Zur Collectiv-Maſslehre.

Von

H. Bruns.

1. Fechner hat in seinem nachgelassenen Werke »Collectiv-Maßlehre«[1]) ein Verfahren zur Untersuchung der von ihm als »Collectiv-Gegenstände« (kurz C.-G.) bezeichneten Vielheiten entwickelt, das nach der rechnerischen Seite hin der Verbesserung fähig ist, sobald man über gewisse dabei nöthige Hülfstafeln verfügt. Diese Tafeln, die ich schon vor etwa Jahresfrist habe berechnen lassen, sollen am Schlusse des vorliegenden Aufsatzes mitgetheilt werden; Zweck der nachstehenden Zeilen ist, ihre Einrichtung und ihren Gebrauch aus einander zu setzen. Betreffs der hierbei zu lösenden Aufgabe könnte ich unmittelbar auf das Werk Fechner's oder auf den ausführlichen, von Herrn Lipps gegebenen Bericht[2]) verweisen. Da jedoch der befolgte Gedankengang in einigen Punkten von dem Verfahren Fechner's abweicht, so erscheint es zweckmäßiger, das, was zum Verständniss nöthig ist, hier kurz zusammenzustellen. Der Deutlichkeit halber beginne ich mit einem einfachen Beispiel.

Vorgelegt sei für etliche Jahre die Liste der Recrutenmaße x aus einem bestimmten Aushebungsbezirk und für eine bestimmte Altersklasse, wobei die Werthe der x auf volle Centimeter abgerundet sein mögen, so dass z. B. der Werth $x = 171$ cm allen denjenigen Individuen zukommt, deren genaue Körperlänge zwischen 170,5 und 171,5 cm liegt. Werden die einzelnen x, deren Gesammtmenge wir

1) Herausgegeben von G. F. Lipps. Leipzig 1897. W. Engelmann.

2) Philos. Stud. Bd. XIII. S. 579 ff.

mit m bezeichnen wollen, zunächst in der Reihenfolge hingeschrieben, in der sie gemessen worden sind, so lässt die so entstandene »Urliste« keinerlei Regel oder Gesetz erkennen, indem die einzelnen Zahlen regellos hin und her springen. Anders stellt sich dagegen die Sache, wenn man — ein genügend großes m vorausgesetzt — die x nach ihrer Größe geordnet hinschreibt oder, nach Fechner's Ausdruck, aus der Urliste die »primäre Vertheilungstafel« herstellt. Es zeigt sich dann in der Häufigkeit, mit der die einzelnen x auftreten, ein ausgesprochener Gang, indem die Zahl der mehrfach vorkommenden x von den Extremen her deutlich nach einer mittleren Stelle hin zunimmt. Noch auffälliger wird dieses Verhalten, wenn man den Verlauf dieser Vertheilungstafel geometrisch darstellt. Man denke sich zu dem Ende auf einer Abscissenachse vom Nullpunkte ausgehend eine Centimetertheilung abgetragen, dann sind die vorkommenden x unter den Abscissen der Theilungspunkte enthalten. Weiter trage man zu jeder Abscisse x als Ordinate y die Anzahl der Individuen ab, denen die betreffende Abscisse als Körperlänge zukommt, und verbinde die Endpunkte der Ordinaten durch geradlinige Strecken. Dadurch entsteht ein Linienzug, den man als »Häufigkeitscurve« (kurz H.-C.) bezeichnen kann, und der folgendes Verhalten zeigt. Die Curve verläuft anfangs in der Abscissenachse, da ja für negative oder sehr kleine x die Ordinate beständig null ist, dann beginnt ein Aufwärtssteigen mit gelegentlichen Zickzacksprüngen bis zu einem Maximum, weiterhin sinkt die Curve in derselben Weise, um schließlich wieder in die Abscissenachse überzugehen.

Betrachtet man jetzt die Curve nach ihrem Verhalten im ganzen, so gelangt man zu dem Satze, dass ihr Verlauf, trotz der erwähnten und von unausgeglichenen Zufälligkeiten herrührenden Sprünge, deutlich Regel und Gesetz erkennen lässt, und zwar in demselben Sinne, in dem man z. B. bei der Erdgestalt, trotz der handgreiflichen Gegensätze zwischen Berg und Thal, von einer Kugel oder einem Ellipsoid spricht.

Die bildliche Darstellung der beobachteten Zahlen kann auch noch auf andere Weise, als soeben angegeben, erfolgen. So kann man als Ordinaten statt der unmittelbar gezählten Mengen y die Quotienten $y : m$ abtragen, also die Häufigkeit eines x in Bruchtheilen der Gesammtmenge m ausdrücken, wodurch eine Curve der »relativen« Häufigkeiten entsteht. Ferner könnte man die Menge der Individuen ermitteln, deren Körperlänge ein bestimmtes x nicht überschreitet, und dann diese Menge als Ordinate zu dem betreffenden x einzeichnen, und dergleichen mehr. Alle so erhaltenen Curven hängen in gesetzmäßiger Weise mit einander zusammen, so dass aus einer von ihnen die übrigen hergeleitet werden können. Infolge dessen macht es keinen grundsätzlichen Unterschied, welche Curve man wirklich benutzt, und man darf sich bei der schließlichen Wahl von Gründen der äußeren Zweckmäßigkeit leiten lassen.

2. Häufigkeitscurven von der Art des betrachteten Beispiels lassen sich nun zu den verschiedensten Dingen construiren, und man kann dabei sowohl Gegenstände der uns umgebenden Wirklichkeit, als auch reine Gedankendinge heranziehen. Auch reicht die Beschäftigung mit solchen Curven zeitlich recht weit zurück. So sind die theoretischen Häufigkeitscurven, die bei manchen Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung auftreten, ziemlich so alt, wie der erste Ausbau dieses Theiles der angewandten Mathematik. Um das zu erläutern, denke man sich eine Urne mit weißen und schwarzen Kugeln, aus der z Züge unter jedesmaliger Zurücklegung der Kugel erfolgen. Bedeuten p und q die Wahrscheinlichkeiten für das einmalige Ziehen von weiß und von schwarz, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei z Zügen weiß x-mal und schwarz y-mal auftrete, durch den Ausdruck

$$W(x) = \frac{z!}{x!\,y!}\,p^x q^y\,, \qquad (z = x + y)$$

gegeben, wo x die Werthe $0, 1, \ldots z$ anzunehmen hat, während für solche x, die außerhalb dieser Zahlenreihe liegen, $W(x)$ durchweg gleich Null zu setzen ist. Die entstehende Werthreihe liefert eine H.-C. der vorhin betrachteten Art, denn die mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist ihrer Definition nach nichts anderes, als die relative Häufigkeit der dem Ereigniss günstigen Fälle, so dass jedes $W(x)$ die relative Häufigkeit angibt, mit der bei z Zügen x weiße Kugeln zu erwarten sind. Wie man weiß, führt die weitere Untersuchung der betrachteten Curve für große z auf den berühmten Bernoulli'schen Satz von den »großen Zahlen«.

Ein anderer wohlbekannter Fall ist das Gesetz für die Vertheilung der Beobachtungsfehler, das zuerst von Gauß theoretisch formulirt wurde, und von dem dann später Bessel nachwies, dass es unter gewissen, häufig erfüllten Bedingungen der Wirklichkeit sehr nahe entspreche. Ebenso können hier die Curven für die Vertheilung der Lebensalter genannt werden; diese Curven mussten vorhanden sein, als man daran ging, das Versicherungswesen für Leben und Todesfall auf eine feste mathematische Grundlage zu stellen.

Das Buch von Fechner beschäftigt sich nun von Anfang bis Ende mit Häufigkeitscurven, denn das, was Fechner mit dem Namen »Collectiv-Gegenstand« bezeichnet, ist nur der arithmetische Ausdruck für eine Sache, deren geometrische Darstellung eben die H.-C. liefert. Da diese Dinge, wie vorhin bemerkt wurde, an sich nicht neu sind, so kann man fragen, worin denn eigentlich die Bedeutung des Fechner'schen Werkes liege. In dieser Hinsicht ist nun zunächst hervorzuheben, dass Fechner den Gegenstand sogleich von allgemeinen und umfassenden Gesichtspunkten aus angreift. Wenn z. B. in der Theorie der Beobachtungsfehler die Häufigkeit dieser Fehler untersucht wird, so erscheint das in den gewöhnlichen Darstellungen immer als etwas, das dem betrachteten Gebiete eigenthümlich ist und keine engeren Beziehungen zu ähnlichen Aufgaben in anderen Gebieten besitzt. Dem gegenüber zeigt nun Fechner, dass es sich bei solchen Aufgaben immer nur um die wechselnden Einkleidungen eines und desselben, stets wiederkehrenden, Problems handelt, und dass diesem Problem überall auch die gleiche Untersuchungsmethode zuzuweisen ist, mag es sich nun um Recrutenmaße, um Schädelmessungen, um Roggenhalme, um Gemäldeformate, um meteorologische Beobachtungen, um Beobachtungsfehler oder um noch andere Dinge handeln. Der Kern der Sache liegt dabei in dem von Fechner zuerst mit voller Bestimmtheit formulirten Erfahrungssatze, dass man, sobald gewisse »Requisiten« erfüllt sind, eine H.-C. von erkennbar regelmäßigem Verlaufe zu erwarten habe.

Der genannte Satz ist von weitreichender principieller Bedeutung, namentlich für die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die rein mathematischen Theile dieser Disciplin sind nämlich, wenn man ihren Inhalt analysirt, in Wahrheit nichts anderes, als eine Lehre von der Häufigkeit gleich möglicher Fälle, und die daselbst betrachteten theoretischen H.-C. beruhen jedesmal auf der gleichmäßigen Erschöpfung einer gegebenen Gesammtheit gleich möglicher Fälle. Da es sich dabei immer nur um logische Operationen handelt, so ist die geforderte gleichmäßige Erschöpfung ausführbar, und aus dem gleichen Grunde kommt den Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung dieselbe Gewissheit zu, wie den Sätzen der Geometrie oder Arithmetik. Wie nun aber die Anwendung der Geometrie, z. B. zur Construction eines Rädergetriebes oder einer Dampfmaschine, an die Voraussetzung gebunden ist, dass die Begriffe »Punkt, Gerade, Kreis u. s. w.« wenigstens näherungsweise physisch verwirklicht werden können, so sind auch die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung an die Bedingung geknüpft, dass Dinge existiren, die wenigstens näherungsweise die »zufälligen« Ereignisse und die theoretischen H.-C. der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwirklichen. Andernfalls wären solche Anwendungen wenig mehr, als ein müßiges Spiel mit Ziffern und Zahlen. Der Nachweis, dass jene Bedingung erfüllt sei, lässt sich nun aber auf keine Weise durch bloße logische Deductionen erbringen, bleibt vielmehr nothwendig Gegenstand der Erfahrung, und im Anschlusse hieran kann man sagen, dass Fechner zuerst es unternommen habe, den verlangten Nachweis in systematischer Weise zu führen. Oder anders ausgedrückt: in der »Collectiv-Maßlehre« ist zum ersten Male der Versuch gemacht worden, ein System der experimentellen Wahrscheinlichkeitsrechnung oder, wie man noch besser sagen kann, der empirischen Häufigkeitslehre aufzubauen.

3. Ein zweiter Punkt, der hier hervorzuheben ist, bezieht sich auf den Satz, dass in den von Fechner untersuchten H.-C. ein bestimmter Typus wiederkehrt. Der Nachweis hierfür verlangt, dass man den Verlauf der Curven durch eine bestimmte Formel mit ausreichender Genauigkeit darstellen könne. Zu diesem Zwecke ist früher fast ausschließlich das Gauß'sche Gesetz oder, wie wir lieber sagen wollen, das »einfache Exponentialgesetz« benutzt worden. Das genannte Gesetz besagt, dass zwischen den Coordinaten x, y der H.-C. die Gleichung

$$y = a \exp\left(-b(x-c)^2\right) \tag{1}$$

bestehe, wo exp das Zeichen für die gewöhnlich in der Gestalt e^z geschriebene Exponentialfunction ist, während die Größen a, b, c

gewisse Constanten bedeuten, von denen die beiden ersten stets positiv sein müssen. Der Grund für eine solche Bevorzugung des einfachen Exponentialgesetzes dürfte zu suchen sein einerseits in der wichtigen Rolle, die dieser Ausdruck in der Entwickelung der Fehlertheorie gespielt hat, andererseits in seiner Uebereinstimmung mit dem Bernoulli'schen Gesetze von den großen Zahlen. Das genannte Gesetz ist nun aber, wie Fechner zeigt, zur genaueren Darstellung beobachteter Häufigkeitscurven, von besonderen Fällen abgesehen, durchaus ungeeignet, weil die Formel (1) einen zur größten Ordinate symmetrischen Curvenverlauf liefert, während bei den beobachteten H.-C. der unsymmetrische Verlauf nachweisbar die Regel bildet. Um diesen Umstand zu berücksichtigen, legt sich Fechner einen Ausdruck zurecht, den er als »zweitheiliges« Gauß'sches Gesetz bezeichnet. Es ist nicht nöthig, auf diese Formel näher einzugehen, vielmehr genügt hier die Bemerkung, dass der von Fechner gewählte Ausdruck den zunächst beabsichtigten Zweck — nämlich den Nachweis eines typischen Verlaufes der untersuchten H.-C. — in ausreichender Weise erfüllt. Auf der anderen Seite erkennt aber der mathematisch geschulte Leser der »Collectiv-Maßlehre« sofort, dass jenes zweitheilige Gesetz nur ein vorläufiger Behelf ist, und dass an dieser Stelle die weitere Entwickelung der Methode einzusetzen hat.

