Ueber den Zusammenhang zwischen der Methode der Minimaländerungen und der Methode der richtigen und falschen Fälle.

Von

Erich Mosch.

(Leipzig.)

Mit 2 Figuren.

1. Vorbemerkungen.

Von den Maßmethoden der Psychophysik liefert nur die M. d. M.-Ae.[1]) den Werth der Unterschiedsschwelle direct; die andern Methoden ergeben gewisse Größen, mit deren Hülfe man zwar auch die Unterschiedsempfindlichkeit misst, die aber nicht in engerem Zusammenhange mit der Unterschiedsschwelle stehen; nur die M. d. r. u. f. F.[2]) liefert einen Werth, dem zuweilen auch der Charakter einer Unterschiedsschwelle zugesprochen worden ist. Die M. d. r. u. f. F. sowie die der M.-Ae. sind daher auch oft mit einander verglichen worden, die Ergebnisse dieser Untersuchungen stimmen aber durchaus nicht überein. In der M. d. r. u. f. F. kommen zwei Größen vor, die zur Messung der Unterschiedsempfindlickeit benutzt worden sind, nämlich das aus der Fehlertheorie bekannte Gauß'sche Präcisionsmaß h und die im Folgenden mit x (bezw. x_o und x_u) bezeichnete Müller'sche Schwelle, d. i. diejenige Reizdifferenz, bei der die relative Häufigkeit der r. bezw. f. Fälle ebenso groß ist, wie die der andern Urtheile zusammen. Um die Berechtigung dieser beiden Größen zur Messung der Unterschiedsempfindlichkeit handelt es sich; bald

1) Zur Abkürzung für Methode der Minimaländerungen.

2) Zur Abkürzung für Methode der richtigen und falschen Fälle.

ergaben die Versuche h allein als hierfür geeignet, bald wurde x direct mit der Schwelle der M. d. M.-Ae. in Zusammenhang gebracht. So sagt Lorenz[1]): »Man kann behaupten, dass der nach der M. d. M.-Ae. gefundene Schwellenwerth, als Reizunterschied D in der M. d. r. u. f. F. verwendet, $\frac{r'}{n} = \frac{1}{2}$ ergibt«. Nach ihm ist also die Fechner'sche Schwelle (eine der Müller'schen Schwelle entsprechende Größe) die Schwelle der M. d. M.-Ae. Müller selbst nimmt x als Maß der Unterschiedsempfindlichkeit an. Merkel folgert aus seinen Untersuchungen[2]): »Die Schwellenwerthe der M. d. M.-Ae. und der M. d. r. u. f. F. sind wesentlich verschieden«. Derselbe sagt an anderer Stelle[3]): »Mithin ist das Präcisionsmaß umgekehrt proportional der Unterschiedsschwelle«. Bei Kämpfe[4]) lesen wir: »Das Präcisionsmaß h bewährte sich innerhalb weiter Grenzen einzig und allgemein als Maß der Unterschiedsempfindlichkeit«. Durch Experimente ist also zur Schlichtung des Streites nicht viel beigetragen worden. Eine vermittelnde Stellung nimmt Wundt ein; er betrachtet h als Maß der Unterschiedsempfindlichkeit und sagt von den x[5]), sie seien nicht nur von der Unterschiedsempfindlichkeit, sondern auch von anderen Bedingungen des Bewusstseins abhängig, so dass sie zwar in gewissen Fällen den eigentlichen Schwellenwerthen analog gehen, niemals ihnen aber entsprechen werden. Im Folgenden soll der Versuch gemacht werden, das Problem von einer anderen Seite her in Angriff zu nehmen, es mathematisch zu formuliren und einen functionellen Zusammenhang zwischen S (der Schwelle der M. d. M.-Ae.), x und h herzustellen.

2. Einführung der Gröfsen s_1 und s_2.

Als Ausgangspunkt unserer Betrachtungen soll eine Bemerkung Wundt's[6]) dienen. Durch die Methode der M.-Ae. erhält man bekanntlich die Unterschiedsschwelle, indem man von zwei gleichen Reizen ausgeht und den einen so lange steigert, bis er merklich

---

1) Philos. Studien II, 469.
2) Philos. Studien IV, 289.
3) Philos. Studien VII, 618.
4) Philos. Studien VIII, 589.
5) Physiol. Psychologie 4 I, 351.
6) Physiol. Psychologie 4 I, 344.

