt noch einen weiteren Einwand: die Gleichheit zweier Strecken sei nämlich »eben so schwierig zu begreifen, als die Gleichheit zweier Zeiten«<sup>102</sup>). Er führt als angeblichen Beweis dafür den Einfluss des Druckes und der Temperatur auf die Länge von Maßstäben ins Feld. Es ist nun ja unbestreitbar richtig, dass der praktisch genaue Nachweis der Gleichheit zweier Strecken durch die Veränderlichkeit des Körperlichen erheblich erschwert wird. Allein der durch logische Abstraction aus der Erfahrung gewonnene Begriff »gleich großer Strecken« wird davon doch nur wenig berührt; während der nicht räumlich fundirte Begriff gleicher Zeitabschnitte, wie er unserem Kritiker als Grundlage der Mechanik offenbar vorschwebt, die Abstraction eines psychologischen Datums von solcher Unzuverlässigkeit ist, dass man ihn

der Abstraction aus den Congruenzexperimenten der Maßstabverfertiger unmöglich als ebenbürtig an die Seite stellen kann. Nur die Vergleichung zweier räumlich getrennter Strecken mit Hülfe des bloßen »Augenmaßes« kann als Analogon der lediglich subjectiven Zeitvergleichung herangezogen werden. So wenig aber die Geometrie sich auf das Augenmaß stützen darf, ebensowenig die Mechanik auf den Zeitsinn, oder auch nur auf Abstractionen, die von bloßen Erfahrungen über die äußerst schwankende »subjective Zeit« hergeleitet sind. Die Bemerkung Johannesson's, Neumann's Zeitscala setze im Grunde der gangbaren Zeitvorstellung nur begriffliche Schrauben an, verliert alle und jede kritische Spitze, sobald wir uns vergegenwärtigen, dass es eine allgemeine Eigenschaft, um nicht zu sagen »Untugend« sämmtlicher Theorien ist, der Praxis des sogenannten gemeinen Menschenverstandes »Schrauben anzusetzen«.

Geradezu verblüfft hat es mich, dass Johannesson aus meinen Veröffentlichungen eine (unbeabsichtigte) Anerkennung des absoluten Charakters der Drehbewegung herauslesen konnte<sup>103</sup>). Da er seine Behauptung übrigens nicht begründet, habe ich eine Widerlegung nicht nöthig. Die Lectüre zahlreicher Stellen des »Bewegungsbegriffes« muss dem aufmerksamen Leser genügen, um mich gegen eine solche Darstellung zu rechtfertigen, die außer unserem Kritiker und dem des Deutschen vielleicht minder sprachkundigen Engländer Greenhill auch Niemandem weiter beigefallen zu sein scheint. Johannesson selbst bekennt sich in rückhaltlosester Weise zur Relativität und Reciprocität der Bewegung; er meint indess, »dass die Ueberzeugung von der Beziehungsnatur aller Bewegung von niemandem bestritten werde«<sup>103</sup>). Hierin muss ich ihm widersprechen. Es gibt leider noch immer eine Menge Vertreter der Wissenschaft, die den mystischen Nebel des Absoluten nicht mit erforderlicher Strenge und Beharrlichkeit dahin verweisen, wohin er gehört, nämlich in das abgetrennte poetische Reich der Träume und Phantasien. Solche Leute fürchten fast, den besten Theil ihrer Seele zu verlieren, wenn sie jene Grenze zwischen Wissenschaft und Dichtung streng und consequent einhalten sollen, die ihnen eine wohlbegründete, und von ihnen selbst im Princip durchaus gut geheißene Erkenntnisstheorie anweist. Die »Enttäuschung«, welche mit jeder reifen und klaren Erkenntniss der Wahrheit nach Mach's treffendem Ausdruck verbunden zu sein pflegt, kann nun

einmal nicht jeder vertragen; so sicher es auch feststeht, dass sie im Rahmen der Wissenschaft als unvermeidlich in den Kauf genommen werden muss. Es ist zweierlei, ob man die Beziehungsnatur der Bewegung im Princip anerkennt, oder ob man beim Aufbau der Mechanik consequent auf diesem Standpunkt stehen bleibt. Das System dieser Wissenschaft kann ohne das Mysterium der »absoluten Bewegung« aufgebaut werden; dieses Mysterium wird sich aber immer wieder auf's Neue in die arglosen Seelen der Lernenden einschleichen, wenn wir nicht radical den Gebrauch des Wortes »absolut« (auch im übertragenen Sinne) aus der Mechanik verbannen.

Johannesson kommt am Ende seiner Arbeit zu dem Ergebniss, dass die Wahrheit des Beharrungsgesetzes zu den Vereinbarungen gehöre; dasselbe drücke keine Erkenntniss, »sondern eine Vorschrift, eine sogenannte Forschungsregel, aus«<sup>104</sup>). Zur Bekräftigung dieser Auffassung citirt Johannesson u. a. den Sophisten Protagoras von Abdera, nach dessen Ansicht »alle menschliche Erkenntniss im letzten Grunde Willkür sei«<sup>104</sup>). Auf Kant und Mach dürfte er sich jedenfalls nicht mit gleichem Recht berufen. Denn bei aller Betonung der subjectiven und insbesondere der conventionellen Elemente des Denkens haben beide Forscher doch mit größter Entschiedenheit an dem Vorhandensein einer objectiven Seite des »Phänomenon« festgehalten; und wenn zwar bei Kant diese Anerkennung des »Objectiven« (Gegebenen) dazu führte, dass er glaubte, den »absoluten Raum« nicht aus den Grundlagen der Mechanik eliminiren zu können (so gern er es auch gethan hätte), so bedarf es doch schwerlich irgendwelcher Citate oder sonstiger Nachweise, um zu begründen, dass das rühmliche Zeugniß erstmaliger consequenter Fernhaltung des Absoluten aus der mechanischen Erkenntniss Mach nicht vorenthalten werden darf. Man kann, um es kurz auszudrücken, zugeben, dass die Natur ein der menschlichen Erkenntniss sich aufdrängendes fremdes, d. h. außerhalb der psychischen Willkür gelegenes Element, dass sie ein »Objectives« aufweist; und man braucht darum noch lange nicht zuzugeben, dass die thatsächliche Construirbarkeit dynamischer Bezugssysteme einen tieferen Hintergrund im Bereich des Absoluten haben müsse, oder dass gar durch Anerkennung eines solchen Hintergrundes die Mechanik auch nur

