

Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik.

Von

Gottl. Friedr. Lipps.

(Fortsetzung zu Band XI. S. 306.)

V.

Die Entwicklung des Begriffs der allgemeinen Zahl aus der Beziehung des Grundes zur Folge.

§ 1.

Die Aufgabe, die hier ihre Erledigung finden soll, wurde in den früheren Untersuchungen bereits hinreichend umschrieben. Das Bewusstsein als Träger appercipirter Bewusstseinsinhalte ist die Grundlage, das ordnende Zusammenfassen der Inhalte durch das Denken ist der Gegenstand der Untersuchung. Die letztere wurde darum als eine Untersuchung der logischen Natur des Bewusstseins charakterisirt.

In erster Linie erregte die Thatsache, dass jedes ordnende Erfassen in Form einer Reihe sich vollzieht, unsere Aufmerksamkeit. Man erkannte in dem reihenförmig fortschreitenden Denken das subjective Princip des logischen Ordnen, das beim Erfassen jeglichen Zusammenseins von Inhalten im Bewusstsein, mag es empirisch gegeben oder durch das Denken erzeugt sein, sich wirksam erweist. Um dieser Bethätigungsweise des Denkens eine reine Ausgestaltung zu geben, war lediglich das Vorhandensein von Bewusstseinsinhalten vorauszusetzen, deren Verschiedenheit nur Verwendung fand, um die Stellen der »Normalreihe« oder »Zahlenreihe« zu markiren und so die Merkmale der Reihenform zu objectiviren. Daneben blieb jedoch

die Thatsache nicht unbeachtet, dass erst die Beschaffenheit der Bewusstseinsinhalte dem Denken die Möglichkeit gibt, eine von subjectiver Willkür freie, durch die Objecte gebotene, objective Ordnung herzustellen.

Die Betrachtung der Objecte führte indessen nur zur Erkenntniss der empirischen Bedingungen, unter denen die logische Ordnung zu Stande kommt; denn die Einzelinhalte des Bewusstseins wurzeln als Abscheidungen vom gegebenen Gesamttinhalte in der Erfahrung. Es ergab sich so der Gegensatz zwischen dem von der Erfahrung dargebotenen, erlebten und dem durch das Denken erzeugten, logisch geordneten Zusammensein von Bewusstseinsinhalten. Man erkannte ferner, dass die Objecte eine gewisse Aehnlichkeit oder Verwandtschaft besitzen müssen, sollen sie einer logischen Ordnung fähig sein. Das Denken kann nämlich die empirisch gegebenen Bewusstseinsinhalte zunächst nur vergleichen und auf Grund des Vergleichens Gemeinsames hervorheben, das nunmehr eine Vergesellschaftung im Denken, ein logisches Zusammensein von Inhalten im Bewusstsein bedingt und das Eingreifen des beziehenden und verknüpfenden Denkens ermöglicht.

Um aber das Wesen der logischen Ordnung zu begreifen, musste im Denken die Quelle für jene Beziehungen und Verknüpfungen gefunden und in der Bethätigungsweise des vom Grunde zur Folge fortschreitenden Denkens das objective Princip des logischen Ordners erkannt werden. Die Beschaffenheit der Objecte gibt somit zwar erst die Möglichkeit, dass das beziehende und verknüpfende Denken in bestimmter Weise in die Erscheinung tritt. Die Form der Beziehungen und Verknüpfungen wird aber durch die Natur des Denkens bedingt, das sich als ein nach Grund und Folge verknüpfendes Denken charakterisirt.

Zugleich mit dieser Erkenntniss ergab sich das Problem, diese Denkform ebenso wie die Reihenform zum Gegenstande der Untersuchung zu machen. Dabei kann man allerdings Objecte, an denen das Denken sich bethätigen soll, nicht entbehren. Es gilt jedoch nicht, diese oder jene Objecte vorauszusetzen und anzugeben, wie sie durch das Denken in Beziehung gesetzt werden können, sondern die Denkhätigkeit selbst zu untersuchen. Dementsprechend dienen die Objecte nur zur Darstellung des Denkprocesses und gewinnen nicht

auf Grund ihrer empirischen Beschaffenheit, sondern lediglich als Träger der Beziehungen, die durch das Denken geschaffen werden, eine Bedeutung. Sie sind darum auch nur als ein zur Verfügung stehender Vorrath verschiedener Bewusstseinsinhalte vor auszusetzen, die, sofern das Denken ihrer bedarf, zur Verwendung kommen, ohne einen bestimmenden und beschränkenden Einfluss auf die Denktätigkeit selbst zu gewinnen. Der Gegenstand der Untersuchung ist aber die in solcher Weise dargestellte Denkform.

§ 2.

Diese Untersuchung ist für jede Theorie des Erkennens ohne Rücksicht auf die Besonderheiten ihres Ausgangspunktes und ihres Zieles von wesentlicher Bedeutung. In der Aufstellung des »Satzes vom Grunde« als eines Grundgesetzes des Erkennens neben dem Satze der »Identität«, des »Widerspruchs« und des »ausgeschlossenen Dritten« findet dies seinen Ausdruck. Man wird daher voraussetzen, in den Darstellungen der Lehre vom Erkennen, welche die verschiedenen Philosophen gegeben haben, die bezeichnete Aufgabe gelöst zu finden. Dass dies jedoch nicht zu erwarten ist, erhellt aus folgenden Bemerkungen.

Wohl jede allgemeinere Theorie des Erkennens wendet ihr Hauptinteresse der Erkenntniss der Wirklichkeit, wie sie in den Natur- und Geisteswissenschaften vorliegt, zu und findet so ihre Hauptaufgabe in der Klärung der Grundlagen und Bedingungen dieses Erkennens. Es tritt dann von selbst der Zusammenhang des erlebten, physischen oder psychischen Geschehens in den Vordergrund. Da dies als ein causal oder teleologisch bedingtes Geschehen zu begreifen gesucht wird, so wird die Causalität neben der noch etwa hinzutretenden Zweckmäßigkeit zu einem Fundamentalbegriff, dessen Auffassungsweise den erkenntnistheoretischen Standpunkt wesentlich bestimmt. Die logische Beziehung des Grundes zur Folge aber tritt unmittelbar in den Dienst der empirischen Beziehung zwischen Ursache und Wirkung, was ganz naturgemäß erscheint, wenn man berücksichtigt, dass die Erkenntniss jener logischen Beziehung aus der Erforschung dieser empirischen Beziehung sich historisch entwickelt hat¹⁾. Da jedoch

1) Vergl. hierzu Wundt, Logik, I. Bd. 2. Aufl. S. 567 f.

hier das Interesse am Erlebten und an dessen empirischem Zusammenhange in den Hintergrund tritt, und vielmehr die Bethätigungsweise des Denkens als solche den Gegenstand der Untersuchung bildet, so ist auch die in Frage stehende logische Beziehung ohne Rücksicht auf ihre Dienste beim Begreifen der Wirklichkeit zu betrachten. Dies prägt von vornherein der Untersuchung einen anderen Charakter auf.

Wenn ferner der Satz vom Grunde im Verein mit den anderen, oben erwähnten Grundgesetzen des Denkens auftritt, so wird wohl auch seine Auffassungsweise durch den Zusammenhang mit den letzteren beeinflusst. Dies kann dazu verleiten, einem der anderen Principien den Vorrang zu geben und so die Bedeutung der Beziehung zwischen Grund und Folge zu verringern oder völlig in Frage zu stellen. Ein Verringern ihrer Bedeutung wäre es, wollte man z. B. die Function des Urtheilens völlig dem Identitätsprincip unterstellen und nur im Schlussverfahren eine Bethätigung des vom Grunde zur Folge fortschreitenden Denkens finden. Ein Verkennen der selbständigen Bedeutung dieses Denkprocesses läge vor, wenn man ihn auf den Satz der Identität oder, wie in der Wolf'schen Schule, auf den Satz des Widerspruchs zurückzuführen versuchte. Dem gegenüber ist daran zu erinnern, dass wir in der Beziehung des Grundes zur Folge das objective Princip des logischen Ordnen gefunden haben, dessen fundamentale Bedeutung in jeder objectiven Abhängigkeitsbeziehung hervortritt und dessen elementarer Charakter keine Zurückführung auf andere Principien gestattet. Seine Selbständigkeit bleibt ihm somit von vornherein gesichert und seine Bedeutung kann nicht geschmälert werden. Andererseits ist nicht zu fürchten, dass hier nun umgekehrt der Satz vom Grunde auf Kosten der anderen Grundgesetze des Denkens in den Vordergrund trete. Es bot sich zwar bis jetzt kein Anlass, diese Grundgesetze ausdrücklich aufzustellen, und auch im Folgenden wird ein Bedürfniss hierzu nicht empfunden werden. Man kann jedoch in dem Apperceptionsacte die Wurzel des Satzes der Identität suchen und in der Reihenform die Eindeutigkeit des Denkens begründet finden, auf die sich der Satz des Widerspruchs und des ausgeschlossenen Dritten gründen lässt. Dann erhellt, dass kein Conflict zwischen den verschiedenen Grundgesetzen möglich ist, da jedem eine besondere elementare Thatsache zu Grunde liegt.

Erwägt man schließlich, dass aus der Beziehung des Grundes zur Folge der Begriff der allgemeinen Zahl entwickelt werden soll, so tritt die Verschiedenheit von der herkömmlichen Auffassungsweise jenes Principis noch schärfer hervor. Man wird verlangen, dass dieses Ziel sich in ungezwungener Entwicklung erreichen lasse, und in der That wird es nur da die Richtung der Untersuchung bestimmen, wo sich die Möglichkeit bietet, nach verschiedenen Richtungen weiterzugehen. Sollte jedoch die hier versuchte Begründungsweise der allgemeinen Zahl als ungewöhnlich empfunden werden, so ist zu bemerken, dass auf Grund des Früheren kein anderer Zugang zu den als allgemeine Zahlen bezeichneten Begriffsgebilden sich bietet, überhaupt aber nichts hinderte, von jeher eine solche Begründung zu geben. Wenn dies nicht geschah, so mag es dadurch veranlasst sein, dass vielfach nur die ganzen Zahlen in den Kreis allgemeiner logischer Erwägungen gezogen und die allgemeineren Begriffe von vornherein der Vorherrschaft der Geometrie unterstellt wurden. Uebrigens lassen sich doch für die folgenden Darlegungen erwünschte Berührungspunkte mit vorhandenen Auffassungen der allgemeinen Zahlen auffinden. So sagt z. B. Gauß bez. der negativen Zahlen¹⁾: »Positive und negative Zahlen können nur da eine Anwendung finden, wo das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleichzustellen ist. Genau besehen findet diese Voraussetzung nur da statt, wo nicht Substanzen (für sich denkbare Gegenstände) sondern Relationen zwischen je zwei Gegenständen das Gezählte sind.« Dass diese Relationen bestimmt geartete Beziehungen zwischen verschiedenen Objecten des Denkens vorstellen und somit Realisirungen der allgemeinen Beziehung des Grundes zur Folge sind, wird man ohne weiteres zugeben. Dass ferner ihr Ursprung in der Bethätigungsweise des Denkens und nicht in der empirischen Beschaffenheit jener Objecte gesucht wird, kann nicht befremden, nachdem Kant²⁾ auf »die noch wenig versuchte Zergliederung des Verstandesvermögens selbst« hingewiesen hat, »um die Möglichkeit der Begriffe a priori dadurch zu erforschen,»

1) In der Anzeige der *Theoria residuorum biquadraticorum*; Werke, Bd. II. S. 176.

2) Kritik der reinen Vernunft. Der transcendentalen Analytik erstes Buch. Analytik der Begriffe.

dass wir sie im Verstande allein als ihrem Geburtsorte aufsuchen und dessen reinen Gebrauch überhaupt analysiren.

§ 3.

Um nun eine Darstellung des vom Grunde zur Folge fortschreitenden Denkens zu gewinnen, gilt es, die wesentlichen Momente dieses Denkprocesses hervorzuheben.

Da das Denken in seinem ganzen Umfange von der Reihenform beherrscht wird, so erhellt, dass auch die hier zu untersuchende Denkarbeit in eine Reihe einzelner Denkacte sich gliedert. Wollte man nun die Denkacte selbst auf sich beruhen lassen und nur ihre Aneinanderreihung hervorheben, so würde man auf die frühere Untersuchung der Reihenform des Denkens zurückgeführt. Denn die Aneinanderreihung der Acte des beziehenden Denkens ist als solche nicht verschieden von derjenigen der Apperceptionsacte. Hier wie dort tritt lediglich die Reihenform des Denkens zu Tage. Es kann sich daher vorerst nur um den einzelnen Denkact selbst und erst nach dessen Klarlegung um den Erfolg einer Reihe solcher Acte handeln.

Man kann zunächst bemerken, dass ein Object gegeben sein muss, soll überhaupt eine Denkhätigkeit möglich sein. *Ex nihilo nil fit.* Dieser Grundsatz der Naturerklärung, den Robert Mayer¹⁾ an die Spitze seiner Entwicklungen stellt, findet hierin seine Quelle. Denn liegt kein Object vor, ist also nichts gegeben, so ist es dem Denken unmöglich zu etwas zu gelangen; es kann daher auch ein Werden aus nichts durch das Denken nicht begriffen werden.

Im Uebrigen können für jenes Object keine Bedingungen angegeben werden, sodass es jeden beliebigen Bewusstseinsinhalt vorzustellen vermag, sei er einfach oder zusammengesetzt, sei er ein für sich bestehendes Ding oder ein Erzeugniss des abstrahirenden Denkens. Indem es aber Gegenstand des Denkens wird, erregt es die Aufmerksamkeit, sodass es als appercipirtes Object dem Denken zu Grunde liegt.

Bestände nun die ganze Thätigkeit im Appercipiren allein, so

1) Die Mechanik der Wärme. 2. Aufl. 1874. S. 19.

bliebe das Denken bei dem gegebenen Objecte stehen, und so lange dies der Fall ist, liegt lediglich ein Apperceptionsact vor, mag er auch ein mehrfach wiederholter sein. Ein Weiterschreiten muss sonach stattfinden. Dem weiterschreitenden Denken kann aber nicht das gegebene Object einfach entschwinden, sodass kein Object mehr vorläge und demnach nichts aus etwas folgte. Nil fit ad nihilum. Dieser dem oben genannten zur Seite stehende Grundsatz der Naturerklärung beruht darauf, dass es für das Denken ein Vergehen in nichts so wenig wie ein Entstehen aus nichts gibt.

Ein anderes Object muss daher an Stelle des zu Grunde liegenden treten. Es ist gleich diesem ein Gegenstand des Denkens und somit ein für sich bestehendes, appercipirtes Object. Es ist aber weder von vornherein gegeben, noch wird es irgend woher nachträglich herbeige Holt. Denn nur das zu Grunde liegende ist gegeben und die ganze Thätigkeit ist auf dieses gerichtet. Sein Vorhandensein beruht demnach völlig auf dem gegebenen; es ist die Folge und dieses der Grund.

Mit dem Grunde ist die Folge gegeben. Die Folge entsteht jedoch nicht aus dem Grunde etwa der Art, dass dieser sich verändere und zu jener werde. Vielmehr führt nur das Denken vom Grunde zur Folge. Der Grund bleibt dabei, was er ist, und stellt nach wie vor einen Bewusstseinsinhalt dar. Die Folge besteht nur kraft des Denkens und hängt am Grunde; eben durch das Denken wird sie aber neben dem Grunde ein Inhalt des Bewusstseins. Der charakteristische Erfolg des Denkactes besteht sonach in der Scheidung der Folge vom Grunde einerseits und der Bindung der Folge an den Grund andererseits.

Darin enthüllt sich die elementare Thatsache, auf welcher das Wesen des beziehenden Denkens beruht. Sie muss in der Darstellung des Denkactes ihren Ausdruck finden.

Man bezeichne darum den zu Grunde liegenden Bewusstseinsinhalt durch α und den als Folge sich darbietenden durch α_1 . Dann ist α_1 ein zwar aus α abgeleiteter, aber von α losgelöster, selbständiger Inhalt des Bewusstseins. Die Ableitung erfolgt durch die Thätigkeit des Denkens. Da letztere auf α gerichtet ist, soll sie durch α bezeichnet und ihr Erfolg durch Nebeneinanderstellen von α und α_1 , also durch $\alpha\alpha$ angedeutet werden. Dann repräsentirt $\alpha\alpha$

die Folge in ihrer Abhängigkeit von α . Setzt man nun $\alpha\alpha = \alpha_1$, so wird hierdurch sowohl die Scheidung des α_1 von α , als auch die Bindung des α_1 an α , beides bewirkt durch die Denkhätigkeit α , ausgedrückt.

Der einzelne Act des beziehenden Denkens findet somit eine zutreffende Darstellung durch die symbolische Gleichung:

$$\alpha\alpha = \alpha_1,$$

wenn α die Thätigkeit des Denkens, α den Grund und α_1 die Folge bezeichnet.

Im Anschluss daran kann nun auch der einzelne Apperceptionsact eine entsprechende Darstellung erhalten. Er führt nicht von dem zu Grunde gelegten α zu einem davon verschiedenen α_1 , sondern er bleibt bei α stehen. Es ist daher, wenn α_0 das bloße Erfassen oder Appercipiren von α bezeichnet,

$$\alpha_0\alpha = \alpha$$

zu setzen.

Diese Gleichung lässt den Unterschied zwischen dem beziehenden Denken α und dem Appercipiren α_0 hervortreten und lehrt zugleich α_0 neben α als eine Bethätigungsweise des Denkens zu berücksichtigen. Darin besteht ihre Bedeutung. Das Bedürfniss, sie aufzustellen, macht sich darum nur mit Rücksicht auf die Darstellung des beziehenden Denkens geltend. Demgemäß genügte es früher, als das Fortschreiten vom Grunde zur Folge noch nicht erörtert wurde, die Apperceptionsacte durch die appercipirten Objecte zu kennzeichnen, um ihre Aneinanderreihung zu untersuchen.

Die Formel $\alpha\alpha = \alpha_1$ repräsentirt das Zusammensein von α und α_1 in seiner objectiven logischen Ordnung. Ist aber α_1 durch den Vollzug des Denkactes Inhalt des Bewusstseins geworden, so besteht es neben α auch unabhängig von der Beziehung des Grundes zur Folge. Denn man kann von der logischen Ordnung absehen und nur das Zusammensein als solches hervorheben, dessen Bedeutung darin besteht, dass α_1 in gleicher Weise wie α im Bewusstsein vorhanden ist. Dies drücke ich durch:

$$[\alpha, \alpha_1]$$

aus, so dass allgemein

$$[\alpha, \beta, \gamma, \dots]$$

das Zusammensein der Inhalte $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ im Bewusstsein, ohne Rücksicht auf ihre etwaigen Beziehungen, bezeichnet und lediglich die Thatsache vor Augen stellt, dass sowohl α als auch β, γ, \dots im Bewusstsein vorhanden ist.

Man kann dann sagen, dass in $[\alpha, \alpha_1]$ durch $\alpha\alpha = \alpha_1$ eine objective logische Ordnung hergestellt wird. Da ferner die Ausführung dieses Denkactes das Vorhandensein von α und α_1 und auch von $[\alpha, \alpha_1]$ in sich schließt, so kann man bemerken, dass mit $\alpha\alpha = \alpha_1$ zugleich $\alpha_0\alpha = \alpha$; $\alpha_0\alpha_1 = \alpha_1$ und $\alpha_0[\alpha, \alpha_1] = [\alpha, \alpha_1]$ besteht.

§ 4.

Jeder Act des beziehenden Denkens ist in der angegebenen Weise darstellbar. Reiht sich also an den ersten Act ein zweiter, in welchem β an Stelle von α tritt, so erhält er durch die Formel $\beta\beta = \beta_1$ seinen Ausdruck. Ebenso ist ein dritter Act durch $\gamma\gamma = \gamma_1$, ein vierter durch $\delta\delta = \delta_1$ wiederzugeben u. s. w.

Die Aneinanderreihung dieser Denkacte ist, sofern sie unabhängig neben einander bestehen und alle in gleicher Weise Beziehungen des Grundes zur Folge erzeugen, ihrem Wesen nach nicht verschieden von der Aneinanderreihung der Apperceptionsacte $\alpha_0\alpha = \alpha$; $\beta_0\beta = \beta$; $\gamma_0\gamma = \gamma$; \dots , wo $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \dots$ jedesmal das Apperzipiren von $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ andeutet. In beiden Fällen macht sich bloß ein subjectiver Zusammenhang geltend, der durch die Reihenform des Denkens bedingt ist.

Ein dem beziehenden Denken eigenthümlicher Erfolg tritt erst ein, wenn ein objectiver Zusammenhang zwischen den Denkacten besteht. Ein solcher kann sich beliebig weit erstrecken. Er lässt sich aber stets aus den Zusammenhängen zwischen je zwei Denkacten zusammensetzen, da der Reihennatur des Denkens zufolge immer nur je ein Act einem anderen sich anschließt.

Die beiden Denkacte $\alpha\alpha = \alpha_1$ und $\beta\beta = \beta_1$ können in dreifach verschiedener Weise zusammenhängen, wenn von ihrer Aufeinanderfolge, die keine objective Bedeutung hat, abgesehen wird. Es kann nämlich 1) $\alpha_1 = \beta$ oder $\alpha = \beta_1$, mithin die Folge des einen zugleich

der Grund des anderen; 2) $\alpha = \beta$, also der Grund des einen zugleich der Grund des anderen; 3) $\alpha_1 = \beta_1$, sonach die Folge des einen zugleich die Folge des anderen sein. Wollte man auch noch $\alpha = \beta$ voraussetzen, so dass in beiden Beziehungen die nämliche Denktätigkeit vorläge, so würde hierdurch kein objectiver Zusammenhang, sondern nur eine Aehnlichkeit der Beziehungen bedingt. Ueberdies müsste man festsetzen, welcher Grad der Aehnlichkeit durch das Gleichsetzen von α und β bezeichnet werden soll. Dies kann aber erst dann geschehen, wenn bestimmte Classen von Beziehungen mit Rücksicht auf ihren Erkenntnissinhalt unterschieden werden. Denn eine gewisse Aehnlichkeit besteht von vornherein, sofern α und β jedenfalls eine Beziehung zwischen Grund und Folge andeuten, und eine ununterscheidbare Identität ist doch wohl nur dann vorhanden, wenn auch Grund und Folge in beiden Acten übereinstimmen und somit die Acte selbst identisch sind.

In jedem der drei Fälle begründet das Zusammenbestehen von $\alpha\alpha = \alpha_1$ und $\beta\beta = \beta_1$ auch zwischen den nicht unmittelbar durch α und β verknüpften Denkobjecten eine Beziehung. Sie ist als mittelbare Beziehung zu bezeichnen. Eine solche besteht, wenn $\alpha_1 = \beta$ oder $\alpha = \beta_1$, zwischen α und β_1 oder α_1 und β ; wenn $\alpha = \beta$, zwischen α_1 und β_1 ; wenn $\alpha_1 = \beta_1$, zwischen α und β . Es gibt sonach drei Arten mittelbarer Beziehungen: 1) zwischen einem Grunde und einer Folge, vermittelt durch ein Denkobject, das die Folge jenes Grundes und zugleich der Grund jener Folge ist; 2) zwischen zwei Folgen, vermittelt durch einen gemeinsamen Grund; 3) zwischen zwei Gründen, vermittelt durch eine gemeinsame Folge. Diese mittelbaren Beziehungen sind als der wesentliche Erfolg des Zusammenhangs zweier Acte des beziehenden Denkens hervorzuheben.

Sie begründen ein Zusammensein der beiden mittelbar verbundenen Denkobjecte, dessen Beschaffenheit durch die Art des Zusammenhangs der Denkacte bedingt wird. Ihre Darstellung muss daher dieses Zusammensein verbunden mit dem Hinweis auf jene Denkacte zum Ausdrucke bringen.

Dies kann in folgender Form geschehen:

1) $\alpha\alpha = \alpha_1$ $\beta\alpha_1 = \beta_1$ <hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/> $[\alpha, \beta_1]$	2) $\alpha\alpha = \alpha_1$ $\beta\alpha = \beta_1$ <hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/> $[\alpha_1, \beta_1]$	3) $\alpha\alpha = \alpha_1$ $\beta\beta = \alpha_1$ <hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/> $[\alpha, \beta]$
---	---	---

Die mittelbare Beziehung erster Art kann überdies als Ergebniss eines zusammengesetzten Denkactes aufgefasst werden. Da nämlich $\alpha_1 = \alpha\alpha$, so kann statt $\beta\alpha_1$ auch $\beta\alpha\alpha$ gesetzt werden, so dass die Gleichung $\beta\alpha\alpha = \beta_1$ die beiden einfachen Denkacte $\alpha\alpha = \alpha_1$ und $\beta\alpha_1 = \beta_1$ zusammenfassend darstellt. Da ferner mit $\beta\alpha\alpha = \beta_1$ das Zusammensein $[\alpha, \beta_1]$ ebenso unmittelbar verbunden ist, wie $[\alpha, \alpha_1]$ mit $\alpha\alpha = \alpha_1$, so braucht es keinen besonderen Ausdruck zu erhalten.

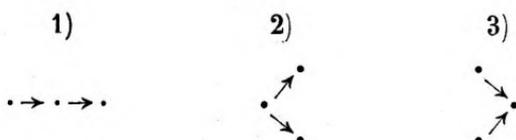
Die mittelbare Beziehung erster Art findet somit durch den zusammengesetzten Denkact

$$\beta\alpha\alpha = \beta_1$$

eine hinreichende Darstellung.

Die mittelbaren Beziehungen zweiter und dritter Art gestatten im allgemeinen eine solche Darstellung nicht. Soll sie möglich sein, so muss eine der unmittelbaren Beziehungen umkehrbar sein, es muss also entweder $\alpha\alpha = \alpha_1$ durch $\alpha_1\alpha_1 = \alpha$ oder $\beta\beta = \beta_1$ durch $\beta_1\beta_1 = \beta$ ersetzt werden können. Dies ist offenbar nur unter gewissen Voraussetzungen möglich. Trifft es aber zu, so liegt in Wirklichkeit eine Beziehung der ersten Art vor. Es sind daher nur die mittelbaren Beziehungen erster Art durch einen zusammengesetzten Denkact darstellbar.

Diese Angaben über den Zusammenhang zweier Acte des beziehenden Denkens lassen erkennen, wie beliebig viele solcher Acte zusammenhängen können und welche Arten von mittelbaren Beziehungen möglich sind. Eine Veranschaulichung folgender Art erleichtert indessen den Ueberblick über die auftretenden Möglichkeiten. Man markire die Denksobjecte durch Punkte und ihre unmittelbaren Beziehungen durch Pfeile, deren Richtung den Uebergang vom Grunde zur Folge andeutet. Es ergeben sich so für je zwei direct zusammenhängende Denkacte die drei Bilder:



Bezeichnet man nun das erste als Bestandtheil einer »Kette«, das zweite und dritte als Bestandtheil eines »Gewebes«, so lässt sich die Structur des Zusammenhangs zwischen beliebig vielen Denkacten charakterisiren wie folgt:

Eine Reihe zusammenhängender Acte des beziehenden Denkens bildet eine Kette, wenn durchweg die Folge des einen der Grund für den sich anschließenden ist; hingegen liegt ein Gewebe vor, wenn es unter den Denkacten solche mit gemeinsamem Grunde oder gemeinsamer Folge gibt.