4. Nach den vorstehenden Bemerkungen wollen wir uns jetzt zu der interpolatorischen Darstellung der Collectiv-Gegenstände wenden, wobei wir den Begriff des C.-G. etwas weiter fassen werden, als es bei Fechner der Fall ist. In dem eingangs benutzten Beispiel von den Recrutenmaßen handelt es sich um eine Vielheit von Dingen (Individuen), die als gleichartig angesehen werden, weil sie in gewissen, für die Betrachtung herausgehobenen, Merkmalen übereinstimmen. Diese »artbildenden« und innerhalb der betrachteten Vielheit »constanten« Merkmale bestehen bei dem gewählten Beispiel aus Geschlecht, Alter und Aushebungsbezirk. Darüber hinaus kommen nun aber den einzelnen Gliedern der vorgelegten Vielheit noch unendlich viele andere Merkmale zu, die wir als die »veränderlichen« bezeichnen, weil sie innerhalb der Vielheit nicht durchaus constant sind. Von diesen veränderlichen Merkmalen wird eines (die Körperlänge) ausgewählt und nach ihm die gegebene Gesammtheit

geordnet. Diese Ordnung können wir als eine »statistische« bezeichnen, weil dabei die Glieder, die in dem ausgewählten veränderlichen Merkmal übereinstimmen, nicht weiter unterschieden, sondern lediglich nach der Häufigkeit ihres Vorkommens gezählt werden.

Im Anschlusse an die bisherigen Ausführungen wird es jetzt unmittelbar verständlich sein, wenn wir folgende Sätze aussprechen. Ein Collectiv-Gegenstand ist eine Vielheit von gleichartigen Dingen, die nach einem veränderlichen Merkmal statistisch geordnet werden kann. Die »Urliste« enthält die Beobachtungen über den vorgelegten C.-G. in der Form, in der sie unmittelbar gewonnen worden sind; durch das Ordnen geht die Urliste in die »primäre Vertheilungstafel« über, deren graphische Darstellung zu einer Häufigkeitscurve führt. Die Collectiv-Maßlehre hat zur Aufgabe die Untersuchung der durch die statistische Ordnung erzeugten Gebilde.

Das veränderliche Merkmal, nach dem geordnet wird, wollen wir auch als das »Argument« des C.-G. bezeichnen. Da als Argument unendlich viele Merkmale ausgewählt werden können, so lässt sich ein C.-G. sofort auch nach zwei, drei, u. s. w. Merkmalen ordnen. Es ist jedoch nicht nöthig, diesen Fall besonders zu betrachten, weil er sich stets auf den Fall mit nur einem Argument zurückführen lässt.

Die in einem C.-G. zu einer Reihe vereinigten Glieder sollen gleichartig sein, d. h. durch einen Art- oder Gattungsbegriff zusammengehalten werden. Diese Festsetzung lässt wegen ihrer ganz allgemein gehaltenen Fassung offenbar einen weiten Spielraum für die Aufsuchung und Zusammenstellung der C.-G. offen, und es wird jedesmal von den besonderen Umständen der gerade vorgelegten Aufgabe abhängen, wie weit oder wie eng der Kreis der constanten Merkmale zu stecken ist. Aehnliches gilt von der Bezeichnung »Vielheit«: es lässt sich nicht im voraus angeben, wie groß der Umfang eines C.-G. sein müsse, damit man ihn erfolgreich der Rechnung unterwerfen könne.

Die angegebene Bestimmung der C.-G. ist etwas enger, als das, was Lexis unter dem allgemeinen Namen »Massenerscheinungen« zusammenfasst, dagegen weiter, als die von Fechner thatsächlich in Anwendung gebrachte Definition. Denn Fechner geht bei den von ihm behandelten C.-G. davon aus, dass das Argument stets nach Zahl und Maß bestimmt sei, und dass ferner die Gesammtheit der möglichen Werthe des Arguments eine stetige Mannigfaltigkeit bilde, also nicht auf eine endliche Anzahl von discreten Werthen beschränkt sei. Diese von Fechner festgehaltenen Einschränkungen sind entbehrlich. Beispielsweise könnte man auf Grund einer passenden Farbenscala zu der Farbe der Haare oder der Augen bei den Schulkindern einer Großstadt sehr wohl eine Häufigkeitscurve construiren, denn es hindert nichts, die einzelnen Töne der Scala durch Nummern zu unterscheiden und diese Nummern als Abscissen abzutragen. Ebenso ist die Forderung der Stetigkeit des Arguments durch nichts geboten, wie das folgende Beispiel lehrt. Schon vor längeren Jahren habe ich gelegentlich einer anderen Frage die ersten tausend Spalten des Thesaurus logarithmorum von Vega darauf hin ausgezählt, wie oft in jeder Spalte eine Null in der zehnten Decimale auftritt. Stellt man nun das Ergebniss dieser Zählung graphisch dar, so erhält man eine Curve, die ein vortreffliches Beispiel zu dem von Fechner behandelten Typus abgibt. Es ist sehr merkwürdig, dass Fechner nirgends in seinem Buche angibt, weshalb er solche »unstetigen« Collectiv-Gegenstände beiseite gelassen hat, zumal sich gerade zu dieser Classe der C.-G. gute Beispiele mit verhältnissmäßig geringer Mühe herbeischaffen lassen.

Eine andere Bestimmung, die Fechner einführt und der er bei der Besprechung der »Successionsabhängigkeit« eine eingehende Erörterung widmet, besteht darin, dass in der Urliste das veränderliche Merkmal von einem Gliede zum nächsten nach Zufall variire. Auch diese Beschränkung kann man fallen lassen, denn bei dem eben erwähnten Beispiel von den Endnullen einer Logarithmentafel ist das Spiel des Zufalls von vornherein und in aller Strenge ausgeschlossen.

5. Fasst man jetzt den Begriff des C.-G. in der oben angegebenen Weise, so kann es sich offenbar nicht mehr darum handeln, nachzuweisen, dass alle C.-G. auf einen und denselben Curventypus führen, wie ihn z. B. Fechner durch sein »zweitheiliges« Gesetz vorschreibt. Denn da in unserem Falle auch künstlich zurecht gemachte C.-G. nicht ausgeschlossen sind, so kann man ohne Schwierigkeit Häufigkeitscurven erhalten, die sich dem von Fechner behandelten Typus nicht einordnen. Die zu lösende Aufgabe ist deshalb jetzt anders zu fassen; das Wie? möge zunächst an einem Beispiel erläutert werden, das einem ganz anderen Gebiete entnommen ist.

Wenn ein musikalischer Ton von einem bestimmten Instrument erregt wird, so vollführt jeder Punkt der umgebenden Luft gewisse periodische Schwingungen. Ist y die Ausweichung des betrachteten Punktes aus seiner Ruhelage, t die Zeit, T die Schwingungsdauer, und setzt man

$$2\pi t = xT,$$

so lässt sich die Beziehung zwischen x und y, wie man weiß, durch eine Fourier'sche Reihe von der Form

$$\left.\begin{aligned} y = a + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

darstellen, wo die a, b gewisse, für den betrachteten Ton constante, Coefficienten bedeuten. Durch diese Coefficienten wird der Ton nach Stärke und Klangfarbe vollständig charakterisirt, während die Höhe von der in x enthaltenen Schwingungsdauer T abhängt. Die Anzahl der von Null verschiedenen a, b ist, streng genommen und von besonderen Fällen abgesehen, unendlich groß, jedoch kommt bei der Darstellung eines beobachteten Tones nur eine begrenzte Anzahl von Coefficienten als merklich in Betracht, so dass die übrigen ohne Nachtheil gleich Null gesetzt werden dürfen.

Das Wesentliche bei dem vorstehenden Beispiel besteht offenbar darin, dass eine beobachtete Curve in einer die Beobachtungen erschöpfenden Weise dargestellt wird durch eine endliche, aber im voraus nicht feststehende, Anzahl von Gliedern einer gewissen Reihenentwickelung, und dass dabei der Anschluss zwischen Beobachtung und Rechnung bewirkt wird durch die passende Bestimmung einer Anzahl von verfügbaren Constanten oder »Parametern«.

Man kann nun fragen, ob ähnliches nicht auch bei den Curven der C.-G. möglich sei. Diese Frage ist, wie ich vor einiger Zeit in einer kleinen Note[1]) gezeigt habe, zu bejahen. Man bezeichne mit x das Argument eines C.-G. oder die Abscisse der zugehörigen H.-C., mit h und c zwei passend gewählte Constanten, mit y das Product aus h und der Differenz $x - c$, mit $\Phi(y)$ eine gewisse noch näher zu

---

1) Ueber die Darstellung von Fehlergesetzen. Astronomische Nachrichten, Bd. 143. Nr. 3429.

bestimmende Function von y, mit $\Phi(y)_1$, $\Phi(y)_2, \ldots$ die successiven Ableitungen von Φ, endlich mit A, A_1, $A_2, \ldots$ ein gewisses System von Coefficienten, dann lässt sich der Verlauf der C.-G. mit Hülfe einer Reihenentwickelung von der Form

$$A\Phi(y) + A_1\Phi(y)_1 + A_2\Phi(y)_2 + \cdots \tag{3}$$

darstellen. Man erkennt sofort, wie sich hierdurch die Fragestellung Fechner's modificirt: es handelt sich nicht mehr um den Nachweis, dass die C.-G. auf einen bestimmten einfachen Curventypus, nämlich das zweitheilige Gesetz führen, sondern darum, jedesmal das für einen C.-G. charakteristische Werthsystem der Größen h, c, A zu ermitteln und die weitere Untersuchung der vorgelegten Vielheit auf die Beschaffenheit dieses Werthsystems zu gründen.

Bevor ich zu der Herleitung der in (3) angedeuteten Reihenentwickelung übergehe, möge über ihre Convergenz folgende Bemerkung vorausgeschickt werden. Bei der periodischen Darstellung (2) hat man, wie in der Lehre von den trigonometrischen Reihen gezeigt wird, von vorn herein die Gewissheit, dass jede periodische Curve mit absoluter Genauigkeit durch eine convergente Reihe von der Form (2) wiedergegeben werden kann. Der entsprechende Satz für die Darstellung von Häufigkeitscurven scheint bei der Reihe (3) nicht zu gelten, jedoch kann man, wie ich a. a. O. gezeigt habe, convergente Reihen von der Gestalt (3) bilden, die eine vorgelegte H.-C., wenn auch nicht mit absoluter Genauigkeit, so doch innerhalb beliebig enger Grenzen wiedergeben. Letzteres reicht aber bei beobachteten Curven vollständig aus, denn bei diesen sind die Ordinaten theils mit Beobachtungsfehlern, theils mit den Resten unausgeglichener Zufälligkeiten behaftet, so dass eine absolute Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung nicht einmal theoretisch nothwendig ist.

6. Zur Herstellung der Entwickelung (3) können unendlich viele Functionen Φ dienen; selbstverständlich wird man, wenn nicht besondere Gründe vorliegen, die einfachste bevorzugen. Zu dem Ende führen wir die aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung wohlbekannte Transcendente $\Phi(x)$ ein, die durch die Gleichung

$$\sqrt{\pi}\,\Phi(x) = 2\int_0^x dt\, \exp(-t^2) \tag{4}$$

definirt wird. Tafeln für diese Function finden sich an vielen Stellen, meistens allerdings mit überflüssigen Decimalen und mit unbequem großem Intervall. In der Collectiv-Maßlehre kommt man in der Regel mit der handlichen vierstelligen Tafel aus, die Herr Kämpfe[1]) aus einer größeren Tafel interpolirt hat. In dem Fechner'schen Buche hat Herr Lipps diese vierstellige Tafel reproducirt und eine für manche Zwecke angenehme fünfstellige Tafel hinzugefügt.

Die successiven Ableitungen von Φ bezeichnen wir durch Anhängung der Indices 1, 2, 3, ...; die halbe erste Ableitung ist, wie aus der Gleichung

$$\sqrt{\pi}\,\Phi(x)_1 = 2\exp(-x^2) \tag{5}$$

hervorgeht, nichts anderes als das einfache Exponentialgesetz.

Außer der Darstellung (4) benutzen wir noch die andere

$$\pi\,\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v}\sin(2xv)\exp(-v^2)\,. \tag{6}$$

Die Uebereinstimmung der beiden Gleichungen (4) und (6) lässt sich mit Hülfe der in der Integralrechnung entwickelten Eigenschaften der sogenannten Gamma-Functionen unschwer nachweisen, sobald man in (4) und (6) die rechten Seiten nach Potenzen von x entwickelt.

Bedeutet a eine positive Constante und setzt man in (6) für v das Product aw und für x den Quotienten $y : a$, so wird

$$\pi\,\Phi\left(\frac{y}{a}\right) = \int \frac{dw}{w}\sin(2yw)\exp(-a^2w^2)\,.$$

Lässt man a gegen Null gehen, so geht $y : a$ gegen $+\infty$ oder $-\infty$, je nachdem y positiv oder negativ ist. Nun ist $\Phi(y)$ eine ungerade Function von y, die nach Ausweis der Tafeln für $y = \pm\infty$ gleich

1) Philos. Studien, Bd. IX. S. 147—150.

± 1 wird. Man erhält also, wenn $a = 0$ gesetzt wird, je nach dem Vorzeichen von y,

$$+\pi = \int \frac{dw}{w} \sin(2yw), \quad (y > 0),$$

$$-\pi = \int \frac{dw}{w} \sin(2yw), \quad (y < 0).$$

Wird hierin y von vorn herein gleich Null gesetzt, so nehmen die vorstehenden Integrale statt des Werthes $\pm \pi$ den Werth Null an. Um die hiernach möglichen drei Fälle zusammenzufassen, führen wir das Symbol $\operatorname{sg}(y)$ (gesprochen signum von y), ein, das den Werth $+1$ oder 0 oder -1 bedeuten soll, je nachdem y positiv oder null oder negativ ist. Man hat dann

$$\pi \operatorname{sg}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{w} \sin(2yw). \tag{7}$$

Bedeutet i, wie üblich, die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$, so kann man statt der Gleichungen (6) und (7) auch schreiben

$$\pi\, \Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{iv} \exp(2ixv - v^2), \tag{8}$$

$$\pi \operatorname{sg}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{iw} \exp(2iyw), \tag{9}$$

wenn man hinzufügt, dass am Schlusse der Rechnung die imaginären Bestandtheile einfach fortzulassen sind.