im geringsten an wissenschaftlicher Präcision gewänne. Eine partielle Convention oder Forschungsregel ist nun der Galilei'sche Satz unbedingt; und bis zur Dreizahl der betrachteten Punkte besteht zwischen Johannesson und mir keinerlei Widerstreit. Vom vierten betrachteten Punkt an hört dagegen die bloße Convention als solche auf; es tritt ein objectives Forschungsergebniss in die Betrachtung ein, was aber natürlich nicht in dem Sinne zu verstehen ist, als ob nicht die Forschungsregel, nach ablenkenden Massen zu suchen, fortbestehen bliebe.

Hiermit komme ich zu den beiden letzten Besprechungen, welche von Vertretern der Naturforschung meinen Vorschlägen gewidmet worden sind. Auf die eine von ihnen, diejenige von H. Kleinpeter (1900)<sup>3)</sup> habe ich schon bei Gelegenheit eines zuerst von Frege erhobenen Einwandes Bezug nehmen müssen. Kleinpeter's schließlicher Formulirung des Beharrungsgesetzes kann ich vollständig zustimmen. Eine ähnliche Formulirung hat übrigens schon J. Thomson versucht<sup>105)</sup>. Beiden Fassungen gemeinsam ist es, die Construirbarkeit eines einheitlichen Systems geradliniger Bahneinzeichnung für alle »sich selbst überlassenen« Punkte in den Vordergrund zu stellen. Aber so gewiss es ist, dass der objective Inhalt des Gesetzes damit vollkommen erschöpfend wiedergegeben wird, so bedarf es doch zuvor des phoronomischen Nachweises, dass die behauptete Constructions möglichkeit bis zur Dreizahl bahnzeichnender Punkte eine ohne jede dynamische Voraussetzungen allgemein vorhandene ist. Solange nicht dargelegt ist, dass jene Constructions möglichkeit erst vom vierten Punkt an einen beachtenswerthen objectiven Inhalt gewinnt, so lange fehlt die volle dem Gesetz zukommende Beleuchtung.

Was Kleinpeter von mir trennt, scheint mir übrigens weniger erheblich zu sein, als das, was uns einigt. Denn, um das wichtigste voranzustellen, Kleinpeter gehört zu den wenigen strengen Relativisten, die auch die letzte Consequenz ziehen, und die Frage der astronomischen Weltsysteme als eine Frage nicht der Wahrheit, auch nicht der Wahrscheinlichkeit, sondern lediglich der eleganteren Verrechnung ansehen: »Sonne und Erde bewegen sich gegen einander, das ist die Wahrheit«<sup>106)</sup>. Wenige Seiten später heißt es, unter besonderer Bezugnahme auf den zeitlichen Theil des

Beharrungsgesetzes: Lange's »Gedanke, das Beharrungsgesetz als eine partielle Convention zu formuliren, scheint mir der heutigen Bedeutung des Gesetzes in der Physik am besten zu entsprechen. Mach erkennt ausdrücklich die Zweckmäßigkeit des von Lange aufgestellten Princips der particulären Determination an, und bemerkt sehr richtig, dass dasselbe »jeder Messung zu Grunde liegt«<sup>107</sup>. Wenn dem nun so ist, warum sollte man da die Anwendung des Princips der particulären Determination auf den zeitlichen Theil des Beharrungsgesetzes beschränken? Auf den räumlichen passt er doch, denke ich, mit einer durch die Dreidimensionalität des Raumes bedingten Modification nicht weniger gut: wohlgemerkt, ich sage das nicht im Sinne einer grundlegenden Definition, sondern lediglich im Sinne der prototypisch-methodologischen Idealconstruction des Inertialsystems, und im Sinne eines allem anderen voranzustellenden Hinweises auf die Conventionalität der geradlinigen Bahnzeichnung bis zur Dreizahl der Punkte.

Die neueste Bezugnahme auf meine Vorschläge ist, soviel ich weiß, diejenige von A. Voss in dem den »Principien der rationellen Mechanik« gewidmeten Hefte der »Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften« (1901)<sup>3</sup>. Voss ist nicht nur vielfältig auf die rein historischen Ergebnisse meines »Bewegungsbegriffes« eingegangen, sondern er hat es auch unternommen, meinen Ausspruch des Beharrungsgesetzes dem Leser näher zu bringen. In zwei Punkten allerdings glaube ich an der von ihm gegebenen Darstellung Kritik üben zu müssen, wiewohl es ja von vornherein klar ist, dass im Rahmen einer gedrängten encyclopädischen Zusammenfassung eine erschöpfende und absolut genaue Wiedergabe fremder Lehrmeinungen überhaupt nicht erwartet werden darf. Der eine Punkt meiner Kritik besteht darin, dass auch Voss den von mir geführten Nachweis von der Conventionalität der geradlinigen Bahneinzeichnung dreier Punkte unerwähnt lässt. Dieser Nachweis scheint mir, wie schon öfter betont, allem anderen vorausgehen zu müssen; denn ohne von ihm Notiz genommen zu haben, dürfte schwerlich ein Leser der Definition des Inertialsystems Geschmack abgewinnen. Der andere Punkt meiner Kritik betrifft die von Voss angewandte Verbildlichung der drei Coordinatenaxen »als starrer Drähte«, auf denen die drei sich selbst überlassenen »Punkte wie glatte Kugeln gleiten können«<sup>108</sup>.