größer als der andere erscheint, dann wieder zurückgeht und den Punkt feststellt, wo er wieder dem ersten gleich erscheint u. s. w. Wundt will nun an Stelle der regelmäßigen eine unregelmäßige Variation des Vergleichsreizes treten lassen: »Man gebe in einer Reihe von Versuchen successiv zu dem Normalreiz r die Vergleichsreize r_1 r_2 r_3 $\cdots$, die unregelmäßig über und unter r gelegen sind, so aber, dass keiner von ihnen die Unterschiedsschwelle erheblich überschreitet. Aus einer Reihe so ausgeführter Versuche sind 1) die unter dem Normalreiz r gelegenen Werthe des Vergleichsreizes r', bei denen $r' = r$ empfunden wurde, zu einem Mittel zu vereinigen, 2) die ebenso gelegenen, denen r' eben merklich $< r$ entsprach, sodann 3) die über r gelegenen Werthe $r' = r$, 4) die ebenso gelegenen r' eben merklich $> r$. Aus 1) und 2) erhält man dann die untere, aus 3) und 4) die obere Unterschiedsschwelle. Hierbei trägt aber zugleich das Verfahren den Charakter einer combinirten Methode an sich, da man alle Ergebnisse $r' < r$, $r' > r$ und $r' = r$, ohne Rücksicht auf die gleichzeitige Bedeutung von Schwellenwerthen, die einzelnen Fällen der Ungleichungen $r' < r$ und $r' > r$ zukommt, nach der M. d. r. u. f. F. behandeln kann. Es ergibt sich dadurch die Möglichkeit, aus dem nämlichen Versuchsmaterial die beiden zur Messung der Unterschiedsempfindlichkeit verwerthbaren Größen, die Unterschiedsschwelle und das Präcisionsmaß, nebeneinander zu bestimmen«.

Es soll versucht werden, den Gedanken, der hier ausgesprochen ist, in mathematische Form zu kleiden, und zwar wollen wir, um den Gedankengang zu vereinfachen, uns darauf beschränken, zunächst nur die obere Unterschiedsschwelle zu berechnen. Wir gehen von der M. d. r. u. f. F. aus und stellen erst noch einmal kurz die hier in Betracht kommenden Formeln zusammen, um die Bezeichnungen zu fixiren. Gegeben ist ein Normalreiz R, mit diesem werden eine Anzahl Reize $R_\varkappa$ verglichen, die von R um die Größe $\delta_\varkappa$ unterschieden sind, wo $\delta_\varkappa > 0$ ist. Notirt werden für jedes $\delta_\varkappa$ die Anzahlen der Urtheile $R_\varkappa < R$, $R_\varkappa = R$ und $R_\varkappa > R$, es seien für die Differenz $D = \delta_\varkappa$ die Anzahlen $N_\varkappa$, $Z_\varkappa$ und $P_\varkappa$. Aus diesen Zahlen berechnet man die Wahrscheinlichkeiten $n_\varkappa$, $z_\varkappa$ und $p_\varkappa$ der Urtheile, es ist:

$$n_\varkappa = \frac{N_\varkappa}{N_\varkappa + Z_\varkappa + P_\varkappa}, \quad z_\varkappa = \frac{Z_\varkappa}{N_\varkappa + Z_\varkappa + P_\varkappa}, \quad p_\varkappa = \frac{P_\varkappa}{N_\varkappa + Z_\varkappa + P_\varkappa}.$$

Für $n_\varkappa$, $z_\varkappa$ und $p_\varkappa$ haben zuerst Fechner und Müller aus den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung Formeln aufgestellt, dann hat Bruns[1]) den Gegenstand noch einmal behandelt und ist dabei zu ähnlichen Formeln wie Müller gelangt. Im Folgenden sollen die Bruns'schen Formeln benutzt werden. Sie lauten, wenn man das Fehlergesetz mit $\varphi(z)$ bezeichnet und außerdem

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi(y)\,dy$$

setzt:

$$\begin{aligned} p_\varkappa &= \psi(\infty) - \psi(x_o - \delta_\varkappa) \\ z_\varkappa &= \psi(x_o - \delta_\varkappa) - \psi(x_u - \delta_\varkappa) \\ n_\varkappa &= \psi(x_u - \delta_\varkappa) - \psi(-\infty) \end{aligned}$$

Hierin sind x_o und x_u die im Anfange dieser Arbeit definirten, der Müller'schen Schwelle entsprechenden Größen.

Als Fehlergesetz werden wir das Gauß'sche annehmen, da dasselbe in der Psychophysik mit großer Annäherung gilt; es lautet

$$\varphi(z) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2 z^2)$$

wo $\exp(t)$ die Exponentialfunction von t bedeutet und h das Gauß-sche Präcisionsmaß ist. Es wird dann:

$$\psi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-h^2 y^2)\,dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hx} \exp(-t^2)\,dt.$$

In welcher Weise kann man nun das Zahlenmaterial der M. d. r. u. f. F. zugleich für die M. d. M.-Ae. verwenden? Betrachten wir Tabelle I, die uns das Zahlenmaterial, wie es sich bei Anwendung der M. d. r. u. f. F. ergibt, veranschaulicht. Für jede Reizdifferenz D seien gleichviel Versuche gemacht worden; dann sagt unsere Tabelle aus, dass bei der Differenz $\delta_\varkappa$ $N_\varkappa$ Kleiner-, $Z_\varkappa$ Gleich- und $P_\varkappa$ Größer-Urteile abgegeben worden sind. Die letzte Differenz, bei

1) Philos. Studien IX, 1.

der noch Kleiner- bezw. Gleich-Urtheile vorkommen, sei δ_ν. Diese Tabelle deuten wir uns jetzt im Sinne der M. d. M.-Ae., indem wir sie in eine Anzahl einzelner Tabellen zerlegen und zwar folgendermaßen: Da bei der äußersten Differenz δ_ν noch N_ν Kleiner- und Z_ν Gleich-Urtheile vorkommen, so würde bei Anwendung der M. d. M.-Ae. $(N_\nu + Z_\nu)$ mal der Fall eingetreten sein, dass erst bei $D > \delta_\nu$

Tabelle I.