7. Bildet man von (8) p-mal nach einander die Ableitung nach x, so erhält man

$$\pi\, \Phi(x)_p = \int \frac{dv}{iv} (2iv)^p \exp(2ixv - v^2). \tag{10}$$

Neben dieser Integraldarstellung der Ableitungen ist noch eine andere vorhanden, die sich unmittelbar aus (4) ergibt. Schreibt man die aus (4) folgende Gleichung (5) in der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\pi}\,\Phi(x+v)_1 &= 2\ \exp(-(x+v)^2) \\ &= 2\ \exp(-x^2-2xv-v^2) \\ &= \sqrt{\pi}\,\Phi(x)_1\ \exp(-2xv-v^2), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

und entwickelt den letzten Exponentialfactor nach Potenzen von v in die Reihe

$$\left.\begin{aligned} \exp(-2xv-v^2) &= \sum_q R(x)_q (2v)^q, \\ (q &= 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

so erhält man aus (11)

$$\Phi(x+v)_1 = \Phi(x)_1 \sum_q R(x)(2v)^q.$$

Differenzirt man links und rechts p-mal nach v und setzt dann v gleich Null, so wird

$$\Phi(x)_{p+1} = 2^p p!\, R(x)_p\, \Phi(x)_1\,. \tag{13}$$

Das Bildungsgesetz der R ergibt sich ohne Schwierigkeit, wenn man in (12) die beiden Ausdrücke

$$\exp(-2xv) \quad \text{und} \quad \exp(-v^2)$$

für sich nach v entwickelt und die beiden Reihen ausmultiplicirt. Man erhält dann für die geraden R

$$\left.\begin{aligned} 2^0 R(x)_0 &= \frac{1}{0!\,0!} = 1, \\ 2^2 R(x)_2 &= \frac{(2x)^2}{0!\,2!} - \frac{1}{1!\,0!}, \\ 2^4 R(x)_4 &= \frac{(2x)^4}{0!\,4!} - \frac{(2x)^2}{1!\,2!} + \frac{1}{2!\,0!}, \\ &\ldots\ldots, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

und für die ungeraden R

$$\left.\begin{aligned} 2^1 R(x)_1 &= -\frac{2x}{0!\,1!}, \\ 2^3 R(x)_3 &= -\frac{(2x)^3}{0!\,3!} + \frac{2x}{1!\,1!}, \\ 2^5 R(x)_5 &= -\frac{(2x)^5}{0!\,5!} + \frac{(2x)^3}{1!\,3!} - \frac{2x}{2!\,1!}, \\ &\ldots\ldots, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

wo das Gesetz des Fortschreitens unmittelbar ersichtlich ist.

Die R sind gerade oder ungerade Polynome von x, deren Grad mit der Nummer des betreffenden R übereinstimmt. Beachtet man nun den Verlauf von Φ_1, so erkennt man aus (13), dass die Φ_p für große Werthe von x in ähnlicher Weise gegen Null gehen, wie Φ_1, wenn auch die Abnahme mit wachsendem Index immer langsamer erfolgt. Werden ferner die Φ als Ordinaten zu den Abscissen x über derselben Abscissenachse abgetragen, so entspricht jedem Maximum oder Minimum einer Φ-Curve bei dem nächstfolgenden Φ ein Schnitt mit der Abscissenachse. Beachtet man nun den Satz, dass bei einer stetigen Curve zwischen zwei Schnitten mit der Abscissenachse stets wenigstens ein Maximum oder Minimum liegt, so gelangt man zu dem Ergebniss, dass Φ_p im endlichen p Maxima und Minima besitzt und die Abscissenachse in $p - 1$ verschiedenen Punkten schneidet. Daraus folgt dann noch, dass R_p gerade p reelle und von einander verschiedene Wurzeln besitzt, und dass die von den Wurzeln eingenommene Strecke mit zunehmendem Index der R wächst.

8. Bezeichnet man die Ableitung eines R mit R' und bildet von (12) die Ableitung nach x, so wird

$$\exp(-2xv - v^2) = -\sum_q R'(x)_q (2v)^{q-1},$$

woraus durch Vergleichung mit (12) sofort

$$-R'(x)_q = R(x)_{q-1} \tag{16}$$

folgt. Ferner liefert die Ableitung von (13)

$$\Phi_{p+2} = 2^p p!\, R'_p \Phi_1 + 2^p p!\, R_p \Phi_2 .$$

Drückt man hierin die Φ und R' nach (13) und (16) aus, so gelangt man zu der Recursionsformel

$$0 = (2p + 2) R_{p+1} + 2x R_p + R_{p-1}, \tag{17}$$

aus der dann noch

$$0 = \Phi_{p+2} + 2x\Phi_{p+1} + 2p\Phi_p \tag{18}$$

folgt. Man kann (18) benutzen, um die höheren Φ aus den niedrigeren zu berechnen, indessen nimmt dabei für größere x oder p die Genauigkeit der Rechnung rasch ab, weil dann die Fehler der niedrigeren Φ vergrößert in die höheren eingehen.

Schreibt man die Gleichung (9) in der Gestalt

$$\pi \operatorname{sg}(y - x) = \int \frac{dv}{iv} \exp(2iyv - 2ixv)$$

$$= \int \frac{dv}{iv} \exp(2iyv - v^2) \,.\, \exp(-2ixv + v^2)\,,$$

so lässt sich für den zweiten Exponentialfactor nach (12) die Reihenentwicklung

$$\exp(-2ixv + v^2) = \Sigma\, R(x)_q (2iv)^q \tag{21}$$

ansetzen, womit

$$\pi \operatorname{sg}(y - x) = \Sigma\, R(x)_q \int \frac{dv}{iv} (2iv)^q \exp(2iyv - v^2)$$

wird. Hieraus fließt aber unter Berücksichtigung von (10) sofort die Reihenentwicklung

$$\operatorname{sg}(y - x) = \sum_q R(x)_q \Phi(y)_q\,, \qquad (q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)\,, \tag{22}$$

wo unter Φ_0 die Function Φ selber zu verstehen ist. Diese Gleichung wird uns dazu dienen, die gesuchte Darstellung der Häufigkeitscurven herzustellen.

9. Für das Folgende ist es zunächst erforderlich, den Begriff der H.-C. schärfer festzusetzen, als es oben geschehen war. Hierbei werden wir die C.-G. in »stetige« und »unstetige« scheiden, je nachdem die möglichen Werthe des Arguments eine stetige Mannigfaltigkeit bilden oder aber auf ein System discreter Werthe beschränkt bleiben.

Wenn man bei einem stetigen C.-G. die möglichen Werthe des Arguments als Abscissen abträgt, so werden sie im allgemeinen eine gewisse endliche Strecke stetig erfüllen. Man kann jedoch, z. B. bei den Beobachtungsfehlern, Fälle construiren, bei denen das Gebiet der möglichen Argumente in mehrere getrennte Strecken zerfällt, also »Lücken« besitzt. Es ist indessen nicht nöthig, darauf besonders einzugehen, weil der Fall eines lückenhaften Arguments gerade so zu behandeln ist, wie der eines lückenfreien. Ferner kann es, namentlich bei theoretisch construirten C.-G., vorkommen, dass die

Argumentstrecke nach einer oder nach beiden Seiten hin ins Unendliche reicht. Um diesen Grenzfall nicht besonders berücksichtigen zu müssen, benutzen wir den Umstand, dass die Festsetzung des veränderlichen Merkmals eines C.-G. noch keineswegs vorschreibt, wie dieses Merkmal in Zahlen auszudrücken sei. Wenn z. B. bei einer Recrutentafel die gemessenen Körperlängen in Centimetern angegeben sind, so ist es allerdings naheliegend, mit diesen Zahlen weiter zu rechnen. Es hindert aber nichts, dass man als Argument des C.-G. statt der Körperlängen ihre Logarithmen oder irgend eine andere passende Function zu Grunde legt. Demgemäß ist es erlaubt. wenn das Gebiet des veränderlichen Merkmals x ins Unendliche reicht, als Argument z. B. die Größe

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$

einzuführen, wodurch die Argumentstrecke sofort ins Endliche gerückt wird. Da die gleiche Bemerkung auch für unstetige C.-G. zutrifft, so wollen wir weiterhin voraussetzen, dass die Argumentwerthe, denen Glieder eines C.-G. entsprechen oder entsprechen können, stets endlich seien.

In der Urliste erscheint der C.-G. als eine Zahlenreihe, deren Glieder die einzelnen Beobachtungen in derjenigen Anordnung wiedergeben, in der sie zunächst erhalten worden sind. Die als beobachtet notirten Werthe des Arguments mögen mit a, die Gesammtmenge der einzelnen Glieder des C.-G. mit m bezeichnet werden, wobei wir uns die a zugleich immer als Punkte auf einer Abscissenachse denken. Durch Umordnen der Urliste entsteht die Vertheilungstafel, die wir uns mit Fechner zweispaltig denken. Die erste Spalte enthält die beobachteten a nach ihrer Größe geordnet, jedoch unter Fortlassung der Wiederholungen, so dass die aufgeführten a sämmtlich verschieden sind. Dafür wird in der zweiten Spalte neben jedem a die Zahl z gesetzt, die angibt, wie oft das betreffende a in der Urliste vorkommt. Die Summe der z ist offenbar gleich m. Fügt man der Tafel ein nicht beobachtetes a hinzu und setzt für das entsprechende z den Werth Null an, so wird dadurch an der Bedeutung der Tafel nichts geändert, im Besonderen bleibt der Satz $m = \Sigma z$ bestehen. Unterscheidet man mit Fechner »volle« und »leere« a, je nachdem das zugehörige z von Null verschieden ist oder nicht, so kann man demnach die Tafel durch Hinzufügung beliebig vieler leerer a erweitern, ohne etwas wesentliches zu ändern. Eine solche Erweiterung denken wir uns im besonderen stets nach den Stellen $\pm\infty$ der Abscissenachse hin vorgenommen.

10. Ist nun zunächst ein stetiger C.-G. vorgelegt, so sind die a, weil es sich um die Messungen einer stetigen Veränderlichen handelt, nicht mit absoluter Schärfe, sondern nur abgerundet gegeben. Ein bestimmtes a ist also jedesmal der Vertreter aller Argumentwerthe, die zwischen zwei, den Punkt a einschließenden Punkten x' und x'' ($x' < x''$) liegen. Geht das Argument durch x' oder x'' hindurch, so ändert sich das entsprechende, als beobachtet notirte a sprungweise, zugleich wechselt die Abrundung ihr Vorzeichen. Wir wollen deshalb die Punkte x', x'' kurz als »Wechselpunkte« bezeichnen. Dies vorausgeschickt bilden wir jetzt die Summe aller z, deren a unterhalb eines vorgeschriebenen Wechselpunktes x liegen, und setzen diese Summe gleich $mH(x)$. Da das Product mH die Menge der Glieder unterhalb x angibt, so können wir H selber als die »relative Häufigkeit bis zu der Stelle x hin« bezeichnen. Trägt man zu allen Wechselpunkten x, die auf der Abscissenachse vorkommen können, die entsprechenden $H(x)$ als Ordinaten ab, so erhält man eine Punktreihe P, die anfangs in der Abscissenachse verläuft, dann aufsteigt und schließlich in eine Parallele zur Achse mit dem Abstande Eins übergeht. Da man von der Punktreihe P ausgehend den Inhalt der Vertheilungstafel rückwärts wieder herstellen kann, so ist in P offenbar alles enthalten, was die vorgelegten Beobachtungen über den betrachteten C.-G. auszusagen gestatten.

Aus der Summentafel, die zu jedem Wechselpunkte x das zugehörige $H(x)$ liefert, können wir uns jetzt durch irgend ein Interpolationsverfahren Werthe von $H(x)$ für andere, nicht zu den Wechselpunkten gehörige x abgeleitet denken, wodurch die Punktreihe P zu einer Häufigkeitscurve erweitert wird. Der Sinn dieser Curve besteht dann darin, dass sie angibt, wie viele Glieder unterhalb irgend eines beliebigen x im Falle abrundungsfreier Messungen erhalten worden wären. Die Unbestimmtheit, die mit der vorgenommenen Interpolation vorläufig verbunden ist, lassen wir einstweilen auf sich beruhen — sie liegt in der Natur der Sache, weil die Ergebnisse aus Messungen stetiger Größen wegen der Abrundung im allgemeinen stets nur innerhalb eines gewissen Spielraumes bestimmt sind. Um jedoch die Unbestimmtheit thunlichst einzuengen, fügen wir die, durch passende Ausführung der Interpolation zu erfüllende, Voraussetzung hinzu, dass die interpolirte Function $H(x)$ stetig sei, ferner eine im allgemeinen stetige Ableitung $\varphi(x)$ besitze und niemals abnehme. Die Ableitung $\varphi(x)$ bezeichnen wir als das »Vertheilungsgesetz« des betrachteten C.-G. und die entsprechende Curve als die »Vertheilungscurve«.