Das Wesen einer Kette besteht darin, dass ihre auf einander folgenden Glieder in einen zusammengesetzten Denkact zusammengefasst werden können und dass jeder zusammengesetzte Denkact in eine Kette einfacher Acte auflösbar ist. Denn einerseits folgt aus der Kette:

$$\alpha_1 \alpha = \alpha_1; \alpha_2 \alpha_1 = \alpha_2; \dots \alpha_{n-1} \alpha_{n-1} = \alpha_n$$

ohne weiteres:

$$\alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \dots \alpha_2 \alpha_1 \alpha = \alpha_n,$$

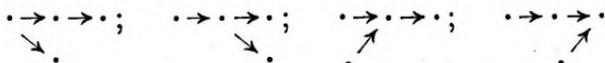
und andererseits lässt sich dieser zusammengesetzte Denkact unmittelbar in die Kette jener einfachen Denkacte auflösen. Zwei oder mehrere einfache Denkacte lassen sich daher dann und nur dann in einen zusammengesetzten Denkact vereinigen, wenn sie in einer Kette zusammenhängen. Die Art der Zusammensetzung ist durch die Aufeinanderfolge der Glieder innerhalb der Kette in eindeutiger Weise bestimmt.

Ein Gewebe wird am einfachsten als ein System von Ketten charakterisirt, die zu je zweien durch einen gemeinsamen Grund oder eine gemeinsame Folge verbunden sind. Insbesondere können alle Ketten einen und denselben gemeinsamen Grund oder eine und dieselbe gemeinsame Folge haben. Es ist ferner in Consequenz mit dieser Auffassung eines Gewebes auch der einzelne Denkact als eine Kette und zwar als eine eingliedrige Kette zu bezeichnen.

So ist z. B. für drei Denkacte ein achtfach verschiedener Zusammenhang möglich. Er charakterisirt sich entweder als eine dreigliedrige Kette:



oder als ein System einer zweigliedrigen und einer eingliedrigen Kette, welch letztere ebensowohl mit dem ersten wie mit dem zweiten Gliede jener und zwar durch einen gemeinsamen Grund oder eine gemeinsame Folge verbunden sein kann:



oder als ein System dreier eingliedriger Ketten, die eine dreifache Verbindung durch einen einzigen gemeinsamen Grund oder eine einzige gemeinsame Folge oder je einen gemeinsamen Grund und je eine gemeinsame Folge gestatten:



Jede Reihe zusammenhängender Denkacte erzeugt neben den unmittelbaren Beziehungen auch mittelbare. Dieselben sind wesentlich verschieden, je nachdem sie durch eine Kette oder ein Gewebe von Denkacten vermittelt werden. Denn wird die Beziehung durch eine Kette vermittelt, so ist sie durch einen zusammengesetzten Denkact darstellbar. Die durch ein Gewebe vermittelte Beziehung kann dagegen nur durch ein System einfacher oder zusammengesetzter Denkacte repräsentirt werden.

Der Zusammenhang der Denkacte begründet die objective logische Ordnung der auf einander bezogenen Bewusstseinsinhalte. Mit Rücksicht darauf kann man sagen:

Irgend welches Zusammensein

$$[a, b, c, \dots]$$

besitzt eine objective logische Ordnung, wenn die Objecte a, b, c, \dots durch eine Kette oder ein Gewebe von Denkacten verbunden sind. Die Beziehung zwischen zwei beliebigen

Objecten wird entweder durch einen einfachen oder einen zusammengesetzten Denkact oder durch ein System solcher Acte vermittelt.

§ 5.

Die Darstellung der Denkacte und ihres Zusammenhangs ist das Werk der Reflexion, die das Denken selbst zum Gegenstande der Untersuchung macht. Sie fußt darauf, dass es dem Denken möglich sei, einem gegebenen Objecte ein anderes zuzuordnen. Dementsprechend ergibt sich die Möglichkeit von Beziehungen zwischen Objecten, die alle in gleicher Weise als Beziehungen des Grundes zur Folge sich charakterisiren, sofern jede als ein Erfolg des nach Grund und Folge verknüpfenden Denkens auftritt. Dass jenen Möglichkeiten Wirklichkeiten entsprechen, ist selbstverständlich. Ist doch die Reflexion nur die Begleiterin der thatsächlich ausgeführten Denkarbeit, die auf die Form achtet, an die das Denken bei seiner Arbeit gebunden ist. Die Verwirklichungen müssen aber jetzt aufgezeigt werden. Denn da die thatsächlich bestehende Verschiedenheit der Beziehungen, die wie soeben erwähnt vorerst alle den nämlichen Charakter haben, an der Beschaffenheit der Objecte hängt, so kann man nur an den thatsächlich vorliegenden Verknüpfungen erkennen, welche Besonderheiten die Form des beziehenden Denkens anzunehmen vermag, und welche besondere Arten von Beziehungen unterschieden werden können, um sie einer weitergehenden Untersuchung zu unterwerfen.

Wenn ein Denkact wirklich erfolgt, so ist das Interesse völlig den Objecten zugewendet, die als individuell bestehende Bewusstseinsinhalte thatsächlich vorhanden sind, während die Denkhätigkeit unwillkürlich in der ihr eigenthümlichen Form sich vollzieht und erst der Reflexion als die Erzeugerin der Beziehung sich enthüllt. Es wird darum nur der Inhalt der Beziehung beachtet, der nun als Erkenntniss ins Bewusstsein tritt.

Diese Erkenntniss ist entweder wahr oder falsch, je nachdem sie durch eine Prüfung bestätigt oder widerlegt wird. Sie stellt sich somit, in das Gewand der Sprache gekleidet, als eine Aussage dar, der das Wahr- oder Falschsein anhaftet. In Uebereinstimmung mit

der alten Aristotelischen Definition¹⁾ ist sie demgemäß als Urtheil zu bezeichnen.

Jedem thatsächlich erfolgenden Acte des beziehenden Denkens tritt somit ein Urtheil zur Seite, in welchem die Beziehung zwischen den Objecten des Denkens erkannt wird. Es heiße Beziehungsurtheil.

So kann z. B. das Vorhandensein eines Dinges zum Hervorheben eines Zustandes oder einer Eigenschaft führen. Das Ding ist dann das zu Grunde liegende gegebene Object α . Die Denkhätigkeit α besteht in dem Beachten des Zustandes oder der Eigenschaft. Das so Hervorgehobene wird als Folge α_1 von α unterschieden und zugleich als zugehörig zu α erkannt. — Verbindet sich damit die Einsicht, dass im Vorhandensein eines Zustandes oder einer Eigenschaft ein charakteristisches Merkmal einer Gattung von Dingen gefunden wird, so entwickelt die Denkhätigkeit α den Gattungsbegriff, der sich als Folge α_1 dem α zugesellt. — Solche Erkenntnisse finden in Urtheilen wie »diese Rose blüht«, »ist roth«, »ist eine Pflanze« ihren Ausdruck.

Hier ist das Subject des Satzes der Grund, das Prädicat die Folge. Man kann jedoch nicht erwarten, in jedem Falle den Grund in voller Bestimmtheit durch das Subject sprachlich angegeben zu finden. Es kann dies auch in nur unzureichender oder unbestimmter Weise geschehen. Dies ist z. B. in den rein erzählenden Urtheilen der Fall, in welchen das Subject nur für den gerade vorliegenden Zeitpunkt der Erzählung und mit Rücksicht auf die gerade obwaltenden Umstände das Denken veranlasst, das erzählte Factum als Folge zu entwickeln.

Es ist aber nicht jedes Urtheil ein Beziehungsurtheil. Denn auch der Apperceptionsact führt zu einer Erkenntniss, die wie jede Erkenntniss anerkannt oder verworfen werden kann. Ihr Inhalt besteht, da dem gegebenen Bewusstseinsinhalte α nicht ein anderer zugesellt wird, lediglich im Vorhandensein dieses α . Das Urtheil drückt daher nur das Vorhandensein im Bewusstsein aus und ist als Positionsurtheil oder als Existenzialurtheil zu bezeichnen. Es lautet: es gibt einen Bewusstseinsinhalt α . Soll aber im Hinblick

1) Hermeneutika, 4. Cap.

auf die Beziehungsurtheile das Fehlen einer Beziehung ausdrücklich hervorgehoben werden, so kann die Aussage nur lauten: α ist nichts anderes als α und bleibt dieses α . Man gelangt dann zum rein identischen Urtheil oder zur Gleichung $\alpha = \alpha$.

Da jeder Act des beziehenden Denkens $\alpha\alpha = \alpha_1$ das Apperzipiren des Grundes, der Folge und des Zusammenseins von Grund und Folge, nämlich $\alpha_0\alpha = \alpha$; $\alpha_0\alpha_1 = \alpha_1$; $\alpha_0[\alpha, \alpha_1] = [\alpha, \alpha_1]$, mit sich führt, so schließt jedes Beziehungsurtheil Existenzialurtheile ein. So enthält das Urtheil »die Rose ist roth« die Urtheile »es gibt einen Bewusstseinsinhalt Rose«, »roth«, »rothe Rose«.

Der aus irgend einem einzelnen Denkacte resultirende Erkenntnissinhalt findet somit in einem Existenzialurtheil oder Beziehungsurtheil seinen Ausdruck, je nachdem er auf einem Apperceptionsact oder einem Act des nach Grund und Folge verknüpfenden Denkens beruht.

Liegt nun eine zusammenhängende Reihe von Acten des beziehenden Denkens vor, so treten mittelbare Beziehungen neben den unmittelbaren auf. Es versteht sich von selbst, dass auch das Erkennen einer mittelbaren Beziehung in einem Urtheil sich vollzieht. Letzteres stellt sich als Conclusion eines Schlusses dar, dessen Prämissen die Urtheile der zugehörigen unmittelbaren Beziehungen sind. Zugleich erhellt, dass den drei Arten der mittelbaren Beziehungen, die aus zwei zusammenhängenden Denkacten sich ergeben können, die drei von Aristoteles aufgestellten Schlussfiguren¹⁾ entsprechen.

Ist die mittelbare Beziehung von der ersten Art, so ist sie durch einen zusammengesetzten Act des beziehenden Denkens erzeugbar. Ihr Erkenntnissinhalt besteht in gleicher Weise wie derjenige der unmittelbaren Beziehungen in einer Verknüpfung nach Grund und Folge und findet demgemäß in einem Beziehungsurtheil seinen Ausdruck. Die mittelbaren Beziehungen zweiter und dritter Art dagegen enthalten, wofern sie nicht als solche der ersten Art interpretirt werden können, das Zusammensein zweier Folgen α_1 und β_1 ,

1) Erste Analytiken; I. Buch, Cap. 4, 5, 6. Die Abweichung von der Aristotelischen, in der Logik üblichen Auffassungsweise der zweiten und dritten Figur, wonach oben ihre Bedeutung in der Begründung eines Existenzialurtheils gesucht wird, rechtfertigt sich wohl von selbst durch den Zusammenhang, in welchem sie auftritt.

beruhend auf einem gemeinsamen Grund α , oder zweier Gründe α und β , verknüpft durch eine gemeinsame Folge α_1 . Das Schlussurtheil kann daher für sich allein, wenn die in den Prämissen angegebene Begründung außer Acht bleibt, nur das Bestehen jenes Zusammenseins als Erkenntniss darbieten. Beruht es doch, an und für sich betrachtet, nicht auf einem einfachen oder zusammengesetzten Acte des beziehenden Denkens, sondern auf dem bloßen Appercipiren von $[\alpha_1, \beta_1]$ oder $[\alpha, \beta]$. Es ist demnach ein Existenzialurtheil.

Dies wird durch folgende Beispiele erläutert:

1)

Das Ding α hat die Eigenschaft α_1 ; ($\alpha\alpha = \alpha_1$).

Die Eigenschaft α_1 bedingt den Zustand β_1 ; ($\beta\alpha_1 = \beta_1$).

Das Ding α befindet sich im Zustand β_1 ; ($\beta\alpha\alpha = \beta_1$).

2)

Das Ding α hat die Eigenschaft α_1 ; ($\alpha\alpha = \alpha_1$).

Das Ding α hat die Eigenschaft β_1 ; ($\beta\alpha = \beta_1$).

Es gibt eine Verbindung der Eigenschaften α_1 und β_1 ; ($\alpha_0[\alpha_1, \beta_1] = [\alpha_1, \beta_1]$).

3)

Das Ding α hat das Merkmal α_1 ; ($\alpha\alpha = \alpha_1$).

Das Ding β hat das Merkmal α_1 ; ($\beta\beta = \alpha_1$).

Es existirt eine Uebereinstimmung zwischen den Dingen α und β ;
($\alpha_0[\alpha, \beta] = [\alpha, \beta]$).

In einem beliebigen Zusammenhang des Denkens besitzen die durch eine Kette von Denkacten vermittelten und somit durch einen zusammengesetzten Denkact erzeugbaren Beziehungen den Charakter der Beziehungen erster Art, während denjenigen der zweiten und dritten Art die durch ein Gewebe von Denkacten vermittelten Beziehungen entsprechen. Der Erkenntnissinhalt, welcher aus einer Reihe zusammenhängender Denkacte resultirt, findet daher in einem Beziehungsurtheil oder Existenzialurtheil seinen Ausdruck, je nachdem eine Kette oder ein Gewebe von Denkacten vorliegt und dementsprechend die mittelbare Beziehung durch einen

einzigem zusammengesetzten Denkact erzeugbar oder nicht erzeugbar ist.

Sofern nun die ganze Denkarbeit aus Apperceptionsacten und Acten des beziehenden Denkens sich zusammensetzt, erhellt, dass jeder Erkenntnissinhalt in einem Existenzialurtheil oder Beziehungsurtheil ins Bewusstsein tritt und so jedem einfachen oder zusammengesetzten Acte des beziehenden Denkens ein Beziehungsurtheil, jedem Apperceptionsacte, mag er einen Bewusstseinsinhalt selbst oder das Zusammensein solcher Inhalte zum Gegenstande haben, ein Existenzialurtheil zur Seite steht. Diese Urtheile bieten den Ertrag der Denkarbeit dar; in ihnen wird die logische Ordnung zur Thatsache.

Hieraus erkennt man, dass einerseits die Denkacte und ihr Zusammenhang in Ketten oder Geweben, andererseits die Urtheile und ihre Verbindung in Schlüssen sich wechselweise entsprechen. Sie sind nur verschiedene Auffassungsweisen des nämlichen geistigen Vorgangs.

§ 6.

Man hätte daher auch von den Urtheilen ausgehend zur Erkenntniss des nach Grund und Folge verknüpfenden oder bloß appercipirenden Denkens gelangen können. Ein Abstractionsprocess hätte dann gelehrt, Classen von Urtheilen zu unterscheiden, in denen besonders geartete Beziehungsformen des Denkens hervortreten; und er hätte in letzter Linie dazu geführt, die beiden Grundformen des Beziehungsurtheils und Existenzialurtheils anzuerkennen, deren Schema in der Darstellung des Actes des beziehenden und appercipirenden Denkens vorgezeichnet ist. Zugleich hätte die Verknüpfung und Verwebung der Urtheile in den Schlüssen ihr Schema in der Darstellung des Zusammenhangs der Denkacte gefunden.

Nachdem jedoch hier die Bethätigung des Denkens unmittelbar zum Gegenstande der Reflexion gemacht worden, ist von vornherein die Form des appercipirenden und des vom Grunde zur Folge fortschreitenden Denkens bekannt. Das Aufzeigen der Erzeugnisse des Denkens ermöglicht nun aber, die Realisirungen der Denkacte in den Urtheilen als Stütze für die Unterscheidung verschiedener Arten von Beziehungen zu gebrauchen.

Zunächst lehrt die Betrachtung der Urtheile, dass es überhaupt verschiedenartige Beziehungen des Grundes zur Folge gibt.

Dies muss festgestellt werden. Denn man könnte annehmen, dass jeder Act des beziehenden Denkens ebenso wie jeder Apperceptionsact in der bloßen Wiederholung eines und desselben Processes bestände. Dann wären $\alpha\alpha = \alpha_1$ und $\beta\beta = \beta_1$ ebenso wie $\alpha_0\alpha = \alpha$ und $\beta_0\beta = \beta$ nur durch den Hinweis darauf, dass jetzt α , dann β die Ausführung der Denkhätigkeit gestattet, unterscheidbar. An und für sich betrachtet wären aber α und β identisch, wie in der That α_0 und β_0 identisch sind. Es wäre dann überflüssig, neben α noch β , γ , δ , ... zur Bezeichnung des beziehenden Denkens zu benutzen, wie denn auch in der früheren Untersuchung kein Bedürfniss sich geltend machte, verschiedene Apperceptionsacte anders als durch Angabe der apperpirten Objecte zu kennzeichnen. Es wäre ferner unzulässig, ein und dasselbe α als Object für verschiedene Acte des beziehenden Denkens vorauszusetzen; denn es könnte mit α nur α_1 verbunden und überhaupt einem Objecte nur je ein Object und immer wieder das nämliche Object zugeordnet werden. Es gäbe somit zwar Ketten, aber keine Gewebe von Denkacten.

Nun gibt es aber solche Gewebe, da es Urtheile gibt, die dem nämlichen Grunde verschiedene Folgen oder der nämlichen Folge verschiedene Gründe zuerkennen. Und dies ist nur möglich, wenn das Denken in verschiedener Weise thätig sein und so verschiedenartige Beziehungen erzeugen kann. Beispielsweise liegt eine verschiedenartige Denkhätigkeit vor, wenn in einem Urtheile eine Eigenschaft als einem Gegenstande zugehörig erkannt, oder wenn in ihm die Unterordnung des Gegenstandes unter einen Gattungsbegriff vollzogen wird. Denn im letzteren Falle muss zu der Hervorhebung der Eigenschaft noch die Erkenntniss des Zusammenhangs zwischen Eigenschaft und Gattung hinzukommen, soll sich der Gattungsbegriff als Folge dem Gegenstande als dem gegebenen Grunde zuordnen.

Es bestehen sonach jedenfalls Beziehungen, die hinsichtlich der Thätigkeit des beziehenden Denkens verschieden sind. Man kann daher auch verschiedene Arten von Beziehungen unterscheiden, in welchen besondere Formen des beziehenden Denkens eine Gestalt gewinnen.

Zu einer solchen Unterscheidung führt beispielsweise Kant's Eintheilung der Urtheile in analytische und synthetische¹⁾.

Im analytischen Urtheil gehört das Prädicat α_1 zum Subject α »als etwas, was in diesem Begriff α (versteckter Weise) enthalten ist«. Die Denkhätigkeit α des Denkactes $\alpha\alpha = \alpha_1$ besteht daher in einer Analyse der denknothwendigen Bestimmungen von α . Die Beziehung zwischen α und α_1 charakterisirt sich somit dadurch, dass die Folge α_1 ein unmittelbarer Bestandtheil des Grundes α ist. Es könnte allerdings unzutreffend erscheinen, hier α_1 als eine aus α entwickelte Folge zu bezeichnen; denn Kant selbst sagt von den analytischen Urtheilen, dass in ihnen die Verknüpfung des Prädicats mit dem Subject durch Identität gedacht wird. Indessen ist jede durch das Denken erzeugte Beziehung zwischen verschiedenen Objecten eine solche des Grundes zur Folge, da jeder Act des beziehenden Denkens ein Fortschreiten vom Grunde zur Folge darstellt und nur der Apperceptionsact zu einer reinen Identität führt. Demgemäß enthält auch das analytische Urtheil eine Beziehung des Grundes zur Folge; denn α_1 ist verschieden von α , wie denn auch die Denkhätigkeit nicht im bloßen Appericipiren, sondern überdies im Zergliedern des α und im Hervorheben des α_1 als eines Gliedes von α besteht.

Im synthetischen Urtheil dagegen liegt α_1 »ganz außer dem Begriff α , ob es zwar mit demselben in Verbindung steht«. Die Denkhätigkeit muss daher über α hinausgehen, um α_1 als Folge aus α zu entwickeln. Dies Hinausgehen kann in der mit α verknüpften Erfahrung oder in Bestimmungen, an welche die Ausführung der Denkhätigkeit von vornherein gebunden ist, begründet sein. Die Erfahrung ist es z. B., die es dem Denken möglich macht, einem empirisch gegebenen Ding den Gattungsbegriff als Folge zuzuordnen. Es muss ferner, wie Kant hervorhebt, die Anschauung zu Hülfe genommen werden, um von der Geraden aussagen zu können, dass sie die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist. Wenn aber Kant auch für den Satz $7 + 5 = 12$ die Anschauung in Anspruch nimmt, so ist hiergegen hervorzuheben, dass vielmehr die nicht auf An-

1) Kritik der reinen Vernunft. Einleitung. Von dem Unterschiede analytischer und synthetischer Urtheile.

schauung beruhende Zahlenreihe zu Grunde gelegt werden muss, soll sich aus dem Vorhandensein von 7 und 5 die Summe 12 ergeben.

Dies erhellt aus folgender Bemerkung, die zugleich eine vergleichende Nebeneinanderstellung der Denkacte eines rein identischen, eines analytischen und eines synthetischen Urtheils gibt. In dem Urtheil $7 + 5 = 12$ ist offenbar das Zusammensein der beiden Zahlen 7 und 5 gegeben; es ist durch $[7, 5]$ zu bezeichnen, wobei $[7, 5]$ nicht mit $7 + 5$ verwechselt werden darf. Der Apperceptionsact

$$\alpha_0[7, 5] = [7, 5]$$

führt nun zunächst zum Bewusstwerden dieses Zusammenseins, das lediglich das rein identische Urtheil $[7, 5] = [7, 5]$ gestattet. Verknüpft sich damit der analysirende Denkact

$$\alpha[7, 5] = 7 \text{ oder } = 5,$$

so werden 7 und 5 als die Bestandtheile von $[7, 5]$, ohne welche das letztere nicht gedacht werden kann, in dem analytischen Urtheil » $[7, 5]$ besteht aus 7 und 5« erkannt. Kommt nun aber die Kenntniss der Zahlenreihe hinzu, deren homogene Beschaffenheit es ermöglicht, von jedem Gliede aus Intervalle mit bestimmter Gliederanzahl abzugrenzen, solche Intervalle aneinanderzureihen und zu einem Gesamtintervall zusammenzuschließen, so kann das Denken über das gegebene Zusammensein von 7 und 5 hinausgehen; man kann nun 7 und 5 als aneinandergrenzende Intervalle der Zahlenreihe auffassen und zu einer Summe vereinigen. Die Denkhätigkeit besteht jetzt im Summiren, sodass $\alpha[7, 5]$ mit $7 + 5$ identisch ist, und der Denkact wird sonach durch

$$\alpha[7, 5] = 12$$

dargestellt, worauf das synthetische Urtheil »die Summe von 7 und 5 ist 12« beruht. Man sieht zugleich ein, dass es nicht das einzig mögliche ist. Denn unter Zugrundelegen der Zahlenreihe und ihrer Operationen kann die Bethätigung des Denkens an $[7, 5]$ ebensowohl das Product der beiden Zahlen zur Folge haben. Dann ist $\alpha[7, 5]$ mit $7 \cdot 5$ identisch zu setzen und es hat

$$\alpha[7, 5] = 35$$

als Darstellung des Denkactes zu gelten, der zu dem synthetischen Urtheil $\alpha \cdot 7 \cdot 5 = 35$ führt. In ähnlicher Weise kann aus [7, 5] jedes andere durch Zahlenoperationen ableitbare Resultat als Folge entwickelt werden.

Der Charakter der Beziehung eines synthetischen Urtheils besteht im Gegensatz zu derjenigen eines analytischen Urtheils darin, dass die Folge nicht ein denknöthwendiger Bestandtheil des Grundes ist. Wird dieser Grund erweitert, so kommen andere, zum erweiterten Begriff gehörige Elemente zu den vorhandenen hinzu und es ist wohl möglich, dass eine zuerst synthetisch entwickelte Folge aus dem erweiterten Grunde analytisch sich ergebe. Diese Möglichkeit verwischt den Unterschied zwischen analytischen und synthetischen Urtheilen keineswegs¹⁾. Denn es handelt sich bei der Charakterisirung verschiedenartiger Beziehungen nicht darum, ob eine Folge α_1 überhaupt nur analytisch oder synthetisch aus einer engeren oder weiteren Fassung des Grundes α sich ergeben könne, sondern darum, wie α_1 aus dem gegebenen α thatsächlich folgt.

In diesem Sinne bestimmen in der That die analytischen und synthetischen Urtheile zwei wesentlich verschiedene Arten von Beziehungen, da entweder ein Fortgang vom Grunde zu den unmittelbaren, denknöthwendigen Elementen oder ein Hinausgehen über den Grund stattfindet.

Die Unterscheidung verschiedener Arten von Beziehungen im Hinblick auf besonders geartete Bethätigungsweisen des Denkens ist indessen in mannigfacher Weise möglich. Folgende Bestimmung ist mit Rücksicht auf die Ziele unserer Untersuchung von grundlegender Bedeutung.

§ 7.

Es ist denkbar, dass einem Urtheil, welches auf dem Denkact $\alpha\alpha = \alpha_1$ beruht, ein anderes auf Grund von $\alpha\alpha_1 = \alpha_2$ sich anschließt, sodass die nämliche Denkhätigkeit α , die α_1 aus α entwickelt hat, auch von α_1 zu α_2 führt. Die beiden zusammenhängenden

1) Vergl. hierzu Wundt, Logik, I. Bd. 2. Aufl. S. 170, wo den Einwendungen Schleiermacher's und Trendelenburg's gegenüber betont wird, dass nur diejenigen Urtheile im Sinne Kant's analytisch sind, in deren Subject das Prädicat nothwendig und allgemein gültig mitzudenken ist.

Denkacte erzeugen dann gleichartige Beziehungen; denn die zweite ist eine Wiederholung oder Iterirung der ersten. Ich bezeichne darum die Denkhätigkeit α des Denkactes $\alpha\alpha = \alpha_1$ als iterirbar und nenne die Beziehung zwischen α und α_1 eine iterirbare Beziehung des Grundes zur Folge.

Diese Festsetzungen gelten ohne Rücksicht darauf, ob die Iterirung nur zu zwei zusammenhängenden Denkacten oder zu einer beliebig weit sich erstreckenden Kette führt. Man erhält daher folgende Definition.

Kann durch eine Denkhätigkeit α von bestimmter Art die Kette von Denkacten

$$\alpha\alpha = \alpha_1; \alpha\alpha_1 = \alpha_2; \dots \alpha\alpha_{n-1} = \alpha_n \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

hergestellt werden, so ist α eine iterirbare Denkhätigkeit und die zwischen α und α_1 bestehende Beziehung ist eine iterirbare Beziehung des Grundes zur Folge. Die in der Kette unmittelbar vorliegenden Beziehungen bilden ein System iterirter Beziehungen.

Auf Grund dieser Definition sind die iterirbaren und die nicht iterirbaren Beziehungen zu unterscheiden.

Diese Unterscheidung könnte insofern für unbestimmt und fließend gehalten werden, als sie von der Auffassungsweise der Beziehungen abhängt und hierin ein Schwanken möglich zu sein scheint. Denn einestheils ist jede Beziehung insoweit mit jeder andern gleichartig, als sie insgesamt Beziehungen des Grundes zur Folge darstellen; andertheils ist jede als individuelle Beziehung von jeder andern verschieden. Iterirbar im allgemeinsten Sinne wäre daher jede Beziehung, deren Folge einem neuen Denkacte als Grund dienen kann; jede beliebige Kette von Denkacten enthielte dann ein System iterirter Beziehungen. Bei der engsten Betrachtungsweise müssten dagegen zwei Denkacte, denen verschiedene Objecte zu Grunde liegen, als gleichfalls verschieden gelten, sodass keine Beziehung iterirbar wäre.

Es handelt sich aber nicht darum, ob die Beziehung eines vorliegenden Urtheils als ein Beispiel der allgemeinen Beziehung des Grundes zur Folge aufgefasst werden, oder aber auf die gerade verknüpften Objecte in ihrer individuellen Besonderheit eingeschränkt werden kann. Vielmehr kommt in Betracht, welche Geltung die

Beziehung im Zusammenhang des Denkens thatsächlich besitzt. In dieser ihrer Bestimmtheit ist sie entweder iterirbar oder nicht iterirbar. Eine Entscheidung hierüber könnte nur dann zweifelhaft sein, wenn der Erkenntnissinhalt des Urtheils unbestimmt bliebe.