D	$R' < R$	$R' = R$	$R' > R$
δ_0	N_0	Z_0	P_0
δ_1	N_1	Z_1	P_1
δ_2	N_2	Z_2	P_2
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$\delta_{\nu-1}$	$N_{\nu-1}$	$Z_{\nu-1}$	$P_{\nu-1}$
δ_ν	N_ν	Z_ν	P_ν

Tabelle II.

D	$R' < R$ oder $R' = R$	$R' > R$
δ_0	$N_0 + Z_0 - (N_\nu + Z_\nu)$	P_0
δ_1	$N_1 + Z_1 - (N_\nu + Z_\nu)$	P_1
δ_2	$N_2 + Z_2 - (N_\nu + Z_\nu)$	P_2
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$\delta_{\nu-1}$	$N_{\nu-1} + Z_{\nu-1} - (N_\nu + Z_\nu)$	$P_{\nu-1}$

der Vergleichsreiz fortgesetzt größer als der Normalreiz geschätzt worden ist, vorher aber immer die Urtheile $R' < R$ oder $R' = R$ abgegeben worden sind. $(N_\nu + Z_\nu)$ mal wird also δ_ν als letzte Reizdifferenz, als Unterschiedsschwelle, zu setzen sein. Lassen wir jetzt diese $N_\nu + Z_\nu$ Versuchsreihen bei Seite, so erhalten wir Tabelle II, in der sich die Reizdifferenzen nur noch bis $\delta_{\nu-1}$ erstrecken. Aus ihr ersehen wir, dass in $N_{\nu-1} + Z_{\nu-1} - (N_\nu + Z_\nu)$ Fällen die Reizdifferenz $\delta_{\nu-1}$ als äußerste Differenz, als Schwelle erfasst wurde. Lassen wir wiederum diesen Fall bei Seite, so bleiben für die Differenz $D = \delta_{\nu-2}$ $N_{\nu-2} + Z_{\nu-2} - (N_{\nu-1} + Z_{\nu-1})$ Fälle, in denen $\delta_{\nu-2}$ als Schwelle empfunden wurde u. s. w. So zerlegen wir die ganze Tabelle I in eine Anzahl Einzeltabellen; diese Zerlegung soll hier nicht weiter geführt werden, da wir nicht die Zahlen $N_\varkappa$, $Z_\varkappa$ und $P_\varkappa$, sondern nur die relativen Häufigkeiten $n_\varkappa$, $z_\varkappa$ und $p_\varkappa$ kennen; zu diesen gehen wir jetzt über. Aus der obigen Betrachtung ziehen wir ohne weiteres den Schluss: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass erst nach der Differenz δ_ν nur Größer-Urtheile vorkommen, ist $z_\nu + n_\nu$, die W. dafür, dass erst nach $D = \delta_{\nu-1}$ nur $>$-Urtheile vorkommen,

Tabelle III.

D	W. für die Schwelle D
δ_0	$n_0 + z_0 - (n_1 + z_1)$
δ_1	$n_1 + z_1 - (n_2 + z_2)$
δ_2	$n_2 + z_2 - (n_3 + z_3)$
.	.
.	.
.	.
$\delta_{\nu-1}$	$n_{\nu-1} + z_{\nu-1} - (n_\nu + z_\nu)$
δ_ν	$n_\nu + z_\nu$

ist $n_{\nu-1} + z_{\nu-1} - (n_\nu + z_\nu) \cdots$, die W. dafür, dass nach $D = \delta_\varkappa$ nur noch $>$-Urtheile vorkommen, ist $n_{\varkappa-1} - z_{\varkappa-1} - (n_\varkappa + z_\varkappa) \cdots$, die W. dafür, dass nach $D = \delta_0$ nur $>$-Urtheile vorkommen, ist $n_0 + z_0 - (n_1 + z_1)$. Dieses Resultat ist in Tabelle III nochmals veranschaulicht, wo den einzelnen Reizdifferenzen die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass jene die äußersten Grenzen der $<$- und $=$-Urtheile bilden, zugeordnet sind. Wo liegt aber die wahre Unterschiedsschwelle? Die M. d. M.-Ae. definirt ja als Schwelle die äußerste Reizdifferenz, über die hinaus keine $<$- oder $=$-Urtheile mehr vorkommen. Theoretisch wäre diese Differenz bei der M. d. r. u. f. F. unendlich groß. So kommen wir also nicht weiter. Wir wollen vielmehr zunächst einen gewissen Mittelwerth s_1 berechnen, den wir mit Hülfe des folgenden Satzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung ableiten:

Sind zur Bestimmung des Werthes einer unbekannten Größe $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i$ Beobachtungen angestellt worden, von denen λ_1 den Werth x_1, λ_2 den Werth x_2, $\ldots\, \lambda_i$ den Werth x_i ergaben, so ist der angenäherte Mittelwerth dieser Beobachtungen:

$$M = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_i x_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i}.$$