Aus der Entstehung des Vertheilungsgesetzes fließen sofort folgende Sätze. Die Function φ ist niemals negativ und für hinreichend große absolute Beträge von x constant gleich Null. Da $H(-\infty)$ gleich Null, und $H(+\infty)$ gleich Eins ist, so wird

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt, \quad H(\infty) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt. \tag{23}$$

Ferner ist der Ausdruck

$$H(c) - H(b) = \int_{b}^{c} \varphi(t)\,dt$$

einerseits gleich der relativen Häufigkeit der zwischen den Argumenten b und c liegenden Glieder des C.-G., anderseits gleich dem Inhalt des Flächenstücks, das von der Vertheilungscurve, der Abscissenachse und den beiden zu b und c gehörigen Ordinaten begrenzt wird.

Wenn $X(x)$ eine beliebige Function des Arguments x bedeutet, so denke man sich für alle Werthe von x zwischen den Grenzen $\pm\infty$ die entsprechenden Werthe von X berechnet und daraus, unter Berücksichtigung der Häufigkeit, mit der die einzelnen x nach dem Vertheilungsgesetz $\varphi(x)$ auftreten, das arithmetische Mittel gebildet. Dieses Mittel nennen wir den »nach $\varphi(x)$ gebildeten Durchschnitt von X« und bezeichnen es kurz durch das Symbol $D(X)$, wobei dann jedesmal das zu Grunde gelegte Vertheilungsgesetz hinzu zu denken ist. Da die Häufigkeit der x in dem Intervall von x bis $x + dx$ durch das Product $\varphi(x)dx$ gemessen wird, und da ferner die Summe dieser Producte den Werth Eins besitzt, so erhält man für den betrachteten Durchschnitt den Ausdruck

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{24}$$

11. Gehen wir jetzt zu den unstetigen C.-G. über, für die als Beispiel die oben erwähnte Auszählung der Endnullen einer Logarithmentafel dienen kann, so ist zunächst ersichtlich, dass die beobachteten a abrundungsfrei sind; das einzelne a ist nicht mehr der Vertreter aller Punkte einer Strecke, sondern bedeutet ausschließlich den hingeschriebenen Zahlenwerth. In Folge dessen liefert der zu einem a gehörige Quotient

$$\psi(a) = z : m$$

sofort das Vertheilungsgesetz der a. An die Stelle der Function $\varphi(x)$ bei den stetigen C.-G. tritt also jetzt eine Function $\psi(x)$, die im allgemeinen Null ist und nur für die discreten Werthe $x = a$ die positiven und echt gebrochenen Werthe $\psi(a)$ annimmt, wobei zugleich die Summe aller $\psi(a)$ gleich Eins wird. Ferner nimmt der nach $\psi(x)$ gebildete Durchschnitt einer beliebigen Function $X(x)$ jetzt die Gestalt

$$D(X) = \Sigma\, X(a)\psi(a) \tag{24 a}$$

an, wo die Summe über alle vollen a der Vertheilungstafel auszudehnen ist.

Um bei der Behandlung der unstetigen C.-G. das für die stetigen geltende Schema beibehalten zu können, wollen wir neben $\psi(x)$ noch ein stetiges Vertheilungsgesetz $\varphi(x)$ einführen. Zu dem Ende denke man sich die Strecken zwischen je zwei auf einander folgenden a halbirt und behandle diese Halbirungspunkte x genau so, wie vorhin die Wechselpunkte. Danach hat man also, um zu jedem angesetzten x das entsprechende $H(x)$ zu erhalten, die Summe der z für alle a unterhalb x zu bilden und diese Summe gleich $mH(x)$ zu setzen. Die gefundenen $H(x)$ führen dann, wie vorhin, durch Interpolation zu einem stetigen Vertheilungsgesetz $\varphi(x)$, und der Ausdruck

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt \tag{25}$$

gibt die relative Häufigkeit derjenigen a an, die unterhalb x liegen.

Wird die vorstehende Gleichung benutzt, um aus einem bekannten $\varphi(x)$ die $H(x)$ zu berechnen, so sind selbstverständlich die x auf die Halbirungspunkte zwischen den a zu beschränken, wenn die H die Summen der unterhalb x liegenden $\psi(a)$ angeben sollen. Auch ist zu beachten, dass die Punktreihe, die den Verlauf von $\psi(x)$ darstellt, im allgemeinen nicht auf der φ-Curve liegen wird.

12. Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt die gesuchte Reihenentwickelung rasch herleiten. Wir führen die von x abhängende Größe $E(x)$ durch die Gleichung

$$2E(x) = \mathrm{sg}\,(b - x) + 1$$

ein, in der b eine Constante bedeutet. Offenbar wird E gleich Eins oder Null, je nachdem x unterhalb oder oberhalb b liegt, während man für $x = b$ den Werth $E = \frac{1}{2}$ erhält. Bildet man also mit dem stetigen Vertheilungsgesetz $\varphi(x)$ nach (24) aus E den Durchschnitt

$$D[E(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} E(x)\,\varphi(x)\,dx\,,$$

so lässt sich die rechte Seite unter Berücksichtigung von (23) auch in der Gestalt

$$\int_{-\infty}^{b} \varphi(x)\,dx = H(b)$$

schreiben, d. h. man erhält der Reihe nach

$$\begin{aligned} H(b) &= D[E(x)]\,, \\ 2H(b) &= D[\mathrm{sg}\,(b-x) + 1]\,, \\ &= D[\mathrm{sg}\,(b-x)] + 1\,, \\ 2H(b) - 1 &= D[\mathrm{sg}\,(b-x)]\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Bedeuten h und c zwei beliebige Constanten, mit der Einschränkung, dass h stets positiv sein soll, und setzt man in (22) für x und y die beiden Verbindungen

$$h(x - c) \quad \text{und} \quad h(y - c)\,,$$

so wird, weil $\mathrm{sg}\,(hy - hx) = \mathrm{sg}\,(y - x)$ ist,

$$\mathrm{sg}\,(y - x) = \sum_q R[h(x - c)_q] \,.\, \Phi[h(y - c)]_q \,.$$

Bildet man hiervon den Durchschnitt nach der Veränderlichen x und nach dem Vertheilungsgesetz $\varphi(x)$, so wird nach (26)

$$\left.\begin{aligned} 2H(y) - 1 = \sum_q D(R[h(x-c)]_q) \,.\, \Phi[h(y - c)]_q \,, \\ (q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \,. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Damit ist die verlangte Entwicklung zunächst für ein stetiges Vertheilungsgesetz hergestellt. Sie enthält in den Φ-Functionen die beiden verfügbaren Constanten h und c, während die Coefficienten als Durchschnitte der R-Größen auftreten und die Constanten h, c ebenfalls enthalten.

Für die unstetigen C.-G. lässt sich die vorstehende Rechnung mit dem gleichen Erfolge durchführen, indessen ist es bequemer, statt der unstetigen Function $\psi(x)$ die stetige Function $\varphi(x)$ zu benutzen, die in der oben angegebenen Weise aus ψ hergeleitet werden kann.

Um übersichtlichere Formeln zu erhalten, wollen wir (27) mit etwas veränderten Bezeichnungen ansetzen. Ist

$$\left.\begin{aligned} y = h(x - c), \\ 2^n X_n = 2\Phi(y)_n\,, \quad 2A_n = 2^n D[R(y)_n]\,, \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)\,, \\ X_0 = 2H(x) - 1 - \Phi(y)\,, \end{aligned}\right\} \qquad (28a)$$

so wird, weil R_0 und $D(R_0)$ constant gleich Eins sind,

$$X_0 = A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + \ldots \qquad (28b)$$

Die Größen X_1, X_2, ... sind aus den am Schlusse angehängten und unmittelbar verständlichen Tafeln direct zu entnehmen. Die gesuchten Werthe sind dort vierstellig bis zu dem Index 6 und dem Argument 4,00 gegeben, was bis auf weiteres mehr als ausreichend sein dürfte. In der Regel wird die scharfe Rechnung mit drei Stellen ausreichen, so dass man, auch bei vierstelliger Rechnung, sich gewöhnlich um die zweiten Differenzen nicht zu kümmern hat.

Ueber die Herstellung der Tafeln möge noch Folgendes bemerkt werden. Die 2400 Tafelwerthe wurden einzeln mit siebenstelligen Logarithmen berechnet, dann auf sechs Stellen abgerundet und durch

Differenzen geprüft. Außerdem habe ich zur Controle noch jeden zehnten Tafelwerth unabhängig nach einem abweichenden Formelsystem abgeleitet. Danach ist zu hoffen, dass die vorliegenden Tafeln von der völligen Correctheit nur ganz vereinzelt um eine Einheit der letzten Stelle abweichen. Die Abspaltung der Potenzen von 2 ist erfolgt, um bei der Rechnung mit Zahlen von einigermaßen gleicher Größenordnung zu thun zu haben.

13. Zur Berechnung der X-Größen ist es nöthig, dass man zuvor Verfügung über die einstweilen unbestimmt gelassenen Constanten h und c getroffen habe. Selbstverständlich wird man die h, c nicht willkürlich, sondern so wählen, dass sie zu der Beschaffenheit des C.-G. eine bestimmte Beziehung haben. Zu dem Ende wollen wir die Größen h und c aus der Bedingung bestimmen, dass die beiden Coefficienten A_1 und A_2 verschwinden. Damit wird zunächst

$$\begin{aligned} 0 = A_1 = D[R(y)_1] &= D[-h(x-c)]\,, \\ 0 &= -hD(x) + hc\,, \\ c &= D(x)\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Diesen besonderen Werth von c wollen wir mit c_0 bezeichnen. Als eine erste, meistens schon recht genaue Annäherung kann man den Durchschnitt aus den a benutzen, d. h. ansetzen

$$c_0 = (\Sigma\, za) : (\Sigma\, z)\,.$$

Weiter wird

$$\begin{aligned} 0 = A_2 &= 2D[R(y)_2] \\ &= D[h^2(x-c)^2 - \tfrac{1}{2}]\,, \end{aligned}$$

also, wenn wir das gesuchte h mit h_0 bezeichnen,

$$2h_0^2 D[(x-c)^2] = 1\,. \tag{30}$$

Für die D-Größe erhält man eine Näherung, wenn man aus den Quadraten der $a-c$ den Durchschnitt bildet, also den Quotienten

$$[\Sigma\, z(a-c)^2] : (\Sigma\, z)$$

berechnet. Da indessen die Ansetzung der Quadrate bei einem umfangreichen C.-G. immerhin lästig ist, und da ferner zunächst nur ein vorläufiger Werth von h_0 nöthig ist, so kann man die Rechnung auf folgende Weise abkürzen. Wenn das Zeichen $|x|$ den absoluten

Betrag von x bedeutet und wenn ferner die Vertheilung der x durch das Gauß'sche Gesetz gegeben ist, so gilt, wie in der Fehlertheorie gezeigt wird, die Gleichung

$$2D(x^2) = \pi[D(|x|)]^2 .$$

Geht man nun davon aus, dass die Vertheilung der $a - c$ in der Regel mit einer gewissen, wenn auch manchmal rohen, Annäherung dem Gauß'schen Gesetze folgt, so kann man nach den Formeln

$$M = (\Sigma z|a - c|) : (\Sigma z), \qquad \pi(hM)^2 = 1$$

rechnen.

Die Größen h_0 und c_0 haben in der Fehlertheorie eine wohlbekannte Bedeutung. Unterliegen die Fehler einer gemessenen Größe x dem Gauß'schen Gesetz, so ist c_0 der wahre Werth von x, und h_0 die »Präcision«. Berechnet man ferner die Größe s aus

$$2(h_0 s)^2 = 1 ,$$

so ist s der »mittlere Fehler« der Messungen. Da die einfache Uebertragung dieser Worte in die Collectiv-Maßlehre zu manchen Schiefheiten führen würde, so erscheint es angezeigt, andere Bezeichnungen zu wählen. Die Größe c_0 heißt bei Fechner »arithmetisches Mittel« des C.-G.; in unserem Gedankengange ist c_0 gleich $D(x)$, kann also kurz der »Durchschnitt der x« genannt werden. Die Größe s kann man passend als die »Streuung« des C.-G. bezeichnen, denn je größer s ist, desto weiter dehnt sich die Strecke aus, über die sich die Werthe der a ausbreiten. Für h_0 kann eine besondere Bezeichnung entbehrt werden, weil h_0 nur als eine Hülfsgröße der Rechnung auftritt, sobald $D(x)$ und s als charakteristische Stücke des C.-G. aufgefasst werden. Dazu kommt noch ein anderer Umstand. Die beobachteten a sind bei den stetigen C.-G. in der Regel ausgedehnte Größen, denen eine bestimmte Dimension zukommt. Die gleiche Dimension kommt dann auch den Größen x, c, s zu, während h zu diesen Größen hinsichtlich der Dimension reciprok ist. Zur Veranschaulichung der Resultate ist also s sicher passender als h.

Hat man einen C.-G. durch Entwicklung nach den X-Größen in einer die Beobachtungen erschöpfenden Weise dargestellt, so erscheinen als die ihn charakterisirenden Bestimmungsstücke erstlich

$D(x)$ und s, d. h. Durschschnitt und Streuung, zweitens die Reihe der Coefficienten A_3, $A_4, \ldots$, die als dimensionslose Zahlen auftreten und in einfacher Weise mit den Durchschnitten $D(R)$ zusammenhängen.

14. Es ist nun noch zu zeigen, wie sich auf Grund der bisherigen Entwicklungen der Gang der Rechnung im einzelnen gestaltet. Wenn die Vertheilungstafel vorliegt, so ist zunächst eine »Summentafel« zur Berechnung der $H(x)$ herzustellen. Hierbei verfährt man zweckmäßig in folgender Weise. Man legt in der Vertheilungstafel den a-Größen einen leeren Werth, nämlich $a = -\infty$, vor, ordnet diesem aber nicht den ihm zukommenden Werth $z = 0$ zu, sondern den Werth $-\frac{1}{2}m$. Mit dieser vorgelegten Zeile beginnend führt man nun schrittweise das Aufsummiren der z aus, das offenbar mit dem Werthe $+\frac{1}{2}m$ schließen muss. Die einzelnen Summen liefern dann nicht die Größen mH, sondern die Werthe von

$$\tfrac{1}{2}m[2H(x) - 1],$$

aus denen durch Division mit $\frac{1}{2}m$ sofort die beiden ersten Terme des Ausdruckes von X_0 hervorgehen.