So enthält z. B. jedes Urtheil, das von einem Ding eine Eigenschaft oder einen Zustand aussagt, eine nicht iterirbare Beziehung. Denn hier wird der Denkact $\alpha\alpha = \alpha_1$ dadurch charakterisirt, dass α die Eigenschaft oder den Zustand α_1 auf das Ding α als den Träger von α_1 bezieht. Da nun α_1 nicht selbst wieder ein solcher Träger ist, kann es auch nicht einer Wiederholung jener Denkhätigkeit als Grundlage dienen. Der Unterschied in der Beschaffenheit von α und α_1 macht somit in diesem Fall die Iterirung unmöglich.

Es ist ferner die Beziehung eines analytischen Urtheils ihrem Wesen nach nicht iterirbar. Sie ordnet einem gegebenen Bewusstseinsinhalte α ein Element α_1 zu, ohne welches α nicht gedacht werden kann. Setzt man nun auch α_2 als ein ebensolches Element von α_1 voraus, so erhält man aus den beiden Denkacten $\alpha\alpha = \alpha_1$; $\alpha\alpha_1 = \alpha_2$ durch Zusammensetzung

$$\alpha\alpha\alpha = \alpha_2.$$

Es ist somit α_2 auch ein denknöthwendiges Element von α . Nun ist der Zusammenhang eines Begriffs mit seinen denknöthwendigen Elementen keiner Steigerung oder Schwächung fähig, sondern einzig in seiner Art. Man muss daher die Beziehung zwischen α und α_2 als völlig gleichartig mit derjenigen zwischen α und α_1 anerkennen und dementsprechend

$$\alpha\alpha = \alpha_2$$

setzen. Das Zusammenbestehen von $\alpha\alpha = \alpha_2$ und $\alpha\alpha\alpha = \alpha_2$ ist aber unmöglich; denn aus $\alpha\alpha = \alpha_2$ folgt $\alpha\alpha\alpha = \alpha\alpha_2$, so dass $\alpha\alpha_2 = \alpha_2$ sich ergibt, während in Wirklichkeit für jedweden Act des beziehenden Denkens $\alpha\alpha_2$ von α_2 verschieden ist. Die Beziehung eines analytischen Urtheils ist folglich nicht iterirbar. — Man kann noch bemerken, dass aus $\alpha\alpha = \alpha_1$ und $\alpha\alpha = \alpha_2$ auch die Identität von α_1 und α_2 folgt, während offenbar verschiedene Elemente α_1 und α_2 als nöthwendig im Begriff von α enthalten vorausgesetzt werden dürfen. Dies enthält jedoch keinen Widerspruch; denn α_1 und α_2

sind in der That identisch, sofern beide in gleicher Weise im denknöthwendigen Zusammenhang mit α stehen und dies allein kommt hier in Betracht. Geht man nun von der Annahme aus, dass α_2 ebenso wie α_1 nöthwendig in dem gegebenen α enthalten sei, und wollte man zugleich α_2 als ein denknöthwendiges Element von α_1 voraussetzen, so würde sich der Widerspruch darin zeigen, dass α_2 von vornherein als Element von α bekannt ist und doch erst durch Vermittlung von α_1 als denknöthwendiges Element von α erschlossen wird.

Man hat demgemäß die iterirbaren Beziehungen im Gebiete der synthetischen Urtheile zu suchen. Fragt man nun, was hier zu dem gegebenen α hinzukommen muss, damit α_1 als Folge aus α entwickelt werden kann, so ergibt sich die Antwort aus der Bemerkung, dass in dem zuerst erwähnten Beispiele die verschiedene Beschaffenheit von α und α_1 die Iterirung unmöglich macht.

In der That müssen die Objecte α und α_1 in ihrer logischen Beschaffenheit in dem Maße übereinstimmen, dass α_1 dem Denken den nämlichen Antrieb zur Bethätigung darbietet wie α . Erfolgt alsdann der Denkact $\alpha\alpha_1 = \alpha_2$ im Anschluss an $\alpha\alpha = \alpha_1$, so gilt die gleiche Bedingung für α_1 und α_2 , wenn ein dritter Denkact $\alpha\alpha_2 = \alpha_3$ möglich sein soll, u. s. f. Die Objecte, welche durch iterirte Beziehungen verknüpft sind, stimmen daher alle in einem bestimmten Grade hinsichtlich ihrer logischen Beschaffenheit überein. Soweit dies der Fall ist, gehören sie der nämlichen Begriffssphäre an.

Soll also die Beziehung zwischen α und α_1 iterirbar sein, so muss in α_1 und in α ein und derselbe Begriff eine Gestalt gewinnen, und die Kenntniss dieses Begriffs muss zu dem gegebenen α hinzukommen, damit α_1 als Folge aus α entwickelt werden kann.

Beide Objecte sind gleichartig, sofern bloß ihre Zugehörigkeit zum Begriff in Betracht kommt. Ihre Beziehung beruht aber auf ihrer Verschiedenheit. Dieselbe kann daher für den Begriff als solchen nicht wesentlich sein und nur die Unterscheidung innerhalb seiner Sphäre veranlassen. Die Kenntniss des Begriffs lässt jedoch einsehen, welche Verschiedenheiten mit der Zugehörigkeit zum Begriff verträglich sind, und was für Beziehungen demnach auftreten können. Sie begründet hiermit die logische Ordnung der begrifflich zusammengehörigen Objecte.

Eine solche Ordnung wird möglich, wenn ein zum Begriff gehöriges Merkmal variabel ist, oder, allgemeiner gesagt, wenn eine Reihe von Merkmalen denkbar ist, von welchen eines das andere ausschließt, so dass jedes Object eines der Merkmale haben muss, aber auch nur eines haben kann. Statt nur eines variablen Merkmals oder statt nur einer Reihe einander ausschließender Merkmale können zwei und noch mehr variable Merkmale oder zwei und noch mehr Reihen solcher Merkmale vorhanden sein. Die Ordnung innerhalb der Begriffssphäre kann dann in verschiedener Hinsicht oder in mehrfacher Hinsicht zugleich hergestellt werden.

Soll diese Ordnung durch Iterirung einer Beziehung erfolgen, so muss, wenn auch nur drei Objecte α , α_1 , α_2 in Betracht gezogen werden, eine Variirung der Beziehung möglich sein. Denn aus $\alpha\alpha = \alpha_1$; $\alpha\alpha_1 = \alpha_2$ folgt $\alpha\alpha\alpha = \alpha_2$, und $\alpha\alpha\alpha$ kann, wie das Beispiel der analytischen Urtheile zeigt, nicht mit $\alpha\alpha$ identisch sein, ohne dass die Beziehung als nicht iterirbar sich erweist. Vielmehr muss die mittelbare Beziehung des Denkactes $\alpha\alpha\alpha = \alpha_2$ von der unmittelbaren der Denkacte $\alpha\alpha = \alpha_1$; $\alpha\alpha_1 = \alpha_2$ verschieden sein und etwa eine Steigerung derselben darstellen. Dies wird in dem sprachlichen Ausdruck der Urtheile, die solche Beziehungen enthalten, durch Verwendung des Comparativs ersichtlich, mag durch diesen nun ein mehr oder minder hinsichtlich der Größe oder hinsichtlich der Verschiedenheit überhaupt bezeichnet werden.

§ 8.

Demgemäß enthält jedes Urtheil, das begrifflich zusammengehörige Objecte nach einem gemeinsamen, der Abstufung fähigen Merkmal ordnet, eine Beziehung, die im allgemeinen der Iterirung fähig ist. Dies gilt unter Anderem von den Empfindungen eines bestimmten Sinnesgebietes, wenn sie hinsichtlich ihrer qualitativen oder intensiven Verschiedenheit auf einander bezogen werden.

Beispielsweise wird die Beziehung des Urtheils »der Ton α ist höher als der Ton α_1 « in dem Urtheil »der Ton α_1 ist höher als der Ton α_2 « iterirt. Aus beiden Urtheilen folgt die Conclusion »der Ton α ist somit auch höher als α_2 «. Gäbe es nun keine Abstufung, kein mehr und minder für diese Beziehungen, so müsste in

gleicher Weise wie für die Beziehungen der analytischen Urtheile neben $\alpha\alpha = \alpha_2$ auch $\alpha\alpha\alpha = \alpha_2$, als Zusammensetzung von $\alpha\alpha = \alpha_1$ und $\alpha\alpha_1 = \alpha_2$ bestehen. Es wäre dann auch hier $\alpha\alpha\alpha$ mit $\alpha\alpha$ identisch, was wiederum die Unmöglichkeit der Iterirung vor Augen stellen würde. In Wirklichkeit können aber die in Rede stehenden Beziehungen abgestuft werden. Denn es liegt nur an der Unbestimmtheit des sprachlichen Ausdrucks, wenn von den beiden Tönen α und α_1 nur gesagt wird, dass sie höher als α_2 sind. Der Ton α ist thatsächlich noch höher als α_1 , und die auf $\alpha\alpha = \alpha_1$ und $\alpha\alpha\alpha = \alpha_2$ beruhenden Urtheile enthalten nur scheinbar die nämliche Beziehung. Es wird darum eine schärfere Bestimmung der Beziehung Bedürfniss. Letzteres befriedigt die Psychologie durch Einführung des Begriffs der »eben merklich verschiedenen« Empfindung. Dann bezeichnet α in $\alpha\alpha = \alpha_1$; $\alpha\alpha_1 = \alpha_2$ den Uebergang zu der eben merklich verschiedenen Empfindung, so dass $\alpha\alpha\alpha = \alpha_2$ eine stärkere Verschiedenheit als die eben merkliche in bestimmter Weise angibt.

Die Scala der eben merklichen Abstufungen in der Qualität und Intensität der Empfindungen ist so die Grundlage für eine objective Ordnung in den einzelnen Sinnesgebieten und diese Ordnung vollzieht sich durch Iterirung der Beziehung, die zwischen einer gegebenen Empfindung und der von ihr eben merklich verschiedenen Empfindung besteht.

Die hier als Beispiel in Anspruch genommenen Sinneempfindungen lassen überdies erkennen, dass zwei verschiedene Arten iterirbarer Beziehungen unterschieden werden können. Beispielsweise führt der Fortgang von einer Empfindung zu der eben merklich verschiedenen im Gebiete der Tonqualitäten von einem tiefsten bis zu einem höchsten Tone oder umgekehrt; im Gebiete der Farbenqualitäten dagegen führt er von roth durch die Farben des Spectrums zu violett und durch die Purpurtöne zu roth zurück. Es gibt demnach offene und geschlossene Systeme iterirter Beziehungen und dementsprechend iterirbare Beziehungen, die solche Systeme erzeugen.

Das geschlossene System kann sich insbesondere auf nur zwei Glieder reduciren, wenn die Beziehung zwischen α und α_1 gleich derjenigen zwischen α_1 und α ist. So führt der Uebergang zur Complementärfarbe ebenso von roth zu grün, wie von grün zu roth; in

gleicher Weise ist für die Temperaturempfindungen die Beziehung zwischen Wärme und Kälte gleich derjenigen zwischen Kälte und Wärme: jede der beiden Empfindungen steht zur anderen im Gegensatz. Es sind alsdann die beiden Denkacte darstellbar durch:

$$\alpha\alpha = \alpha_1; \alpha\alpha_1 = \alpha, \text{ so dass } \alpha\alpha\alpha = \alpha,$$

und zwischen α und α_1 besteht die Beziehung des Gegensatzes, in der man hiernach einen Specialfall der iterirbaren Beziehungen erkennt.

Nachdem durch diese Beispiele die Bedeutung der iterirbaren Beziehungen hervorgehoben worden, kann noch darauf hingewiesen werden, dass nicht nur das beziehende Denken der Iterirung fähig sein kann, sondern dass auch das bloße Appercipiren, der aufgestellten Definition zufolge, iterirbar ist. Denn der Apperceptionsact $\alpha_0\alpha = \alpha$ kann an dem nämlichen α von neuem ausgeführt werden. Alsdann wird α_0 als iterirbare Denkhätigkeit dadurch charakterisirt, dass $\alpha_0\alpha_0 = \alpha_0$, während für jedes Beziehungen schaffende Denken $\alpha\alpha$ von α verschieden ist.

Auf Grund dieser Bemerkung tritt die frühere, von der Aneinanderreihung der Apperceptionsacte ausgehende Untersuchung über die Reihenform des Denkens in einen Zusammenhang mit der vorliegenden. Die selbständige Bedeutung der ersteren wird allerdings hierdurch nicht berührt. Denn die Apperceptionsacte dienen nicht wegen der, erst jetzt in den Vordergrund tretenden Iterirbarkeit als Ausgangspunkt, sondern weil das Fehlen objectiver Beziehungen das reihenförmig fortschreitende Denken ungehindert zur Geltung kommen ließ und es ermöglichte, die Merkmale der Reihenform in den Gliedern der Zahlenreihe objectiv darzustellen. Da nun aber das Appercipiren den iterirbaren Bethätigungsweisen des beziehenden Denkens zur Seite tritt, so wird Anlass sein, die früher gewonnenen Ergebnisse diesem Gesichtspunkte zu unterstellen. Es ist dann zu beachten, dass die begrifflich zusammengehörigen Objecte, die beim Eingreifen des beziehenden Denkens von einander verschieden sein müssen, nun als einander gleich vorauszusetzen sind, wenn ihr Erfassen im bloßen Appercipiren bestehen soll.

Wenn man will, kann man auch die Beziehungen zwischen den Gliedern der Zahlenreihe als Beispiele iterirbarer Beziehungen auf-

fassen. Sie haben zwar im subjectiven, reihenförmigen Erfassen ihre Quelle; sie erhalten aber dadurch, dass die Zahlen selbständige Denkobjecte werden, die Bedeutung objectiver Beziehungen. So kann man z. B. $\alpha 1 = 2$; $\alpha 2 = 3$; $\alpha 3 = 4$ u. s. w. als eine Kette von Denkacten interpretiren, für welche α den Fortgang von einer Zahl zu der nächsthöheren bezeichnet, so dass aus einer gegebenen Zahl als dem Grunde die unmittelbar sich anschließende als die Folge sich ergibt. Jede ähnliche Beziehung, die auf einem Fortschreiten innerhalb der Zahlenreihe beruht, ist in gleicher Weise unbegrenzt iterirbar. Ihnen treten die auf einem Rückwärtsschreiten beruhenden Zahlenbeziehungen gegenüber, die durch die indirecten Zahlenoperationen vermittelt werden und beschränkt iterirbar sind; denn sie stellen Aufhebungen der durch die directen Operationen erzeugten Beziehungen dar; und aufhebbar sind natürlich die Beziehungen nur insoweit, als sie zuvor thatsächlich hergestellt wurden oder als hergestellt vorausgesetzt werden können.

§ 9.

In den iterirbaren Beziehungen eröffnet sich ein neues Untersuchungsgebiet, das nun betreten werden soll.

Da das beziehende Denken selbst, unter der Voraussetzung der Iterirbarkeit, zu untersuchen ist, so kommt es jetzt nicht darauf an, ob dieses oder jenes Object eine iterirbare Bethätigung des Denkens gestattet; und die hierfür angegebenen Bedingungen kommen nur dann in Betracht, wenn es sich um die Abgrenzung des Bereichs, in welchem iterirbare Beziehungen auftreten, handelt. Wesentlich ist lediglich die Thatsache, dass es, der aufgestellten Definition entsprechend, iterirbare Denkhätigkeiten gibt. Denn nun ist die Untersuchung dieser besonderen Form des beziehenden Denkens nicht gegenstandslos und es dürfen Objecte als Träger iterirbarer Beziehungen vorausgesetzt werden.

Hierbei ist von der Darstellung des Denkactes durch $\alpha\alpha = \alpha_1$ auszugehen, wo α eine wohl definirte Bethätigungsweise des Denkens von bestimmter Art bezeichnet, während α und α_1 nicht in ihrer individuellen, dem Denken Ziel und Schranken setzenden Besonderheit, sondern bloß als Träger der durch α erzeugten Beziehung zur

Geltung kommen. Diese Darstellungsweise ergab sich als der zutreffende Ausdruck für den einzelnen Act des beziehenden Denkens. Soll nun aber die Gleichung $\alpha\alpha = \alpha_1$ in der That einen Denkact darstellen, so muss sie alle Forderungen oder Axiome erfüllen, die sich daraus ergeben, dass durch α eine Denkhätigkeit, durch α und α_1 je ein bestimmtes Denkobject bezeichnet werden soll.

Aus der Charakterisirung des Denkactes (§ 3) geht hervor, dass sowohl das Object α als auch das Object α_1 wirklich vorhanden sein, und dass die Denkhätigkeit α thatsächlich eintreten muss, soll überhaupt ein Denkact vorliegen. Ist kein Object gegeben, so kann das Denken keine Folge entwickeln; und wenn das Denken sich nicht bethätigt, so kann kein Erfolg des Denkens eintreten; bethätigt sich aber das Denken an einem gegebenen Objecte, so muss auch nach Vollzug des Denkactes ein Object vorhanden sein. Bezeichnet man nun — was keinem Bedenken unterliegt — ein nicht vorhandenes Object als Object 0 und eine nicht eintretende Denkhätigkeit als Denkhätigkeit 0, so gelten für $\alpha\alpha = \alpha_1$, sofern hierdurch ein Denkact dargestellt werden soll, folgende Axiome:

Ist $\alpha = 0$ oder $\alpha = 0$, so ist auch $\alpha_1 = 0$.

Ist weder $\alpha = 0$ noch $\alpha = 0$, so ist auch nicht $\alpha_1 = 0$.

Ist $\alpha_1 = 0$, so ist entweder $\alpha = 0$ oder $\alpha = 0$.

Sie bedingen die Existenz eines Denkactes.

Sind diese Axiome erfüllt, bezeichnet also $\alpha\alpha = \alpha_1$ einen thatsächlich vorliegenden Denkact, so wechselt je nach der vorausgesetzten Art der Denkhätigkeit α die Bedeutung ihrer Träger α und α_1 ; sie kann reicher oder ärmer werden.

Ist der Denkact ein bloßer Apperceptionsact, so ist α_1 mit α identisch und α , nach der früheren Bestimmung, durch α_0 zu ersetzen. Der Bewusstseinsinhalt α ist dann der Träger des Apperceptionsactes, durch den jener ohne Rücksicht auf seine Beschaffenheit und seine Beziehung zu anderen Bewusstseinsinhalten als ein Object, als eine Einheit, erfasst wird. Ich definire demgemäß: Der Träger des Apperceptionsactes ist die beziehungslose oder absolute Einheit. Soll diese Bedeutung des zu Grunde liegenden α besonders hervorgehoben werden, so bezeichne ich es durch α_0 .

Jeder Denkact schließt den Apperceptionsact ein. Daher hat

jedes Denkobject die Bedeutung, eine Einheit zu sein: es ist eine solche, sofern es der Träger des Apperceptionsactes ist; es ist die absolute Einheit α_0 , sofern es nichts weiter ist. Da nun die Glieder der Zahlenreihe die Träger von Apperceptionsacten sind, so ist jede Zahl 1, 2, 3, . . . , als Glied dieser Reihe, eine Einheit. Die Zahlen sind aber überdies die Träger der Merkmale der Reihenform; somit ist das Anfangsglied 1 so wenig wie 2 oder 3 die absolute Einheit. Es bestehen ferner die Intervalle der Zahlenreihe oder die Anzahlen aus Einheiten; aber auch die Anzahl 1 ist nicht »die Einheit«, sondern »die aus nur einer Einheit bestehende Anzahl«. Das Zeichen 1 ist demnach in keiner der beiden Bedeutungen mit dem Zeichen α_0 für die absolute Einheit identisch.

Besteht aber die Denkhätigkeit α nicht bloß im Apperceptionen, so sind auch die Denkobjecte α und α_1 nicht bloß Einheiten, sondern überdies die Träger der erzeugten Beziehung. Als solche sind sie nothwendig von einander verschieden; denn jeder Act des beziehenden Denkens erzeugt aus einem gegebenen Grunde eine davon verschiedene Folge. Es gibt daher außer dem Apperceptionsact keinen Denkact, für welchen α gleich α_1 sei. Daraus folgt für $\alpha\alpha = \alpha_1$ als Darstellung eines Denkactes das Axiom:

$$\text{Ist } \alpha = \alpha_1, \text{ so ist entweder } \alpha = \alpha_0 \text{ oder } \alpha = 0 \\ (\text{da stets } \alpha 0 = 0).$$

Es bedingt die Unterscheidung zwischen dem Apperceptionsact und dem Act des beziehenden Denkens.

Ist nun α nicht gleich α_1 , liegt also ein Fortschreiten vom Grunde zur Folge vor, so ist α_1 durch α und α völlig bestimmt. Denn die Eindeutigkeit des Denkens gestattet es nicht, aus einem gegebenen Grunde durch eine bestimmte Thätigkeit des Denkens verschiedene Folgen zu entwickeln. Ebenso wenig ist es denkbar, dass aus verschiedenen Gründen durch eine und dieselbe Bethätigung des Denkens die nämliche Folge entwickelt werde, oder dass verschiedene Denkhätigkeiten den nämlichen Grund und die nämliche Folge zu Trägern haben. Dementsprechend bestehen für $\alpha\alpha = \alpha_1$ und $\beta\beta = \beta_1$ als den Darstellungen zweier Denkacte die Axiome:

Ist $\alpha = \beta$ und $\alpha = \beta$, so ist zugleich $\alpha_1 = \beta_1$.

Ist $\alpha = \beta$ und $\alpha_1 = \beta_1$, so ist zugleich $\alpha = \beta$, wofern nicht $\alpha = \beta = 0$ und $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.

Ist $\alpha = \beta$ und $\alpha_1 = \beta_1$, so ist zugleich $\alpha = \beta$, wofern nicht $\alpha = \beta = 0$ und $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.

Sie dienen dazu, zwischen Identität und Verschiedenheit zweier Denkacte zu entscheiden.

Ist jedoch nur $\alpha = \beta$, oder nur $\alpha_1 = \beta_1$, oder schließlich nur $\alpha = \beta$, so folgt hieraus keineswegs die Identität von $\alpha\alpha = \alpha_1$ und $\beta\beta = \beta_1$. Es gibt nämlich einerseits verschiedene Denkhätigkeiten: sie können von dem nämlichen Grund zu verschiedenen Folgen führen, oder die nämliche Folge aus verschiedenen Gründen entwickeln. Ist andererseits $\alpha = \beta$, so sind zwar die Objecte α und α_1 und die Objecte β und β_1 die Träger einer und derselben Beziehung; das eine Paar kann sich aber trotzdem vom anderen unterscheiden, indem es außerdem als Träger anderer Beziehungen, die mit der durch α erzeugten verträglich sind, in Betracht kommt: die Voraussetzung, dass $\alpha = \beta$, schließt daher nicht ein, dass nun auch $\alpha = \beta$ und $\alpha_1 = \beta_1$. Es kann somit neben $\alpha\alpha = \alpha_1$ auch $\beta\alpha = \beta_1$ oder $\beta\beta = \alpha_1$ oder $\alpha\beta = \beta_1$ auftreten.

Verschiedene Denkacte können, wie in § 4 gezeigt wurde, dann, und nur dann, zusammengesetzt werden, wenn sie eine Kette bilden. Sind also $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ die Symbole von Denkhätigkeiten, so haben ihre Combinationen im allgemeinen keinen Sinn. Jede Combination erfordert die Erfüllung bestimmter Bedingungen.

Diese Bedingungen sind aus folgenden Beispielen zu ersehen. Wird α und β durch $\alpha\alpha = \alpha_1$ und $\beta\beta = \beta_1$ defnirt, so besteht die Combination $\beta\alpha$, wenn $\alpha_1 = \beta_1$, so dass $\beta\alpha\alpha = \beta_1$; es besteht die Combination $\alpha\beta$, wenn $\alpha = \beta_1$, so dass $\alpha\beta\beta = \alpha_1$. Es besteht alsdann entweder die eine oder die andere Combination. — Sollen neben α und β die beiden Combinationen $\alpha\beta$ und $\beta\alpha$ zugleich auftreten, so müssen zwei Ketten vorhanden sein. Ist demgemäß einerseits $\alpha\alpha = \alpha_1$; $\beta\alpha_1 = \alpha_2$, anderentheils $\beta\beta = \beta_1$; $\alpha\beta_1 = \beta_2$, so ist auch einestheils $\beta\alpha\alpha = \alpha_2$, anderentheils $\alpha\beta\beta = \beta_2$. Es existirt sonach $\alpha\beta$ neben $\beta\alpha$; es ist aber $\alpha\beta$ im allgemeinen nicht gleich $\beta\alpha$. —

Sollen überdies die beiden neben einander bestehenden Combinationen $\alpha\beta$ und $\beta\alpha$ äquivalent sein, so müssen die beiden Ketten sowohl durch einen gemeinsamen Grund als auch durch eine gemeinsame Folge zusammenhängen. Ist nunmehr $\alpha\alpha = \alpha_1$; $\beta\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta\alpha = \beta_1$; $\alpha\beta_1 = \alpha_2$, so ist in der That $\beta\alpha\alpha = \alpha_2$ und $\alpha\beta\alpha = \alpha_2$, so dass $\beta\alpha = \alpha\beta$. — In entsprechender Weise hängt die Combination $\alpha_2\alpha_1\alpha$ der drei Symbole α , α_1 , α_2 von dem Bestehen der Gleichungen $\alpha\alpha = \alpha_1$; $\alpha_1\alpha_1 = \alpha_2$; $\alpha_2\alpha_2 = \alpha_3$ ab. Ihre Zusammensetzung führt entweder zuerst zu $\alpha_1\alpha\alpha = \alpha_2$; $\alpha_2\alpha_2 = \alpha_3$ und dann zu $\alpha_2(\alpha_1\alpha)\alpha = \alpha_3$ oder zuerst zu $\alpha\alpha = \alpha_1$; $\alpha_2\alpha_1\alpha_1 = \alpha_3$ und dann zu $(\alpha_2\alpha_1)\alpha\alpha = \alpha_3$. Da somit $\alpha_2(\alpha_1\alpha) = (\alpha_2\alpha_1)\alpha$, so ist die Combination $\alpha_2\alpha_1\alpha$ als associativ zu bezeichnen. Eine andere, aus dieser durch Vertauschung der Symbole α , α_1 , α_2 hervorgehende Combination z. B. $\alpha\alpha_2\alpha_1$ ist aber nur möglich, wenn sie durch eine neue Kette $\alpha_1\beta = \beta_1$; $\alpha_2\beta_1 = \beta_2$; $\alpha\beta_2 = \beta_3$ und deren Zusammensetzung zu $\alpha\alpha_2\alpha_1\beta = \beta_3$ begründet wird. Die Combination $\alpha_2\alpha_1\alpha$ ist daher nicht ohne weiteres commutativ. Dies hat allgemeine Geltung. Existirt also eine Combination der Symbole von Denkhätigkeiten, so ist sie stets associativ, aber nur auf Grund neu hinzutretender Bedingungen commutativ.

Jeder Act des beziehenden Denkens schließt den Apperceptionsact ein. Es kann daher jedes α stets mit α_0 combinirt werden und es ist $\alpha_0\alpha = \alpha\alpha_0 = \alpha$.

Die Denkhätigkeit α ist iterirbar, wenn $\alpha\alpha = \alpha_1$ und $\alpha\alpha_1 = \alpha_2$ zugleich auftreten. Dann dienen α_1 und α_2 ebenso wie α und α_1 als Träger von α . Das Wesen der iterirbaren Denkhätigkeit besteht sonach darin, dass der Träger ihrer Folge zugleich der Träger des Grundes für ihre Wiederholung ist und so diese Wiederholung unmittelbar veranlasst. Dem ersten Denkact schließt sich daher eine unbegrenzte Aufeinanderfolge von Iterirungen an, so dass eine von einem Anfangsglied aus ohne Ende fortsetzbare Reihe von Denkacten entsteht. Die iterirbare Denkhätigkeit setzt sich selbst mit anderen Worten keine Grenze und nur bei ihrer Anwendung zur Herstellung der objectiven Ordnung innerhalb der Sphäre eines Begriffs kann ihr durch die gerade obwaltenden, beschränkenden Bestimmungen ein Halt geboten werden. Es gilt demgemäß für α als Symbol einer iterirbaren Denkhätigkeit das Axiom:

Besteht $\alpha\alpha = \alpha_1$ und zugleich $\alpha\alpha_1 = \alpha_2$, so bestehen auch $\alpha\alpha_2 = \alpha_3$; $\alpha\alpha_3 = \alpha_4$; $\alpha\alpha_4 = \alpha_5$; ... in infinitum.