Diese Verbildlichung könnte nämlich nur zu leicht den Gedanken an eine im physikalischen Sinne »zwangläufige« Bewegung hervorrufen, und damit den ganzen Werth der Construction in den Augen des Lesers erheblich beeinträchtigen; ein aufmerksamer Leser wird freilich wohl herausfühlen, dass Voss ebenso wenig, wie ich, das Wesen der Construction so grob-sinnlich aufgefasst haben kann.

---

Hiermit ist die im Eingang vorliegender Arbeit versprochene kritische Revision zum Abschluss gelangt. Das Facit aus ihr zu ziehen, ist nicht meine Sache. Vielmehr bleibt es dem Leser des Vorstehenden überlassen, sich je nach seinem eigenen Urtheil für oder wider meine Vorschläge zu entscheiden. Wer es als Aufgabe der Wissenschaft ansieht, in ihrem Rahmen wenigstens das dem Naturmenschen angeborene, unklare und mehr oder minder willkürliche Hantiren mit geheimnisvollen Gründen der Erscheinungswelt auf ein Minimum zu beschränken, dem wird die gebotene Aufklärung ohne Weiteres willkommen sein. Da übrigens das Interesse an der Frage, wie die gegebene Darstellung erkennen lässt, eher im Wachsen, als in der Abnahme begriffen ist, brauche ich die Hoffnung nicht aufzugeben, dass sich künftige systematische Darstellungen der Mechanik mit der von mir angestrebten Aenderung der Fundamente mehr und mehr befreunden werden. Wer in dem Trägheitssatz einen tieferen Sinn als den einer partiellen Convention sucht, verlässt eben damit meiner Meinung nach das Gebiet der strengen Wissenschaft. Mit dem Standpunkt des philosophischen oder religiösen Glaubens zu rechten, ist aber natürlich niemals meine Absicht gewesen. In diesem Sinne habe ich seiner Zeit die Kritik Newton's mit den Worten abgeschlossen: »Dem Glauben des Einzelnen bleibt es unbenommen, seine Convention, seine subjective Teleologie als Ausfluss einer allgeistigen göttlichen Teleologie aufzufassen<sup>109)</sup>.

---

## Anmerkungen.

- 1) L. Lange, Ueber die wissenschaftliche Fassung des Galilei'schen Beharrungsgesetzes, *Philos. Stud.* hrsgg. v. W. Wundt, Band II, 1885, S. 266—297.  
 — — Nochmals über das Beharrungsgesetz, ebendas. S. 539—545.  
 — — Ueber das Beharrungsgesetz, *Berichte d. Königl. Sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften* 1885, *Math.-Phys. Cl.*, S. 333—351.  
 — — Die geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffes und ihr voraussichtliches Endergebniss, *Philos. Stud.*, Band III, 1886, S. 337—419, 643—691.

Die letztgenannte Abhandlung ist, vermehrt um ein Vorwort, ein Inhaltsverzeichnis und einen Anhang (\*Ueber das Beharrungsgesetz und seine Aufklärung vermittelt des methodologischen Princips der particularen Determination\*) 1886 bei W. Engelmann, Leipzig, separat erschienen.

- 2) C. Neumann, Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie, Leipzig 1870.  
 E. Mach, *Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit*, Prag 1872.  
 E. Mach, *Die Mechanik*, in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt, Leipzig 1883 (1. Aufl.), 1901 (4. Aufl.).  
 H. Streintz, *Die physikalischen Grundlagen der Mechanik*, Leipzig 1883.  
 J. Thomson, On the law of inertia . . ., *Proceedings of the R. S. of Edinburgh*, 1883/84, Vol. XII, No. 116, p. 568—578.
- 3) W. Wundt, Ueber die physikalischen Axiome (Vortrag), *Festschrift d. histor.-philos. Vereins zu Heidelberg*, 1886.  
 H. Seeliger, *Kritisches Referat über Lange's Arbeiten*, *Vierteljahrsschrift der Astronom. Gesellschaft*, Jahrg. 22, S. 252—259.  
 A. König, Ueber die neueren Versuche zu einer einwurfsfreien Grundlegung der Mechanik, *Verhandlungen d. Physik. Gesellsch. zu Berlin* 1886, Jahrg. V, S. 73 f.  
 S. Günther, *Handbuch der mathematischen Geographie*, Stuttgart 1890, S. 758 Anm.  
 S. Günther, *Handbuch der Geophysik*, 2. Aufl., Stuttgart 1897, Bd. I, S. 283.  
 J. B. Stallo, *The concepts and theories of modern physics*, 3rd ed. London 1890. (Die mir nicht bekannte erste Ausgabe erschien 1881).  
 J. B. Stallo, *Die Begriffe und Theorien der modernen Physik*. Nach der 3. Aufl. d. Originals übersetzt von H. Kleinpeter. Mit Vorwort von E. Mach, Leipzig 1901 (XX u. 332 S. 8°).  
 E. Budde, *Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme*, Berlin 1890. Band I, XX u. 418 S. 8°.  
 G. Frege, Ueber das Trägheitsgesetz, *Zeitschr. f. Philosophie u. philos. Kritik*, N. F. Band 98. 1891, S. 145—161.  
 L. Weber, Ueber das Galilei'sche Princip, Kiel 1891, 40 S. 8°.  
 J. G. Mac Gregor, On the fundamental hypotheses of abstract dynamics, *Canada, R. Soc. Trans.* vol. X, 3 (1892).  
 J. G. Mac Gregor, On the hypotheses of dynamics, *Philosophical Magazine*, 5th ser. vol. 36. 1893, p. 233—264.