Nach diesem Satze ergibt sich als Mittelwerth unserer Schwelle:

$$s_1 = \frac{(n_0 + z_0 - n_1 - z_1)\,\delta_0 + (n_1 + z_1 - n_2 - z_2)\,\delta_1 + \cdots + (n_\nu + z_\nu)\,\delta_\nu}{(n_0 + z_0 - n_1 - z_1) + (n_1 + z_1 - n_2 - z_2) + \cdots + (n_\nu + z_\nu)}$$

$$s_1 = \frac{(n_0 + z_0)\delta_0 + (n_1 + z_1)(\delta_1 - \delta_0) + (n_2 + z_2)(\delta_2 - \delta_1) + \cdots + (n_\nu + z_\nu)(\delta_\nu - \delta_{\nu-1})}{n_0 + z_0}$$

Um die Berechnung dieses Werthes wird es sich nachher handeln; jetzt stellen wir erst ähnliche Betrachtungen wie die früheren für die Spalte der Urtheile $R' > R$ an. Wir kommen zu dem Resultat: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass schon von $D = \delta_0$ an der Vergleichsreiz stets größer als der Normalreiz geschätzt wird, ist p_0, die W. dafür, dass erst von $D = \delta_1$ an diese Schätzung eintritt, ist $p_1 - p_0 \cdots$, die W. dafür, dass die Schwelle bei $\delta_\varkappa$ ist, beträgt $p_\varkappa - p_{\varkappa-1} \cdots\cdots$, die W., dass erst von δ_ν an stets $R' > R$ geschätzt wird, ist $p_\nu - p_{\nu-1}$. S. Tab. IV. Einen mittleren Werth s_2 dieser Schwellen erhalten wir wieder wie oben:

Tabelle IV.

D	W. für die Schwelle D
δ_0	p_0
δ_1	$p_1 - p_0$
δ_2	$p_2 - p_1$
.	.
.	.
.	.
δ_ν	$p_\nu - p_{\nu-1}$

$$s_2 = \frac{p_0\delta_0 + (p_1 - p_0)\,\delta_1 + (p_2 - p_1)\,\delta_2 + \cdots + (p_\nu - p_{\nu-1})\,\delta_\mu}{p_\nu}$$

$$(2)\quad s_2 = \frac{p_\nu\delta_\nu - p_0(\delta_1 - \delta_0) - p_1(\delta_2 - \delta_1) - \cdots - p_{\nu-1}(\delta_\nu - \delta_{\nu-1})}{p_\nu}.$$

3. Berechnung von s_1 und s_2.

Um die folgenden Entwicklungen nicht durch längere Zwischenrechnungen unübersichtlich zu machen, schicken wir einige Bemerkungen voraus. Es war

$$(3)\quad \begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2 z^2) \\ \psi(x) &= \int_0^x \varphi(y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hx} \exp(-t^2)\,dt. \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\psi(\infty) = \tfrac{1}{2}.$$

Endlich haben wir:

$$(4)\quad \begin{aligned} n_\varkappa &= \psi(x_u - \delta_\varkappa) + \tfrac{1}{2} \\ z_\varkappa &= \psi(x_0 - \delta_\varkappa) - \psi(x_u - \delta_\varkappa) \\ p_\varkappa &= \tfrac{1}{2} - \psi(x_0 - \delta_\varkappa). \end{aligned}$$

Zunächst berechnen wir den Ausdruck

$$\sum_1^m{}_\lambda\, \psi(x - \lambda\delta) = \psi(x) + \psi(x - \delta) + \psi(x - 2\delta) + \cdots + \psi(x - m\delta).$$

Entwickeln wir die einzelnen Ausdrücke nach Potenzen von $\lambda\delta$, und fassen wir dann die Glieder in geeigneter Weise zusammen, so erhalten wir:

$$(5)\quad \sum_1^m{}_\lambda\, \psi(x - \lambda\delta) = m\psi(x) - \frac{m(m+1)}{2}\,\frac{\delta}{1!}\,\psi'(x)$$

$$+ \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \cdot \frac{\delta^2}{2!}\,\psi''(x) - \frac{m^2(m+1)^2}{4}\,\frac{\delta^3}{3!}\,\psi'''(x) \pm \cdots .$$

Wir führen neben $\psi(x)$ noch die Function $\chi(x)$ durch folgende Formel ein:

$$\chi(x) = \int_0^x \psi(y)\,dy, \tag{6}$$

sodass also:

$$\chi'(x) = \psi(x), \qquad \psi'(x) = \varphi(x)$$

ist.