Der zweite Schritt ist die Berechnung der vorläufigen Werthe von $D(x)$ und h, worüber schon oben das Nöthige gesagt worden ist. Daran schließt sich die Festsetzung der x, d. h. der Wechsel- oder Halbirungspunkte, für die man die Gleichungen (28 b) bilden will. Ist die Vertheilungstafel nur kurz, so wird man alle Punkte der genannten Art, die zwischen den beiden äußersten vollen a liegen, heranziehen, während man sich bei sehr langen Vertheilungstafeln unter Umständen mit einer Auswahl passender Punkte begnügen kann. Nach erfolgter Wahl der x sind die Argumente y der X-Größen zu bilden und an der Hand der Tafeln die Gleichungen (28 b) anzusetzen, aus denen die gesuchten Unbekannten A ermittelt werden sollen.

In der Regel wird die Anzahl der Gleichungen größer sein, als die der Unbekannten, so dass eine Ausgleichung erforderlich ist. Da die Gründe, die in der Fehlertheorie die Bevorzugung der Methode der kleinsten Quadrate rechtfertigen, im vorliegenden Falle nicht durchschlagend sind, so bleibt dem Rechner bei der Wahl des zu benutzenden Ausgleichungsmodus ein ziemlich weiter Spielraum.

Recht brauchbar ist hier das Cauchy'sche Verfahren, zumal es wegen der schrittweise erfolgenden Elimination der Unbekannten schon während der Rechnung zu übersehen erlaubt, wie viele von den Unbekannten überhaupt mitzunehmen sind.

Statt des Systems (28 b) kann man auch die Bedingungen benutzen, die aus jenem System entstehen, wenn man darin jede Gleichung von der folgenden abzieht. Hierbei wird man vor Ausführung der Subtraction am Anfang und Ende noch die beiden Gleichungen hinzufügen, die zu dem Argument $x = \pm\infty$ gehören, weil andernfalls die beiden äußersten Gleichungen von (28 b) verloren gehen würden. Man gelangt damit zu derjenigen Anordnung, die bisher bei der Bearbeitung von statistischen Curven bevorzugt worden ist. In dem umgeformten System erfahren die Coefficienten der Unbekannten um so mehr Zeichenwechsel, je höher ihr Index ist. In Folge dessen wird das an sich sehr primitive Mayer'sche Verfahren brauchbar. Werden die umgeformten Gleichungen in der Gestalt

$$T_0 = A_1 T_1 + A_2 T_2 + A_3 T_3 + \dots \tag{31}$$

geschrieben, so multiplicire man zur Bildung der ersten Normalgleichung jede Gleichung (31) mit ihrem $\mathrm{sg}(T_1)$ und summire die Producte. Eben so multiplicire man für die zweite Normalgleichung jede Gleichung (31) mit ihrem $\mathrm{sg}(T_2)$ und summire wieder, u. s. w., bis die nöthigen Normalgleichungen gebildet sind, deren Auflösung dann die gesuchten A liefert. Führt man die Rechnung aus, so erkennt man bald, dass sich die Normalgleichungen auch direct aus (28 b) nach einer einfachen Regel hätten bilden lassen. Man wird hierdurch auf einen Weg geführt, der da, wo er zulässig ist, vor allen anderen den Vorzug verdienen dürfte. Angenommen, bei einem vorgelegten stetigen C.-G. seien die a-Intervalle so klein, dass trotz eines großen m die x im allgemeinen nur kleine Werthe besitzen, dann wird man aus der Summentafel die H-Größen nicht bloß für die angesetzten Wechselpunkte, sondern auch für irgend welche x durch Interpolation mit ausreichender Sicherheit entnehmen können. Damit ist nun die Möglichkeit gegeben, die Gleichungen (28 b) für ein System der y-Größen zu bilden, das im voraus und ein für allemal fest vorgeschrieben ist. Das Gleiche gilt dann aber auch für die X_1, X_2, ... und für die Eliminationsfactoren, so dass die Auflösung darauf hinauskommt, aus den Größen X_0 mit fest vorgeschriebenen Multiplicatoren gewisse lineare Verbindungen zu bilden. Ein sehr geeignetes System erhält man, wenn man für die y die Wurzelwerthe der R-Größen wählt, weil dadurch zugleich auch die Maxima und Minima der Φ-Größen berücksichtigt werden. Ich unterlasse es jedoch, hier auf dieses Verfahren näher einzugehen, weil einer meiner Schüler damit beschäftigt ist, die von Fechner behandelten Fälle nebst einer Anzahl neuer Beispiele nach der oben aus einander gesetzten Methode zu bearbeiten, wobei sich zugleich Gelegenheit bieten wird, verschiedene Einzelheiten zu berühren.

15. Die Ausgleichung schließt mit der Aufstellung der Widersprüche »Beobachtung minus Rechnung«. Damit sind die auszuführenden Rechnungen in der Regel jedoch noch nicht beendigt, weil die erste Ausgleichung für die Coefficienten A_1 und A_2 meistens Werthe ergeben wird, die nicht als verschwindend anzusehen sind. Man hat in Folge dessen aus den vorläufigen Werthen der h, c, A noch die endgültigen Zahlen herzuleiten. Zur Berechnung von h_0 und c_0 aus den gefundenen Werthen von A_1 und A_2 hat man die Gleichungen

$$A_1 = hc - hD(x), \qquad A_2 = h^2 D[(x-c)^2] - \tfrac{1}{2},$$
$$0 = h_0 c_0 - h_0 D(x), \qquad 0 = h_0^2 D[(x-c_0)^2] - \tfrac{1}{2}$$

zu benutzen. Aus der ersten und dritten Gleichung folgt

$$A_1 = h(c - c_0), \tag{32}$$

womit man zunächst c_0 findet. Die zweite und vierte Gleichung lassen sich, wenn man die zu h und h_0 gehörenden Streuungen s und s_0 durch die Bedingungen

$$2(hs)^2 = 1, \qquad 2(h_0 s_0)^2 = 1$$

einführt, in der Gestalt

$$(1 + 2A_2)s^2 = D[(x-c)^2], \qquad s_0^2 = D[(x-c_0)^2]$$

schreiben, woraus durch Subtraction

$$(1 + 2A_2)s^2 - s_0^2 = D[(2x - c - c_0)(c_0 - c)] = (c_0 - c)^2$$

oder

$$s_0^2 = (1 + 2A_2)s^2 - (c_0 - c)^2 \tag{33}$$

folgt. Besitzen die Verbesserungen von h und c größere Werthe, so wird eine Wiederholung der Ausgleichung mit den verbesserten h, c rathsam sein. Im anderen Falle kann man die Verbesserung von A_3, A_4, ... auf folgende Weise direct finden. Man bezeichne die Coefficienten der Reihe mit A oder B oder C, je nachdem sie mit den Werthepaaren h, c oder h, c_0 oder h_0, c_0 gebildet worden sind, so dass

$$2A_n = 2^n D(R[h(x-c)]_n), \qquad 2B_n = 2^n D(R[h(x-c_0)]_n),$$
$$2C_n = 2^n D(R[h_0(x-c_0)]_n)$$

wird, wobei die Größen A_0, B_0, C_0 gemeinsam den Werth $\frac{1}{2}$ besitzen. Dann kann man nach (12) zunächst ansetzen

$$D[\exp(-2hxv + 2hcv - v^2)] = 2\sum_n A_n v^n,$$
$$D[\exp(-2hxv + 2hc_0 v - v^2)] = 2\sum_n B_n v^n.$$

Mit der Abkürzung $f = 2h(c_0 - c)$ liefert die Division der beiden vorstehenden Gleichungen

$$\Sigma B_n v^n = \exp(fv)\, \Sigma A_n v^n,$$

woraus durch Ausmultipliciren auf der rechten Seite nach einer kleinen Reduction die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
B_1 &= 0, \\
B_2 &= A_2 - \tfrac{1}{4}f^2, \\
B_3 &= A_3 + A_2 f - \tfrac{1}{6}f^2, \\
B_4 &= A_4 + A_3 f + \tfrac{1}{2}A_2 f^2 - \tfrac{1}{16}f^4, \\
B_5 &= A_5 + A_4 f + \tfrac{1}{2}A_3 f^2 + \tfrac{1}{6}A_2 f^3 - \tfrac{1}{60}f^5, \\
B_6 &= A_6 + A_5 f + \tfrac{1}{2}A_4 f^2 + \tfrac{1}{6}A_3 f^3 + \tfrac{1}{24}A_2 f^4 - \tfrac{1}{288}f^6
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

folgen. Damit ist Umwandlung der A in die B gegeben. Um die B in die C zu verwandeln, setze man mit den Abkürzungen

$$h_0 : h = g, \qquad g^2 - 1 = k$$

nach (12) die Gleichungen

$$D[\exp(-2hxgv + 2hc_0 gv - g^2v^2)] = 2\,\Sigma B_n (gv)^n,$$
$$D[\exp(-2h_0 xv + 2h_0 c_0 v - v^2)] = 2\,\Sigma C_n v^n$$

an, deren Division auf

$$\Sigma\, C_n v^n = \exp(kv^2)\, \Sigma\, B_n (gv)^n$$

und weiter auf

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= C_2 = 0\,, \\ C_3 &= B_3 g^3\,, \\ C_4 &= B_4 g^4 - \tfrac{1}{4}k^2\,, \\ C_6 &= B_5 g^5 + B_3 g^3 k\,, \\ C_6 &= B_6 g^6 + B_4 g^4 k - \tfrac{1}{6}k^3 \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

führt. Die Anwendung der Formeln (34) und (35) wird offenbar um so bequemer, je kleiner f und k sind.

16. Vergleicht man die hier gegebenen Rechnungsvorschriften mit dem Verfahren Fechner's, so erkennt man, dass die beiden Methoden von der primären Vertheilungstafel an aus einander gehen. Fechner leitet, weil für ihn die Kenntniss des »dichtesten« Werthes, d. h. des Maximums von $\varphi(x)$, unentbehrlich ist, aus der primären Tafel eine »reducirte« her, in der die unregelmäßigen Sprünge der primären Tafel möglichst ausgeglichen sind, und passt dann sein zweitheiliges Gesetz durch angemessene Wahl der drei darin enthaltenen willkürlichen Parameter der beobachteten Curve möglichst gut an. Im vorliegenden Falle wird das Maximum von φ nicht gebraucht. Wünscht man es zu kennen, so genügt es, von der rechten Seite in (27) die zweite Ableitung zu bilden, dann dazu für die Gegend des Maximums eine kleine Ephemeride zu rechnen und aus dieser das Argument zu entnehmen, für welches die genannte Ableitung verschwindet. In ähnlicher Weise lässt sich auch der »Centralwerth« finden, d. h. die Stelle, an der H gleich $\frac{1}{2}$ wird, oder die beiden Seiten von (27) verschwinden. Im übrigen liegt offenbar der wesentliche Unterschied der beiden Methoden nicht in dem Aeußerlichen der Rechnung, sondern darin, dass in der Reihe (27) zur Darstellung eines vorgelegten C.-G. dem Rechner eine, theoretisch unbegrenzte, Anzahl von Constanten zur Verfügung steht, während bei Fechner nur drei Constanten verfügbar sind.

Zum Schlusse mag noch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass die angewandte Darstellung nicht die einzige denkbare und auch sicherlich nicht die einzige brauchbare ist. So kann man z. B. aus der Reihe (27) eine andere herleiten, deren Glieder sämmtlich die Gestalt

$$l\Phi\,[h(x-c)]$$

besitzen, und in der die Constanten l, h, c von einem Gliede zum anderen ihren Werth ändern, während die Summe der l gleich Eins ist. Wenn ein C.-G. eine solche Darstellung mit positiven l zulässt, so kann man das dahin deuten, dass er durch Mischung von anderen C.-G. entstanden sei, die einzeln dem einfachen Exponentialgesetz gehorchen. Derartige Fälle sind bei Reihen von Beobachtungsfehlern nachweisbar. Auf der anderen Seite lässt sich das Auftreten negativer l dahin deuten, dass zwar eine Mischung von einfachen Exponentialgesetzen vorliege, dass aber gewisse, zur Vollständigkeit der Mischung nothwendige Bestandtheile fehlen. Ein solcher Fall würde z. B. vorliegen, wenn bei einer Messungsreihe stärker abweichende Beobachtungen unterdrückt und die Fehler der übrig bleibenden Messungen zu einem C.-G. vereinigt werden.

Eine weitere Abänderung von (27) ergibt sich aus folgender Betrachtung. Man denke sich, dass bei der Beobachtung eines C.-G. dem Beobachter alle a, die außerhalb einer gewissen Strecke liegen, unzugänglich bleiben, dass also der C.-G., wie wir kurz sagen können, »unvollständig« ist. Behandelt man nun eine solche Reihe nach dem für vollständige C.-G. geltenden Schema, so erhalten die in (27) nöthigen H-Größen offenbar nicht die richtigen Werthe, weil sie erstlich mit einem zu kleinen m berechnet werden, und zweitens sämmtlich um denselben constanten Betrag entstellt sind. Diesen Umstand kann man aber dadurch berücksichtigen, dass man auf der rechten Seite von (27) ein constantes unbekanntes Glied hinzufügt und ferner dem Gliede, das die Function Φ selber enthält, statt des Coefficienten Eins einen vorläufig unbekannten Coefficienten gibt. Selbstverständlich liefern dann die aus der Ausgleichung hervorgehenden Werthe der Coefficienten von $\Phi_1, \ldots$ nicht die Größen $D(R)$, sondern die mit dem Coefficienten von Φ multiplicirten Durchschnittsgrößen.