- P. Johannesson, Das Beharrungsgesetz, Programm des Sophien-Realgymnasiums, Berlin 1896, 26 S. 4°.
- B. u. J. Friedländer, Absolute oder relative Bewegung? Berlin 1896. 35 S. 8°.
- A. Höfler, Studien zur gegenwärtigen Philosophie der Mechanik. Leipzig 1900, 168 S. 8°.
- H. Kleinpeter, Zur Formulirung des Trägheitsgesetzes, Archiv f. systemat. Philosophie, Band VI 1900, S. 461—469.
- A. Voss, Die Principien der rationellen Mechanik, Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, Band IV, 1 (1901) Heft 1, 121 S. 8°.
- 4) H. Hertz, Die Principien der Mechanik, Leipzig 1894, S. 8.
- 5) Johannesson, a. a. O. S. 3.
- 6) P. Volkmann, Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik. Mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntniss. Leipzig 1900, S. 21.
- 7) P. Volkmann, a. a. O. S. IV (Vorwort), S. 2. 3. 21 f. u. a.
- 8) P. Volkmann, a. a. O. S. 3.
- 9) P. Volkmann, a. a. O. S. III.
- 10) S. u. S. 55 f. d. Abhdlg.
- 11) Die Wichtigkeit der Frage nach dem dynamischen Bezugssysteme hat auch Gauss sehr klar erkannt. Vgl. L. Lange, Bewegungsbegriff S. 87, und C. Neumann, Leipz. Sitzgsber., Math.-Ph. Cl. Band XXXI S. 61 f.
- 12) P. Volkmann, a. a. O. S. 70—81.
- 13) P. Volkmann, a. a. O. S. 49. — S. 300.
- 14) P. Volkmann, a. a. O. S. 51.
- 15) P. Volkmann, a. a. O. S. 54.
- 16) P. Volkmann, a. a. O. S. 362. Man vergleiche auch Mach's Kritik der Bezugnahme auf den Aether, »Mechanik« 4. Aufl. 1901, S. 291, und die Auseinandersetzung von A. Voss, a. a. O. S. 39 f.
- 17) P. Volkmann, a. a. O. S. V.
- 18) L. Lange, Philos. Stud. Band II, S. 275—278.  
— — Leipz. Sitzgsber., Math.-Phys. Cl. 1885, S. 338 Anm.  
— — Bewegungsbegriff, S. 136.  
E. Mach, Mechanik, 2. Aufl. S. 483, 4. Aufl. S. 250.
- 19) P. Volkmann, a. a. O. S. 360.
- 20) P. Volkmann, a. a. O. S. 363.
- 21) Vgl. F. Rosenberger, Isaac Newton u. s. physikalischen Principien, Leipzig 1895, S. 283 ff.
- 22) Vgl. J. P. Eckermann, Gespräche mit Goethe, 1. Februar 1827, viertletzter Absatz.
- 23) H. Kleinpeter, Erkenntnisslehre und Naturwissenschaft in ihrer Wechselwirkung. (Aus d. 25. Jahresbericht der deutschen Landesoberrealschule in Prossnitz i. Mähren.) 1900, 40 S. 8°.

Man vergleiche auch (in Bezug auf die Mitwirkung des Deutschthums an der Entwicklung der menschlichen Cultur) die sehr interessante Vorrede, die Mach zu der Kleinpeter'schen Uebersetzung des Stallonschen Werkes (s. o. Anm. 3) geschrieben hat. Mach bezeichnet mit Recht die philosophisch und naturwissenschaftlich gebildeten deutschen Leser

als das Publicum, für das Stallo's Werk bestimmt ist (S. IV). Stallo's eigene Ansicht über die deutsche Eigenart, die ja auch für ihn den eigentlichen Nährboden abgab, verdient in weiteren Kreisen beachtet zu werden. Vgl. Mach's Vorwort S. VI—IX.

- 24) *Nature* 49 (1894) p. 389—391 (A. Gray), p. 529 f. (A. B. Basset), p. 578 (E. T. Dixon).

*Nature* 51 (1894) p. 105 (A. E. H. Love, A. G. Greenhill) p. 153 (Love) p. 198 f. (Love), p. 271 f. (Basset, O. J. Lodge).

Man vergleiche das von E. Lampe gegebene Referat über die englische Discussion (*Fortschr. d. Mathematik* 25. 1897, p. 1318 ff.).

- 25) O. Lodge, *The foundations of dynamics*, *Phil. Mag.* 5 s. 36 v. (1893), p. 1—36. J. G. Mac Gregor, *On the hypotheses of dynamics*, *Phil. Mag.*, 5 s., 36. v., p. 233—264.

- 26) *Nature*, 51 (1894), p. 106.

- 27) *Annales de la société scientifique de Bruxelles*.

Band XVIII A, S. 37—98 (1894): E. Vicaire, *Sur le principe de l'inertie et sur la notion du mouvement absolu en mécanique*.

Band XVIII B, S. 283—310: E. Vicaire, *Sur la réalité de l'espace et le mouvement absolu*.

Band XIX A, S. 56—58: P. Mansion, *Sur l'inutilité de la considération de l'espace dit réel, en mécanique*. Ebendasselbst S. 113—116: E. Vicaire, *Sur la réalité de l'espace*.

Band XX A, S. 8—19: E. Vicaire, *Observations sur une note de M. Mansion*.