Für $\psi(x)$ und $\chi(x)$ erhält man folgende Reihen:

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi}\cdot\psi(x) &= hx - \frac{(hx)^3}{3.\,1!} + \frac{(hx)^5}{5.\,2!} - \frac{(hx)^7}{7.\,3!} \pm \cdots \\ h\sqrt{\pi}\cdot\chi(x) &= \frac{(hx)^2}{2} - \frac{(hx)^4}{4.\,3.\,1!} + \frac{(hx)^6}{6.\,5.\,2!} - \frac{(hx)^8}{8.\,7.\,3!} \pm \cdots \end{aligned} \tag{7}$$

Man sieht, es ist

$$\begin{aligned} \psi(-x) &= -\psi(x) \\ \chi(-x) &= \chi(x). \end{aligned}$$

Für große Werthe von hx erhält man aber bequemere Reihen, indem man die Ausdrücke $\psi(x)$ und $\chi(x)$ durch wiederholte partielle Integration berechnet. Als Resultat gewinnt man folgende Reihenentwicklungen:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \tfrac{1}{2} - \frac{\exp(-h^2x^2)}{2hx\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{1}{2h^2x^2} + \frac{1.\,3}{(2h^2x^2)^2} - \frac{1.\,3.\,5}{(2h^2x^2)^3} \pm \cdots\right] \\ \chi(x) &= -\frac{1}{2h\sqrt{\pi}} + \frac{x}{2} + \\ &+ \frac{\exp(-h^2x^2)}{4h^3x^2\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{1.\,3}{2h^2x^2} + \frac{1.\,3.\,5}{(2h^2x^2)^2} \mp \cdots\right] \end{aligned} \tag{8}$$

Zwischen $\psi(x)$ und $\chi(x)$ besteht übrigens noch die Beziehung:

$$\chi(x) = x\psi(x) + \frac{\exp(-h^2x^2)}{2h\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2h\sqrt{\pi}} \tag{9}$$

Ist hx sehr groß, so kann man, wie aus (8) hervorgeht, annäherungsweise schreiben:

$$\chi(x) = \chi(-x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2h\sqrt{\pi}} \tag{10}$$

Entwickle ich $\chi(x-\alpha)$ nach Potenzen von α, so erhalte ich:

$$\chi(x-\alpha) = \chi(x) - \alpha\psi(x) + \frac{\alpha^2}{2!}\psi'(x) - \frac{\alpha^3}{3!}\psi''(x) \pm \cdots$$

d. h. es ist:

$$(11) \qquad \alpha\psi(x) - \frac{\alpha^2}{2!}\psi'(x) + \frac{\alpha^3}{3!}\psi''(x) \mp \cdots = \chi(x) - \chi(x-\alpha).$$

Ebenso wird

$$\alpha\psi(x) + \frac{\alpha^2}{2!}\psi'(x) + \frac{\alpha^3}{3!}\psi''(x) + \cdots\cdot = \chi(x+\alpha) - \chi(x).$$

Wir machen noch einige Voraussetzungen über die Reizdifferenzen $\delta_\varkappa$. Wir setzen $\delta_0 = 0$, stufen außerdem die Reize gleichmäßig ab, lassen also die Differenzen immer um dieselbe Größe δ wachsen, so dass

$$(12) \qquad \begin{gathered} \delta_1 - \delta_0 = \delta_2 - \delta_1 = \cdots\cdot = \delta_\varkappa - \delta_{\varkappa-1} = \delta \\ \delta_\varkappa = \varkappa\delta \end{gathered}$$

wird. Ist ferner $\delta_\nu = \nu\delta$ die größte Reizdifferenz, die bei Berechnung der Mittelwerthe vorkommt, so setzen wir $\delta\nu = \alpha$; α ist also das Reizintervall, innerhalb dessen die Experimente angestellt worden sind. Die größte Genauigkeit würden diese Experimente offenbar dann erreichen, wenn wir unendlich viele Versuche anstellen könnten, wenn also $\nu = \infty$ wäre und wenn außerdem alle möglichen Reizdifferenzen untersucht werden könnten, also δ unendlich klein genommen würde. Diesen Idealzustand wollen wir uns später wirklich erreicht denken und werden dadurch Vereinfachungen in den Formeln erzielen.

Nach diesen Vorbemerkungen wenden wir uns nun zur Berechnung von s_1 und s_2. Wir hatten gefunden:

$$(1) \qquad s_1 = \frac{\delta_0(z_0+n_0) + (\delta_1-\delta_0)(z_1+n_1) + \cdots\cdot + (\delta_\nu - \delta_{\nu-1})(z_\nu - n_\nu)}{z_0 + n_0}$$

Berücksichtigen wir die Voraussetzungen (12), so erhalten wir

$$(1\,\mathrm{a}) \qquad s_1 = \frac{(z_1+n_1) + (z_2+n_2) + \cdots + (z_\nu+n_\nu)}{z_0+n_0}\delta$$

oder:

$$(z_0+n_0)s_1 = \delta\sum_1^\nu{}_\varkappa (z_\varkappa + n_\varkappa)$$

oder nach (4)

$$= \delta \sum_1^{\nu} {}_{\varkappa} (\psi(x_0 - \varkappa\delta) + \tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{\nu\delta}{2} + \delta \sum_1^{\nu} {}_{\varkappa}\, \psi(x_0 - \delta_{\varkappa})$$

oder nach (5)

$$(\varkappa_0 + n_0)s_1 = \frac{\nu\delta}{2} + \delta \Big\{ \nu\psi(x_0) - \frac{\nu(\nu+1)}{2}\frac{\delta}{1!}\psi'(x_0) +$$

$$+ \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}\frac{\delta^2}{2!}\psi''(x_0) - \frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}\frac{\delta^3}{3!}\psi'''(x_0) \pm \cdots \Big\}.$$