Ist insbesondere $\alpha = \alpha_0$, so ist $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots$. Der Reihe $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ tritt so eine Reihe gleicher Objecte gegenüber, von welchen jedes als Träger des Apperceptionsactes die absolute Einheit ist. Man kann nun zwar jedem beliebigen Denkact $\alpha\alpha = \alpha_1$ den Apperceptionsact $\alpha_0\alpha = \alpha$ zur Seite stellen und sagen, dass den von einander verschiedenen Objecten α und α_1 die einander gleichen Objecte α als absolute Einheiten entsprechen. Aber gerade deshalb, weil das Appercipiren eine iterirbare Denkhätigkeit ist, besteht eine nähere Verwandtschaft zwischen den Trägern einer iterirbaren Thätigkeit des beziehenden Denkens und den Trägern an einander gereihter Apperceptionsacte. Ich bezeichne darum, obschon jedes Denkobject — wie bereits erwähnt wurde — die Bedeutung einer Einheit besitzt, dennoch die Objecte $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ vorzugsweise als Einheiten und definire: Die Objecte $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ sind als Träger einer iterirbaren Beziehung relative d. h. auf einander bezogene Einheiten.

Unter den relativen Einheiten ist die erste α vor den übrigen dadurch ausgezeichnet, dass sie diesen insgesamt zu Grunde liegt. Jede andere wird erst durch die Ausführung der Denkhätigkeit α aus α abgeleitet. Es soll darum α die Grundeinheit heißen; ihr treten $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ als abgeleitete Einheiten gegenüber.

Die Grundeinheit unterscheidet sich von der absoluten Einheit dadurch, dass jene zu den abgeleiteten Einheiten in Beziehung steht, während diese beziehungslos ist. Es ist jedoch vielfach vortheilhaft und ohne Unklarheit durchführbar, die Grundeinheit ebenso wie die absolute Einheit durch α_0 zu markiren. Wird nun noch die Bestimmung getroffen, dass $\alpha^{(k)}$ eine Combination von k Symbolen α andeuten soll und insbesondere $\alpha^{(0)}$ für α_0 eintreten darf (wonach $\alpha^{(0)} = \alpha_0$; $\alpha^{(1)} = \alpha$; $\alpha^{(2)} = \alpha\alpha$ u. s. w. zu setzen ist), so lassen sich die Beziehungen zwischen den relativen Einheiten insgesamt durch:

$$\alpha^{(k)}\alpha_i = \alpha_{i+k}; \quad \left(\begin{array}{l} i = 0, 1, 2, \dots \\ k = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right)$$

in übersichtlicher Weise angeben.

Es gelten somit für die symbolischen Gleichungen von der Form $\alpha\alpha = \alpha_1$, falls sie bestimmte Denkkacte darstellen sollen, folgende axiomatische Sätze:

- 1) $\alpha 0 = 0$.
- 2) $0\alpha = 0$.
- 3) Ist $\alpha\alpha = 0$, so ist entweder $\alpha = 0$ oder $\alpha = 0$.
- 4) Ist $\alpha\alpha = \alpha$, so ist entweder $\alpha = \alpha_0$ oder $\alpha = 0$.
- 5) Besteht neben $\alpha\alpha = \alpha_1$ auch $\alpha\alpha = \beta_1$, so ist $\alpha_1 = \beta_1$.
- 6) Besteht neben $\alpha\alpha = \alpha_1$ auch $\alpha\beta = \alpha_1$, so ist entweder $\alpha = \beta$ oder $\alpha = 0$ und $\alpha_1 = 0$.
- 7) Besteht neben $\alpha\alpha = \alpha_1$ auch $\beta\alpha = \alpha_1$, so ist entweder $\alpha = \beta$ oder $\alpha = 0$ und $\alpha_1 = 0$.
- 8) Aus $\alpha\alpha = \alpha_1$; $\alpha_1\alpha_1 = \alpha_2$ folgt $\alpha_1\alpha\alpha = \alpha_2$ und aus $\alpha_1\alpha\alpha = \alpha_2$ folgt $\alpha\alpha = \alpha_1$; $\alpha_1\alpha_1 = \alpha_2$.
- 9) Mit jedem α kann α_0 combinirt werden. Es ist $\alpha_0\alpha = \alpha\alpha_0 = \alpha$.
- 10) Können α_2 , α_1 und α combinirt werden, so ist $\alpha_2(\alpha_1\alpha) = (\alpha_2\alpha_1)\alpha$.
- 11) Besteht $\alpha\alpha = \alpha_1$ und zugleich $\alpha\alpha_1 = \alpha_2$, so besteht auch, wenn $\alpha^{(0)}$ für α_0 und α_0 für α gesetzt wird, $\alpha^{(k)}\alpha_i = \alpha_{i+k}$; ($i, k = 0, 1, 2, 3 \dots$).

Man kann noch hinzufügen:

- 12) Da $[\alpha, \beta, \gamma \dots]$ bedeutet, dass sowohl α als auch β, γ u. s. w. im Bewusstsein vorhanden sind, so ist

$$[[\alpha, \beta, \gamma \dots] [\alpha', \beta', \gamma' \dots]] = [\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma' \dots]$$

und

$$\alpha[\alpha, \beta, \gamma \dots] = [\alpha\alpha, \alpha\beta, \alpha\gamma \dots],$$

wobei der Anordnung der $\alpha, \beta, \gamma, \dots \alpha', \beta', \gamma' \dots$ keine Bedeutung zukommt.

§ 10.

Unter $\alpha, \beta, \gamma \dots$ sollen nun im Folgenden stets iterirbare Be-
thätigungsweisen des beziehenden Denkens verstanden werden. Das
bloÙe Appercipiren wird durch α_0 , je nach Umständen aber im Inter-

esse der übersichtlichen Bezeichnungsweise auch durch $\alpha^{(0)}$, $\beta^{(0)}$, $\gamma^{(0)}$ angegeben. Bezüglich dieser Denkhätigkeiten wird vorerst nur vorausgesetzt, dass sie von einander verschieden seien, um zunächst die allgemeine Grundlage für ihre Untersuchung zu entwickeln. Zu diesem Zwecke werden ihre Erzeugnisse in allgemein gültiger Weise charakterisirt und es wird angegeben, inwiefern dieselben zum Gegenstande der Untersuchung gemacht werden können.

Eine iterirbare Denkhätigkeit hat nach Satz 11) eine unbegrenzte Reihe von Einheiten zu Trägern. Kann sie mit einer anderen combinirt werden, so kommt überdies jeder Combination eine solche Reihe zu. Die Gesamtheit der Einheiten bildet daher stets eine unbegrenzte Mannigfaltigkeit, die durch \mathcal{N} bezeichnet werden soll. Jedes irgendwie bestimmte Zusammensein von Einheiten gehört der Mannigfaltigkeit an und soll ein Element von \mathcal{N} heißen.

Ist nur α_0 vorhanden, so ist \mathcal{N} die unbegrenzte Reihe der absoluten Einheiten. Sie kann durch

$$\mathcal{N}(\alpha_0) = [\alpha_0, \alpha_0, \alpha_0 \dots]$$

angedeutet werden.— Wird dagegen α , d. h. eine Bethätigungsweise des beziehenden Denkens, vorausgesetzt, so kann nach Satz 9) mit α stets α_0 combinirt werden. Die Mannigfaltigkeit beschränkt sich daher nicht auf die unbegrenzte Reihe $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \dots$ der als Träger von α auftretenden Einheiten, sondern jede dieser Einheiten ist als Träger des Apperceptionsactes in unbegrenzter Auflage vorhanden zu denken, so dass \mathcal{N} in doppelter Hinsicht unbegrenzt ist. Es ist daher

$$\mathcal{N}(\alpha) = [\alpha, \alpha \dots; \alpha_1, \alpha_1 \dots; \dots]$$

zu setzen. Da es sich von selbst versteht, dass α_0 mit α sich combinirt, so ist \mathcal{N} durch α vollständig bestimmt. Es ist daher nicht nöthig, α_0 in die Bezeichnung von \mathcal{N} aufzunehmen.— In gleicher Weise entsteht durch β und das mit β sich combinirende α_0 die Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{N}(\beta) = [\beta, \beta \dots; \beta_1, \beta_1 \dots; \dots]$$

wenn $\beta, \beta_1, \beta_2 \dots$ die Träger von β sind. —

$\mathcal{N}(\alpha)$ hängt mit $\mathcal{N}(\beta)$ zusammen, wenn α gleich β ist. Ist nun α nur in dem Sinne gleich β , dass die Grundeinheit für α in

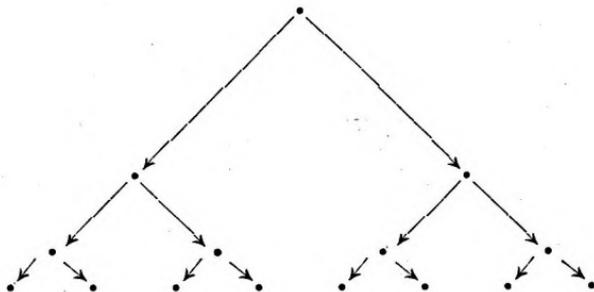
dem nämlichen Objecte ihre Verwirklichung findet wie die Grundeinheit für β , so ist es denkbar, dass α und β nicht combinirt werden können. Die Reihe $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ besteht dann thatsächlich unabhängig neben der Reihe $\beta, \beta_1, \beta_2 \dots$ und der Zusammenhang von $\mathcal{N}(\alpha)$ und $\mathcal{N}(\beta)$ ist nur ein äußerlicher. Setzt man aber voraus, dass es im Wesen des Grundes für α liegt, zugleich der Grund für β zu sein, so muss auch α_1 , das ebenso wie α die Ausführung von α begründet, als Träger von β gelten. Entsprechend ist β_1 zugleich als Träger von α anzusehen. Es existirt dann neben α und β sowohl $\alpha\beta$ als auch $\beta\alpha$ und somit jede aus α und β herstellbare Combination.

Nur für den Fall, dass neben α und β auch $\alpha\beta$ und $\beta\alpha$ existiren, soll die durch α_0, α und β erzeugbare Mannigfaltigkeit von Einheiten in

$$\mathcal{N}(\alpha, \beta)$$

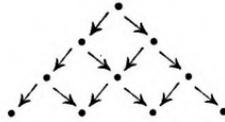
ihre Bezeichnung finden.

Die Combinationen von α und β sind commutativ oder nicht commutativ, je nachdem $\alpha\beta$ gleich $\beta\alpha$ oder von $\beta\alpha$ verschieden ist. Ist $\alpha\beta$ von $\beta\alpha$ verschieden, so lassen sich die Beziehungen zwischen den Einheiten mit Hülfe der früher (§ 4) gegebenen Darstellungsweise durch folgendes Schema veranschaulichen:



Hier mögen die nach links gerichteten Pfeile die durch α , die nach rechts gerichteten die durch β erzeugten Beziehungen andeuten. Wie man sieht, besitzt dieses Schema Aehnlichkeit mit einem Stammbaum, und diese Aehnlichkeit ist keine bloß äußerliche. Denn die Beziehung zwischen den auf einander folgenden Generationen ist in der That iterirbar und man kann auch zwei verschiedene Arten von Beziehungen zwischen Erzeugern und Erzeugten unterscheiden, wenn

man beispielsweise den legitimen Nachkommen die illegitimen gegenüber stellt, welch letztere durch Sitte und Gesetz in eine andere Beziehung zu ihren Erzeugern treten als die ersteren. — Ist dagegen $\alpha\beta = \beta\alpha$, so erhält man an Stelle des Stammbaums folgendes aus Parallelogrammen zusammengesetzte Schema:



In diesem Falle lassen sich indessen die Einheiten auch übersichtlich durch α_{00} ; α_{10} , α_{01} ; α_{20} , α_{11} , α_{02} ; ... und ihre Beziehungen durch

$$\alpha^{(k)}\beta^{(\lambda)}\alpha_{00} = \alpha_{\kappa\lambda} \quad (\kappa, \lambda = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

darstellen. Ein Beispiel solcher commutativen Beziehungen bieten die Tonempfindungen in ihrer Abstufung nach Qualität und Intensität, wenn etwa α den Uebergang zur eben merklich höheren, β den Uebergang zur eben merklich stärkeren Tonempfindung angibt. —

Ebenso bezeichnet

$$\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma)$$

die durch α_0 , α , β und γ bestimmte Mannigfaltigkeit nur dann, wenn α , β und γ combinirbar sind. Kann nämlich eine dieser Denkhätigkeiten mit den anderen nicht combinirt werden, so löst sich die aus ihr im Verein mit α_0 erzeugbare Mannigfaltigkeit von $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma)$ ab und \mathcal{M} zerfällt in zwei nur äußerlich zusammenhängende, selbständig neben einander bestehende Mannigfaltigkeiten, von welchen jede für sich zu untersuchen ist. Sind die Combinationen von α , β und γ nicht commutativ, so kann wiederum das obige Staumbaum-schemata zur Veranschaulichung der Beziehungen zwischen den Einheiten dienen, wenn nur die beiden, von jedem Gliede ausgehenden Zweige durch je drei Zweige ersetzt werden. Sind dagegen die Combinationen commutativ, so verschlingen sich die Zweige zu einem System über einander sich lagernder Vierecke. An Stelle derselben treten bei räumlicher Anordnung Parallelepipeda, die sich ähnlich den Parallelogrammen des obigen Schemas an einander reihen. Es lassen sich jedoch nun auch die Einheiten übersichtlich durch α_{000} ; α_{100} , α_{010} , α_{001} ; ... bezeichnen, so dass ihre Beziehungen durch

$$\alpha^{(\kappa)}\beta^{(\lambda)}\gamma^{(\mu)}\alpha_{000} = \alpha_{\kappa\lambda\mu} \quad (\kappa, \lambda, \mu = 0, 1, 2, \dots)$$

zusammengefasst werden können. —

Entsprechend ist von einer durch beliebig viele Denkhätigkeiten $\alpha_0, \alpha, \beta, \gamma \dots$ erzeugbaren Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma \dots)$$

nur dann die Rede, wenn jede Denkhätigkeit mit jeder combinirt werden kann. Es sind stets commutative und nicht commutative Combinationen zu unterscheiden, und die Beziehungen lassen sich in ähnlicher Weise wie für $\mathcal{M}(\alpha, \beta)$ und $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma)$ veranschaulichen oder darstellen.

§ 11.

Eine solche Mannigfaltigkeit besitzt eine einzige Grundeinheit α , aus welcher durch die Denkhätigkeiten $\alpha_0, \alpha, \beta, \gamma \dots$ und ihre Combinationen jede andere Einheit in beliebiger Auflage abgeleitet werden kann. Ein auf diese Weise als Erfolg des Denkens auftretendes System von Einheiten ist nach obiger Angabe ein Element der Mannigfaltigkeit. Es wird, wenn die gerade erzeugten Einheiten durch $\alpha', \alpha'' \dots$ bezeichnet werden, durch

$$\mathcal{A} = [\alpha' \dots \alpha'; \alpha'' \dots \alpha''; \dots]$$

dargestellt. Will man aber die Denkhätigkeiten hervorheben, durch welche $\alpha', \alpha'' \dots$ aus α folgen, so bietet sich das Element als ein Verein von Denkhätigkeiten dar, die sich insgesamt auf α beziehen. Werden die letzteren ohne Rücksicht darauf, ob sie die untersuchten Denkhätigkeiten selbst oder Combination derselben bedeuten, durch $\alpha', \alpha'' \dots$ angegeben, so dass $\alpha'\alpha = \alpha'; \alpha''\alpha = \alpha'' \dots$, so wird das Element durch

$$A = [\alpha' \dots \alpha'; \alpha'' \dots \alpha''; \dots] \text{ oder } A\alpha = [\alpha' \dots \alpha'; \alpha'' \dots \alpha''; \dots]\alpha$$

bezeichnet, je nachdem man die Grundeinheit ausdrücklich angeben will oder nicht. In entsprechender Weise wird ein anderes Element der nämlichen Mannigfaltigkeit durch

$$\mathcal{B} = [\beta' \dots \beta'; \beta'' \dots \beta''; \dots] \text{ resp. } B = [\beta' \dots \beta'; \beta'' \dots \beta''; \dots]$$

angegeben. Jedes Element kann somit einerseits als ein

System von Einheiten, andererseits als ein Verein von Denktätigkeiten aufgefasst werden. —

Da die Mannigfaltigkeit unbegrenzt ist, so sind von vorn herein herstellbare und nicht herstellbare, aber denkbare Elemente zu unterscheiden. Kann ein Element als abgeschlossenes Zusammensein von Einheiten erzeugt werden, so ist es natürlich herstellbar. Kann aber der Herstellungsprocess nicht abgeschlossen werden, so soll es dennoch als herstellbar gelten, falls nur eine erste Einheit gegeben vorliegt und jede folgende aus einer vorhergehenden in gesetzmäßiger Bestimmtheit entwickelt werden kann. In diesem Sinne ist vor allem die Mannigfaltigkeit selbst herstellbar, da aus der Grundeinheit die anderen Einheiten in gesetzmäßiger Weise abgeleitet werden können. Als nicht herstellbar, aber denkbar sollen dagegen diejenigen Elemente bezeichnet werden, für welche eine erste Einheit als Anfangsglied zu ihrer Erzeugung zwar denkbar, aber nicht angebbar ist, oder für welche der Erzeugungsprocess zwar denkbar, aber nicht ausführbar ist. So ist es z. B. denkbar, dass ein Element der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha)$ aus Einheiten bestehe, die in der Reihe $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \dots$ durch eine nicht bestimmbare oder unbegrenzt große Anzahl Zwischenglieder von α getrennt sind. Es ist ferner denkbar, dass ein Element von $\mathcal{N}(\alpha)$ als bestehend anerkannt werden muss, ohne dass ein Gesetz angegeben werden kann, durch welches seine Erzeugung möglich wird. In jedem Falle ist das Element nicht herstellbar. Indessen wird sich erst später (§ 18) die Berücksichtigung solcher Elemente als nothwendig erweisen. Man kann daher hier die Elemente als herstellbar voraussetzen. —

Die Herstellung eines Elementes beruht auf zwei verschiedenen Denkhaltungen: erstens auf der Ausführung der die Mannigfaltigkeit \mathcal{N} erzeugenden $\alpha_0, \alpha, \beta, \gamma \dots$ und ihrer Combinationen, zweitens auf dem Festhalten der als Einheiten bezeichneten Erfolge der einzelnen Denkacte, wodurch eben das Element als ein Zusammensein von Einheiten entsteht. Beide Denkhaltungen können immer wieder ausgeführt werden, weil $\alpha_0, \alpha, \beta, \gamma \dots$ iterirbare Denktätigkeiten sind und die von ihnen erzeugbare Mannigfaltigkeit unbegrenzt ist. Es können außer ihnen keine anderen ausgeführt werden, weil die Bedeutung der Einheiten sich darin erschöpft, Träger jener iterirbaren Denktätigkeiten zu sein.

Es kann daher auch an den Elementen das Denken sich nur in der Weise bethätigen, in welcher es die Elemente erzeugte: man kann erstens ein Element neben einem anderen festhalten, so dass beide zugleich im Bewusstsein vorhanden sind; man kann zweitens an den Einheiten der Elemente oder — wie der Kürze wegen gesagt werden soll — an den Elementen selbst die nämlichen Denkhätigkeiten $\alpha_0, \alpha, \beta, \gamma \dots$ ausführen, die zur Erzeugung der Elemente aus der Grundeinheit führten. Eine andere Bethätigungsweise des Denkens an den Elementen ist nicht möglich, da die Einheiten bloß die Träger von $\alpha_0, \alpha, \beta, \gamma \dots$ sind.—

Gehören nun die beiden Elemente

$$\mathcal{A} = [\alpha' \dots \alpha'; \alpha'' \dots \alpha''; \dots] \text{ und } \mathcal{B} = [\beta' \dots \beta'; \beta'' \dots \beta''; \dots]$$

der nämlichen Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha, \beta, \gamma \dots)$ an, so ist auch

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{C}$$

ein Element der Mannigfaltigkeit; denn nach Satz 12) ist

$$\mathcal{C} = [\alpha' \dots \alpha'; \alpha'' \dots \alpha''; \beta' \dots \beta'; \beta'' \dots \beta''; \dots].$$

\mathcal{C} ist aus \mathcal{A} und \mathcal{B} zusammengesetzt.

Der Process des Zusammensetzens ist stets ausführbar, da \mathcal{N} unbegrenzt ist. Seine Ausführung hindert aber nicht, die ursprünglichen Elemente neben dem aus ihnen zusammengesetzten Elemente als vorhanden zu denken. Es ist darum möglich, jedes zusammengesetzte Element in seine Componenten zu zerlegen. Da jedes Element aus Einheiten zusammengesetzt ist, so kann die Zerlegung immer wieder vorgenommen werden, bis man zu den Einheiten selbst gelangt. Man findet so in den Einheiten die einfachen Elemente und erkennt ihr charakteristisches Merkmal in der Unzerlegbarkeit, wodurch sie sich von den aus Einheiten zusammengesetzten Elementen unterscheiden.—

Wird ferner das Element \mathcal{A} als ein Verein von Denkhätigkeiten in der Form

$$A\alpha = [\alpha' \dots \alpha'; \alpha'' \dots \alpha''; \dots]\alpha$$

vorausgesetzt, so kann A statt in der Grundeinheit ebenso wohl in jeder abgeleiteten Einheit und somit in jedem, aus Einheiten bestehenden Elemente

$$\mathcal{B} = [\mathcal{B}' \dots \mathcal{B}'; \mathcal{B}'' \dots \mathcal{B}''; \dots]$$

seinen Grund finden. Es lässt sich daher der Process

$$A\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$$

ausführen, durch welchen \mathcal{B}_1 als Element der Mannigfaltigkeit gewonnen wird, denn nach Satz 12) ist:

$$\mathcal{B}_1 = [\alpha'\mathcal{B}' \dots \alpha'\mathcal{B}'; \alpha'\mathcal{B}'' \dots \alpha'\mathcal{B}''; \alpha''\mathcal{B}' \dots \alpha''\mathcal{B}'; \alpha''\mathcal{B}'' \dots \alpha''\mathcal{B}''; \dots]$$

In gleicher Weise ergibt sich aus

$$B\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$$

das Element

$$\mathcal{A}_1 = [\beta'\alpha' \dots \beta'\alpha'; \beta'\alpha'' \dots \beta'\alpha''; \beta''\alpha' \dots \beta''\alpha'; \beta''\alpha'' \dots \beta''\alpha''; \dots].$$

Dieser Process ist stets ausführbar, da die Denkhätigkeiten iterirbar sind, und die Mannigfaltigkeit unbegrenzt ist. Seine Ausführung hindert aber das Bestehen der erzeugenden Elemente nicht. Man kann ihn daher auch als wieder aufgehoben ansehen und so von \mathcal{A}_1 zu B und \mathcal{A} , von \mathcal{B}_1 zu A und \mathcal{B} zurückkehren. Die Aufhebung ist aber natürlich nur insoweit möglich, als die Ausführung vorhergehend oder als vorhergegangen angenommen werden kann.

In $A\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ und $B\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$ findet man die auf der Iterirbarkeit von α , β , $\gamma \dots$ beruhende Verallgemeinerung der einfachen Denkacte $\alpha\alpha = \alpha_1$; $\beta\beta = \beta_1$; $\gamma\gamma = \gamma_1$; \dots . Sie ist charakteristisch für die Mannigfaltigkeiten, in welchen das beziehende Denken seine Darstellung erhält. Denn man kann zwar auch innerhalb $\mathcal{N}(\alpha_0)$ den Process ausführen und etwa $A_0\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}'$ setzen, wo $A_0 = [\alpha_0 \dots \alpha_0]$ und $\mathcal{A}_0 = [\alpha_0 \dots \alpha_0]$. Da aber $\alpha_0\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0$, so ist auch $A_0\mathcal{A}_0 = [\mathcal{A}_0 \dots \mathcal{A}_0]$, so dass kein Hinausgehen über \mathcal{A}_0 , sondern nur ein wiederholtes Setzen von \mathcal{A}_0 stattfindet, und somit ein aus den \mathcal{A}_0 zusammengesetztes Element entsteht. Für $\mathcal{N}(\alpha_0)$ ist daher lediglich der Process des Zusammensetzens von Elementen wesentlich. In den Mannigfaltigkeiten $\mathcal{N}(\alpha)$; $\mathcal{N}(\alpha, \beta)$ u. s. w. vermittelt dagegen jedes A , das nicht aus den α_0 allein besteht, sondern Thätigkeiten des beziehenden Denkens enthält, eine objectiv Beziehung zwischen den Elementen, die den Beziehungen zwischen den Einheiten selbst zur Seite tritt.

Für diese Verallgemeinerungen der einfachen Denkacte gelten — wie sich von selbst versteht — die nämlichen axiomatischen Sätze

wie für die Darstellungen der Denkacte selbst. Dass ferner ein nicht bestehendes System von Einheiten und ein nicht bestehender Verein von Denkhätigkeiten ebenso wie eine einzelne Einheit oder Denkhätigkeit, deren Annahme nicht statthaft ist, durch das Zeichen 0 markirt werden kann, bedarf keiner besonderen Erwähnung.—

Es lässt sich mithin die allgemeine Grundlage für die Untersuchung der iterirbaren Denkhätigkeiten durch folgenden Satz bezeichnen:

Erhalten die iterirbaren Denkhätigkeiten $\alpha_0, \alpha, \beta, \gamma \dots$ in der Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{N}(\alpha, \beta, \gamma \dots)$$

ihre Darstellung, und sind \mathcal{A} resp. A , \mathcal{B} resp. B irgend welche Elemente von \mathcal{N} , so kann man stets die Prozesse

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{C}$$

$$A\mathcal{B} = \mathcal{B}_1; B\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$$

ausführen, durch welche $\mathcal{C}, \mathcal{B}_1, \mathcal{A}_1$ als Elemente von \mathcal{N} gewonnen werden. Andere Prozesse sind nicht ausführbar.

§ 12.

Jedes Element lässt sich durch eine Eigenschaft charakterisiren, die es ermöglicht, die Elemente einer Mannigfaltigkeit zu unterscheiden und den Erfolg, den die Ausführung der bezeichneten Prozesse mit sich führt, in jedem einzelnen Falle zu bestimmen.

Da ein Element ein Zusammensein von Objecten darstellt, so wird sich die gesuchte Eigenschaft finden lassen, wenn das Zusammensein durch das Denken erfasst wird. Dies kann nur in der Form einer Reihe geschehen. Es prägen sich daher den Objecten die Merkmale der Reihenform auf.

Handelt es sich insbesondere um das Element

$$\mathcal{A}_0 = [\alpha_0 \dots \alpha_0]$$

der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha_0)$, so treten außer jenen Merkmalen keine anderen auf, da zwischen den absoluten Einheiten α_0 keine objectiven Beziehungen bestehen. Die einzelnen α_0 werden dann durch die

Glieder der Zahlenreihe 1, 2 . . . m markirt, so dass ein α_0 das Glied 1, ein anderes das Glied 2 u. s. w. und ein letztes das Glied m in der Reihe der α_0 wird. Alle Glieder sind aber, objectiv betrachtet, ein und dasselbe α_0 ; denn nur auf Grund meines subjectiven Erfassens ist das eine α_0 das Glied 1 und ein anderes das Glied 2 oder m . Es kann daher, wenn die Verwendung der Zahlenreihe zu einem objectiv gültigen Merkmal führen soll, nur dies als wesentlich gelten, dass man der Zahlen 1 bis m bedarf, um \mathcal{A}_0 zu erfassen, ohne dabei die Zuordnung der Zahlen zu den einzelnen α_0 zu beachten. Man sagt dann, dass \mathcal{A}_0 aus m absoluten Einheiten besteht, und nennt m die Anzahl von \mathcal{A}_0 .