Band XX A, S. 19—20. 56: P. Mansion, *Réponse*.

Band XX A, S. 20 f.: E. Goedseels, *Note*.

*Bulletin de la société philomatique de Paris*.

E. Vicaire, *Sur la nature et sur les principes de la mécanique rationnelle*, (8) 8, 19—20. (1896).

E. Vicaire, *Sur la nécessité du mouvement absolu en mécanique*, (8) 8, 20—22. (1896).

Man vergleiche überhaupt die hierher gehörigen Artikel der Jahrgänge 1890—1897 der »*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*«. Vielleicht komme ich ein anderes Mal auf diese französische Discussion ausführlich zurück. P. Mansion fasst in seiner Broschüre: *Sur les principes fondamentaux de la géométrie, de la mécanique et de l'astronomie* (Paris 1893, 16 S.) das Verhältniss der beiden Weltsysteme ganz im gleichen, rein relativistischen Sinne auf, wie Mach und ich.

- 28) *Phil. Magazine*, 5 s. 36 v. (1893), p. 233—243. Gemeint sind die zwei ersten »Leges« der Newton'schen Principien.

- 29) Hier ist die »Presidential address« Mac Gregor's in den *Trans. Roy. Soc. Canada*, vol. X. 3, p. 3 gemeint. S. o. Anm. 3.

- 30) »Würde also Prof. Lodge sich bemühen, einen Bezweifer des ersten Bewegungsgesetzes mit dem einfachen Hinweis, den er in Aussicht stellt, in die Enge zu treiben, nämlich: »Wenn Geschwindigkeit und Richtung eines frei sich bewegenden Körpers sich ändern, so müssen sie sich in einer bestimmten Weise ändern; nun gut, sagen Sie mir, in was für einer Weise sie sich ändern! Sie können es nicht, es sei denn, Sie können mir absolut

festgelegte Bezugslinien vorweisen« —, so braucht der Zweifler nicht im mindesten um eine Erwiderung in Verlegenheit zu sein. Er hat nur zu sagen: »Wenn Sie mir gütigst angeben wollen, in Bezug auf welche Axen Sie die Geschwindigkeit des Körpers für gleichförmig halten, dann will ich Ihnen gern verrathen, was für eine Art der Geschwindigkeitsänderung ich vermute. Allein so lange wir nicht über die Bezugssaxen eine Uebereinkunft treffen, ist es für uns unmöglich, unsere beiderseitigen Axiome zu vergleichen«.

- 31) Vgl. o. Anmerkung 2.
- 32) Vgl. S. 8 von Lodge's »Foundations«.
- 33) »Die Thatsache, dass Prof. Lodge die Bewegung in Bezug auf den Aether als eine absolute Bewegung ansieht (S. 30 seiner Abh.), macht vielleicht selbst diese Behauptung zweifelhaft.«
- 34) »Neumann, J. Thomson, u. Muirhead.« — Die Arbeit des letztgenannten Autors betitelt sich »The laws of motion«, und steht im *Phil. Magazine* 5 s. 23 vol. (1887), p. 473 ff. Die von Voss (a. a. O. S. 38) citirte Stelle daraus lässt bereits deutlich erkennen, dass Muirhead wesentlich an J. Thomson anknüpft. Über letzteren vgl. L. Lange, *Leipz. Berichte, Math.-Phys. Cl.* 1885, S. 351; sowie mein Referat über S. Thomson's Arbeit, *Wiedemann's Beibl.* IX, S. 4. (L. L.)
- 35) E. Mach, *Mechanik*, 2. Aufl. 1889. S. 217 f. 481 f.
- 36) Hier schließt sich eine längere Anmerkung an, welche auf eine mathematische Formulirung Mach's (*Mechanik*, 2. Aufl. S. 218, 4. Aufl. S. 244) Bezug nimmt, die wir aber hier wohl fortlassen können. (L. L.)
- 37) »Man vergleiche auch Prof. Tait's Lösung dieses Problems mit Hilfe von Quaternionen«, *Proceed. R. S. Edinburgh*, vol. XII p. 743, sowie Tait, *Properties of matter*, 1885 p. 92.
- 38) »Thomson & Tait, *Treatise on natural philosophy*, vol. I. part 1. (1879), § 249.« — — Man vergleiche meine Kritik dieses Vorschlages in *Philos. Stud.* Bd. II S. 281 (L. L.)
- 39) Gemeint ist der Aufsatz in den *Leipziger Berichten*, oder der zweite Anhang der Buchausgabe des »Bewegungsbegriffes«, s. o. Anm. 1. (L. L.)
- 40) »Ich brauche wohl kaum zu Prof. Lodge's Einwurf gegen solche Darstellungen des ersten Gesetzes, der sich auf ihre verwickelte Beschaffenheit gründet, Stellung zu nehmen. Wenn Verständlichkeit mit Einfachheit zusammentrifft, so ist es schön und gut. Wenn nicht, so muss natürlich die Einfachheit geopfert werden.« — — Hierzu möchte ich meinerseits noch hinzufügen, dass die von mir s. Z. gegebene Idealconstruction des Inertialsystemes im Grunde äußerst einfach ist. Die einzige Complication, die ihr unvermeidlich anhaftet, beruht lediglich darauf, dass der Raum nicht eine, sondern drei Dimensionen hat. Diese Complexität der Raumanschauung kann freilich Niemand (auch Prof. Lodge nicht) aus der Welt schaffen. (L. L.)
- 41) »Dieser Einwand sollte sicherlich nicht erhoben werden von einem Schriftsteller, welcher das dritte Bewegungsgesetz als ein Axiom betrachtet, und uns überdies selber erzählt, dass er beständig mit Ingenieuren zusammenkommt (eine Berufsklasse, deren dynamische Erfahrung natürlich eine

weitere ist, als diejenige der meisten Mitglieder des Menschengeschlechtes), welche sich weigern, seine Auffassung anzuerkennen.◀