Setzen wir jetzt $\nu\delta = \alpha$ und lassen δ unendlich klein werden, so erhalten wir, wenn wir noch für $\varkappa_0$ und n_0 ihre Werthe aus (4) einführen:

$$\left[\frac{1}{2} + \psi(x_0)\right] s_1 = \frac{\alpha}{2} + \alpha\psi(x_0) - \frac{\alpha^2}{2!}\psi'(x_0) + \frac{\alpha^3}{3!}\psi''(x_0) \mp \cdots$$

oder nach Formel (11):

$$\left[\frac{1}{2} + \psi(x_0)\right] s_1 = \frac{\alpha}{2} + \chi(x_0) - \chi(\alpha - x_0).$$

Wählen wir jetzt das Intervall α, innerhalb dessen die Versuche vor sich gegangen sind, sehr groß, so wird nach Formel (10) schließlich:

$$\left[\frac{1}{2} + \psi(x_0)\right] s_1 = \frac{\alpha}{2} + \chi(x_0) - \left(\frac{\alpha - x_0}{2} - \frac{1}{2h\sqrt{\pi}}\right)$$

$$= \frac{1}{2h\sqrt{\pi}} + \frac{x_0}{2} + \chi(x_0).$$

Also erhalten wir für s_1:

$$(13) \qquad s_1 = \frac{\dfrac{1}{2h\sqrt{\pi}} + \dfrac{x_0}{2} + \chi(x_0)}{\dfrac{1}{2} + \psi(x_0)}.$$

Wenden wir uns jetzt zur Berechnung von s_2. Es war

$$(2) \quad s_2 = \frac{p_\nu\delta_\nu - p_0(\delta_1 - \delta_0) - p_1(\delta_2 - \delta_1) - \cdots - p_{\nu-1}(\delta_\nu - \delta_{\nu-1})}{p_\nu}$$

$$= \frac{p_\nu\delta_{\nu+1} - p_0(\delta_1 - \delta_0) - p_1(\delta_2 - \delta_1) - \cdots - p_\nu(\delta_{\nu+1} - \delta_\nu)}{p_\nu}.$$

Wir setzen wieder $\delta_\varkappa = \varkappa\delta$ und bedenken außerdem, dass wir δ_ν immer so groß wählen können, dass $p_\nu = 1$ wird. Dann erhalten wir:

$$s_2 = (\nu + 1)\delta - (p_0 + p_1 + \cdots + p_\nu)\delta$$
$$= (\nu + 1)\delta - \delta\sum_0^\nu{}_\varkappa \left[\frac{1}{2} - \psi(x_0 - \delta_\varkappa)\right]$$
$$= \frac{\nu + 1}{2}\delta + \delta\sum_0^\nu{}_\varkappa \psi(x_0 - \delta_\varkappa).$$

Führen wir hier die Rechnung in derselben Weise weiter wie oben, so erhalten wir schließlich

$$(14) \qquad s_2 = \frac{1}{2h\sqrt{\pi}} + \frac{x_0}{2} + \chi(x_0).$$

4. Berechnung eines Näherungswerthes der Unterschiedsschwelle.

Wir haben für s_1 und s_2 im Vorhergehenden folgende Werthe gefunden:

$$(13) \qquad s_1 = \frac{\dfrac{1}{2h\sqrt{\pi}} + \dfrac{x_0}{2} + \chi(x_0)}{\dfrac{1}{2} + \psi(x_0)}$$

$$(14) \qquad s_2 = \frac{1}{2h\sqrt{\pi}} + \frac{x_0}{2} = \chi(x_0)$$

und wollen jetzt zur Berechnung der Unterschiedsschwelle selbst übergehen. Bei Anwendung der M. d. r. u. f. F. erstrecken sich, wie wir gesehen haben, die Unterschiedsschwellen von $\delta_0 = 0$ bis zu einem äußersten Werthe δ_ν, s_1 und s_2 waren die Mittelwerthe dieser Unterschiedsschwellen. Nach der M. d. M.-Å. aber ist die Unterschiedsschwelle kein Mittelwerth, sondern ein äußerster Grenzwerth, in unserm Falle wäre δ_ν dieser Grenzwerth. Die Formeln der M. d. r. u. f. F. aber liefern, wie auch schon bemerkt wurde, für δ_ν den Werth ∞, während in praxi die Kleiner- und Gleich-Urtheile schon bei der endlichen Differenz $\delta_\nu = S$, der Unterschiedsschwelle, aufhören. Im Folgenden begnügen wir uns damit, für die Größe S einen angenäherten Werth zu finden, der von der wirklichen Schwelle allerdings etwas verschieden ist, doch werden wir an einigen Beispielen sehen, dass die Abweichungen ziemlich gering sind. Um diesen Näherungswerth zu finden, machen wir die Annahme, dass die Größen $z_\varkappa + n_\varkappa$ und $p_\varkappa$ mit wachsender Reizdifferenz gleichmäßig ab- bezw. zunehmen, mit andern Worten: Tragen wir die $n_\varkappa + z_\varkappa$, bezw. $p_\varkappa$ als Ordinaten, die $\delta_\varkappa$ als Abscissen in einem rechtwinkligen Coordinatensystem ein, so wollen wir die Curve, die die Endpunkte

Fig. 1.