Mit den vorstehenden Bemerkungen will ich abbrechen. Für die weitere Entwicklung des von Fechner entworfenen Systems der »empirischen Häufigkeitslehre« ist vor allem erforderlich, dass zunächst einmal ausgedehnte Anwendungen vorliegen, die über das Gebiet der bloßen Rechnungsbeispiele hinausgehen.

Leipzig, 27. Juni 1898.

x	$\Phi(x)_1$		$\Phi(x)_2 : 2$		$\Phi(x)_3 : 4$		$\Phi(x)_4 : 8$		$\Phi(x)_5 : 16$		$\Phi(x)_6 : 32$
0.00	+ 1.1284		0.0000		− 0.5642		0.0000		+ 0.8463		0.0000
.01	+ 1.1283	1	− 0.0113	113	− 0.5640	2	+ 0.0169	169	+ 0.8459	4	− 0.0423
.02	1.1279	4	0.0226	113	0.5635	5	0.0338	169	0.8446	13	0.0845
.03	1.1274	5	0.0338	112	0.5627	8	0.0507	169	0.8425	21	0.1267
.04	+ 1.1266	8	− 0.0451	113	− 0.5615	12	+ 0.0675	168	+ 0.8395	30	− 0.1686
.05	1.1256	10	0.0563	112	0.5600	15	0.0843	168	0.8357	38	0.2103
.06	1.1243	13	0.0675	112	0.5581	19	0.1009	166	0.8311	46	0.2518
.07	+ 1.1229	14	− 0.0786	111	− 0.5559	22	+ 0.1175	166	+ 0.8257	54	− 0.2928
.08	1.1212	17	0.0897	111	0.5534	25	0.1340	165	0.8194	63	0.3335
.09	1.1193	19	0.1007	110	0.5506	28	0.1503	163	0.8123	71	0.3737
0.10	+ 1.1172	21	− 0.1117	110	− 0.5474	32	+ 0.1665	162	+ 0.8045	78	− 0.4134
.11	+ 1.1148	24	− 0.1226	109	− 0.5439	35	+ 0.1825	160	+ 0.7958	87	− 0.4525
.12	1.1122	26	0.1335	109	0.5401	38	0.1983	158	0.7864	94	0.4909
.13	1.1095	27	0.1442	107	0.5360	41	0.2139	156	0.7762	102	0.5287
.14	+ 1.1065	30	− 0.1549	107	− 0.5316	44	+ 0.2293	154	+ 0.7652	110	− 0.5658
.15	1.1033	32	0.1655	106	0.5268	48	0.2445	152	0.7535	117	0.6021
.16	1.0999	34	0.1760	105	0.5218	50	0.2595	150	0.7411	124	0.6375
.17	+ 1.0962	37	− 0.1864	104	− 0.5164	54	+ 0.2742	147	+ 0.7280	131	− 0.6721
.18	1.0924	38	0.1966	102	0.5108	56	0.2886	144	0.7143	137	0.7057
.19	1.0884	40	0.2068	102	0.5049	59	0.3027	141	0.6998	145	0.7384
0.20	+ 1.0841	43	− 0.2168	100	− 0.4987	62	+ 0.3166	139	+ 0.6847	151	− 0.7701
.21	+ 1.0797	44	− 0.2267	99	− 0.4922	65	+ 0.3301	135	+ 0.6690	157	− 0.8007
.22	1.0751	46	0.2365	98	0.4855	67	0.3433	132	0.6527	163	0.8302
.23	1.0702	49	0.2462	97	0.4785	70	0.3562	129	0.6358	169	0.8587
.24	+ 1.0652	50	− 0.2557	95	− 0.4713	72	+ 0.3688	126	+ 0.6184	174	− 0.8859
.25	1.0600	52	0.2650	93	0.4638	75	0.3809	121	0.6004	180	0.9120
.26	1.0546	54	0.2742	92	0.4560	78	0.3928	119	0.5819	185	0.9368
.27	+ 1.0490	56	− 0.2832	90	− 0.4480	80	+ 0.4042	114	+ 0.5629	190	− 0.9604
.28	1.0433	57	0.2921	89	0.4399	81	0.4153	111	0.5435	194	0.9827
.29	1.0374	59	0.3008	87	0.4314	85	0.4260	107	0.5236	199	1.0038
0.30	+ 1.0313	61	− 0.3094	86	− 0.4228	86	+ 0.4362	102	+ 0.5034	202	− 1.0235
.31	+ 1.0250	63	− 0.3177	83	− 0.4140	88	+ 0.4461	99	+ 0.4827	207	− 1.0418
.32	1.0186	64	0.3259	82	0.4050	90	0.4555	94	0.4617	210	1.0588
.33	1.0120	66	0.3339	80	0.3958	92	0.4646	91	0.4404	213	1.0744
.34	+ 1.0052	68	− 0.3418	79	− 0.3864	94	+ 0.4731	85	+ 0.4187	217	− 1.0887
.35	0.9983	69	0.3494	76	0.3769	95	0.4813	82	0.3968	219	1.1015
.36	0.9912	71	0.3568	74	0.3671	98	0.4890	77	0.3747	221	1.1129
.37	+ 0.9840	72	− 0.3641	73	− 0.3573	98	+ 0.4963	73	+ 0.3523	224	− 1.1229
.38	0.9767	73	0.3711	70	0.3473	100	0.5031	68	0.3298	225	1.1315
.39	0.9692	75	0.3780	69	0.3372	101	0.5095	64	0.3071	227	1.1387
0.40	+ 0.9615	77	− 0.3846	66	− 0.3269	103	+ 0.5154	59	+ 0.2842	229	− 1.1445
.41	+ 0.9538	77	− 0.3911	65	− 0.3166	103	+ 0.5208	54	+ 0.2613	229	− 1.1488
.42	0.9459	79	0.3973	62	0.3061	105	0.5258	50	0.2383	230	1.1518
.43	0.9379	80	0.4033	60	0.2955	106	0.5304	46	0.2152	231	1.1533
.44	+ 0.9298	81	− 0.4091	58	− 0.2849	106	+ 0.5344	40	+ 0.1922	230	− 1.1534
.45	0.9215	83	0.4147	56	0.2742	107	0.5381	37	0.1691	231	1.1522
.46	0.9132	83	0.4201	54	0.2634	108	0.5412	31	0.1461	230	1.1496
.47	+ 0.9047	85	− 0.4252	51	− 0.2525	109	+ 0.5439	27	+ 0.1231	230	− 1.1457
.48	0.8962	85	0.4302	50	0.2416	109	0.5461	22	0.1003	228	1.1404
.49	0.8875	87	0.4349	47	0.2307	109	0.5479	18	0.0775	228	1.1338
0.50	+ 0.8788	87	− 0.4394	45	− 0.2197	110	+ 0.5492	13	+ 0.0549	226	− 1.1259

x	$\Phi(x)_1$		$\Phi(x)_2 : 2$		$\Phi(x)_3 : 4$		$\Phi(x)_4 : 8$		$\Phi(x)_5 : 16$		$\Phi(x)_6 : 32$	
0.50	+ 0.8788		− 0.4394		− 0.2197		+ 0.5492		+ 0.0549		− 1.1259	
.51	+ 0.8700	88	− 0.4437	43	− 0.2087	110	+ 0.5501	9	+ 0.0325	224	− 1.1168	91
.52	0.8610	90	0.4477	40	0.1977	110	0.5505	4	+ 0.0103	222	1.1064	104
.53	0.8520	90	0.4516	39	0.1867	110	0.5505	0	− 0.0118	221	1.0948	116
.54	+ 0.8430	90	− 0.4552	36	− 0.1757	110	+ 0.5501	4	− 0.0335	217	− 1.0820	128
.55	0.8338	92	0.4586	34	0.1647	110	0.5492	9	0.0550	215	1.0681	139
.56	0.8246	92	0.4618	32	0.1537	110	0.5479	13	0.0762	212	1.0530	151
.57	+ 0.8154	92	− 0.4648	30	− 0.1428	109	+ 0.5461	18	− 0.0971	209	− 1.0369	161
.58	0.8060	94	0.4675	27	0.1319	109	0.5440	21	0.1177	206	1.0197	172
.59	0.7967	93	0.4700	25	0.1210	109	0.5414	26	0.1379	202	1.0015	182
0.60	+ 0.7872	95	− 0.4723	23	− 0.1102	108	+ 0.5385	29	− 0.1578	199	− 0.9823	192
.61	+ 0.7778	94	− 0.4744	21	− 0.0995	107	+ 0.5351	34	− 0.1772	194	− 0.9621	202
.62	0.7683	95	0.4763	19	0.0888	107	0.5314	37	0.1962	190	0.9411	210
.63	0.7587	96	0.4780	17	0.0782	106	0.5273	41	0.2148	186	0.9192	219
.64	+ 0.7491	96	− 0.4795	15	− 0.0677	105	+ 0.5228	45	− 0.2330	182	− 0.8965	227
.65	0.7395	96	0.4807	12	0.0573	104	0.5180	48	0.2507	177	0.8730	235
.66	0.7299	96	0.4817	10	0.0470	103	0.5128	52	0.2679	172	0.8487	243
.67	+ 0.7203	96	− 0.4826	9	− 0.0368	102	+ 0.5072	56	− 0.2846	167	− 0.8238	249
.68	0.7106	97	0.4832	6	0.0267	101	0.5014	58	0.3009	163	0.7982	256
.69	0.7010	96	0.4837	5	0.0168	99	0.4952	62	0.3166	157	0.7720	262
0.70	+ 0.6913	97	− 0.4839	2	− 0.0069	99	+ 0.4887	65	− 0.3317	151	− 0.7452	268
.71	+ 0.6816	97	− 0.4839	0	+ 0.0028	97	+ 0.4819	68	− 0.3464	147	− 0.7180	272
.72	0.6719	97	0.4838	1	0.0124	96	0.4749	70	0.3605	141	0.6902	278
.73	0.6622	97	0.4834	4	0.0218	94	0.4675	74	0.3740	135	0.6621	281
.74	+ 0.6526	96	− 0.4829	5	+ 0.0311	93	+ 0.4599	76	− 0.3869	129	− 0.6335	286
.75	0.6429	97	0.4822	7	0.0402	91	0.4521	78	0.3993	124	0.6046	289
.76	0.6333	96	0.4813	9	0.0491	89	0.4440	81	0.4111	118	0.5755	291
.77	+ 0.6237	96	− 0.4802	11	+ 0.0579	88	+ 0.4356	84	− 0.4223	112	− 0.5460	295
.78	0.6141	96	0.4790	12	0.0666	87	0.4271	85	0.4330	107	0.5164	296
.79	0.6045	96	0.4776	14	0.0750	84	0.4183	88	0.4430	100	0.4866	298
0.80	+ 0.5950	95	− 0.4760	16	+ 0.0833	83	+ 0.4094	89	− 0.4524	94	− 0.4568	298
.81	+ 0.5855	95	− 0.4742	18	+ 0.0914	81	+ 0.4002	92	− 0.4613	89	− 0.4268	300
.82	0.5760	95	0.4723	19	0.0993	79	0.3909	93	0.4695	82	0.3968	300
.83	0.5666	94	0.4703	20	0.1070	77	0.3814	95	0.4771	76	0.3669	299
.84	+ 0.5572	94	− 0.4681	22	+ 0.1146	76	+ 0.3718	96	− 0.4842	71	− 0.3369	300
.85	0.5479	93	0.4657	24	0.1219	73	0.3621	97	0.4906	64	0.3071	298
.86	0.5386	93	0.4632	25	0.1290	71	0.3522	99	0.4965	59	0.2774	297
.87	+ 0.5293	93	− 0.4605	27	+ 0.1360	70	+ 0.3422	100	− 0.5017	52	− 0.2479	295
.88	0.5202	91	0.4577	28	0.1427	67	0.3321	101	0.5064	47	0.2187	292
.89	0.5110	92	0.4548	29	0.1493	66	0.3220	101	0.5105	41	0.1896	291
0.90	+ 0.5020	90	− 0.4518	30	+ 0.1556	63	+ 0.3117	103	− 0.5140	35	− 0.1609	287
.91	+ 0.4930	90	− 0.4486	32	+ 0.1617	61	+ 0.3014	103	− 0.5169	29	− 0.1324	285
.92	0.4840	90	0.4453	33	0.1677	60	0.2911	103	0.5193	24	0.1044	280
.93	0.4752	88	0.4419	34	0.1734	57	0.2806	105	0.5211	18	0.0767	277
.94	+ 0.4664	88	− 0.4384	35	+ 0.1789	55	+ 0.2702	104	− 0.5223	12	− 0.0494	273
.95	0.4576	88	0.4347	37	0.1842	53	0.2598	104	0.5231	8	− 0.0226	268
.96	0.4490	86	0.4310	37	0.1893	51	0.2493	105	0.5232	1	+ 0.0037	263
.97	+ 0.4404	86	− 0.4272	38	+ 0.1942	49	+ 0.2388	105	− 0.5229	3	+ 0.0296	259
.98	0.4319	85	0.4232	40	0.1988	46	0.2284	104	0.5221	8	0.0549	253
.99	0.4235	84	0.4192	40	0.2033	45	0.2180	104	0.5207	14	0.0796	247
1.00	+ 0.4151	84	− 0.4151	41	+ 0.2076	43	+ 0.2076	104	− 0.5189	18	+ 0.1038	242