Jedem Elemente \mathcal{A}_0 von $\mathcal{N}(\alpha_0)$ gehört sonach ein Intervall $(1, m)$ der Zahlenreihe zu und die Anzahl m des Intervalls ist zugleich die Anzahl von \mathcal{A}_0 . Die in der früheren Untersuchung (IV; § 10 und 11) entwickelten Zählmethoden, die dort zur Bestimmung von Intervallen dienten, können daher unmittelbar bei der Feststellung der Anzahl von \mathcal{A}_0 Verwendung finden. Man kann diese Anzahl bestimmen: entweder durch directes Abzählen oder durch absatzweise erfolgendes Weiterzählen in der Zahlenreihe, d. h. durch Addiren, oder durch Abzählen von Intervallen der Zahlenreihe, d. h. durch Multipliciren, oder durch Abzählen der Uebergänge von einer Intervallenfolge zu der dieselbe umfassenden, d. h. durch Potenziren. u. s. w. Demgemäß kann die durch einfaches Abzählen gewonnene Anzahl m auch in der Form einer Summe oder eines Productes oder einer Potenz von Zahlen auftreten. Durch jede dieser Formen wird aber immer nur die Anzahl m eines gegebenen Elementes oder eines aus gegebenen Elementen zusammengesetzten Elementes von $\mathcal{N}(\alpha_0)$ bestimmt; wie denn auch die objective Grundlage für die Entwicklung der Zählmethoden lediglich in dem Vorhandensein von Intervallen und ihrer Zusammensetzung zu neuen Intervallen bestand.

Handelt es sich nun um das Erfassen des Elementes

$$\mathcal{A} = [\alpha' \dots \alpha'; \alpha'' \dots \alpha''; \dots]$$

der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha, \beta, \gamma \dots)$, deren Einheiten $\alpha', \alpha'' \dots$ durch $\alpha'\alpha = \alpha'; \alpha''\alpha = \alpha'' \dots$ definirt werden, so ordnen sich zwar auch jetzt die $\alpha', \alpha'' \dots$ insgesamt in eine Reihe und es prägen sich ihnen wiederum die Merkmale der Reihenform auf. Man erhält daher, wenn \mathcal{A} in

$$[\alpha' \dots \alpha']; [\alpha'' \dots \alpha'']; \dots$$

zerlegt und m' als Anzahl von $[\alpha' \dots \alpha']$, m'' als Anzahl von $[\alpha'' \dots \alpha'']$ ganz ebenso gefunden wird, wie m als Anzahl von $[\alpha_0 \dots \alpha_0]$ sich ergab, in der Anzahl

$$m' + m'' + \dots$$

eine objectiv gültige Eigenschaft von \mathcal{A} . Durch dieselbe wird aber \mathcal{A} nicht vollständig charakterisirt, weil es aus verschiedenen Objecten zusammengesetzt ist. Man muss daher neben den Merkmalen der Reihenform die Objecte selbst berücksichtigen und hervorheben, dass \mathcal{A} aus m' Objecten α' , m'' Objecten α'' u. s. w. besteht. Dies wird erreicht, wenn man

$$a = m'\alpha' + m''\alpha'' + \dots$$

setzt. Hier dient die Nebeneinanderstellung von m' und α' , um anzudeuten, dass die Anzahl m' durch Abzählen der Objecte α' gewonnen würde. Die α' , $\alpha'' \dots$ treten daher als bloße Indices zu den m' , $m'' \dots$ hinzu und es wird lediglich im Interesse der bequemeren Schreibweise davon abgesehen, dies durch Anheften der α an die m zu markiren. Ich definire nun a als die Anzahl von \mathcal{A} , so dass in der Anzahl die gesuchte Eigenschaft des Elementes sich darbietet; m' , $m'' \dots$ bezeichne ich als die Theilanzahlen von a .

Setzt man das Element als einen Verein von Denkhätigkeiten in der Form

$$A = [\alpha' \dots \alpha'; \alpha'' \dots \alpha''; \dots]$$

voraus, so findet man

$$a = m'\alpha' + m''\alpha'' + \dots$$

als Ausdruck dafür, dass $m' + m'' + \dots$ auf die Grundeinheit α bezogene Denkhätigkeiten vorhanden sind, unter welchen m' die Bedeutung von α' , m'' die Bedeutung von α'' u. s. w. haben. Man kann daher, der doppelten Auffassungsweise eines Elementes entsprechend, eine und dieselbe Anzahl a ebenso wohl als Anzahl von Einheiten wie als Anzahl von Denkhätigkeiten betrachten.

Durch die Anzahlen werden die Elemente völlig bestimmt; denn verschiedene Elemente haben verschiedene Anzahlen und gleiche Elemente haben gleiche Anzahlen.

Jedes Element

$$\mathcal{A} = [\alpha' \dots \alpha'; \alpha'' \dots \alpha''; \dots] \text{ oder } A = [\alpha' \dots \alpha'; \alpha'' \dots \alpha''; \dots]$$

wird somit durch die Anzahl

$$a = m'\alpha' + m''\alpha'' + \dots \text{ oder } m'\alpha' + m''\alpha'' + \dots$$

charakterisirt.

Wird ein Element vorausgesetzt, das sich als nicht bestehend erweist, so kann es auch keine Anzahl besitzen. Das Element 0 wird daher durch die Anzahl 0 charakterisirt. Gibt es ferner denkbare Elemente, die nicht herstellbar sind, so können auch ihre Anzahlen nicht hergestellt werden. Den denkbaren aber nicht herstellbaren Elementen entsprechen daher denkbare aber nicht herstellbare Anzahlen.

Durch das Zeichen 0 kann man überdies andeuten, dass eine Einheit bestimmter Art in einem Elemente nicht vertreten ist. Man sagt dann, dass 0 Einheiten der betreffenden Art vorhanden sind. Auf Grund dieser Convention lassen sich die Anzahlen einer Mannigfaltigkeit in einheitlicher Form darstellen.

Man erhält z. B. für die Anzahlen der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha)$

$$a = m_0\alpha_0 + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \dots$$

oder

$$a = m_0\alpha^{(0)} + m_1\alpha^{(1)} + m_2\alpha^{(2)} + \dots$$

Für $\mathcal{N}(\alpha, \beta)$ ferner mit commutativen Combinations von α und β sind die Anzahlen darstellbar durch

$$a = m_{00}\alpha_{00} + m_{10}\alpha_{10} + m_{01}\alpha_{01} + m_{20}\alpha_{20} + m_{11}\alpha_{11} + m_{02}\alpha_{02} \dots$$

oder

$$a = m_{00}\alpha^{(0)}\beta^{(0)} + m_{10}\alpha^{(1)}\beta^{(0)} + m_{01}\alpha^{(0)}\beta^{(1)} + m_{20}\alpha^{(2)}\beta^{(0)} + m_{11}\alpha^{(1)}\beta^{(1)} + m_{02}\alpha^{(0)}\beta^{(2)} + \dots$$

Es dürfen dementsprechend auch die Anzahlen a und b der Elemente \mathcal{A} und \mathcal{B} resp. A und B , die der allgemeinen Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha, \beta, \gamma \dots)$ angehören, in der gemeinsamen Form

$$a = m\alpha + m'\alpha' + m''\alpha'' + \dots \text{ oder } a = m\alpha_0 + m'\alpha' + m''\alpha'' + \dots$$

$$b = n\alpha + n'\alpha' + n''\alpha'' + \dots \text{ oder } b = n\alpha_0 + n'\alpha' + n''\alpha'' + \dots$$

vorausgesetzt werden.

Hier wird jede wirklich existirende, d. h. von 0 verschiedene Theilanzahl durch einen Zählprocess bestimmt, der an sich ebenso wohl nach der einen wie nach der anderen der früher (IV; § 10 u. 11) dargelegten Methoden vorgenommen werden kann. Die Wahl der Methode bedingt die Form, in der sich die Theilanzahlen darstellen. Es kommen aber nur ihre Werthe bei der Angabe von a oder b in Betracht. Man kann darum stets voraussetzen, dass die Theilanzahlen durch directes Abzählen gewonnen wurden. Sie werden dann unmittelbar durch Stellen der Zahlenreihe bezeichnet.

§ 13.

Mittelst der Anzahlen können die Resultate der Processe, die an den Elementen ausführbar sind, bestimmt werden wie folgt.

Es seien

$$a = m\alpha + m'\alpha' + m''\alpha'' + \dots$$

$$b = n\alpha + n'\alpha' + n''\alpha'' + \dots$$

die Anzahlen der Elemente \mathcal{A} und \mathcal{B} und es werde durch

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{C}$$

das Element \mathcal{C} gewonnen. Seine Anzahl soll c heißen. Man findet nun die Theilanzahlen von c aus m und n , m' und n' , m'' und n'' ... ganz ebenso wie die Anzahl eines aus zwei Intervallen zusammengesetzten Intervalls der Zahlenreihe, nämlich dadurch, dass man von den Zahlen m, m', m'' ... aus um n, n', n'' ... Stellen der Zahlenreihe weiterzählt und hierdurch die Summen $m + n$, $m' + n'$, $m'' + n''$... bildet. Es wird somit c aus den Anzahlen a und b durch Addition der zusammengehörigen Theilanzahlen gewonnen und man erhält

$$c = (m + n)\alpha + (m' + n')\alpha' + (m'' + n'')\alpha'' + \dots \quad (1)$$

Man sagt dann kurz, dass c durch Addition von a und b entsteht und setzt,

$$c = a + b. \text{ —}$$

Ist dagegen das Element \mathcal{C} und eines der beiden in ihm enthaltenen Elemente z. B. \mathcal{A} bekannt, so findet man das Element \mathcal{B} ,

indem man von den Zahlen $m + n$, $m' + n'$, $m'' + n'' \dots$ aus um m , m' , $m'' \dots$ Stellen der Zahlenreihe rückwärts zählt und hierdurch die Theilanzahlen von b als Differenzen der Theilanzahlen von c und der zugehörigen Theilanzahlen von a bestimmt. Man nennt alsdann b die Differenz von c und a und setzt

$$b = c - a. —$$

Ebenso kann, wenn \mathcal{C} und \mathcal{B} bekannt ist, \mathcal{A} durch die Anzahl a als die Differenz

$$a = c - b$$

gekennzeichnet werden. —

Erzeugt man ferner das Element \mathcal{B}_1 durch den Process

$$A\mathcal{B} = \mathcal{B}_1,$$

so erhält man seine Anzahl b_1 aus den Anzahlen a und b von A und \mathcal{B} , wenn man angibt, wie oft jede Einheit vorhanden ist, die durch Ausführung des Vereins von Denkhätigkeiten an dem System von Einheiten entsteht. Sind nun beispielsweise m Denkhätigkeiten a in A enthalten, die auf n Einheiten b von \mathcal{B} zu beziehen sind, so treten Einheiten ab auf, die sich in m Systeme von je n Gliedern gruppieren lassen, und man erhält ihre Anzahl, wenn den Systemen auf einander folgende Intervalle der Zahlenreihe zugewiesen und die Intervalle abgezählt werden. Dieser Zählprocess ist (nach IV; § 11) als gewöhnliches Multipliciren zu bezeichnen, da alle Intervalle die nämliche Gliederanzahl besitzen. Man findet daher in dem Producte $m \cdot n$ die Anzahl der Einheiten ab . Werden in dieser Weise alle Denkhätigkeiten von A an allen Einheiten von \mathcal{B} ausgeführt und die Anzahlen der so entstehenden Einheiten von \mathcal{B}_1 als die Producte der zugehörigen Theilanzahlen von a und b bestimmt, so erhält man, wenn

$$a = m\alpha_0 + m'\alpha' + m''\alpha'' + \dots$$

$$b = n\alpha + n'\alpha' + n''\alpha'' + \dots$$

die Anzahl b_1 in der Form

$$\begin{aligned} b_1 &= m \cdot n\alpha_0\alpha + m \cdot n'\alpha_0\alpha' + m \cdot n''\alpha_0\alpha'' + \dots \\ &+ m' \cdot n\alpha'\alpha + m' \cdot n'\alpha'\alpha' + m' \cdot n''\alpha'\alpha'' + \dots \\ &+ m'' \cdot n\alpha''\alpha + m'' \cdot n'\alpha''\alpha' + m'' \cdot n''\alpha''\alpha'' + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Ebenso wird das Element \mathcal{A}_1 , das durch den Process

$$B\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$$

erzeugt wird, auf Grund der Anzahlen

$$\begin{aligned} b &= n\alpha_0 + n'\alpha' + n''\alpha'' + \dots \\ a &= m\alpha + m'\alpha' + m''\alpha'' + \dots \end{aligned}$$

durch die Anzahl

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= n \cdot m \alpha_0 \alpha + n \cdot m' \alpha_0 \alpha' + n \cdot m'' \alpha_0 \alpha'' + \dots \\ &+ n' \cdot m \alpha' \alpha + n' \cdot m' \alpha' \alpha' + n' \cdot m'' \alpha' \alpha'' + \dots \\ &+ n'' \cdot m \alpha'' \alpha + n'' \cdot m' \alpha'' \alpha' + n'' \cdot m'' \alpha'' \alpha'' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

bestimmt. Man sagt dann kurz, dass b_1 und a_1 durch Multiplication von b und a entstehen, und setzt:

$$b_1 = a \cdot b \quad \text{und} \quad a_1 = b \cdot a.$$

Geht man bei der Ableitung der Anzahl b_1 nicht von den Einheiten selbst, sondern von den durch die Denkhätigkeiten des Vereins A aus \mathcal{B} erzeugten Elementen $\alpha_0\mathcal{B}$, $\alpha'\mathcal{B}$, $\alpha''\mathcal{B}$... aus, so führt die Abzählung zu der Form:

$$b_1 = m\alpha_0 \cdot b + m'\alpha' \cdot b + m''\alpha'' \cdot b + \dots \quad (2a)$$

Entsprechend erhält man die Anzahl a_1 in der Form

$$a_1 = n\alpha_0 \cdot a + n'\alpha' \cdot a + n''\alpha'' \cdot a + \dots \quad (3a)$$

Geht man andererseits von den durch A aus den einzelnen Einheiten von \mathcal{B} erzeugten Elementen $A\alpha$, $A\alpha'$, $A\alpha''$... aus, so erhält man die Formen

$$b_1 = a \cdot n\alpha + a \cdot n'\alpha' + a \cdot n''\alpha'' + \dots \quad (2b)$$

$$a_1 = b \cdot m\alpha + b \cdot m'\alpha' + b \cdot m''\alpha'' + \dots \quad (3b)$$

Die Darstellungsweise (2a) und (3a) gestattet keineswegs die Auffassung, dass hier α_0 , α' , α'' ... mit b oder a zu multipliciren seien, was völlig sinnlos wäre. Denn nur die Zahlen m , m' , m'' ... können mit den Theilanzahlen von b und nur die Zahlen n , n' , n'' ... können mit den Theilanzahlen von a multiplicirt werden. Die Beifügung der — wie schon erwähnt — in der Rolle bloßer Indices auftretenden Denkhätigkeiten α_0 , α' , α'' ... bestimmt aber, dass die Einheiten der Producte diejenigen sein sollen, die durch Ausführung

von $\alpha_0, \alpha', \alpha'' \dots$ an den Einheiten der Theilanzahlen von b oder a entstehen.

Ich bemerke darum ausdrücklich, dass allgemein

$$m\alpha \cdot n\alpha = m \cdot n \alpha_1 \quad (4)$$

zu setzen ist, wo α eine beliebige Denkhätigkeit und α sowie α_1 die Objecte des Denkactes $\alpha\alpha = \alpha_1$ angeben. In Worten ausgedrückt sagt diese Formel: m Denkhätigkeiten α , ausgeführt an n Denkobjecten α , ergeben $m \cdot n$ Denkobjecte α_1 . Es wird somit in der That bloß m mit n multiplicirt. Der Multiplicator m ist aber durch α ebenso wie der Multiplicand n durch α qualitativ bestimmt, so dass auch das Product $m \cdot n$ durch α_1 seiner Qualität nach bestimmt ist. Man wird so zu einer erweiterten Auffassung der Multiplication geführt, für welche als Zählprocess das Multipliciren bloß im gewöhnlichen Sinne d. h. als Abzählen von Intervallen mit gleicher Gliederanzahl in Betracht kommt, in welcher aber neben dem reinen Multipliciren noch die Ausführung eines Actes des beziehenden Denkens auftritt. Es ist alsdann der Multiplicator als Anzahl von Denkhätigkeiten und der Multiplicand als Anzahl von Denkobjecten zu interpretiren. Dem reinen 1 . 1 tritt somit das qualitative $1\alpha \cdot 1\alpha = 1\alpha_1$ zur Seite. Es hätte aber keinen Sinn, den Denkact $\alpha\alpha = \alpha_1$ als ein Product, dessen Multiplicator α und dessen Multiplicand α wäre, auffassen zu wollen. Denn der Denkact erzeugt nur die objective Grundlage, auf welcher die Ausführung der Multiplication hinsichtlich ihrer qualitativen Bestimmtheit beruht. —

Wird schließlich vorausgesetzt, dass ein Element \mathcal{B}_1 aus einem Elemente \mathcal{B} durch einen Verein von Denkhätigkeiten A erzeugt werden kann, so kann man, wenn \mathcal{B}_1 und \mathcal{B} bekannt sind, die Anzahl a von A und, wenn \mathcal{B}_1 und A bekannt sind, die Anzahl b von \mathcal{B} finden. Es sei z. B. \mathcal{B}_1 und \mathcal{B} gegeben. Um nun a zu bestimmen, überzeugt man sich zunächst, ob $\alpha_0\mathcal{B}$, d. i. \mathcal{B} selbst, einen Bestandtheil von \mathcal{B}_1 bildet, und gibt an, wie oft \mathcal{B} in \mathcal{B}_1 enthalten ist. Zu diesem Zwecke ist abzuzählen, wie oft die Anzahl b für \mathcal{B} subtrahirt werden kann von der Anzahl b_1 für \mathcal{B}_1 . Kann dies m -mal geschehen, ohne dass ein Rest bleibt, so ist $b_1 = m\alpha_0 \cdot b$ zu setzen und $m\alpha_0$ als Quotient von b_1 und b zu bezeichnen. Bleibt aber ein Rest b'_1 , der das Element \mathcal{B}'_1 charakterisirt, das von \mathcal{B}_1 nach Wegnahme der

m Elemente $\alpha_0 \mathcal{B}$ übrig bleibt, so ist festzustellen, ob $\alpha' \mathcal{B}$ einen Bestandtheil von \mathcal{B}'_1 bildet, und es ist abzuzählen, wie oft $1\alpha' \cdot b$ von b'_1 subtrahirt werden kann. Ist dies m' -mal möglich, ohne dass ein Rest bleibt, so ist $b'_1 = m'\alpha' \cdot b$ und $b_1 = m\alpha_0 \cdot b + m'\alpha' \cdot b = (m\alpha_0 + m'\alpha') \cdot b$ zu setzen; es ist dann $m\alpha_0 + m'\alpha'$ der Quotient von b_1 und b . Bleibt jedoch ein Rest, so ist in der bezeichneten Weise weiterzufahren. War die Voraussetzung, dass \mathcal{B}_1 aus \mathcal{B} durch einen Verein von Denkhätigkeiten erzeugt werden kann, zutreffend, so findet man zuletzt

$$a = m\alpha_0 + m'\alpha' + m''\alpha'' + \dots$$

als Quotienten von b_1 und b . Anderenfalls bleibt ein Rest, an dem der Divisionsprocess nicht mehr ausführbar ist, so dass $b_1 = a \cdot b + c$ sich ergibt. In entsprechender Weise erhält man, wenn \mathcal{B}_1 und A als bekannt angenommen werden, durch successives Bestimmen der Theilanzahlen $n\alpha$, $n'\alpha'$, $n''\alpha'' \dots$ die Anzahl

$$b = n\alpha + n'\alpha' + n''\alpha'' + \dots$$

als Quotienten von b_1 und a , vorausgesetzt, dass in der That $A\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ ist. Den einen und den anderen Quotienten schreibt man in der Form

$$a = b_1 : b \quad \text{und} \quad b = b_1 : a.$$

Sie unterscheiden sich aber dadurch, dass a den Verein von Denkhätigkeiten und b das System von Einheiten für den Process $A\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ bestimmt.

§ 14.

Die Anzahlen der Elemente, die durch Ausführen und Aufheben der Prozesse $\mathcal{C} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ und $A\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ sich ergeben, werden somit durch Addiren und Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren ermittelt.

Von diesen Operationen sind die directen, die Addition und die Multiplication, durchweg ausführbar, da der zu Grunde liegende Process stets zu Elementen der nämlichen Mannigfaltigkeit führt. Die indirecten Operationen der Subtraction und Division können dagegen nur dann ausgeführt werden, wenn sie in einer Umkehrung von

thatsächlich ausgeführten oder ausführbaren directen Operationen bestehen.

Deshalb haben nur die directen Operationen eine selbständige Bedeutung. Es gibt ferner keine anderen Grundoperationen für die Anzahlen, da es außer den beiden bezeichneten Processen für die Elemente keine weiteren gibt, und da die Anzahlen nicht unabhängig von den Elementen, sondern nur als die Repräsentanten derselben auftreten.

Die Untersuchung der Mannigfaltigkeiten, in welchen die iterirbaren Bethätigungsweisen des Denkens ihre Darstellung erhalten, beruht sonach auf den beiden Grundoperationen der Addition und Multiplication von Anzahlen, die wie folgt zu definiren sind.

Man addirt zu der Anzahl a die Anzahl b , oder man bildet die Summe $c = a + b$, indem man die zusammengehörigen Theilanzahlen von a und b wie die Intervalle der Zahlenreihe addirt und somit c nach Formel (1) herstellt.

Man multiplicirt die Anzahl a mit der Anzahl b , oder man bildet das Product $b_1 = a \cdot b$, indem man den Multiplikator a als Anzahl eines Vereins von Denkhätigkeiten, den Multiplicanden b als Anzahl eines Systems von Einheiten auffasst, sodann jede Theilanzahl von a mit jeder Theilanzahl von b wie beim Abzählen von Intervallen der Zahlenreihe mit gleicher Gliederanzahl multiplicirt und die Einheiten dieser Producte nach Formel (4) bestimmt. Man erhält dann b_1 wie in der Formel (2), die auch die Gestalt von (2a) oder (2b) annehmen kann.

Es ist bemerkenswerth, dass von den früher (IV; § 10 und 11) entwickelten Zählmethoden nur das Addiren und das Multipliciren im gewöhnlichen Sinne Verwendung finden. Die Multiplication der Anzahlen kann aber nicht wie das Multipliciren der reinen Zahlen, welche Glieder oder Intervalle der Zahlenreihe vorstellen, als ein bloß abgekürztes Additionsverfahren interpretirt werden. Denn für die Addition bildet das Zusammensetzen von Elementen, für die Multiplication dagegen die Ausführung eines Vereins von Denkhätigkeiten zu einem Systeme von Einheiten die objective Grundlage; und nur innerhalb der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha_0)$ lässt sich der letztere Process durch den ersteren ersetzen. Die Multiplication tritt

somit der Addition selbständig gegenüber. Hierin liegt die Erweiterung gegenüber den Zählmethoden im Gebiete der Zahlenreihe, woselbst das Addiren oder Weiterzählen die einzige Grundoperation ist und alle anderen Operationen als abkürzende Zählmethoden sich darstellen.

Die erwähnte objective Begründung der Anzahlenoperationen hat nun aber zur Folge, dass die allgemeinen Gesetze für die Herstellung von Summen und Producten von vorn herein bestimmt sind und nicht willkürlich angenommen werden dürfen.

Bezüglich der Summenbildung ist ohne weiteres klar, dass

$$a + b = b + a \quad \text{und} \quad (a + b) + c = a + (b + c), \quad (5)$$

wenn a, b, c drei beliebige Anzahlen sind. Denn die Addition der Anzahlen setzt sich, der gegebenen Definition gemäß, aus der Addition von Theilanzahlen

$$m\alpha + n\alpha = (m + n)\alpha$$

zusammen, und es ist, da für die Addition der reinen Zahlen m, n, p das Commutationsgesetz und Associationsgesetz gilt,

$$m\alpha + n\alpha = n\alpha + m\alpha \quad \text{und} \quad (m\alpha + n\alpha) + p\alpha = m\alpha + (n\alpha + p\alpha).$$

Es sind somit auch die Summen von Anzahlen commutativ und associativ.

Ebenso folgt aus der Definition der Addition und Multiplication unmittelbar, dass

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{und} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (6)$$

Es hat mithin das distributive Gesetz für die Multiplication Geltung.

Für die Multiplication gilt ferner das associative Gesetz allgemein. Denn nach Satz (10) ist jede Combination $\alpha\beta\gamma$ der Denkhätigkeiten α, β, γ associativ, und diese Eigenschaft überträgt sich unmittelbar auf die Combination $AB\Gamma$ der Vereine von Denkhätigkeiten A, B, Γ . Ist nun α die Grundeinheit und sind a, b, c die Anzahlen von A, B, Γ , so entspricht dem Prozesse $(AB)\Gamma\alpha$ das Product $(a \cdot b) \cdot c$ und dem Prozesse $A(B\Gamma)\alpha$ das Product $a \cdot (b \cdot c)$. Folglich ist in der That

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c). \quad (7)$$

Das Commutationsgesetz hingegen tritt für die Producte nur dann in Kraft, wenn die Combinationen der Denkhätigkeiten $\alpha, \beta, \gamma \dots$, durch welche die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha, \beta, \gamma \dots)$ erzeugt wird, commutativ sind. Denn nur unter dieser Bedingung ist, wenn A und B beliebige Elemente von \mathcal{N} mit der Grundeinheit α und a und b die zugehörigen Anzahlen sind,

$$AB\alpha = BA\alpha \text{ und somit } a \cdot b = b \cdot a. \quad (8)$$

Es sind daher nur die Producte der Anzahlen von Mannigfaltigkeiten mit nur einer Denkhätigkeit, d. i. von $\mathcal{N}(\alpha)$ und somit auch von $\mathcal{N}(\alpha_0)$ unbedingt commutativ.

Beachtet man, dass in den axiomatischen Sätzen von § 9 jede Denkhätigkeit und jeder Träger einer Denkhätigkeit durch beliebige Elemente der allgemeinen Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha, \beta, \gamma \dots)$ ersetzt werden darf, die ihrerseits durch die zugehörigen Anzahlen repräsentirt werden können, so ergeben sich noch folgende Bestimmungen für die Producte.

Da dem Elemente 0 die Anzahl 0 entspricht, so ist nach den Sätzen (1), (2) und (3)

$$a \cdot 0 = 0; \quad 0 \cdot a = 0 \quad (9)$$

und, wenn $a \cdot b = 0$, so ist entweder $a = 0$ oder $b = 0$. Ein Product wird daher nur dann gleich Null, wenn einer der Factoren gleich Null ist.

Da ferner jedem aus nur einer Einheit oder einer Denkhätigkeit bestehenden Elemente die Anzahl 1 zugehört, die durch Beifügung der Einheit oder der Denkhätigkeit qualitativ bestimmt wird, so hat das aus der Grundeinheit α oder dem appercipirenden Denken α_0 bestehende Element die Anzahl 1α oder $1\alpha_0$. Es ist daher nach Satz (9) zunächst $\alpha_0 A\alpha = A\alpha_0\alpha$ und sodann auch

$$1\alpha_0 \cdot a = a \cdot 1\alpha = a. \quad (10)$$

Es gibt somit für die Anzahlen jeder Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha, \beta, \gamma \dots)$ eine Anzahl $1\alpha_0$ oder 1α , die als Multiplicator oder als Multiplicand auftreten kann, ohne das Product zu verändern.