- 42) Für deutsche Mathematikstudierende im vierten oder fünften Semester wäre der Gegenstand meiner Ansicht nach nicht zu hoch. (L. L.)
- 43) E. Mach, *Mechanik*, 2. Aufl. 1889 S. 484, 4. Aufl. S. 251.◀
- 44) Der letzte Satz bildet im Original eine Fußnote, scheint mir aber bedeutsam genug, um hier in den Haupttext übernommen zu werden. (L. L.)
- 45) J. G. Mac Gregor, a. a. O. S. 243. Als Parallelstellen anderer Autoren, welche vollkommen dasselbe aussagen, führe ich an: Mach, *Mechanik*, 1. Aufl. S. 216, 2. Aufl. S. 216, 4. Aufl. S. 242; Lange, *Bewegungs begriff* S. 120 f. H. Kleinpeter, a. a. O. (s. o. Anm. 3) S. 462. Diese Auffassung der Frage des Weltsystemes wird sich mit fortschreitender Aufklärung immer mehr Bahn brechen.
- 46) S. o. S. 8 d. Abh.
- 47) K. Pearson, *Grammar of Science* 1892, 2<sup>nd</sup> ed. 1900. Appendix, Note I (3 Seiten).
- J. B. Stallo, *Die Begriffe und Theorien der modernen Physik*, deutsche Ausgabe 1901, S. 192—212.
- Die erste Auflage des letzteren Werkes erschien, wie schon einmal erwähnt (in englischer Sprache) 1881, also kurz vor Mach's *Mechanik* und vor meinen eigenen Arbeiten. Alle drei Darstellungen des Bewegungsproblems entstanden ganz unabhängig von einander und legen Zeugniß dafür ab, dass der heute alltäglich mächtiger werdende Trieb nach Erlösung der Wissenschaft aus den Fesseln metaphysischen Denkens schon damals bei Einzelnen lebendig war.
- 48) Man vgl. die in Anm. 23 oben citirte Arbeit, S. 27.
- 49) S. Newcomb, *On the definition of the terms energy and work*, *Phil. Mag.* 5 s. 27 vol. p. 115—117. L. Lange, *Bewegungs begriff*, S. 123.
- 50) S. 54 dieser Abhandlung.
- 51) J. Tilly, *Essai sur les principes fondamentaux de la géometrie et de la mécanique*, Bordeaux 1878.
- J. Tilly, *Sur les notions de force, d'accélération et d'énergie en mécanique*, *Bull. Acad. Royale des sciences de Belgique (Bruxelles)* 3. XIV. 975—1020 (1887).
- W., *Newton's laws of motion*, *Nature* 35 (1886/87), p. 366.
- J. G. Mac Gregor, *On the definition of work done*, *Nova Scotia Trans. Inst. of Science* (2) I. 460—464.
- J. D. Everett, *On absolute and relative motion*, *Rep. Meet. Brit. Assoc. Adv. Science*, vol. 65 (1895) p. 620.
- Marey, *Le mouvement*, *Comptes rendus* 117 (1893) p. 272.
- J. W. Powell, *Definition of motion*, *Proceed. Amer. Assoc. Advanc. Science*, August 1894 p. 112.
- 52) S. u. Anm. 87.
- 53) Z. B. P. Zech, *Ztschr. f. Math. u. Physik* 33 (2) S. 34.
- 54) Für den Mathematiker ist die Frage nicht ohne Interesse, von welcher Ordnung die Mannigfaltigkeit aller überhaupt möglichen, gegen einander bewegten starren Räume wohl sei. Wie ich anderwärts (*Leipziger Berichte*, a. a. O. S. 344) hervorgehoben habe, gibt es, wenn man alle in Bezug auf-

einander ruhenden Inertialsysteme, die sich also nur durch Unterschiede des Coordinatenursprungs und der Coordinatenachsen von einander unterscheiden, in den einheitlichen Begriff eines Inertialraumes zusammenfasst,  $\infty^3$  solcher Inertialräume. Die unendliche Mannigfaltigkeit aller überhaupt möglichen gegeneinander bewegten schlechthin starren Räume ist zweifellos der dritten Ordnung noch um ein Unendliches überlegen.

55) L. Lange, Bewegungsbegriff, S. 64 f. und 115.

56) Math.-Phys. Cl. S. 153—190. Vgl. insbesondere S. 156 und 187—189.

57) Mach, Mechanik, 2. Aufl. Anhang S. 483 ff., 4. Aufl. 1901, S. 250 ff. In den letzten Auflagen hat Mach diese Erörterungen aus dem Anhang in das zweite Kapitel des Buches »Die Entwicklung der Principien der Dynamik« hinübergenommen.

58) Mach bezieht sich hier auf den »Bewegungsbegriff«.

59) Ich habe die Definition des Inertialsystems niemals so verstanden, als solle sie unmittelbar der praktischen Construction dynamischer Bezugssysteme dienen. S. S. 36 dieser Abhandlung.

60) Vgl. Mac Gregor, S. 18 dieser Abhandlung.

61) Sollte nicht statt der statisch wirkenden Drehwage das dynamisch wirkende Gyroskop oder vielmehr eine Verbindung von beiden eher am Platze sein?

62) B. u. J. Friedländer, a. a. O., S. 16; Mach, Mechanik, 4. Aufl. S. 252.

Man vergleiche übrigens auch den Bericht Johannesson's über ein ähnlichen Zwecken dienendes Experimentum crucis, das aber zu keinem Ergebniss führte, P. Johannesson, a. a. O. (s. o. Anm. 3) S. 14.