x	$\Phi(x)_1$		$\Phi(x)_2:2$		$\Phi(x)_3:4$		$\Phi(x)_4:8$		$\Phi(x)_5:16$		$\Phi(x)_6:32$	
1.00	+0.4151		−0.4151		+0.2076		+0.2076		−0.5189		+0.1038	
.01	+0.4068	83	−0.4109	42	+0.2116	40	+0.1972	104	−0.5166	23	+0.1273	235
.02	0.3987	81	0.4066	43	0.2154	38	0.1869	103	0.5138	28	0.1503	230
.03	0.3906	81	0.4023	43	0.2191	37	0.1766	103	0.5106	32	0.1726	223
.04	+0.3826	80	−0.3979	44	+0.2225	34	+0.1665	101	−0.5069	37	+0.1942	216
.05	0.3747	79	0.3934	45	0.2257	32	0.1564	101	0.5028	41	0.2152	210
.06	0.3668	79	0.3889	45	0.2288	31	0.1464	100	0.4983	45	0.2355	203
.07	+0.3591	77	−0.3843	46	+0.2316	28	+0.1364	100	−0.4934	49	+0.2550	195
.08	0.3515	76	0.3796	47	0.2342	26	0.1266	98	0.4881	53	0.2739	189
.09	0.3439	76	0.3749	47	0.2367	25	0.1169	97	0.4824	57	0.2920	181
1.10	+0.3365	74	−0.3701	48	+0.2389	22	+0.1073	96	−0.4764	60	+0.3094	174
.11	+0.3291	74	−0.3653	48	+0.2410	21	+0.0979	94	−0.4701	63	+0.3260	166
.12	0.3219	72	0.3605	48	0.2428	18	0.0885	94	0.4634	67	0.3419	159
.13	0.3147	72	0.3556	49	0.2445	17	0.0793	92	0.4564	70	0.3570	151
.14	+0.3076	71	−0.3507	49	+0.2460	15	+0.0703	90	−0.4491	73	+0.3714	144
.15	0.3007	69	0.3458	49	0.2473	13	0.0614	89	0.4415	76	0.3850	136
.16	0.2938	69	0.3408	50	0.2484	11	0.0526	88	0.4337	78	0.3979	129
.17	+0.2870	68	−0.3358	50	+0.2494	10	+0.0440	86	−0.4256	81	+0.4099	120
.18	0.2804	66	0.3308	50	0.2502	8	0.0356	84	0.4173	83	0.4212	113
.19	0.2738	66	0.3258	50	0.2508	6	0.0273	83	0.4088	85	0.4318	106
1.20	+0.2673	65	−0.3208	50	+0.2513	5	+0.0192	81	−0.4001	87	+0.4416	98
.21	+0.2610	63	−0.3158	50	+0.2516	3	+0.0113	79	−0.3911	90	+0.4506	90
.22	0.2547	63	0.3107	51	0.2518	2	+0.0036	77	0.3820	91	0.4589	83
.23	0.2485	62	0.3057	50	0.2518	0	−0.0039	75	0.3728	92	0.4664	75
.24	+0.2425	60	−0.3007	50	+0.2516	2	−0.0113	74	−0.3634	94	+0.4732	68
.25	0.2365	60	0.2957	50	0.2513	3	0.0185	72	0.3539	95	0.4793	61
.26	0.2307	58	0.2906	51	0.2509	4	0.0255	70	0.3442	97	0.4846	53
.27	+0.2249	58	−0.2856	50	+0.2503	6	−0.0322	67	−0.3345	97	+0.4893	47
.28	0.2192	57	0.2806	50	0.2496	7	0.0388	66	0.3247	98	0.4932	39
.29	0.2137	55	0.2756	50	0.2487	9	0.0452	64	0.3148	99	0.4965	33
1.30	+0.2082	55	−0.2707	49	+0.2478	9	−0.0514	62	−0.3048	100	+0.4991	26
.31	+0.2028	54	−0.2657	50	+0.2467	11	−0.0574	60	−0.2948	100	+0.5010	19
.32	0.1976	52	0.2608	49	0.2455	12	0.0632	58	0.2848	100	0.5023	13
.33	0.1924	52	0.2559	49	0.2442	13	0.0688	56	0.2747	101	0.5030	7
.34	+0.1873	51	−0.2510	49	+0.2427	15	−0.0742	54	−0.2646	101	+0.5030	0
.35	0.1824	49	0.2462	48	0.2412	15	0.0794	52	0.2546	100	0.5025	5
.36	0.1775	49	0.2414	48	0.2395	17	0.0844	50	0.2445	101	0.5014	11
.37	+0.1727	48	−0.2366	48	+0.2378	17	−0.0892	48	−0.2345	100	+0.4997	17
.38	0.1680	47	0.2319	47	0.2360	18	0.0938	46	0.2246	99	0.4974	23
.39	0.1634	46	0.2272	47	0.2341	19	0.0982	44	0.2146	100	0.4947	27
1.40	+0.1589	45	−0.2225	47	+0.2321	20	−0.1024	42	−0.2048	98	+0.4914	33
.41	+0.1545	44	−0.2179	46	+0.2300	21	−0.1064	40	−0.1950	98	+0.4876	38
.42	0.1502	43	0.2133	46	0.2278	22	0.1102	38	0.1853	97	0.4834	42
.43	0.1460	42	0.2088	45	0.2256	22	0.1138	36	0.1757	96	0.4787	47
.44	+0.1419	41	−0.2043	45	+0.2233	23	−0.1172	34	−0.1661	96	+0.4736	51
.45	0.1378	41	0.1999	44	0.2209	24	0.1204	32	0.1567	94	0.4681	55
.46	0.1339	39	0.1955	44	0.2184	25	0.1235	31	0.1474	93	0.4621	60
.47	+0.1300	39	−0.1911	44	+0.2159	25	−0.1263	28	−0.1382	92	+0.4558	63
.48	0.1262	38	0.1868	43	0.2134	25	0.1290	27	0.1292	90	0.4492	66
.49	0.1225	37	0.1826	42	0.2108	26	0.1315	25	0.1203	89	0.4422	70
1.50	+0.1189	36	−0.1784	42	+0.2081	27	−0.1338	23	−0.1115	88	+0.4348	74

x	$\Phi(x)_1$	Δ	$\Phi(x)_2:2$	Δ	$\Phi(x)_3:4$	Δ	$\Phi(x)_4:8$	Δ	$\Phi(x)_5:16$	Δ	$\Phi(x)_6:32$	Δ
.50	+ 0.1189	35	− 0.1784	41	+ 0.2081	27	− 0.1338	21	− 0.1115	86	+ 0.4348	76
.51	+ 0.1154	34	− 0.1743	41	+ 0.2054	27	− 0.1359	20	− 0.1029	85	+ 0.4272	79
.52	0.1120	34	0.1702	40	0.2027	28	0.1379	18	0.0944	83	0.4193	81
.53	0.1086	33	0.1662	40	0.1999	28	0.1397	17	0.0861	81	0.4112	84
.54	+ 0.1053	32	− 0.1622	39	+ 0.1971	28	− 0.1414	14	− 0.0780	80	+ 0.4028	86
.55	0.1021	31	0.1583	39	0.1943	29	0.1428	14	0.0700	78	0.3942	89
.56	0.0990	31	0.1544	38	0.1914	29	0.1442	11	0.0622	76	0.3853	90
.57	+ 0.0959	29	− 0.1506	37	+ 0.1885	29	− 0.1453	10	− 0.0546	75	+ 0.3763	91
.58	0.0930	29	0.1469	37	0.1856	30	0.1463	9	0.0471	72	0.3672	93
.59	0.0901	29	0.1432	36	0.1826	29	0.1472	7	0.0399	71	0.3579	95
.60	+ 0.0872	27	− 0.1396	36	+ 0.1797	30	− 0.1479	6	− 0.0328	68	+ 0.3484	95
.61	+ 0.0845	27	− 0.1360	35	+ 0.1767	29	− 0.1485	5	− 0.0260	67	+ 0.3389	97
.62	0.0818	26	0.1325	34	0.1738	30	0.1490	3	0.0193	65	0.3292	97
.63	0.0792	26	0.1291	34	0.1708	30	0.1493	2	0.0128	63	0.3195	99
.64	+ 0.0766	25	− 0.1257	34	+ 0.1678	30	− 0.1495	1	− 0.0065	61	+ 0.3096	98
.65	0.0741	24	0.1223	32	0.1648	30	0.1496	1	− 0.0004	59	0.2998	99
.66	0.0717	23	0.1191	32	0.1618	30	0.1495	2	+ 0.0055	57	0.2899	99
.67	+ 0.0694	23	− 0.1159	32	+ 0.1588	30	− 0.1493	2	+ 0.0112	55	+ 0.2800	99
.68	0.0671	22	0.1127	31	0.1558	30	0.1491	4	0.0167	53	0.2701	99
.69	0.0649	22	0.1096	30	0.1528	29	0.1487	5	0.0220	51	0.2602	99
.70	+ 0.0627	21	− 0.1066	30	+ 0.1499	30	− 0.1482	6	+ 0.0271	49	+ 0.2503	98
.71	+ 0.0606	20	− 0.1036	29	+ 0.1469	29	− 0.1476	7	+ 0.0320	47	+ 0.2405	98
.72	0.0586	20	0.1007	28	0.1440	30	0.1469	8	0.0367	45	0.2307	98
.73	0.0566	20	0.0979	28	0.1410	29	0.1461	8	0.0412	44	0.2209	96
.74	+ 0.0546	18	− 0.0951	27	+ 0.1381	29	− 0.1453	10	+ 0.0456	41	+ 0.2113	96
.75	0.0528	18	0.0924	27	0.1352	28	0.1443	10	0.0497	39	0.2017	95
.76	0.0510	18	0.0897	26	0.1324	29	0.1433	11	0.0536	38	0.1922	94
.77	+ 0.0492	17	− 0.0871	26	+ 0.1295	28	− 0.1422	12	+ 0.0574	35	+ 0.1828	93
.78	0.0475	17	0.0845	25	0.1267	28	0.1410	13	0.0609	34	0.1735	92
.79	0.0458	16	0.0820	25	0.1239	28	0.1397	13	0.0643	32	0.1643	90
.80	+ 0.0442	16	− 0.0795	23	+ 0.1211	28	− 0.1384	14	+ 0.0675	30	+ 0.1553	89
.81	+ 0.0426	15	− 0.0772	24	+ 0.1183	27	− 0.1370	14	+ 0.0705	29	+ 0.1464	87
.82	0.0411	15	0.0748	23	0.1156	27	0.1356	15	0.0734	26	0.1377	86
.83	0.0396	14	0.0725	22	0.1129	27	0.1341	16	0.0760	25	0.1291	85
.84	+ 0.0382	14	− 0.0703	22	+ 0.1102	26	− 0.1325	15	+ 0.0785	24	+ 0.1206	83
.85	0.0368	13	0.0681	21	0.1076	26	0.1310	17	0.0809	21	0.1123	81
.86	0.0355	13	0.0660	21	0.1050	26	0.1293	17	0.0830	20	0.1042	79
.87	+ 0.0342	13	− 0.0639	20	+ 0.1024	25	− 0.1276	17	+ 0.0850	19	+ 0.0963	78
.88	0.0329	12	0.0619	20	0.0999	25	0.1259	17	0.0869	17	0.0885	76
.89	0.0317	12	0.0599	19	0.0974	25	0.1242	18	0.0886	15	0.0809	74
.90	+ 0.0305	11	− 0.0580	19	+ 0.0949	24	− 0.1224	18	+ 0.0901	14	+ 0.0735	72
.91	+ 0.0294	11	− 0.0561	18	+ 0.0925	24	− 0.1206	19	+ 0.0915	13	+ 0.0663	70
.92	0.0283	11	0.0543	18	0.0901	23	0.1187	19	0.0928	11	0.0593	68
.93	0.0272	10	0.0525	17	0.0878	24	0.1168	18	0.0939	10	0.0525	66
.94	+ 0.0262	10	− 0.0508	17	+ 0.0854	22	− 0.1150	19	+ 0.0949	8	+ 0.0459	64
.95	0.0252	10	0.0491	16	0.0832	23	0.1131	20	0.0957	7	0.0395	63
.96	0.0242	9	0.0475	16	0.0809	22	0.1111	19	0.0964	7	0.0332	60
.97	+ 0.0233	9	− 0.0459	16	+ 0.0787	22	− 0.1092	19	+ 0.0971	4	+ 0.0272	58
.98	0.0224	9	0.0443	15	0.0765	21	0.1073	20	0.0975	4	0.0214	56
.99	0.0215	8	0.0428	15	0.0744	21	0.1053	20	0.0979	3	0.0158	55
1.00	+ 0.0207		− 0.0413		+ 0.0723		− 0.1033		+ 0.0982		+ 0.0103	