§ 15.

Nachdem die allgemeinen Grundlagen für die Untersuchung der iterirbaren Bethätigungsweisen des Denkens im Vorstehenden entwickelt worden sind, können besondere Formen iterirbarer Beziehungen vorausgesetzt und zum Gegenstande der Reflexion gemacht werden. Da dies von verschiedenen Gesichtspunkten aus geschehen kann, so bemerke ich, dass für das Folgende die Absicht maßgebend ist, die sogenannten allgemeinen Zahlen der Mathematik als Anzahlen von Mannigfaltigkeiten zu erweisen, denen bestimmte iterirbare Denktätigkeiten zu Grunde liegen.

Es wurde bereits (§ 8) erwähnt, dass der Gegensatz eine specielle Form der iterirbaren Beziehungen ist. Sein Wesen besteht darin, dass die beiden Träger desselben wechselweise in der nämlichen Beziehung stehen, und dass nur der eine oder der andere Träger, nicht aber ihr Zusammensein im Bewusstsein auftreten kann. Es ist daher, wenn ν das zum Gegensatz fortschreitende Denken bezeichnet,

$$\nu a = a_1; \nu a_1 = a; \text{ und } [a, a_1] = 0. \quad (11)$$

Die beiden Kriterien sind nicht von einander unabhängig. Denn aus $\nu a = a_1$ und $\nu a_1 = a$ folgt $\nu[a, a_1] = [a_1, a]$ und, da $[a, a_1]$ mit $[a_1, a]$ identisch ist, muss nach Satz (3) $[a, a_1] = 0$ sein. Ist andererseits $[a, a_1] = 0$, so wird hierdurch gesagt, dass a_1 ebenso wenig neben a , wie a neben a_1 bestehen kann. Die beiden Denkobjecte a und a_1 treten somit, unbeschadet ihrer sonstigen Bedeutung für das Denken, eben weil $[a, a_1] = 0$, in die wechselweise Beziehung des Gegensatzes, so dass auch $\nu a = a_1$ und $\nu a_1 = a$.

Da $\nu a = a_1$ und $\nu a_1 = a$, so ist $\nu \nu a = a$ und folglich $\nu \nu = a_0$. Für die unbegrenzte Kette von Denktacten $\nu a = a_1; \nu a_1 = a_2; \nu a_2 = a_3 \dots$ ist daher

$$a = a_2 = a_4 = \dots \text{ und } a_1 = a_3 = a_5 = \dots \quad (12)$$

Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}(\nu)$ enthält folglich nur die Elemente:

$$[a, a \dots; a_1, a_1 \dots]$$

mit den Anzahlen:

$$m a + m_1 a_1. \quad (13)$$

Da aber $[\alpha, \alpha_1] = 0$, so ist auch

$$1\alpha + 1\alpha_1 = 0 \quad \text{und} \quad m\alpha + m\alpha_1 = 0. \quad (14)$$

Die Elemente von $\mathcal{N}(\nu)$ lassen sich somit entweder durch Anzahlen $m\alpha$ oder durch Anzahlen $m_1\alpha_1$ oder durch die Anzahl 0 bezeichnen. Im letzteren Fall sollen sie Nullelemente heißen. Ihr Auftreten ist für die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\nu)$ charakteristisch. Sie haben zur Folge, dass es nur zwei Arten von thatsächlich existirenden Elementen gibt und demgemäß jeder Anzahl $m\alpha$ oder $m_1\alpha_1$ eine entsprechende der anderen Art, nämlich $m\alpha_1$ oder $m_1\alpha$ zur Seite steht.

Bezeichnet a irgend welche Anzahl, so ist auf Grund von (14)

$$a = a + m\alpha + m\alpha_1.$$

Dies hat zur Folge, dass nicht bloß die Addition, sondern auch die Subtraction unbedingt ausführbar ist, indem

$$\left. \begin{aligned} a - m\alpha &= a - m\alpha + m\alpha + m\alpha_1 = a + m\alpha_1 \\ a - m\alpha_1 &= a - m\alpha_1 + m\alpha + m\alpha_1 = a + m\alpha \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Die Subtraction einer Anzahl kann somit ersetzt werden durch die Addition der entsprechenden Anzahl der anderen Art.

Aus $\nu\alpha = \alpha_1$; $\nu\alpha_1 = \alpha$, wozu noch $\alpha_0\alpha = \alpha$; $\alpha_0\alpha_1 = \alpha_1$ tritt, folgen für die Multiplication der Anzahlen die Regeln:

$$\left. \begin{aligned} 1\alpha_0 \cdot 1\alpha &= 1\alpha; \quad 1\alpha_0 \cdot 1\alpha_1 = 1\alpha_1; \\ 1\nu \cdot 1\alpha &= 1\alpha_1; \quad 1\nu \cdot 1\alpha_1 = 1\alpha; \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

so dass

$$(m\alpha_0 + m_1\nu) \cdot (n\alpha + n_1\alpha_1) = (m \cdot n + m_1 \cdot n_1)\alpha + (m \cdot n_1 + m_1 \cdot n)\alpha_1.$$

Die Division kann nur als Umkehrung der Multiplication auftreten.

Die Operationsregeln (15) und (16) zeigen, dass die Anzahlen von $\mathcal{N}(\nu)$ die positiven und negativen Zahlen der Mathematik sind. Um die letzteren in der üblichen Form zu erhalten, ist bloß 1α resp. $1\alpha_0$ durch $+1$ und $1\alpha_1$ resp. 1ν durch -1 zu ersetzen. Es ist aber dann zu beachten, dass die Vorzeichen $+$ und $-$ zwei wesentlich verschiedene Bedeutungen haben, indem sie einerseits als Zeichen für die Addition und Subtraction, andererseits zur Bestimmung der Art der Anzahlen dienen.

Die positiven und negativen Zahlen beruhen somit auf dem zum Gegensatz fortschreitenden Denken, welches in der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\nu)$ seine Darstellung findet.

Da die Anzahlen von $\mathcal{N}(\nu)$ die unbedingte Ausführung der Subtraction gestatten, so kann man fragen, unter welcher Bedingung die allgemeine Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha, \beta, \gamma \dots)$ durch eben dieselbe Besonderheit ausgezeichnet ist. Als nothwendige Bedingung erkennt man unmittelbar das Vorhandensein eines Nullelementes von $\mathcal{N}(\alpha, \beta, \gamma \dots)$. Denn soll die Subtraction ausführbar sein, so muss dieselbe stets zu einer der Mannigfaltigkeit angehörenden Anzahl führen; es muss daher insbesondere $1\alpha - 1\alpha$ oder 0 die Anzahl eines Elementes von \mathcal{N} sein. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend, wenn man hinzufügt, dass das Element nicht aus nur einer Einheit bestehen darf, sondern zusammengesetzt sein soll. Sind nämlich \mathcal{A} und \mathcal{B} die Componenten des Nullelementes, so ist $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = 0$, so dass $\nu\mathcal{A} = \mathcal{B}$ und $\nu\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Die Einheiten von \mathcal{A} und \mathcal{B} sind somit die Träger des Gegensatzes. Da aber zufolge der Iterirbarkeit der in \mathcal{N} vorhandenen Beziehungen jede Einheit als Träger derjenigen Denkhätigkeit auftreten kann, die auf irgend eine Einheit von \mathcal{N} bezogen wird, so sind nicht nur die Einheiten von \mathcal{A} und \mathcal{B} , sondern alle Einheiten von \mathcal{N} Träger des Gegensatzes. Es ist alsdann

$$\mathcal{N}(\alpha, \beta, \gamma \dots) = \mathcal{N}(\nu, \alpha, \beta, \gamma \dots)$$

und es gibt zu jeder Einheit α' eine zu ihr im Gegensatz stehende α'_1 , so dass $[\alpha', \alpha'_1] = 0$ und $1\alpha' + 1\alpha'_1 = 0$. Die Subtraction ist daher in der That allgemein ausführbar.

Ist keine der Denkhätigkeiten $\alpha, \beta, \gamma \dots$, welche der Mannigfaltigkeit zu Grunde liegen, gleich ν , so muss ein Verein A derselben existiren, so dass $\nu = A$ und demgemäß $AA = \alpha_0$. Durch das Vorhandensein eines solchen Elementes A wird ebenso wie durch das Existiren eines Nullelementes die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Ausführbarkeit der Subtraction innerhalb $\mathcal{N}(\alpha, \beta, \gamma \dots)$ erfüllt.

Ist jedoch neben $\alpha, \beta, \gamma \dots$ auch ν vorhanden, so ist auch die Subtraction unbedingt ausführbar, wofern nur ν mit jeder der anderen Denkhätigkeiten combinirt werden kann. Diese Combinationen sind

commutativ, wenn die im Gegensatz zu den Trägern von $\alpha, \beta, \gamma \dots$ stehenden Einheiten gleichfalls die Träger von $\alpha, \beta, \gamma \dots$ sind. Denn setzt man beispielsweise $\alpha\alpha = \alpha'$; $\nu\alpha = \alpha_1$; $\nu\alpha' = \alpha'_1$ und ist nun auch $\alpha\alpha_1 = \alpha'_1$, so ist $\alpha\nu\alpha = \alpha'_1$ und $\nu\alpha\alpha = \alpha'_1$, also $\alpha\nu = \nu\alpha$.

§ 16.

Der directe Gegensatz ergab sich in § 8 als Specialisirung des vielgliedrigen Gegensatzes, den die Farbenqualitäten darbieten, wenn sie unter Zugrundelegen der Scala der ebenmerklichen Verschiedenheit geordnet werden. Neben der Beziehung des zweigliedrigen Gegensatzes sind demgemäß die Beziehungen des dreigliedrigen, des viergliedrigen und allgemein des n -gliedrigen Gegensatzes zu berücksichtigen, durch deren Iterirung geschlossene Systeme von Beziehungen erzeugt werden.

Wird das zu einem dreigliedrigen Gegensatz führende Denken durch ε bezeichnet, und setzt man $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon'$, so dass, da $\varepsilon\varepsilon\varepsilon = \alpha_0$, auch $\varepsilon'\varepsilon' = \alpha_0\varepsilon = \varepsilon$, so ist

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon\alpha &= \alpha_1; \quad \varepsilon\alpha_1 = \alpha_2; \quad \varepsilon\alpha_2 = \alpha; \\ \varepsilon'\alpha &= \alpha_2; \quad \varepsilon'\alpha_1 = \alpha; \quad \varepsilon'\alpha_2 = \alpha_1; \\ \varepsilon[\alpha, \alpha_1, \alpha_2] &= [\alpha, \alpha_1, \alpha_2] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\varepsilon)$ enthält daher nur drei verschiedene Einheiten, nämlich $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$, und ihre Elemente werden durch die Anzahlen

$$m\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 \quad (18)$$

bezeichnet. Da jedoch $[\alpha, \alpha_1, \alpha_2] = 0$, so ist

$$1\alpha + 1\alpha_1 + 1\alpha_2 = 0 \quad \text{und} \quad m\alpha + m\alpha_1 + m\alpha_2 = 0, \quad (19)$$

so dass sich jede Anzahl (18) auf eine der drei Formen

$$m\alpha + m_1\alpha_1; \quad m\alpha + m_2\alpha_2; \quad m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2$$

oder auf 0 reduciren lässt. —

Das Vorhandensein von Nullelementen ermöglicht die unbedingte Ausführung der Subtraction. Sie wird für eine beliebige Anzahl a auf Grund von (19) nach der Formel

$$\left. \begin{aligned} a - (m\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2) &= \\ a + (m_1 + m_2)\alpha + (m + m_2)\alpha_1 + (m + m_1)\alpha_2 & \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

vollzogen.—Für die Multiplication ergeben sich mit Rücksicht auf (17) die Regeln:

$$\left. \begin{aligned} 1\alpha_0 \cdot 1\alpha &= 1\alpha; & 1\alpha_0 \cdot 1\alpha_1 &= 1\alpha_1; & 1\alpha_0 \cdot 1\alpha_2 &= 1\alpha_2; \\ 1\varepsilon \cdot 1\alpha &= 1\alpha_1; & 1\varepsilon \cdot 1\alpha_1 &= 1\alpha_2; & 1\varepsilon \cdot 1\alpha_2 &= 1\alpha; \\ 1\varepsilon' \cdot 1\alpha &= 1\alpha_2; & 1\varepsilon' \cdot 1\alpha_1 &= 1\alpha; & 1\varepsilon' \cdot 1\alpha_2 &= 1\alpha_1. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Bezeichnet man nun jede der drei als Multiplicatoren oder als Multiplicanden auftretenden Anzahlen $1\alpha_0$ oder 1α ; 1ε oder $1\alpha_1$; $1\varepsilon'$ oder $1\alpha_2$ in gleicher Weise durch x , so folgt aus (21), dass jedesmal

$$x^3 = 1\alpha. \quad (21a)$$

Man erkennt somit in jenen drei Anzahlen die sogenannten dritten Einheitswurzeln, die durch $\sqrt[3]{1}$ dargestellt werden. Wie man sieht, haben dieselben eine ebenso reelle, logische Bedeutung, wie die positive und negative Einheitszahl. Sie finden in der Beziehung des dreigliedrigen Gegensatzes, der beispielsweise in drei geeignet gewählten Farbenqualitäten des Spectrums zu Tage tritt, ihre Stütze.

Wird ferner das Denken, sofern es in einem viergliedrigen Gegensatz fortschreitet, durch ι angedeutet, und wird $\iota\iota = \iota'$; $\iota\iota\iota = \iota''$ gesetzt, so ist

$$\left. \begin{aligned} \iota\alpha &= \alpha_1; & \iota\alpha_1 &= \alpha_2; & \iota\alpha_2 &= \alpha_3; & \iota\alpha_3 &= \alpha; \\ \iota'\alpha &= \alpha_2; & \iota'\alpha_1 &= \alpha_3; & \iota'\alpha_2 &= \alpha; & \iota'\alpha_3 &= \alpha_1; \\ \iota''\alpha &= \alpha_3; & \iota''\alpha_1 &= \alpha; & \iota''\alpha_2 &= \alpha_1; & \iota''\alpha_3 &= \alpha_2. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Da somit $\iota'\alpha = \alpha_2$; $\iota'\alpha_2 = \alpha$ und $\iota'\alpha_1 = \alpha_3$; $\iota'\alpha_3 = \alpha_1$, so ist $\iota' = \nu$ (folglich $\iota'' = \iota\nu = \nu\iota$), und es ist nicht nur

$$\iota[\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = 0,$$

sondern auch

$$[\alpha, \alpha_2] = 0 \quad \text{und} \quad [\alpha_1, \alpha_3] = 0. \quad (23)$$

Von den vier Einheiten, welche die Träger eines viergliedrigen Gegensatzes sind, stehen daher je zwei im directen Gegensatz.—

Die Nullelemente der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}(\iota)$ werden demzufolge durch

$$m\alpha + m\alpha_2 = 0 \quad \text{und} \quad m'\alpha_1 + m'\alpha_3 = 0 \quad (24)$$

bezeichnet, so dass für ein beliebiges Element die Anzahl

$$m\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3 \quad (25)$$

auf eine der vier Formen

$$m\alpha + m_1\alpha_1; \quad m\alpha + m_3\alpha_3; \quad m_2\alpha_2 + m_1\alpha_1; \quad m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3$$

oder auf 0 reducirt werden kann.

Ist a eine beliebige Anzahl und setzt man $b = m\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3$; $b' = m\alpha_2 + m_1\alpha_3 + m_2\alpha + m_3\alpha_1$, so folgt aus (24), dass $b + b' = 0$ und

$$a - b = a + b'. \quad (26)$$

Weiterhin ergeben sich im Hinblick auf (22) die Multiplicationsregeln

$$\left. \begin{array}{l} 1\alpha_0 \cdot 1\alpha = 1\alpha; \quad 1\alpha_0 \cdot 1\alpha_1 = 1\alpha_1; \quad 1\alpha_0 \cdot 1\alpha_2 = 1\alpha_2; \quad 1\alpha_0 \cdot 1\alpha_3 = 1\alpha_3; \\ 1\iota \cdot 1\alpha = 1\alpha_1; \quad 1\iota \cdot 1\alpha_1 = 1\alpha_2; \quad 1\iota \cdot 1\alpha_2 = 1\alpha_3; \quad 1\iota \cdot 1\alpha_3 = 1\alpha; \\ 1\nu \cdot 1\alpha = 1\alpha_2; \quad 1\nu \cdot 1\alpha_1 = 1\alpha_3; \quad 1\nu \cdot 1\alpha_2 = 1\alpha; \quad 1\nu \cdot 1\alpha_3 = 1\alpha_1; \\ 1\iota\nu \cdot 1\alpha = 1\alpha_3; \quad 1\iota\nu \cdot 1\alpha_1 = 1\alpha; \quad 1\iota\nu \cdot 1\alpha_2 = 1\alpha_1; \quad 1\iota\nu \cdot 1\alpha_3 = 1\alpha_2; \end{array} \right\}$$

Wird hier jede der vier Anzahlen $1\alpha_0$ oder 1α , 1ι oder $1\alpha_1$, 1ν oder $1\alpha_2$, $1\iota\nu$ oder $1\alpha_3$ durch x bezeichnet, so ist in jedem Falle

$$x^4 = 1\alpha, \quad (27a)$$

so dass sich die Anzahlen der vier Einheits Elemente als die vierten Einheitswurzeln darbieten. Man gelangt zu der üblichen Bezeichnungsweise, wenn man ohne Unterscheidung zwischen Multiplicator und Multiplicand für $1\alpha_0$ oder 1α und für 1ν oder $1\alpha_2$ wie oben $+1$ und -1 und sodann für 1ι oder $1\alpha_1$ und $1\iota\nu$ oder $1\alpha_3$ die Zeichen $+i$ und $-i$ setzt, wo $i = \sqrt{-1}$. Die in der Mathematik vorzugsweise als imaginär oder als rein imaginär bezeichnete Einheitszahl $\sqrt{-1}$ findet somit in der Beziehung des viergliedrigen Gegensatzes ihre reelle logische Begründung. —

In gleicher Weise beruhen die n -ten Einheitswurzeln, welche mathematisch durch die Gleichung

$$x^n = 1$$

definiert werden, auf der Beziehung des n -gliedrigen Gegensatzes. Gibt ε_n die in einem solchen Gegensatz fortschreitende Denkhätigkeit an, so werden die Beziehungen durch

$$\varepsilon_n^{(k)}\alpha_i = \alpha_{i+k} \quad (i, k = 0, 1, 2 \dots) \quad (28)$$

dargestellt, wenn $\alpha_{i+n} = \alpha_i$ und $\varepsilon_n^{(k+n)} = \varepsilon_n^{(k)}$ gesetzt wird. Es bestehen somit für die Anzahlen der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\varepsilon_n)$ die Multiplicationsregeln

$$1 \varepsilon_n^{(k)} \cdot 1 \alpha_i = 1 \alpha_{i+k}, \quad (29)$$

so dass, wenn x als Multiplicator die Anzahl $1 \varepsilon_n^{(k)}$ als Multiplicand die Anzahl $1 \alpha_k$ bezeichnet, in der That für $k = 0, 1, 2 \dots (n-1)$ die Gleichung

$$x^n = 1 \alpha_0 \quad (29a)$$

besteht. —

Die Nullelemente von $\mathcal{N}(\varepsilon_n)$ ergeben sich auf Grund der Bemerkung, dass allgemein

$$\varepsilon_n[\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}] = [\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}] = 0 \quad (30)$$

und dass insbesondere, wenn n keine Primzahl ist, sondern in das Product $p \cdot m$ zerlegt werden kann,

$$\varepsilon_n^{(m)}[\alpha_0, \alpha_m, \alpha_{2m} \dots \alpha_{(p-1)m}] = [\alpha_0, \alpha_m, \alpha_{2m} \dots \alpha_{(p-1)m}] = 0. \quad (30a)$$

Es ist daher für jedes Zahlenpaar p, m , dessen Product $p \cdot m = n$,

$$1 \alpha_0 + 1 \alpha_m + 1 \alpha_{2m} + \dots + 1 \alpha_{(p-1)m} = 0, \quad (31)$$

wodurch sämmtliche Nullelemente von $\mathcal{N}(\varepsilon_n)$ bestimmt werden.

Man kann noch bemerken, dass der Verein von Denkhätigkeiten

$$E = [\varepsilon_n^{(m)}, \varepsilon_n^{(2m)}, \varepsilon_n^{(3m)} \dots \varepsilon_n^{(p-1)m}]$$

stets durch die Combination EE zu $\alpha_0 = \varepsilon_n^{(0)}$ führt. Es ist folglich

$$\nu = E \quad (32)$$

zu setzen, wodurch die den Nullelementen gegenüberstehenden Vereine von Denkhätigkeiten, die gleich jenen die Ausführbarkeit der Subtraction verbürgen, angegeben werden. —

Werden die Anzahlen von $\mathcal{N}(\varepsilon_n)$ durch Punkte der Ebene veranschaulicht, so entsprechen den Anzahlen $1 \alpha_0, 1 \alpha_1 \dots 1 \alpha_{n-1}$ die n Eckpunkte eines regulären Polygons, dessen Umkreis die Längeneinheit zum Radius hat. Der Multiplicationsprocess (29) findet alsdann sein geometrisches Abbild in der Drehung eines Polygonpunktes um den Winkel $2\pi k : n$. Diese Versinnlichung für die Anzahlen der Einheiten und ihre Multiplicationen kann zugleich zur schematischen Andeutung der Beziehungen (28) dienen, wenn in Ueberein-

stimmung mit den früher gegebenen Schemata die Eckpunkte des Polygons durch Pfeile, welche den Fortschritt des Denkens darstellen, verbunden werden. Man erhält so das allgemeine Schema für die geschlossenen Systeme iterirter Beziehungen. Man wird aber nicht versucht sein, in diesem Schema die Begründung der Beziehungen selbst zu suchen.

§ 17.

Beispiele von offenen Systemen iterirbarer Beziehungen bieten die Vermehrungsprocesse der organischen Welt nicht minder wie die mechanischen Theilungsprocesse. Denn neu entstandene Organismen können unter der Voraussetzung, dass die Art erhalten bleibt, immer wiederum in der nämlichen Weise sich vermehren, und die Theile eines Körpers können stets wieder getheilt werden, wenn man keine letzten, untheilbaren Elemente annimmt.

Durch die einen und die anderen Processe tritt eine Vielheit von Objecten an die Stelle eines zu Grunde liegenden Einzelobjectes: ein lebendes Wesen pflanzt sich in seiner vielgliedrigen Nachkommenschaft fort; aus einem ausgesäten Samenkorn wächst eine Pflanze hervor, die eine Vielheit von Samenkörnern darbietet; durch die Theilung entsteht eine Anzahl von Bestandtheilen. Dabei sind die Glieder einer Generation, die Samenkörner einer Ernte, die Theile eines Körpers im allgemeinen von einander verschieden. Man kann sie aber als gleich betrachten, so dass durch jene Processe eine Vielheit gleicher Objecte erzeugt wird. Dies geschieht in der That, wenn man nur die Anzahl der Objecte angibt, die aus einem zu Grunde liegenden Objecte hervorgehen. Es kann ferner keineswegs die Vielheit dem Einzelobjecte, auf dem sie beruht, in jeder Hinsicht gleichgesetzt werden; sie ist ja nicht mit ihm identisch, sondern entsteht erst aus ihm durch den Vermehrungs- oder Theilungsprocess. Setzt man aber die Bedeutung des Einzelobjectes in die Möglichkeit, eine Mehrheit von Objecten zu erzeugen, so ist insofern diese Mehrheit gleichwerthig mit jener Einheit.

So kann z. B. der wirthschaftliche Werth des ausgesäten Weizenkorns nach der Anzahl der aus ihm geernteten Weizenkörner bemessen werden, so dass die Körner der Ernte zusammengenommen

dem Saatkorn gleichwerthig sind. Man kann andererseits bloß die Längenerstreckung eines theilbaren Körpers beachten, so dass die Gesamtheit der Bestandtheile, in die der Körper zerlegt wurde, diesem insoweit gleich ist, als nach wie vor die nämliche Längenausdehnung vorhanden ist. Es besitzt dann jeder Bestandtheil einen bestimmten Theil von der Länge des Körpers ganz ebenso, wie jedes geerntete Weizenkorn einen bestimmten Theil vom Werthe des Saatkorns repräsentirt.

Werden die genannten Prozesse in der angegebenen Weise aufgefasst, so tritt in ihnen eine besondere Form des beziehenden Denkens zu Tage. Sie kann, wenn die Denkhätigkeit durch τ bezeichnet wird, dadurch charakterisirt werden, dass man die Träger von τ in der unbegrenzten Kette von Denkacten

$$\tau a_0 = a_1; \tau a_1 = a_2; \tau a_2 = a_3; \dots \quad (33)$$

durch die Gleichungen

$$a_0 = [a_1 \dots a_1]; a_1 = [a_2 \dots a_2]; a_2 = [a_3 \dots a_3]; \dots \quad (34)$$

an einander bindet. Hierbei kann zwar für jedes System die Anzahl der Einheiten beliebig bestimmt werden, ohne dass der Charakter von τ sich ändert, wenn nur die Anzahlen in ihrer unbegrenzten Folge angebar sind. Es soll aber der Einfachheit wegen vorausgesetzt werden, dass jedes System aus t Einheiten bestehe. Dann bezeichnet τ das iterirbare Denken in seinem Fortschreiten von einer gegebenen Einheit zu einer daraus folgenden, die einem der gegebenen Einheit äquivalenten System von t einander gleichen Einheiten zugehört.

Da die Kette (33) sich nicht schließt, so enthält die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\tau)$ eine unbegrenzte Reihe verschiedener Einheiten, die auf Grund von (34) unmittelbar mit einander vergleichbar sind. Jede Einheit der Reihe $a_0, a_1, a_2 \dots$ ist demnach von höherer Ordnung als jede folgende und von niedrigerer Ordnung als jede vorhergehende.

Die Einheiten höherer Ordnung können durch Systeme von Einheiten niedrigerer Ordnung ersetzt werden. Ein und dasselbe Element kann darum in verschiedener Form sich darstellen. Es kann aber stets in eine Normalform gebracht werden, wenn jedes System von t Einheiten a_i durch die Einheit a_{i-1} ersetzt wird. Die

Anzahl eines Elementes in der Normalform wird daher allgemein durch

$$m_0 \alpha_0 + m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + m_3 \alpha_3 \dots \quad (35)$$

bezeichnet, wenn m_0 jeden beliebigen Werth der Zahlenreihe oder 0 bedeutet, $m_1, m_2, m_3 \dots$ dagegen nur Werthe der Reihe 0, 1, 2 $\dots (t-1)$ annehmen. Da aber aus den auf (34) beruhenden Relationen

$$1 \alpha_0 = t \alpha_1; \quad 1 \alpha_1 = t \alpha_2; \quad 1 \alpha_2 = t \alpha_3; \dots \quad (36)$$

unmittelbar folgt, dass $1 \alpha_k = (t-1) \alpha_{k+1} + t \alpha_{k+2} = (t-1) \alpha_{k+1} + (t-1) \alpha_{k+2} + t \alpha_{k+3}$ u. s. w., so ist auch

$$1 \alpha_k = (t-1) \alpha_{k+1} + (t-1) \alpha_{k+2} + (t-1) \alpha_{k+3} + \dots \text{ in inf. } \quad (37)$$

und es muss im Interesse der Eindeutigkeit der Darstellungsweise zu den angegebenen Bedingungen der Normalform noch hinzugefügt werden, dass in einer Anzahl mit einer unbegrenzten Reihe von Theilanzahlen nicht von einer bestimmten Stelle ab jede folgende gleich $t-1$ sein darf.