63) S. o. S. 17.

64) E. Budde, Allgemeine Mechanik, Bd. I. 1890. S. 6. 112. 133 ff. 135.

65) Hoffentlich geht man recht bald dazu über, diesen und ähnliche verhängnisvolle Ueberreste eines theosophirenden und ontologisirenden Mysticismus aus der exacten Wissenschaft auszumerzen. Uebrigens redet man, wie bekannt, selbst schon in der Phronomie von »absoluten« und »relativen« Orten. Dass hier diese Unterscheidung einen gänzlich anderen Sinn hat als in der Dynamik, und dass die Ausdrücke »primäre« und »secundäre Orte« ungleich deutlicher und zutreffender wären, bedarf wohl nicht der näheren Ausführung.

66) Vgl. S. 19 dieser Abhandlung.

67) G. Frege, a. a. O. (s. o. Anm. 3), S. 145. 146.

68) P. Johannesson, a. a. O. (s. o. Anm. 3) S. 5.

69) G. Frege, a. a. O. S. 147. 148.

70) L. Lange, Bewegungsbegriff, S. 67.

71) G. Frege, a. a. O. S. 149 f.

72) Aehnliches gilt besonders auch von der Causalreihe.

73) Man vergleiche über den »starren Raum« S. 22 dieser Abhandlung.

74) S. o. S. 25 f. d. Abh.

75) G. Frege, S. 150. P. Johannesson, a. a. O. S. 7. 8.

76) P. Johannesson, a. a. O. S. 16. H. Kleinpeter, a. a. O. S. 466.

77) L. Lange, Philos. Studien, Band II, S. 271.

78) Leipziger Berichte, a. a. O. S. 346, »Bewegungsbegriff«, S. 139 und 140.

79) Manche Negervölker bilden ein drastisches Beispiel für die Mythologisirung aller Naturvorgänge. Ebenso sehen gewisse buddhistische Secten die Natur

erfüllt mit lauter Geistern, und in jedem Irrenhause lassen sich Vertreter der nämlichen Weltanschauung finden.

- 80) Gleichwohl nehmen Leibniz, Lotze und manche andere Metaphysiker derartige innere Zustände der bewegten und bewegenden Körper als gewiss an. Die Phantasie kann da ebenso frei schalten, wie etwa in der Frage, ob, und mit was für Lebewesen die Himmelskörper bevölkert seien. Alle diese Probleme gehören in das unendliche Buch der unbeantworteten, und größtentheils wohl für immer unbeantwortet bleibenden Fragen, und schwerlich wird die exacte Wissenschaft von ihrer weiteren Verfolgung auch nur die geringste Förderung erwarten dürfen.
- 81) Man braucht nur spielende Kinder in den ersten Lebensjahren zu beobachten, um sich zu überzeugen, dass sie von dem Räthsel der Schwerkraft psychisch aufs mächtigste berührt werden.
- 82) Dass die berühmte Anekdote von dem fallenden Apfel wohl nur eine Legende ist, hat Rosenberger sehr wahrscheinlich gemacht; wie fast alle ähnlichen Legenden dürfte gleichwohl auch diese eine innere Wahrheit besitzen. Man vergleiche S. 119 f. des Rosenberger'schen Buches (s. oben Anm. 21).
- 83) Eine derartige unmetaphysische Auffassung des physikalischen Kraftbegriffes wird u. a. (in Analogie zu gewissen psychologischen Begriffen) auch von Müller und Pilzecker vorausgesetzt. Vgl. deren »Experimentelle Beiträge zur Lehre vom Gedächtniss« 1900, S. 269 f.
- 84) S. o. S. 56 dieser Abhandlung.
- 85) L. Lange, Bewegungsbegriff, Anhang I. S. 126—132.
- 86) Dass die relativen Massen von Doppelsternen berechnet worden sind, ist in dem betrachteten Zusammenhang ohne Bedeutung.
- 87) G. Frege, a. a. O. S. 161. H. Seeliger, a. a. O. S. 257—259.

Zu Seeliger's antikritischen Bemerkungen seien mir noch einige Worte gestattet. Ich glaube nach wie vor, dass sich zahlreiche Fachastronomen der schwer definirbaren Durchschnittsbeziehung, die in der sogen. »Translation der Sonne« steckt, nicht völlig klar bewusst sind. Argelander jedenfalls war sich ihrer nicht bewusst, sonst hätte er unmöglich den schon erwähnten Trugschluss begehen können. Nur dann, wenn die Wissenschaft sich entschließt, grundsätzlich gar nicht mehr, auch nicht in übertragenem Sinne, d. h. aus Bequemlichkeit, von »absoluten« und »wahren« Bewegungen zu reden, kann eine Klärung der Vorstellungen auf diesem Gebiete Platz greifen. — Es ist mir nicht bekannt, ob die neuesten Bestimmungen des »Apex« die Vogel'schen Daten über die Bewegungen im Visionsradius benutzt haben. Früher wurden jedenfalls bloß die zur Gesichtslinie senkrechten Componenten der Eigenbewegungen der Rechnung zu Grunde gelegt; da Vogel's bahnbrechende photographische Untersuchungen (vgl. H. C. Vogel, Untersuchung über die Eigenbewegung der Sterne im Visionsradius auf spectrographischem Wege, Potsdam 1892) erst seit 1888 datiren, und die älteren — mir übrigens schon früher wohlbekannten — Untersuchungen von Secchi, Huggins, Seabroke u. A. keine genügende Uebereinstimmung der Resultate zeigten, konnte es ja gar nicht anders sein. Ob die Bestimmung des »Apex«, wenn man nicht bloß die zweidimensionalen Eigenbewegungen auf der Sphäre, sondern als