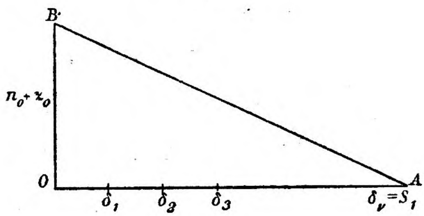
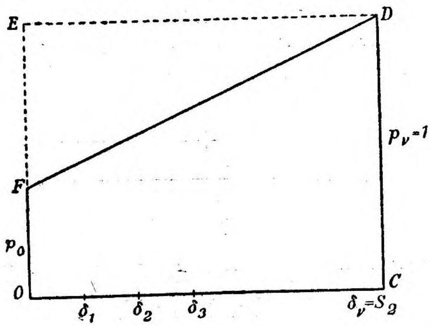


Fig. 2.



der Ordinaten verbindet, durch eine Gerade ersetzen, die die Punkte 0, $z_0 + n_0$ bezw. 0, p_0 mit den Punkten $D = \delta_\nu = S$, $z_\nu + n_\nu = 0$ bezw. $D = \delta_\nu = S$, $p_\nu = 1$ verbindet. Dass man bei dieser Annahme nicht allzu stark vom wahren Verlaufe der Curven abweicht, sieht man aus graphischen Darstellungen derselben, wie sie sich z. B. bei Kämpfe[1]) vorfinden. Fig. 1 stelle die Gerade der $z_\varkappa + n_\varkappa$, Fig. 2 die Gerade der $p_\varkappa$ dar.

1) Philos. Studien VIII, Taf. I.

Die Formeln für s_1 und s_2, von denen wir ausgegangen waren, lauteten folgendermaßen:

$$(1) \quad s_1 = \frac{(z_1 + n_1)\delta_1 + (z_2 + n_2)(\delta_2 - \delta_1) + \cdots + (z_\nu + n_\nu)(\delta_\nu - \delta_{\nu-1})}{z_0 + n_0}$$

$$(2) \quad s_2 = \frac{p_\nu \delta_\nu - p_0(\delta_1 - \delta_0) - p_1(\delta_2 - \delta_1) - \cdots - p_{\nu-1}(\delta_\nu - \delta_{\nu-1})}{p_\nu}$$

Lassen wir die $\delta_\varkappa - \delta_{\varkappa-1}$ unendlich klein werden, so stellt der Zähler von s_1 den Inhalt des Dreiecks OAB dar, also $\frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} S_1 (z_0 + n_0)$, also wird

$$s_1 = \tfrac{1}{2} S_1, \qquad S_1 = 2 s_1.$$

Ferner ist der Zähler von s_2 nichts anderes als der Inhalt des Dreiecks FED, also $\frac{1}{2} EF \cdot ED = \frac{1}{2} S_2 (1 - p_0)$. Also erhalten wir

$$s_2 = \tfrac{1}{2} S_2 (1 - p_0) = \tfrac{1}{2} S_2 (\tfrac{1}{2} + \psi(x_0))$$

$$S_2 = \frac{2 s_2}{\frac{1}{2} + \psi(x_0)}.$$

Setzen wir für s_1 und s_2 wieder ihre Werthe (13) und (14) ein, so wird $S_1 = S_2$ und wir erhalten als erste Annäherung für die obere Unterschiedsschwelle

$$S_o = 2 \frac{\chi(x_0) + \frac{x_0}{2} + \frac{1}{2h\sqrt{\pi}}}{\frac{1}{2} + \psi(x_0)}$$

Führen wir an Stelle von $\chi(x)$ vermittels (9) die Function $\psi(x)$ ein und ersetzen diese schließlich durch die Function $\Phi(hx)$, die zu $\psi(x)$ in der Beziehung steht:

$$\Phi(hx) = 2\psi(x),$$

so lautet unsere Formel:

$$(15) \qquad S_o = 2x_o + \frac{2\exp(-h^2 x_o^2)}{h\sqrt{\pi}[1 + \Phi(hx_o)]}.$$

Für die untere Unterschiedsschwelle erhält man auf gleiche Weise den Werth:

$$(16) \qquad S_u = 2x_u - \frac{2\exp(-h^2 x_u^2)}{h\sqrt{\pi}[1 - \Phi(hx_u)]}.$$

5. Discussion der Schwellenformel.

Wollen wir unsere Schwellenformel prüfen, so müssen noch einige Anforderungen an das Versuchsmaterial gestellt werden, das zu dieser Prüfung benutzt werden soll. Zunächst müssen die Experimente, die zur Ermittelung der Unterschiedsschwelle der M. d. M.-Ae. sowie zur Berechnung der Größen h und x geführt haben, unter möglichst gleichen Bedingungen zu Stande gekommen sein; S muss durch eine sehr große Anzahl von Versuchen mit möglichster Sicherheit gewonnen worden sein, ebenso darf die Berechnung von x und h nur auf Grund eines sehr umfangreichen Materials geschehen sein, da schon kleine Aenderungen in diesen Größen einen nicht unbedeutenden Einfluss auf die Formel ausüben. Ueberdies sind bisher meistens h und x aus jeder Differenz einzeln berechnet worden, anstatt, worauf Bruns[1]) zuerst hingewiesen hat, auf Grund einer consequenten Ausgleichung bestimmt zu werden; besonders die x variiren in vielen Untersuchungen derart, dass sie eine Prüfung der Formel unmöglich machen.