Diese Normalform ist bei den Operationen vorauszusetzen. Die Addition und Multiplication zweier Anzahlen

$$\left. \begin{aligned} a &= m_0 \alpha_0 + m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + \dots \text{ resp. } m_0 \tau^{(0)} + m_1 \tau^{(1)} + m_2 \tau^{(2)} \dots \\ b &= n_0 \alpha_0 + n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2 + \dots \text{ resp. } n_0 \tau^{(0)} + n_1 \tau^{(1)} + n_2 \tau^{(2)} \dots \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

erfolgt nach den Formeln

$$a + b = (m_0 + n_0) \alpha_0 + (m_1 + n_1) \alpha_1 + (m_2 + n_2) \alpha_2 \dots \quad (39)$$

$$a \cdot b = \left. \begin{aligned} &m_0 \cdot n_0 \alpha_0 + (m_0 \cdot n_1 + m_1 \cdot n_0) \alpha_1 + \\ &(m_0 \cdot n_2 + m_1 \cdot n_1 + m_2 \cdot n_0) \alpha_2 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

wo die Summe und das Product wieder in die Normalform zu bringen sind. —

Die Subtraction ist nicht unbedingt, sondern nur als Umkehrung der Addition ausführbar. Denn die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\tau)$ enthält kein Nullelement, da α_i durch t^k Einheiten α_{i+k} ($i, k = 0, 1, 2 \dots$) ersetzt werden und somit jede Einheit neben jeder anderen bestehen kann. —

Die Division ist dagegen unbedingt ausführbar. Sind nämlich zunächst zwei Theilanzahlen gegeben, so kann man sie gemäß (36) in

Theilanzahlen mit Einheiten gleicher Ordnung, $m_i \alpha_i$ und $n_i \alpha_i$, verwandeln und ihren Quotienten $m_i \alpha_i : n_i \alpha_i$ wie folgt berechnen. Man bestimme fürs erste die Anzahl $p_0 \tau^{(0)}$, in welcher p_0 angibt, wie oft n_i von m_i subtrahirt werden kann, und verwandle den Rest von $m_i \alpha_i$ in Einheiten α_{i+1} , deren Anzahl gleich m_{i+1} sei; sodann bestimme man $p_1 \tau^{(1)}$, wo p_1 angibt, wie oft n_i von m_{i+1} subtrahirt werden kann, und verwandle den Rest von $m_{i+1} \alpha_{i+1}$ in Einheiten α_{i+2} , um nunmehr $p_2 \tau^{(2)}$ zu bestimmen, u. s. f. Auf diese Weise findet man $p_0 \tau^{(0)} + p_1 \tau^{(1)} + p_2 \tau^{(2)} + \dots$ als Quotienten $m_i \alpha_i : n_i \alpha_i$. Sind aber zwei beliebige Zahlen a und b gegeben, so treten zu den Teilanzahlen $m_i \alpha_i$ und $n_i \alpha_i$ noch solche von niedrigerer Ordnung. Man bestimme nun, wie soeben angegeben wurde, $p_0 \tau^{(0)}$ wiederum für die Teilanzahlen $m_i \alpha_i$ und $n_i \alpha_i$, wobei jedoch Sorge zu tragen, dass $p_0 \tau^{(0)} \cdot b$ von a subtrahirt werden kann. Erhält man so $a' = a - p_0 \tau^{(0)} \cdot b$, so ist der Rest an Einheiten α_i in Einheiten α_{i+1} zu verwandeln, um sodann für die nunmehr vorhandenen Teilanzahlen $m_{i+1} \alpha_{i+1}$ von a' und $n_i \alpha_i$ von b die Anzahl $p_1 \tau^{(1)}$ zu bestimmen, so dass $p_1 \tau^{(1)} \cdot b$ von a' subtrahirt werden kann. Es resultirt alsdann $a'' = a' - p_1 \tau^{(1)} \cdot b$. Nach Verwandlung der restirenden Einheiten α_{i+1} in Einheiten α_{i+2} wird ferner $p_2 \tau^{(2)}$ bestimmt, so dass $p_2 \tau^{(2)} \cdot b$ von a'' subtrahirt werden kann, und in der bezeichneten Weise fortgefahren. Es ergibt sich so:

$$a : b = p_0 \tau^{(0)} + p_1 \tau^{(1)} + p_2 \tau^{(2)} + \dots \quad (41)$$

Da insbesondere die Einheitsanzahl $1 \alpha_0$ durch jede beliebige Anzahl dividirt werden, und somit zu jeder Anzahl b eine Anzahl c gefunden werden kann, so dass

$$1 \alpha_0 = b \cdot c, \quad (42)$$

so erhellt, dass die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\tau)$ unbegrenzt viele der Grundeinheit α_0 äquivalente Elemente mit den Zahlen $b \cdot c$ besitzt. Auf denselben beruht die unbedingte Ausführbarkeit der Division in analoger Weise wie auf den Nullelementen von $\mathcal{N}(\nu)$ die unbedingte Ausführbarkeit der Subtraction. Denn wie für die Zahlen von $\mathcal{N}(\nu)$ auf Grund des Nullelementes $b + c = 0$ an Stelle der Subtraction von b die Addition von c treten kann, so lässt sich auch

für die Anzahlen von $\mathcal{N}(\tau)$ auf Grund des der Grundeinheit äquivalenten Elementes $b \cdot c = 1\alpha_0$ die Division mit b durch die Multiplication mit c ersetzen. —

§ 18.

Vergleicht man nun zwei beliebige Anzahlen a und b in der Normalform (38), so ist entweder jede Theilanzahl von a gleich der zugehörigen von b , so dass auch $a = b$; oder es gibt Paare verschiedener Theilanzahlen. Ist das erste derartige Paar $m_k\alpha_k$ und $n_k\alpha_k$ und beispielsweise $m_k = n_k + p$, wo p mindestens gleich 1, so kann man $m_k\alpha_k$ durch $(m_{k-1})\alpha_k + 1\alpha_k$ und $1\alpha_k$ durch die unbegrenzte Reihe (37) ersetzen, so dass

$$m_k\alpha_k = (m_k - 1)\alpha_k + (t - 1)\alpha_{k+1} + (t - 1)\alpha_{k+2} + \dots \text{ in inf.}$$

Substituirt man diese Summe in a , so kann jede auf $n_k\alpha_k$ folgende Theilanzahl in b , den für die Normalform festgesetzten Bedingungen zufolge, von der entsprechenden Theilanzahl in a subtrahirt werden. Es kann somit die Anzahl b von der Anzahl a subtrahirt werden. Man sagt dann, dass b kleiner als a , oder a größer als b sei. Von zwei beliebigen Anzahlen a und b der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\tau)$ ist daher entweder die eine gleich der anderen oder es ist die eine größer resp. kleiner als die andere, so dass

$$\text{entweder } a = b, \text{ oder } a > b, \text{ oder } a < b.$$

Diese Eigenschaft ist für die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\tau)$ charakteristisch. Denn sie gilt nur dann, wenn die Subtraction als Umkehrung der Addition auftritt, weil nur dann eines der beiden Elemente das andere in sich enthält. Es ist daher z. B. von den beiden Anzahlen $2\alpha + 5\alpha_1$ und $3\alpha + 4\alpha_1$, wenn zwischen α und α_1 keine Relation von der Form (36) besteht, keine größer oder kleiner als die andere. Ebenso wenig kann man von den Anzahlen $m\alpha$ und $n\alpha_1$ der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\nu)$ die eine größer oder kleiner als die andere nennen, da keines der beiden zugehörigen Elemente das andere umschließt und die Subtraction nicht im eigentlichen Sinne, sondern nur als Addition der entsprechenden Anzahl der anderen Art aus-

föhrbar ist. Wenn trotzdem von der Anzahl $n\alpha_1$ oder $-n$ gesagt wird, dass sie kleiner als $m\alpha$ oder $+m$ sei, so ist dies eine Consequenz des formalen mathematischen Standpunktes, der die negativen Zahlen $-n$ als Differenzen $0 - n$ definirt und auf dieselben die Eigenschaften der thatsächlich durch Subtraction herstellbaren Zahlen überträgt.

Insbesondere ist, da von der Anzahl $1\alpha_i$ jede Anzahl $1\alpha_{i+k}$ subtrahirt werden kann,

$$1\alpha_0 > 1\alpha_1 > 1\alpha_2 > 1\alpha_3 \dots,$$

wodurch der Inhalt der Relationen (36) in anderer, und zwar weniger präciser Form ausgedrückt wird. Es kann aber überhaupt jede Reihe verschiedener Anzahlen der Größe nach geordnet werden, so dass für die Glieder der Reihe $a, b, c, d \dots$ die Beziehung

$$a > b > c > d \dots$$

gilt.

Dies hat zur Folge, dass für die Gesamtheit aller Anzahlen von $\mathcal{N}(x)$ eine Ordnung nach der Größe als denkbar erscheint. Diese Ordnung kann aber nicht hergestellt werden, da zwischen je zwei verschiedenen Anzahlen stets eine unerschöpfliche Fülle von Anzahlen sich einordnet. Sind nämlich zwei Anzahlen a und b verschieden, so ist auch ihre Differenz $a - b$ oder $b - a$ eine Anzahl c und es gibt unbegrenzt viele Anzahlen, die kleiner als c sind, da jede nicht verschwindende Theilanzahl $m_i\alpha_i$ von c durch die Summe

$$m_i \cdot (t - 1)\alpha_{i+1} + m_i \cdot (t - 1)\alpha_{i+2} + \dots \text{ in inf.}$$

ersetzt werden kann, die, wie man sieht, unbegrenzt viele kleinere Anzahlen enthält.

Man kann somit keine, der Größe nach der Anzahl a folgende oder vorangehende Anzahl angeben, ohne dass eine unbegrenzte Fülle dazwischen liegender Anzahlen angebbar wäre. Insbesondere ist keine kleinste Anzahl für die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(x)$ angebbar, da die Anzahl 0 kein Element von $\mathcal{N}(x)$ bezeichnet. Ebenso wenig gibt es eine größte Anzahl, was daraus folgt, dass die Anzahlen $m_0\alpha_0$ der Unbegrenztheit der Zahlenreihe zufolge kein Maximum besitzen.

Hierdurch wird man genöthigt, bei der Untersuchung der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\tau)$ die denkbaren, aber nicht herstellbaren Anzahlen zu berücksichtigen.

Da diese Anzahlen Elemente von $\mathcal{N}(\tau)$ charakterisiren sollen, so muss ihnen gleich den herstellbaren Anzahlen das Merkmal, größer oder kleiner als andere Anzahlen zu sein, zukommen. Ihre Größe kann nur nicht dadurch bestimmt werden, dass man ihre Theilanzahlen der Reihe nach angibt, weil darin die Herstellung der Anzahl besteht. Es ist indessen sehr wohl möglich, eine denkbare, aber nicht herstellbare Anzahl dadurch zu definiren, dass sie kleiner oder größer als jede herstellbare Anzahl sein soll. Denn es gibt ja weder eine kleinste noch eine größte angebbare Anzahl für $\mathcal{N}(\tau)$. Eine solche Anzahl kann ferner, eben weil sie eine Anzahl ist, den Operationen unterworfen gedacht werden, und sofern sie definirt, d. h. hinsichtlich ihrer Eigenschaften bestimmt wurde, können auch die Resultate der Operationen nach Maßgabe der Bestimmtheit, die sie durch jene Definition gewinnen, charakterisirt werden.

Es bezeichne nun a irgend eine in bestimmter Weise hergestellte Anzahl von $\mathcal{N}(\tau)$, während e als Collectivbezeichnung für jede überhaupt herstellbare Anzahl dienen soll. Es werde ferner zur Definition der Anzahlen e , und e' , die kleiner resp. größer als jede herstellbare Anzahl e sein sollen,

$$e, < e; \quad e' > e \quad (43)$$

gesetzt. Alsdann ist zugleich als unmittelbare Folge der Größenbeziehung zwischen e , e und e'

$$\left. \begin{aligned} a + e, < a + e; \quad e' + a > e + a; \\ a - e, > a - e; \quad e' - a > e - a; \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} a \cdot e, < a \cdot e; \quad a \cdot e' > a \cdot e; \\ a : e, > a : e; \quad a : e' < a : e; \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

wozu noch ausdrücklich bemerkt werden mag, dass selbstverständlich $a + e, = e, + a$; $a \cdot e, = e, \cdot a$; $a + e' = e' + a$; $a \cdot e' = e' \cdot a$; wie denn überhaupt für die bloß denkbaren Anzahlen die nämlichen allgemeinen Gesetzmäßigkeiten bezüglich der Summen- und Productbildung bestehen wie für die herstellbaren Anzahlen.

Aus (44) folgt, dass es keine von a verschiedene angebbare Anzahl gibt, welche die Größe von $a + e$, oder $a - e$, bezeichnen könnte. Es muss daher, wenn $a + e$, oder $a - e$, als Rechnungsergebnis auftritt, dessen Größe mitgetheilt werden soll,

$$a + e, = a - e, = a \text{ oder } e, = 0 \quad (46)$$

gesetzt werden. Andererseits ergibt sich aus (44), dass nicht nur e' , sondern auch $e' + a$ und $e' - a$ größer als jede angebbare Anzahl sind, so dass, wenn bloß diese Thatsache zum Ausdruck gebracht werden soll,

$$e' + a = e' - a = e' \quad (47)$$

zu setzen ist. Vorsichtshalber füge ich noch bei, dass die Ungleichung $a - e, > a - e$ nur für die Werthe $e < a$ und die Ungleichung $e' - a > e - a$ nur für die Werthe $e > a$ einen Sinn hat. Es kommen jedoch nur diese Werthe bei den ausgesprochenen Folgerungen in Betracht.

Während durch $a + e$ bloß Anzahlen größer als a , durch $a - e$ bloß Anzahlen kleiner als a darstellbar sind, werden durch $a . e$ und $a : e$ alle herstellbaren Anzahlen bezeichnet, wofern e jede herstellbare Anzahl repräsentirt. Man kann daher in (45) $a . e$ und $a : e$ durch das Symbol e ersetzen, so dass

$$\left. \begin{array}{l} a . e, < e; \quad a . e' > e; \\ a : e, > e; \quad a : e' < e; \end{array} \right\} \quad (48)$$

und somit die nämlichen Ungleichheitsbedingungen für $a . e$, und $a : e'$ resp. $a . e'$ und $a : e$, wie für e , resp. e' gelten. Zugleich mit der Anzahl e , resp. e' muss daher jede Anzahl $a . e$, und $a : e'$ resp. $a . e'$ und $a : e$, als eine mit den nämlichen Eigenschaften wie e , resp. e' behaftete denkbare Anzahl anerkannt werden.

Es wird demgemäß durch (43) nicht je eine individuelle Anzahl, sondern je eine Mannigfaltigkeit von Anzahlen definiert, so dass jeder Anzahl a eine Anzahl $a . e$, resp. $a . e'$ zur Seite steht und überdies die Anzahlen $a . e$, und $a : e'$ einerseits, $a . e'$ und $a : e$, andererseits sich wechselweise entsprechen. Die beiden Mannigfaltigkeiten von Anzahlen $a . e$, und $a . e'$ treten demnach in eine Beziehung zu einander, die durch eine an sich willkürliche Festsetzung geregelt werden

kann, wenn das Product $e' \cdot e$, gleich einer bestimmten Anzahl, z. B. gleich 1α , vorausgesetzt wird.

Durch (44) und (45) werden aber die möglichen Folgerungen aus (43) nicht erschöpft. Denn es ist nun auch

$$e, \cdot e, < e, \cdot e; \quad e' \cdot e' > e' \cdot e$$

oder, da $e, \cdot e$ durch e , und $e' \cdot e$ durch e' ersetzt werden kann,

$$e, \cdot e, < e,; \quad e' \cdot e' > e'.$$

In gleicher Weise ist

$$e, \cdot e, \cdot e, < e, \cdot e,; \quad e' \cdot e' \cdot e' > e' \cdot e'$$

und man erkennt, dass zugleich mit (43) allgemein die beiderseits unbegrenzte Reihe der Ungleichungen

$$\dots (e')^3 > (e')^2 > e' > e > e, > e,^2 > e,^3 \dots \quad (49)$$

besteht. Was von e' und e , gesagt wurde, gilt nun auch von jeder Anzahl $e,^i$ und $(e')^i$, wo $i = 1, 2, 3 \dots$; es entspricht jeder angebbaren Anzahl a eine denkbare Anzahl $a \cdot e,^i$ und $a \cdot (e')^i$ und die Beziehung zwischen den so definirten Mannigfaltigkeiten von Anzahlen wird wiederum durch die willkürliche Annahme $e,^i \cdot (e')^i = 1\alpha$ geregelt.

Da somit die Voraussetzung der Anzahl $e,$, die kleiner als jede angebbare Anzahl sein soll, die Anerkennung der Mannigfaltigkeiten von Anzahlen $ae,; ae,^2; ae,^3; \dots$ einschließt, so gibt es für $\mathcal{N}(\tau)$ nicht nur keine kleinste angebbare Anzahl, sondern nicht einmal eine kleinste denkbare Anzahl. Man kann folglich nicht nur keine der Größe nach der Anzahl a folgende oder vorhergehende Anzahl angeben, sondern nicht einmal eine solche Anzahl als denkbar annehmen, ohne dass zugleich eine unerschöpfliche Fülle dazwischen liegender Anzahlen als denkbar zugestanden werden müsste.

Hieraus folgt, dass die Gesamtheit der Anzahlen von $\mathcal{N}(\tau)$ nicht als eine der Größe nach geordnete, abgeschlossen vorliegende Reihe gedacht werden kann. Denn es gibt weder eine herstellbare noch eine denkbare obere oder untere Grenze, die der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\tau)$ angehöre, und es gibt weder eine herstellbare

noch eine denkbare Anzahl, die einer gegebenen Anzahl der Größe nach unmittelbar, d. i. ohne Dazwischentreten unbegrenzt vieler Anzahlen, folge oder vorangehe. Es sind daher bloß Reihen von Anzahlen herstellbar oder denkbar, die der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\tau)$ angehören, ohne sie zu erschöpfen.

Dies hindert nicht, dass die Gesamtheit der Anzahlen von $\mathcal{N}(\tau)$ ebenso wie die Gesamtheit der Anzahlen einer anderen Mannigfaltigkeit als wohl definierter Gegenstand des Denkens auftritt. Denn es ist zwar unmöglich, zu einer gegebenen Anzahl eine der Größe nach unmittelbar folgende zu denken und auf diese Weise die Gesamtheit der Anzahlen im Denken zu erfassen; es kann aber auf mannigfache Art ein Weg bezeichnet werden, auf dem man in unbegrenztem Weiterschreiten zu jeder Anzahl geführt wird. Es ist z. B. möglich, jedem Gliede in der unbegrenzten Reihe der Theilanzahlen $m_0\alpha_0$ jede Theilanzahl der Reihe $0\alpha_1, 1\alpha_1 \dots (t-1)\alpha_1$ und wiederum jedem Gliede dieser Reihe jede Theilanzahl $0\alpha_2 \dots (t-1)\alpha_2$ zuzuordnen und diese Zuordnungsweise für die auf einander folgenden Theilanzahlen ins Unbegrenzte fortgesetzt zu denken. Es wird so die Gesamtheit der Anzahlen im Denken erfasst; sie wird aber nicht als eine der Größe nach geordnete fortlaufende Reihe, sondern als ein unbegrenztes System in einander geschalteter und immer wieder abbrechender Reihen gedacht.

§ 19.

Die Anzahlen von $\mathcal{N}(\tau)$ sind die positiven, reellen Zahlen der Mathematik, die in ganze und gebrochene, rationale und irrationale und überdies in algebraisch und transcendent irrationale Zahlen geschieden werden. Denn auf Grund der Relationen (36) ist $1\alpha_0 = t \cdot 1\alpha_1 = t^2 \cdot 1\alpha_2 = \dots$, so dass $1\alpha_1 = 1\alpha_0 : t$; $1\alpha_2 = 1\alpha_0 : t^2$; \dots und die allgemeine Anzahl a , wenn die Grundeinheit α_0 nicht bezeichnet wird, in der Form

$$a = m_0 + m_1 \cdot \frac{1}{t} + m_2 \cdot \frac{1}{t^2} + \dots$$

auftritt, wodurch bekanntlich jede positive reelle Zahl dargestellt wird.

Diese Zahlen beruhen demnach auf der durch τ angegebenen Form des beziehenden Denkens, die ebenso in den mechanischen Theilungsprocessen wie in den organischen Vermehrungsprocessen ihre Realisirung findet.

Die Beispiele der letzteren Art zeigen, dass die Brüche und die irrationalen Zahlen keineswegs die Vorstellung einer stetig theilbaren geometrischen Erstreckung voraussetzen; sie können überdies als ein Schutzmittel gegen die Uebertragung der geometrischen Stetigkeit auf die Mannigfaltigkeit der Zahlen dienen.

Tritt nämlich die Denkthätigkeit τ als Theilungsprocess in die Erscheinung, so findet derselbe seine vollkommenste Darstellung in der Theilung einer als Grundeinheit angenommenen Strecke, welche einer von einem Punkte — dem Nullpunkte — aus ins Unendliche sich erstreckenden Geraden angehört. Setzt man nun axiomatisch fest, dass einerseits jede denkbare Theilung und Vervielfachung der Einheitsstrecke zu einem bestimmten Punkte der Geraden führt, und dass andererseits jeder Punkt der Geraden durch Theilung und Vervielfachung der Einheitsstrecke erreicht gedacht werden kann, so entspricht jeder Anzahl von $\mathcal{N}(\tau)$ ein Punkt der Geraden und jedem Punkte der Geraden eine Anzahl von $\mathcal{N}(\tau)$. Es liegen aber die Punkte in der Geraden als eine abgeschlossene Mannigfaltigkeit vor Augen und man kann sich überdies einen Punkt innerhalb der Geraden beweglich vorstellen, so dass er die Gerade und somit alle Punkte der Geraden durchläuft. Es will daher scheinen, als ob auch die Gesammtheit der Anzahlen von $\mathcal{N}(\tau)$ als abgeschlossen vorliegende, der Größe nach geordnete Reihe gedacht werden könnte, und als ob eine veränderliche Anzahl successiv die Werthe aller Anzahlen der Reihe nach anzunehmen im Stande wäre.

Solche Vorstellungen entstehen nicht, wenn man die Realisirung von τ in einem periodisch wiederkehrenden Vermehrungsprocess sucht. Denn wird beispielsweise ein Samenkorn, das die Grundeinheit darstellen soll, in der Weise getheilt, dass man es aussät und die geernteten Samenkörner theilt, oder die letzteren wiederum aussät, um nach der zweiten, dritten Ernte u. s. f. die Theilung vorzunehmen, so sind die Körner der ins Unbegrenzte auf einander folgenden Ernten die objectiven Darstellungen der aus der Grundeinheit abgeleiteten Einheiten, ohne dass sie — wie die Theile der

Einheitsstrecke in der Geraden — einen anschaulichen Träger besitzen. Es findet ferner jede Anzahl von $\mathcal{N}(\tau)$ in einem System von Körnern der verschiedenen Ernten ihre objective Grundlage, ohne dass sich die Gesamtheit der denkbaren Systeme zu einer Vorstellung, wie sie für die Gesamtheit der Punkte in der Geraden vorhanden ist, verschmelze.

Hierdurch wird man darauf aufmerksam, dass eben die Gerade, sofern sie als der anschauliche Träger ihrer Punkte die Vorstellung der abgeschlossen vorliegenden Gesamtheit veranlasst, eine der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\tau)$ fremde Zuthat ist, und dass vollends der durch Bewegung vermittelte stetige Uebergang von einem Punkte der Geraden zu einem anderen auf die Anzahlen von $\mathcal{N}(\tau)$, die nur im Denken existiren, keine Anwendung finden kann. Hält man aber daran fest, dass die Anzahlen von $\mathcal{N}(\tau)$ einen Träger, der ihre Gesamtheit der Anschauung darbiete, nicht besitzen, und beachtet man, dass die Punkte der Geraden nur, sofern sie ihrer Lage nach bestimmt sind oder als bestimmt gedacht werden, nicht aber als bewegliche Punkte die Repräsentanten der Anzahlen sind, so hat das wechselweise Entsprechen von Punkt und Anzahl keine irrthümliche Auffassung zur Folge. Denn nach Ausschluss des Nullpunktes, welchem die der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\tau)$ nicht angehörende Anzahl 0 entspricht, kann kein Punkt mit kleinster oder größter Entfernung vom Nullpunkte angegeben oder gedacht werden, und es ist kein Punkt angebbar oder denkbar, der einem anderen in der Geraden vorangehe oder nachfolge, ohne dass zugleich eine unerschöpfliche Fülle dazwischen liegender Punkte gedacht werden müsste. Es ist daher die Gesamtheit der Punkte einer Geraden so wenig wie die Gesamtheit der Anzahlen von $\mathcal{N}(\tau)$ als eine abgeschlossen vorliegende Reihe denkbar, und es gibt für die ihrer Lage nach bestimmt gedachten Punkte so wenig wie für die ihrer Größe nach geordnet gedachten Anzahlen von $\mathcal{N}(\tau)$ einen Uebergang von einem Gliede der Gesamtheit zu einem anderen, der wie bei der Bewegung eines Punktes als ein Durchlaufen aller dazwischen liegenden, für das Denken unerschöpflichen Fülle von Gliedern aufgefasst werden könnte.

§ 20.

Wenn die positiven, reellen Zahlen in der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\tau)$ ihre Begründung finden, so ist klar, dass die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\nu, \tau)$, für welche die Combinationen von ν und τ commutativ sind, zu den positiven und negativen reellen Zahlen oder zu den reellen Zahlen schlechthin führt. Denn für die Einheiten α_{ik} ($i, k = 0, 1, 2 \dots$) von $\mathcal{N}(\nu, \tau)$, die durch

$$\tau^{(i)}\nu^{(k)}\alpha_{00} = \alpha_{ik}$$

auf einander bezogen werden, ist $\alpha_{ik} = \alpha_{i, k+2}$ und $1\alpha_{ik} = t\alpha_{i+1, k}$, so dass die Anzahlen in der Form

$$\begin{aligned} & m_{00}\alpha_{00} + m_{10}\alpha_{10} + m_{20}\alpha_{20} + \dots \\ & + m_{01}\alpha_{01} + m_{11}\alpha_{11} + m_{21}\alpha_{21} + \dots \end{aligned}$$

auftreten, die, wenn a und b Anzahlen von $\mathcal{N}(\tau)$ bezeichnen, durch $a + 1\nu \cdot b$ darstellbar sind und somit entweder eine positive oder eine negative reelle Zahl angeben.

Man erkennt dann auch in den Anzahlen der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\iota, \tau)$, für welche $\iota\tau = \tau\iota$, die sogenannten gewöhnlichen complexen Zahlen, die, wenn a und b Anzahlen der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\nu, \tau)$ bedeuten, durch

$$a + 1\iota \cdot b \quad \text{oder} \quad a + i \cdot b; \quad (i = \sqrt{-1})$$

dargestellt werden und in den Punkten der Ebene in gleicher Weise wie die reellen Zahlen in den Punkten der Geraden ihre Repräsentanten finden.

Diese Mannigfaltigkeiten werden dadurch charakterisirt, dass ihre Anzahlen die unbedingte Ausführung der Subtraction und Division gestatten. Nachdem nun bereits (§ 15) bemerkt wurde, dass die Ausführbarkeit der Subtraction für die allgemeine Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha, \beta, \gamma \dots)$ an die Bedingung $\mathcal{N}(\alpha, \beta, \gamma \dots) = \mathcal{N}(\nu, \alpha, \beta, \gamma \dots)$ geknüpft ist, fragt es sich, ob die allgemeinste Mannigfaltigkeit bestimmt werden kann, welche die Ausführbarkeit der Division unbeschränkt zulässt.

Um diese Frage für eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha)$ mit nur einer unbekanntem Denkhätigkeit α zu beantworten, schicke ich folgende Bemerkung voraus.