dritte ergänzende Dimension auch die spectrographisch ermittelten Verschiebungen in der Gesichtslinie in die Rechnung einbezieht, das alte Resultat (Sternbild des Herkules) bestätigt, erscheint zweifelhaft; die zwischen den verschiedenen bisherigen Rechnungsergebnissen bestehende — übrigens nur mäßige — Uebereinstimmung könnte nämlich auch auf Umständen beruhen, welche mit der Vernachlässigung der radialen Componente in Verbindung stehen. Möglicher Weise erklärt sie sich sogar auf diese Weise noch einfacher, als aus der früher von mir gemachten Annahme, dass die Sonne in die Classe der (bei Durchschnittsrelation gegen den gesammten Complex) stark bewegten Fixsterne gehöre. Man vergleiche zur genaueren Orientirung: S. Newcomb, Populäre Astronomie, 2. Aufl. 1892, S. 551—559, und J. Scheiner, Die Spectralanalyse der Gestirne, 1890, S. 151—165, 350—358. — Die Bewegungen, welche mittelst des Spectroscops festgestellt werden, sind übrigens keine Relativbewegungen zum Aether, — obschon dieser an der Verschiebung der Spectrallinien mitwirkend theilhaftig ist, — sondern ganz klare Relativbewegungen in Bezug auf unsere Sonne. Denn die näherungsweise Gültigkeit des Doppler'schen Princip's zwischen zwei relativ zu einander bewegten Körpern dürfte auch in dem Falle vorhanden sein, wenn beide relativ zum Aether ein Maß von Bewegung besitzen, welches im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit niedrig zu veranschlagen ist (vgl. J. Scheiner, a. a. O. S. 155). — — Wenn man übrigens ganz streng sein wollte, müsste man vor Beginn der Apexberechnungen noch diejenigen Correctionen der Fixsternörter anbringen, welche aus dem sehr verschiedenen großen Abstand der Sterne und aus der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes entspringen. Von allzu großem Einfluss auf das Rechnungsergebniss dürfte freilich die Anbringung dieser Correctionen wohl nicht sein; der genannte Umstand soll auch nur darum erwähnt werden, weil er bestätigt, dass die völlige Undefinirbarkeit des Bezugssystemes der »Sonnentranslation« auf Complicationen beruht, die vielleicht noch nicht einmal in theoretischer Vollständigkeit erwogen worden sind.

- 88) Die aus der Lichtgeschwindigkeit folgenden Correctionen (s. v. Anm.) müssten, wenn möglich, zuvor hieran angebracht werden.
- 89) Ich glaube kaum, dass Mach nach dem Durchlesen dieser Darstellung bei der Behauptung verharren werde: »Sobald wir von der Lagenveränderung der Fixsterne gegen einander nicht mehr absehen können, hat das Legen eines Coordinatensystemes ein Ende erreicht.«
- 90) G. Frege, a. a. O. S. 157. 160.
- 91) Vgl. L. Lange, Bewegungsbegriff, S. 56. 69 f.
- 92) L. Weber, a. a. O. (s. o. Anm. 3), S. 36.
- 93) Wie kaum erwähnt zu werden braucht, haben die Massen in diesem Problem lediglich die Bedeutung von willkürlich beigelegten Coefficienten ohne dynamischen Hintergrund.
- 94) Mit Rücksicht auf den mir zur Verfügung stehenden Raum muss ich mich auf die bloße Anführung dieses, von Herrn Professor Brill mir freundlich mitgetheilten Lehrsatzes beschränken. Das in demselben vorausgesetzte »Princip von der Erhaltung der Flächen«, sowie der Begriff des »Trägheitsellipsoides« werden in jedem Lehrgang der analytischen Mechanik abgehandelt.

- 95) P. Johannesson, a. a. O. S. 16.  
96) J. G. Mac Gregor, s. S. 18 dieser Abhandlung.  
97) L. Lange, Bewegungsbegriff (1886), S. 132. S. auch S. 43 f. dieser Abhdlg.  
98) In einer Richtung verdient übrigens Weber's Anregung weiter verfolgt zu werden. Für jeden Complex materieller Punkte, sei er nun ein starrer oder ein irgendwie anders construirter —, ist das System jederzeit kleinster  $\Sigma(\frac{1}{2}mv^2)$  und dieser Minimalwerth selbst, wenngleich ersteres kein Inertialsystem, und letzteres keine Summe lebendiger Kräfte zu sein braucht, dennoch vielleicht von irgendeiner physikalischen Bedeutung, welcher nachzuspüren eine beachtenswerthe Aufgabe für den mathematischen Physiker sein dürfte.
- 99) Mach, Mechanik, 4. Aufl., S. 269—276.  
100) H. Hertz, Die Principien der Mechanik, S. 160.  
101) S. o. S. 15 dieser Abhandlung.  
102) P. Johannesson, a. a. O. S. 6; S. 7.  
103) P. Johannesson, a. a. O. S. 9; S. 13.  
104) P. Johannesson, a. a. O. S. 23; S. 26.  
105) In dem unter Anm. 2 angeführten Aufsätze.  
106) H. Kleinpeter, a. a. O. S. 462.  
107) H. Kleinpeter, a. a. O. S. 464.  
108) A. Voss, a. a. O. S. 38.  
109) L. Lange, Bewegungsbegriff, S. 71. Ich zweifle nicht im mindesten, dass Newton selbst diesen Standpunkt reinlicher Scheidung vertreten hätte, wenn der Satz »Religion ist Privatsache« zu seiner Zeit sich so allgemeiner Anerkennung erfreut hätte, wie es heute in wissenschaftlichen Kreisen doch wohl der Fall ist.