Zur Prüfung der Formel wurden die Ergebnisse benutzt, die Kämpfe[2]) aus dem umfangreichen Zahlenmaterial seiner Experimente gewonnen hat, und zwar die Resultate der Tabellen XIa, XIb, XIc und XII. Es ergaben sich für Kämpfe selbst nach unserer Formel als Schwellenwerthe:

$$\begin{array}{lll} \text{bei } 30^\circ & S = & 0{,}316\, i \\ 40^\circ & & 0{,}266\, i \\ 50^\circ & & 0{,}272\, i \\ 60^\circ & & 0{,}242\, i \end{array}$$

Kämpfe gibt als Schwelle bei 60°, gewonnen durch Versuche nach der M. d. M.-Ae. an: $0{,}2\,i$ bis $0{,}23\,i$. i bedeutet hier überall die Intensität des Normalreizes. Für die Versuchspersonen G. und T. ergaben sich als Schwellen, nach der Formel berechnet: $0{,}152\,i$ und $0{,}202\,i$, während sie durch Versuche nach der M. d. M.-Ae. zu $0{,}168\,i$ und $0{,}213\,i$ ermittelt wurden. Wie man sieht, sind die Abweichungen

1) Philos. Studien IX, 1.
2) Philos. Studien VIII, 511.

der errechneten von den beobachteten Werthen sehr gering, sie betragen nur 1 bis 2 Hundertstel der Normalintensität, so dass mir die Daseinsberechtigung der Formel erwiesen zu sein scheint; muss man doch noch in Betracht ziehen, dass auch in der Kämpfe'schen Arbeit die h und x nicht durch Ausgleichung gefunden worden sind. Berechnet man für G. die Größen x und h durch Ausgleichung, so findet man als Schwellenwerth 0,191 i, jetzt also einen zu großen Werth, man sieht schon hieraus, wie die Größe von S bereits durch geringe Schwankungen der x und h ziemlich stark beeinflusst wird.

Wie steht es nun mit dem Zusammenhang zwischen der M. d. M.-Ae. und der M. d. r. u. f. F.? Einerseits war behauptet worden, S sei proportional, ja sogar identisch mit x, anderseits wieder, S sei umgekehrt proportional dem Präcisionsmaß h. Unsere Formel

$$(15) \qquad S_0 = 2x_0 + \frac{2 \exp(-h^2 x_0^2)}{h\sqrt{\pi}[1 + \Phi(hx_0)]}$$

lehrt, dass keins von beiden ausschließlich der Fall ist, dass S vielmehr sowohl von h wie von x beeinflusst wird. Wir können über diesen Punkt noch Einiges hinzufügen. Nehmen wir z. B. den Fall, das Präcisionsmaß h sei sehr groß, also die Fehlerstreuung eine sehr geringe, dann wird $\Phi(hx_0) = 1$, $\frac{\exp(-h^2 x_0^2)}{h\sqrt{\pi}}$ kann man vernachlässigen und man erhält

$$S = 2x_0,$$

d. h. nur bei außerordentlich großer Beobachtungsgenauigkeit kann man die Schwelle der M. d. M.-Ae. mit derjenigen der r. u. f. Fälle identificiren. Der gewöhnliche Fall wird der sein, das hx ein ziemlich kleiner echter Bruch ist und dass x, in Einheiten der Intensität ausgedrückt, ebenfalls einen sehr kleinen Werth annimmt. Dann wird, wie man aus der Formel ersieht, S wesentlich von der Größe von h abhängen; das Glied $2x_0$ wird wegen der Kleinheit von x_0 nur einen unbedeutenden Einfluss ausüben, im wesentlichen wird S_0 ungefähr umgekehrt proportional dem Präcisionsmaße h sein. Wir sehen, beide Fälle, die behauptet worden sind, können unter besonderen Bedingungen annäherungsweise vorkommen; sind jedoch jene Voraussetzungen nicht erfüllt, so kann man über die Beziehung von S zu einer der beiden Größen, h und x, nichts aussagen, S wird von beiden beeinflusst werden, bald mehr von x, bald mehr von h.

Fassen wir das Ergebniss schließlich noch einmal zusammen; wir sahen: Die Schwelle der M. d. M.-Ae. ist weder vom Präcisionsmaße noch von der Schwelle der M. d. r. u. f. F. allein abhängig, sondern wird von beiden beeinflusst. Eine erste Annäherung an die wahren Schwellenwerthe stellen die folgenden Formeln dar:

(15) $$S_o = 2x_o + \frac{2 \exp(-h^2 x_o^2)}{h\sqrt{\pi}\,[1 + \Phi(hx_o)]}$$

(16) $$S_u = 2x_u + \frac{2 \exp(-h^2 x_u^2)}{h\sqrt{\pi}\,[1 - \Phi(hx_u)]}$$