Zu jeder bestimmten Anzahl a von $\mathcal{N}(\tau)$ ist eine größere und eine kleinere Anzahl angebar, von welchen man sich durch dazwischen liegende Anzahlen der Größe von a nähern kann, ohne dass dem Näherungsprocess ein Ende gesetzt werden müsste. Man kann daher auch eine unbekanntem Anzahl durch successive Annäherung mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit bestimmen. Sind nun $a_0, a_1, a_2 \dots$ irgend welche Anzahlen von $\mathcal{N}(\tau)$, die mit Ausnahme von a_0 teilweise gleich 0 sein dürfen, so kann man auf diese Art stets eine Anzahl x von $\mathcal{N}(\tau)$ finden, so dass

$$a_0 = a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots \quad (50)$$

Es gibt jedoch, da $\mathcal{N}(\tau)$ kein Nullelement besitzt, keine Anzahl x dieser Mannigfaltigkeit, für welche

$$0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (51)$$

wäre. Bedeuten aber $a_0, a_1, a_2 \dots$ Anzahlen von $\mathcal{N}(\iota, \tau)$ oder $\mathcal{N}(\tau)$, so gibt es stets für jede Gleichung der Form (50) oder (51) eine der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\iota, \tau)$ angehörende Lösung, und es gibt im ganzen n Lösungen, wenn der Grad der Gleichung der n -te ist.

Soll nun $\mathcal{N}(\alpha)$ die Division gestatten, so folgt $\mathcal{N}(\alpha) = \mathcal{N}(\alpha, \tau)$, da der mit 1τ identische Quotient $1\alpha_0 : \tau$, wo α_0 die Grundeinheit angibt, eine Anzahl von $\mathcal{N}(\alpha)$ bezeichnen muss. Es kann daher, wenn $a_0, a_1, a_2 \dots$ wie oben Anzahlen von $\mathcal{N}(\tau)$ sind, jede Anzahl von $\mathcal{N}(\alpha)$ in die Form

$$a_0 \cdot 1\alpha_0 + a_1 \cdot 1\alpha_1 + a_2 \cdot 1\alpha_2 + \dots \text{ oder } a_0 + a_1 \cdot 1\alpha + a_2 \cdot (1\alpha)^2 + \dots$$

gebracht werden. Es muss aber auch $1\alpha_0 : 1\alpha$ oder allgemein $a_0 : 1\alpha$ gleich einer Anzahl von $\mathcal{N}(\alpha)$ sein, so dass es ein der Grundeinheit oder allgemein ein dem Elemente mit der Anzahl a_0 äquivalentes Element geben muss, das der Bedingung

$$a_0 = a_1 \cdot 1\alpha + a_2 \cdot (1\alpha)^2 + a_3 \cdot (1\alpha)^3 + \dots \quad (52)$$

genügt. Da jedoch gemäß (50) stets eine Anzahl x von $\mathcal{N}(\tau)$ existirt, welche die nämliche Bedingung erfüllt, so folgt, wenn

$$A = a_1 + a_2(1\alpha + x) + a_3((1\alpha)^2 + 1\alpha \cdot x + x^2) + \dots$$

gesetzt wird, mit Rücksicht auf (50) und (52)

$$1\alpha \cdot A = x \cdot A.$$

Es ist daher entweder $1\alpha = x$, oder $A = 0$, d. h. die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha)$ gestattet entweder bloß die Division, nicht aber die Subtraction in unbeschränkter Weise, und es ist dann, da kein Nullelement vorhanden sein kann, $1\alpha = x$ und somit $\mathcal{N}(\alpha)$ identisch mit $\mathcal{N}(\tau)$, oder die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha)$ gestattet neben der Division auch die unbedingte Subtraction, so dass auch $A = 0$ sein kann.

Ist aber das letztere der Fall, so kann von vorn herein $\mathcal{N}(\alpha) = \mathcal{N}(\alpha, \iota, \tau)$ angenommen werden, so dass, wenn $a_0, a_1, a_2 \dots$ Anzahlen von $\mathcal{N}(\iota, \tau)$ sind, jede Anzahl von $\mathcal{N}(\alpha)$ in der Form

$$a_0 \cdot 1\alpha_0 + a_1 \cdot 1\alpha_1 + a_2 \cdot 1\alpha_2 + \dots \text{ oder } a_0 + a_1 \cdot 1\alpha + a_2 \cdot (1\alpha)^2 + \dots$$

vorausgesetzt werden kann. Die Ausführbarkeit der Division fordert alsdann wieder das Bestehen einer Gleichung von der Form (52). Ist diese Gleichung vom n -ten Grade, so gibt es n Anzahlen $x_1, x_2 \dots x_n$ von $\mathcal{N}(\iota, \tau)$, welche sie befriedigen, und es kann (52) in die Productform

$$0 = (1\alpha - x_1) \cdot (1\alpha - x_2) \dots (1\alpha - x_n) \quad (53)$$

gebracht werden, deren Factoren Anzahlen von $\mathcal{N}(\alpha)$ sind. Da jedoch ein Product nur dann gleich Null sein kann, wenn einer der Factoren gleich Null ist, so ist 1α entweder gleich x_1 oder gleich $x_2 \dots$ oder gleich x_n , in jedem Falle also gleich einer Anzahl von $\mathcal{N}(\iota, \tau)$ und somit $\mathcal{N}(\alpha)$ identisch mit $\mathcal{N}(\iota, \tau)$. Bricht aber die Gleichung (52) nicht mit einem bestimmten Gliede ab, so gibt es eine unbegrenzte Reihe von Anzahlen $x_1, x_2, x_3 \dots$ in $\mathcal{N}(\iota, \tau)$, welche die Zerlegung in ein Product von der Form (53) mit unendlich vielen Factoren gestatten, so dass immer noch $\mathcal{N}(\alpha)$ für identisch mit $\mathcal{N}(\iota, \tau)$ gelten muss.

Insbesondere folgt, dass $\mathcal{N}(\varepsilon_n, \tau) = \mathcal{N}(\iota, \tau)$, wo ε_n die Beziehung des n -gliedrigen Gegensatzes darstellt, während $\mathcal{N}(\varepsilon_n)$ von $\mathcal{N}(\iota)$ verschieden ist. Denn es gibt n Anzahlen von $\mathcal{N}(\iota, \tau)$, welche die zur Charakterisirung von ε_n dienende Gleichung $x^n = 1\alpha_0$ erfüllen.

Jede Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha)$ mit nur einer unbekanntenen Denkhätigkeit α ist also identisch mit $\mathcal{N}(\tau)$ oder mit $\mathcal{N}(\iota, \tau)$ resp. der hierin enthaltenen Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\nu, \tau)$, je nachdem nur die Division oder zugleich auch die Subtraction unbedingt ausführbar sein soll.

Die nämlichen Folgerungen bleiben in Kraft, wenn n Denkhätigkeiten $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ durch die Denkacte $\alpha_1\alpha_0 = \alpha_1; \alpha_2\alpha_0 = \alpha_2; \dots \alpha_n\alpha_0 = \alpha_n$ in der Weise definirt werden, dass für die Einheitsanzahlen der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ Multiplicationsregeln von der Form

$$1\alpha_i \cdot 1\alpha_k = a_{iko} \cdot 1\alpha_0 + a_{ik1} \cdot 1\alpha_1 + \dots + a_{ikn} \cdot 1\alpha_n \quad (54)$$

($i, k = 1, 2 \dots n$)

bestehen, wo durch $a_{iko}, a_{ik1} \dots a_{ikn}$ Anzahlen von $\mathcal{N}(\iota, \tau)$, d. h. gewöhnliche complexe Zahlen, dargestellt werden. Man erhält dann ein sogenanntes begrenztes, aus n Haupteinheiten gebildetes complexes Zahlensystem, dessen Einheitsproducte linear durch die Einheiten selbst sich ausdrücken; und es lässt sich für jede Einheitsanzahl $1\alpha_i$ aus (54) durch Elimination der übrigen eine Gleichung ableiten, so dass $1\alpha_i$ sich ebenso wie oben 1α als Anzahl von $\mathcal{N}(\iota, \tau)$ erweist.

Solche Zahlensysteme hat man in der Regel im Auge, wenn man von höheren complexen Zahlen im Gegensatz zu den gewöhnlichen spricht. Sie können daher nur dann als Anzahlen von Mannigfaltigkeiten, die nicht mit $\mathcal{N}(\iota, \tau)$ oder den hierin enthaltenen Mannigfaltigkeiten $\mathcal{N}(\nu, \tau)$ oder $\mathcal{N}(\tau)$ identisch sind, gelten, wenn der Satz, dass ein Product nur für den Fall des Verschwindens eines seiner Factoren gleich Null sein kann, nicht für verbindlich gehalten wird. Ein Durchbrechen dieser Schranke mag nun zwar für die formale mathematische Auffassungsweise als möglich gelten; aber für uns besteht diese Möglichkeit nicht; denn sollte $a \cdot b = 0$ sein, ohne dass a oder b gleich Null wäre, so müsste der dem Producte $a \cdot b$

entsprechende Process $A\mathcal{B}$ in der Mannigfaltigkeit, welcher die Anzahlen a und b angehören, ein nicht vorhandenes Element ergeben können, während A und \mathcal{B} thatsächlich existirende Elemente angeben, und es müsste in Consequenz damit ein Denkact $\alpha\alpha = 0$ möglich sein, der aus dem gegebenen Objecte α durch die Denkhätigkeit α zu nichts führen würde.

Es scheint sonach, dass die Anzahlen der allgemeinen Mannigfaltigkeiten $\mathcal{N}(\alpha, \beta, \gamma \dots)$ zwar die gewöhnlichen reellen und complexen Zahlen der Mathematik, aber nicht die höheren complexen Zahlen abzuleiten gestatten. Man kann jedoch auf der gewonnenen Grundlage auch dem Bedürfniss nach Einführung dieser höheren complexen Zahlen durch folgende Erwägung gerecht werden.

§ 21.

Bei der Darstellung des Denkactes $\alpha\alpha = \alpha_1$ wurde selbstverständlich ein bestimmtes Object α als Grund und eine bestimmte Bethätigungsweise α des Denkens vorausgesetzt, woraus sich wiederum ein bestimmtes, thatsächlich für das Denken existirendes Object α_1 als Folge ergab. Man kann indessen annehmen, dass ein und dasselbe Object α der Träger verschiedener, aber gleichartiger Denkhätigkeiten $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ sei und diese verschiedenen Denkhätigkeiten, eben weil sie gleichartig sind, durch eine Collectivbezeichnung α andeuten. Es ist alsdann α entweder gleich α_1 oder gleich $\alpha_2 \dots$ oder gleich α_n ; es kann jedoch dahin gestellt bleiben, welches die eigentliche Bedeutung von α sei, so dass auch der Erfolg von $\alpha\alpha$ nicht bestimmt angebbar ist, da auf Grund von

$$\alpha_1\alpha = \alpha_1; \quad \alpha_2\alpha = \alpha_2; \quad \dots \quad \alpha_n\alpha = \alpha_n$$

$\alpha\alpha$ ebenso wohl gleich α_1 , wie gleich $\alpha_2 \dots$ oder gleich α_n sein kann. Erst ein aus den $\alpha_1 \dots \alpha_n$ gebildeter Verein von Denkhätigkeiten, dessen Bedeutung sich nicht ändert, wenn die $\alpha_1 \dots \alpha_n$ mit einander vertauscht werden, stellt zugleich, nach Einführung der Collectivbezeichnung α , einen solchen Verein der α und der Combinationen von α dar, dessen Erfolg an α bestimmt ist, welches auch die wahre Bedeutung von α sei.

Daher sind auch die Elemente von $\mathcal{N}(a)$ im allgemeinen n -deutig, und eine Anzahl a tritt als Collectivbezeichnung für n Anzahlen $a_1, a_2 \dots a_n$ auf, ohne dass man sagen kann, welche dieser Anzahlen in Wahrheit durch a bezeichnet wird. Man hat somit kein Recht, eine der Differenzen $a - a_1, a - a_2, \dots a - a_n$ gleich Null zu setzen. Ebenso wenig kann man mit Bestimmtheit behaupten, dass $(a - a_1) \cdot (a - a_2)$ oder $(a - a_1) \cdot (a - a_2) \cdot (a - a_3)$ u. s. w. gleich Null sei. Man weiß nur, dass das Product der n Factoren

$$(a - a_1) \cdot (a - a_2) \cdot \dots \cdot (a - a_n) = 0$$

ist. Dieses Product wird demgemäß gleich Null, obwohl man nicht weiß, welcher der n Factoren gleich Null ist; man muss jedoch daran festhalten, dass irgend einer, unbestimmt welcher, gleich Null sei.

Dass hierdurch in der That ein Anschluss an die Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen oder Größen, die von Weierstraß und Dedekind entwickelt wurde¹⁾, erreicht wird, erhellt aus den von Dedekind gegebenen²⁾ »Erläuterungen zur Theorie der sogenannten allgemeinen complexen Größen«, woselbst gesagt wird:

»Um die Erscheinung des Verschwindens von Producten aus nicht verschwindenden Factoren im Reiche der gewöhnlichen, aber mehrwerthigen Anzahlen zu erläutern, schicke ich folgende Bemerkung voraus. Ist ν eine mehrwerthige Zahl, d. h. bestimmt ν unterschiedslos jeden der n von einander verschieden bestimmten Zahlenwerthe

$$\nu', \nu'' \dots \nu^{(n)},$$

so wird folgerichtig, wenn $\varphi(t), \psi(t)$ ganze Functionen einer Veränderlichen t mit bestimmten (d. h. einwerthigen) Coefficienten sind, die Behauptung

$$\varphi(\nu) = \psi(\nu)$$

stets und nur dann für wahr gelten, wenn die n Behauptungen

$$\varphi(\nu') = \psi(\nu'); \quad \varphi(\nu'') = \psi(\nu''); \quad \dots \quad \varphi(\nu''') = \psi(\nu''')$$

1) In den Göttinger Nachrichten 1884 (Weierstraß); 1885 (Dedekind).

2) Göttinger Nachrichten 1887; Nr. 1, S. 1—7.

sämmtlich erfüllt sind, d. h. wenn die ganze Function $\varphi(t) - \psi(t)$ durch die ganze Function

$$f(t) = (t - \nu')(t - \nu'') \dots (t - \nu^{(n)})$$

theilbar ist.

»Ist daher z. B. ν eine zweiwerthige Größe, welche unterschiedslos jeden der beiden Werthe ± 1 bedeutet, so verschwindet weder die Größe $\nu + 1$, noch $\nu - 1$, aber ihr Product $\nu^2 - 1$ verschwindet.«

Den Zahlensystemen, welche durch die Erscheinung des Verschwindens von Producten mit nicht verschwindenden Factoren ausgezeichnet sind, tritt in den Quaternionen ein System von anderer Art gegenüber. Sind nämlich a_0, a_1, a_2, a_3 beliebige reelle Zahlen und i_1, i_2, i_3 complexe Haupteinheiten mit der Bedingung

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1; \quad i_1 \cdot i_2 = i_3;$$

so kann im Gebiete der Quaternionen

$$a_0 + a_1 \cdot i_1 + a_2 \cdot i_2 + a_3 \cdot i_3$$

die Subtraction und Division ausgeführt werden, obgleich die Einheiten i_1, i_2, i_3 nicht mit der gewöhnlichen imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$ identisch sind, und ohne dass ein Product gleich Null gesetzt werden müsste, wenn keiner seiner Factoren gleich Null ist. Solche Producte würden erst dann auftreten, wenn a_0, a_1, a_2, a_3 als gewöhnliche complexe Zahlen vorausgesetzt würden¹⁾.

Soll auch dieses Zahlensystem auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{N} beruhen, so müssen demnach iterirbare Denkhätigkeiten $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ angebar sein, für welche die Combinationen $\iota_1 \iota_1; \iota_2 \iota_2; \iota_3 \iota_3$ identisch mit ν und $\iota_1 \iota_2$ zur Bestimmung von ι_3 dienen kann. Es folgt aber aus der Bedingung $\iota_1 \iota_1 = \nu$ nichts anderes, als dass ι_1 und ebenso ι_2 und ι_3 mit ι (d. i. der Beziehung des viergliedrigen Gegensatzes) identisch sind, wenn sie durch einen Denkact schlechthin definiert werden sollen.

1) Ein solches wäre z. B. $(i_1 + i)(i_1 - i) = i_1^2 - i^2 = 0$. — Bekanntlich sind die aus reellen Zahlen a_0, a_1, a_2, a_3 gebildeten Quaternionen neben den reellen und den gewöhnlichen complexen Zahlen die einzigen allgemeinen Zahlen der Mathematik, für die es keine verschwindenden Producte mit nicht verschwindenden Factoren gibt.

Indessen, wenn es gestattet ist, in der Darstellung des Denkactes $\alpha\alpha = \alpha_1$ die Denkhätigkeit α als unbestimmten Repräsentanten von n verschiedenen, jedoch gleichartigen Denkhätigkeiten vorauszusetzen, so ist es wohl auch erlaubt, den Grund α als eine begrifflich zusammengehörige Vielheit verschiedener Objecte aufzufassen, so dass nach Maßgabe dieser Verschiedenheit auch die aus dem Grunde α entwickelte Folge α_1 als verschieden zu gelten hat. Denkt man sich z. B. α_0 als eine Gattung, welche die Arten $\alpha_{01}, \alpha_{02} \dots \alpha_{0n}$ in sich begreift, so wird sich auch die aus α_0 durch $\alpha\alpha_0 = \alpha_1$ entwickelte Folge α_1 in die Folgen $\alpha_{11}, \alpha_{12} \dots \alpha_{1n}$ gliedern, indem

$$\alpha\alpha_{01} = \alpha_{11}; \quad \alpha\alpha_{02} = \alpha_{12}; \quad \dots \quad \alpha\alpha_{0n} = \alpha_{1n}.$$

Man kann jedoch α_0 als den gemeinsamen Grund dieser Folgen festhalten und dafür die an α_0 ausgeführte Denkhätigkeit durch $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ bezeichnen, je nachdem α_0 als α_{01} oder $\alpha_{02} \dots$ oder α_{0n} specialisirt gedacht wird. Man erhält so die Darstellungen

$$\begin{aligned} \alpha\alpha_{01} &= \alpha_1\alpha_0 = \alpha_{11} \\ \alpha\alpha_{02} &= \alpha_2\alpha_0 = \alpha_{12} \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha\alpha_{0n} &= \alpha_n\alpha_0 = \alpha_{1n}, \end{aligned}$$

wo $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ als Besonderungen von α aufzufassen sind, die dadurch bedingt werden, dass α_0 in n -fach verschiedener Art denkbar ist. Sind nun $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ iterirbar und combinirbar, so erzeugen sie die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$, die sofort zur Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha)$ wird, wenn die Specialisirungen $\alpha_{01}, \alpha_{02} \dots \alpha_{0n}$ von α_0 aufgehoben gedacht werden.

Während also vorher eine Mannigfaltigkeit mit bestimmten Denkhätigkeiten $\alpha_1 \dots \alpha_n$ durch eine solche mit einer unbestimmt gelassenen Denkhätigkeit α ersetzt wurde, tritt hier eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\alpha)$ auf Grund einer Besonderung des α in $\alpha_1 \dots \alpha_n$ als $\mathcal{N}(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ auf. Es wird somit keine Mehrdeutigkeit eingeführt, sondern im Gegentheil eine weitergehende Unterscheidung vorgenommen.

So können denn $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ als Besonderungen von ι gelten, wofern es möglich ist, eine Gattung α_0 zu denken, deren Individuen je

nach ihrer Zugehörigkeit zu einer der drei Arten α_{01} , α_{02} , α_{03} als Träger von ι in der durch ι_1 , ι_2 , ι_3 bezeichneten Bestimmtheit auftreten können. Dies geschieht aber thatsächlich bei der geometrischen Deutung der Quaternionen als Paare von Strecken, die von einem Punkte des Raumes ausgehen und durch die Ebene, in der sie liegen, und den Winkel, welchen sie einschließen, bestimmt werden. Denn nun wird die Grundeinheit α_0 durch jedes Paar zusammenfallender Strecken von gleicher Länge dargestellt und an jedem Paar kann die Beziehung des viergliedrigen Gegensatzes durch die vier Hauptlagen, in denen die Strecken den Winkel 0° , 90° , 180° , 270° bilden, versinnlicht werden. Es bedeutet sonach $\iota\alpha_0$ allgemein die Drehung einer von zwei zusammenfallenden Strecken, so dass sie einen rechten Winkel bilden. Je nachdem aber diese Drehung in der horizontalen oder in einer der beiden senkrecht zu einander stehenden verticalen Hauptebenen ausgeführt wird, ist sie als $\iota_1\alpha_0$ oder $\iota_2\alpha_0$ resp. $\iota_3\alpha_0$ zu deuten, so dass in der That von den Repräsentanten der Grundeinheit α_0 die in den drei Hauptebenen liegenden besonders hervortreten und so drei Arten α_{01} , α_{02} , α_{03} von α_0 darstellen, für welche

$$\iota\alpha_{01} = \iota_1\alpha_0; \quad \iota\alpha_{02} = \iota_2\alpha_0; \quad \iota\alpha_{03} = \iota_3\alpha_0.$$

Jedes ι_1 , ι_2 , ι_3 ist iterirbar; denn nach erfolgter Drehung innerhalb einer bestimmten Ebene kann die nämliche Drehung nochmals ausgeführt werden, und zwar ist

$$\iota_1\iota_1 = \iota_2\iota_2 = \iota_3\iota_3 = \nu,$$

wo ν die Ueberführung eines Paares zusammenfallender Strecken in zwei einander entgegengesetzt gerichtete bedeutet. Es existiren ferner die Combinationen

$$\begin{aligned} \iota_1\iota_2 &= \iota_3; & \iota_2\iota_3 &= \iota_1; & \iota_3\iota_1 &= \iota_2; \\ \iota_2\iota_1 &= \nu\iota_3; & \iota_3\iota_2 &= \nu\iota_1; & \iota_1\iota_3 &= \nu\iota_2; \end{aligned}$$

indem z. B. an die durch ι_1 bezeichnete Drehung in der horizontalen Ebene sich die Drehung in jeder der beiden verticalen Hauptebenen anschließen kann. Denn man kann jedes Streckenpaar innerhalb der Ebene, in der es liegt, unter Festhalten seines Winkels und des gemeinsamen Ausgangspunktes verschieben und somit die eine oder die

andere der beiden Strecken mit jeder Ebene, in der eine neue Drehung vorgenommen werden soll, zum Schnitt bringen.

§ 22.

Man ersieht aus diesen Erwägungen, dass weder zur Erklärung der Quaternionen noch der complexen Zahlen mit verschwindenden Producten aus nicht verschwindenden Factoren eine andere Mannigfaltigkeit als $\mathcal{N}(\iota, \nu)$ erfordert wird. In logischer Hinsicht bieten somit diese höheren complexen Zahlen im Vergleich zu den gewöhnlichen nichts wesentlich Neues. Ihr thatsächlich bestehender mathematischer Werth wird jedoch durch diese Erkenntniss nicht beeinträchtigt. Derselbe tritt insbesondere in dem Zusammenhang mit der Gruppentheorie hervor, der namentlich durch die Untersuchungen von Study¹⁾ und Scheffers²⁾, die auch eine große Anzahl von Zahlensystemen berechnet haben, klargelegt wurde.

Es kann sonach als erwiesen gelten, dass in der That die allgemeinen Zahlen der Mathematik die Anzahlen von Mannigfaltigkeiten sind, in welchen iterirbare Bethätigungsweisen des beziehenden Denkens, nämlich ν , ν und ι oder, mit letzterem gleichbedeutend, ϵ_n ihre Darstellung finden.

Hierdurch ist aber die Frage noch nicht entschieden, ob die Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\iota, \nu)$ die allgemeinste ist, welche für ihre Anzahlen die unbedingte Ausführung der Subtraction und Division gestattet. Denn diese Frage wurde bloß für die Mannigfaltigkeit mit nur einer unbekanntem Denkhätigkeit beantwortet. Es ist daher auch nicht gewiss, dass die gewöhnlichen complexen Zahlen nebst den als ihre Variationen sich darbietenden höheren complexen Zahlen die allgemeinsten ihrer Art sind.

Geht man nun zu Mannigfaltigkeiten mit zwei unbekanntem

1) Ueber Systeme von complexen Zahlen. Göttinger Nachrichten 1889. — Complexe Zahlen und Transformationsgruppen. Ber. d. königl. sächs. Gesellsch. d. Wiss. Math.-phys. Classe, 1889.

2) Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten Größen; sowie Ueber die Berechnung von Zahlensystemen. Ber. d. königl. sächs. Ges. d. Wiss. Math.-phys. Classe, 1889.

Denkthätigkeiten α und β , neben welchen auch τ , ν , ι auftreten können, über, so erkennt man unmittelbar, dass die Bedingung

$$\alpha\beta = \beta\alpha = \alpha_0$$

genügt, um in $\mathcal{N}(\alpha, \beta, \tau)$ einerseits, in $\mathcal{N}(\alpha, \beta, \nu, \tau)$ resp. $\mathcal{N}(\alpha, \beta, \iota, \tau)$ andererseits Mannigfaltigkeiten zu erhalten, deren Anzahlen einerseits die unbedingte Division ohne Subtraction, andererseits die unbedingte Subtraction und Division gestatten. Sind nämlich $a_0, a_1, a_2 \dots b_1, b_2 \dots$ Anzahlen von $\mathcal{N}(\tau)$ oder $\mathcal{N}(\nu, \tau)$ resp. $\mathcal{N}(\iota, \tau)$, so können die Anzahlen jener drei Mannigfaltigkeiten in jedem Falle durch

$$\begin{aligned} \alpha_0 \cdot 1\alpha_0 + a_1 \cdot 1\alpha_1 + a_2 \cdot 1\alpha_2 + \dots \\ + b_1 \cdot 1\beta_1 + b_2 \cdot 1\beta_2 + \dots \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \alpha_0 \cdot 1\alpha_0 + a_1 \cdot 1\alpha + a_2 \cdot (1\alpha)^2 + \dots \\ + b_1 \cdot 1\beta + b_2 \cdot (1\beta)^2 + \dots \end{aligned}$$

dargestellt werden, wenn die aus der Grundeinheit α_0 abgeleiteten Einheiten durch

$$\alpha^{(i)}\alpha_0 = \alpha_i; \quad \beta^{(i)}\alpha_0 = \beta_i$$

definiert werden; und aus dieser Darstellungsform folgt ohne weiteres die Richtigkeit jener Behauptung. Hierzu ist jedoch zu bemerken, dass im allgemeinen nur die unbegrenzte Fortsetzbarkeit der Division behauptet werden, aber nichts über die Möglichkeit, sie abzurechnen und angenähert auszuführen, gesagt werden kann; denn α und β können rein qualitative Beziehungen darstellen, die nicht unter den Begriff der Größe fallen.

Indessen wird hierdurch wenigstens die Möglichkeit gezeigt, Anzahlen anzugeben, die den gewöhnlichen Gesetzen gehorchen, ohne mit den Anzahlen von $\mathcal{N}(\iota, \tau)$ identisch zu sein oder durch künstliche Wendungen aus ihnen abgeleitet zu werden. Auch ist zu beachten, dass die Zurückführung der allgemeinen Zahlen der Mathematik auf die Anzahlen von Mannigfaltigkeiten \mathcal{N} Erweiterungen des Zahlbegriffs gestattet, die nicht durch die Frage nach der Ausführbarkeit der Subtraction und Division motiviert sind, sondern auf rein qualitativen Beziehungen beruhen. Man wird alsdann zu folgender Definition geführt:

Die allgemeinen Zahlen der Mathematik sind die Anzahlen der Mannigfaltigkeiten $\mathcal{N}(\alpha, \beta, \gamma \dots)$.

Sie schließt das Zugeständniss ein, dass nicht der Begriff des Quantum, sondern der Begriff der iterirbaren Beziehung des Denkens die Grundlage der allgemeinen Zahl und der auf ihr beruhenden mathematischen Untersuchungsgebiete ist. Denn nur in der Mannigfaltigkeit $\mathcal{N}(\tau)$ tritt das Quantum in seiner Reinheit zu Tage.