x	$\Phi(x)_1$	$\Phi(x)_2:2$		$\Phi(x)_3:4$		$\Phi(x)_4:8$		$\Phi(x)_5:16$		$\Phi(x)_6:32$	
2.00	+ 0.0207	− 0.0413		+ 0.0723		− 0.1033		+ 0.0982		+ 0.0103	
.01	+ 0.0199	− 0.0399	14	+ 0.0703	20	− 0.1014	19	+ 0.0983	1	+ 0.0051	52
.02	0.0191	0.0385	14	0.0683	20	0.0994	20	0.0984	1	+ 0.0001	50
.03	0.0183	0.0372	13	0.0663	20	0.0974	20	0.0983	1	− 0.0047	48
.04	+ 0.0176	− 0.0359	13	+ 0.0644	19	− 0.0955	19	+ 0.0982	1	− 0.0094	47
.05	0.0169	0.0346	13	0.0625	19	0.0935	20	0.0980	2	0.0138	44
.06	0.0162	0.0334	12	0.0606	19	0.0916	19	0.0976	4	0.0180	42
.07	+ 0.0155	− 0.0322	12	+ 0.0588	18	− 0.0896	20	+ 0.0972	4	− 0.0221	41
.08	0.0149	0.0310	12	0.0571	17	0.0877	19	0.0968	4	0.0259	38
.09	0.0143	0.0299	11	0.0553	18	0.0857	20	0.0962	6	0.0296	37
2.10	+ 0.0137	− 0.0288	11	+ 0.0536	17	− 0.0838	19	+ 0.0956	6	− 0.0331	35
.11	+ 0.0132	− 0.0277	11	+ 0.0520	16	− 0.0819	19	+ 0.0949	7	− 0.0364	33
.12	0.0126	0.0267	10	0.0504	16	0.0800	19	0.0941	8	0.0396	32
.13	0.0121	0.0257	10	0.0488	16	0.0781	19	0.0933	8	0.0424	28
.14	+ 0.0116	− 0.0248	9	+ 0.0472	16	− 0.0763	18	+ 0.0924	9	− 0.0452	28
.15	0.0111	0.0238	10	0.0457	15	0.0745	18	0.0915	9	0.0478	26
.16	0.0106	0.0229	9	0.0442	15	0.0726	19	0.0905	10	0.0502	24
.17	+ 0.0102	− 0.0221	8	+ 0.0428	14	− 0.0708	18	+ 0.0895	10	− 0.0525	23
.18	0.0097	0.0212	9	0.0414	14	0.0691	17	0.0884	11	0.0546	21
.19	0.0093	0.0204	8	0.0401	13	0.0673	18	0.0873	11	0.0566	20
2.20	+ 0.0089	− 0.0196	8	+ 0.0387	14	− 0.0656	17	+ 0.0861	12	− 0.0584	18
.21	+ 0.0085	− 0.0189	7	+ 0.0374	13	− 0.0638	18	+ 0.0850	11	− 0.0601	17
.22	0.0082	0.0181	8	0.0362	12	0.0622	16	0.0837	13	0.0616	15
.23	0.0078	0.0174	7	0.0349	13	0.0605	17	0.0825	12	0.0630	14
.24	+ 0.0075	− 0.0167	7	+ 0.0337	12	− 0.0589	16	+ 0.0812	13	− 0.0642	12
.25	0.0071	0.0161	6	0.0326	11	0.0573	16	0.0799	13	0.0653	11
.26	0.0068	0.0154	7	0.0315	11	0.0557	16	0.0786	13	0.0663	10
.27	+ 0.0065	− 0.0148	6	+ 0.0304	11	− 0.0541	16	+ 0.0773	13	− 0.0672	9
.28	0.0062	0.0142	6	0.0293	11	0.0526	15	0.0759	14	0.0680	8
.29	0.0060	0.0136	6	0.0283	10	0.0511	15	0.0746	13	0.0686	6
2.30	+ 0.0057	− 0.0131	5	+ 0.0273	10	− 0.0496	15	+ 0.0732	14	− 0.0691	5
.31	+ 0.0054	− 0.0125	6	+ 0.0263	10	− 0.0481	15	+ 0.0718	14	− 0.0696	5
.32	0.0052	0.0120	5	0.0253	10	0.0467	14	0.0704	14	0.0699	3
.33	0.0050	0.0115	5	0.0244	9	0.0453	14	0.0690	14	0.0701	2
.34	+ 0.0047	− 0.0111	4	+ 0.0235	9	− 0.0440	13	+ 0.0676	14	− 0.0703	2
.35	0.0045	0.0106	5	0.0226	9	0.0426	14	0.0662	14	0.0703	0
.36	0.0043	0.0102	4	0.0218	8	0.0413	13	0.0648	14	0.0703	0
.37	+ 0.0041	− 0.0097	5	+ 0.0210	8	− 0.0400	13	+ 0.0634	14	− 0.0702	1
.38	0.0039	0.0093	4	0.0202	8	0.0388	12	0.0620	14	0.0700	2
.39	0.0037	0.0089	4	0.0194	8	0.0376	12	0.0606	14	0.0697	3
2.40	+ 0.0036	− 0.0085	4	+ 0.0187	7	− 0.0364	12	+ 0.0592	14	− 0.0694	3
.41	+ 0.0034	− 0.0082	3	+ 0.0180	7	− 0.0352	12	+ 0.0578	14	− 0.0690	4
.42	0.0032	0.0078	4	0.0173	7	0.0340	12	0.0564	14	0.0685	5
.43	0.0031	0.0075	3	0.0166	7	0.0329	11	0.0551	13	0.0680	5
.44	+ 0.0029	− 0.0071	4	+ 0.0160	6	− 0.0318	11	+ 0.0537	14	− 0.0674	6
.45	0.0028	0.0068	3	0.0154	6	0.0308	10	0.0524	13	0.0668	6
.46	0.0027	0.0065	3	0.0147	7	0.0297	11	0.0510	14	0.0661	7
.47	+ 0.0025	− 0.0062	3	+ 0.0142	5	− 0.0287	10	+ 0.0497	13	− 0.0654	7
.48	0.0024	0.0060	2	0.0136	6	0.0278	9	0.0484	13	0.0646	8
.49	0.0023	0.0057	3	0.0131	5	0.0268	10	0.0471	13	0.0638	8
2.50	+ 0.0022	− 0.0054	3	+ 0.0125	6	− 0.0259	9	+ 0.0459	12	− 0.0630	8

x	$\Phi(x)_1$	$\Phi(x)_2 : 2$	$\Phi(x)_3 : 4$	$\Phi(x)_4 : 8$		$\Phi(x)_5 : 16$		$\Phi(x)_6 : 32$	
2.50	+ 0.0022	− 0.0054	+ 0.0125	− 0.0259		+ 0.0459		− 0.0630	
.51	+ 0.0021	− 0.0052	+ 0.0120	− 0.0250	9	+ 0.0446	13	− 0.0621	9
.52	0.0020	0.0050	0.0115	0.0241	9	0.0434	12	0.0612	9
.53	0.0019	0.0047	0.0111	0.0232	9	0.0422	12	0.0603	9
.54	+ 0.0018	− 0.0045	+ 0.0106	− 0.0224	8	+ 0.0410	12	− 0.0593	10
.55	0.0017	0.0043	0.0102	0.0216	8	0.0398	12	0.0583	10
.56	0.0016	0.0041	0.0097	0.0208	8	0.0387	11	0.0573	10
.57	+ 0.0015	− 0.0039	+ 0.0093	− 0.0200	8	+ 0.0375	12	− 0.0563	10
.58	0.0015	0.0037	0.0089	0.0193	7	0.0364	11	0.0553	10
.59	0.0014	0.0036	0.0086	0.0186	7	0.0353	11	0.0543	10
2.60	+ 0.0013	− 0.0034	+ 0.0082	− 0.0179	7	+ 0.0342	11	− 0.0532	11
.61	+ 0.0012	− 0.0032	+ 0.0078	− 0.0172	7	+ 0.0332	10	− 0.0522	10
.62	0.0012	0.0031	0.0075	0.0166	6	0.0321	11	0.0511	11
.63	0.0011	0.0029	0.0072	0.0159	7	0.0311	10	0.0500	11
.64	+ 0.0011	− 0.0028	+ 0.0069	− 0.0153	6	+ 0.0301	10	− 0.0489	11
.65	0.0010	0.0027	0.0066	0.0147	6	0.0292	9	0.0479	10
.66	0.0010	0.0025	0.0063	0.0141	6	0.0282	10	0.0468	11
.67	+ 0.0009	− 0.0024	+ 0.0060	− 0.0136	5	+ 0.0273	9	− 0.0457	11
.68	0.0009	0.0023	0.0057	0.0131	5	0.0264	9	0.0446	11
.69	0.0008	0.0022	0.0055	0.0125	6	0.0255	9	0.0436	10
2.70	+ 0.0008	− 0.0021	+ 0.0052	− 0.0120	5	+ 0.0247	8	− 0.0425	11
.71	+ 0.0007	− 0.0020	+ 0.0050	− 0.0116	4	+ 0.0238	9	− 0.0414	11
.72	0.0007	0.0019	0.0048	0.0111	5	0.0230	8	0.0404	10
.73	0.0007	0.0018	0.0045	0.0106	5	0.0222	8	0.0393	11
.74	+ 0.0006	− 0.0017	+ 0.0043	− 0.0102	4	+ 0.0214	8	− 0.0383	10
.75	0.0006	0.0016	0.0041	0.0098	4	0.0207	7	0.0373	10
.76	0.0006	0.0015	0.0039	0.0094	4	0.0199	8	0.0363	10
.77	+ 0.0005	− 0.0015	+ 0.0038	− 0.0090	4	+ 0.0192	7	− 0.0353	10
.78	0.0005	0.0014	0.0036	0.0086	4	0.0185	7	0.0343	10
.79	0.0005	0.0013	0.0034	0.0082	4	0.0178	7	0.0333	10
2.80	+ 0.0004	− 0.0012	+ 0.0033	− 0.0079	3	+ 0.0172	6	− 0.0324	9
.81	+ 0.0004	− 0.0012	+ 0.0031	− 0.0075	4	+ 0.0166	6	− 0.0314	10
.82	0.0004	0.0011	0.0030	0.0072	3	0.0159	7	0.0305	9
.83	0.0004	0.0011	0.0028	0.0069	3	0.0153	6	0.0296	9
.84	+ 0.0004	− 0.0010	+ 0.0027	− 0.0066	3	+ 0.0147	6	− 0.0287	9
.85	0.0003	0.0010	0.0026	0.0063	3	0.0142	5	0.0278	9
.86	0.0003	0.0009	0.0024	0.0060	3	0.0136	6	0.0269	9
.87	+ 0.0003	− 0.0009	+ 0.0023	− 0.0058	2	+ 0.0131	5	− 0.0261	8
.88	0.0003	0.0008	0.0022	0.0055	3	0.0126	5	0.0252	9
.89	0.0003	0.0008	0.0021	0.0053	2	0.0121	5	0.0244	8
2.90	+ 0.0003	− 0.0007	+ 0.0020	− 0.0050	3	+ 0.0116	5	− 0.0236	8
.91	+ 0.0002	− 0.0007	+ 0.0019	− 0.0048	2	+ 0.0112	4	− 0.0228	8
.92	0.0002	0.0007	0.0018	0.0046	2	0.0107	5	0.0221	7
.93	0.0002	0.0006	0.0017	0.0044	2	0.0103	4	0.0213	8
.94	+ 0.0002	− 0.0006	+ 0.0016	− 0.0042	2	+ 0.0099	4	− 0.0206	7
.95	0.0002	0.0006	0.0015	0.0040	2	0.0094	5	0.0199	7
.96	0.0002	0.0005	0.0015	0.0038	2	0.0091	3	0.0192	7
.97	+ 0.0002	− 0.0005	+ 0.0014	− 0.0036	2	+ 0.0087	4	− 0.0185	7
.98	0.0002	0.0005	0.0013	0.0035	1	0.0083	4	0.0179	6
.99	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	2	0.0080	3	0.0172	7
3.00	+ 0.0001	− 0.0004	+ 0.0012	− 0.0031	2	+ 0.0076	4	− 0.0166	6

x	$\Phi(x)_1$	$\Phi(x)_2 : 2$	$\Phi(x)_3 : 4$	$\Phi(x)_4 : 8$	$\Phi(x)_5 : 16$	$\Phi(x)_6 : 32$
3.00	+ 0.0001	− 0.0004	+ 0.0012	− 0.0031	+ 0.0076	− 0.0166
.01	+ 0.0001	− 0.0004	+ 0.0011	− 0.0030	+ 0.0073	− 0.0160
.02	0.0001	0.0004	0.0011	0.0028	0.0070	0.0154
.03	0.0001	0.0004	0.0010	0.0027	0.0067	0.0148
.04	+ 0.0001	− 0.0003	+ 0.0010	− 0.0026	+ 0.0064	− 0.0143
.05	0.0001	0.0003	0.0009	0.0024	0.0061	0.0137
.06	0.0001	0.0003	0.0009	0.0023	0.0058	0.0132
.07	+ 0.0001	− 0.0003	+ 0.0008	− 0.0022	+ 0.0056	− 0.0127
.08	0.0001	0.0003	0.0008	0.0021	0.0053	0.0122
.09	0.0001	0.0002	0.0007	0.0020	0.0051	0.0117
3.10	+ 0.0001	− 0.0002	+ 0.0007	− 0.0019	+ 0.0049	− 0.0113
.11	+ 0.0001	− 0.0002	+ 0.0007	− 0.0018	+ 0.0046	− 0.0108
.12	0.0001	0.0002	0.0006	0.0017	0.0044	0.0104
.13	0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0042	0.0100
.14	+ 0.0001	− 0.0002	+ 0.0006	− 0.0015	+ 0.0040	− 0.0096
.15	0.0001	0.0002	0.0005	0.0015	0.0038	0.0092
.16	0.0001	0.0002	0.0005	0.0014	0.0037	0.0088
.17	+ 0.0000	− 0.0002	+ 0.0005	− 0.0013	+ 0.0035	− 0.0084
.18		0.0001	0.0004	0.0013	0.0033	0.0081
.19		0.0001	0.0004	0.0012	0.0032	0.0077
3.20		− 0.0001	+ 0.0004	− 0.0011	+ 0.0030	− 0.0074
.21		− 0.0001	+ 0.0004	0.0011	+ 0.0029	− 0.0071
.22		0.0001	0.0003	0.0010	0.0027	0.0068
.23		0.0001	0.0003	0.0010	0.0026	0.0065
.24		− 0.0001	+ 0.0003	− 0.0009	+ 0.0025	− 0.0062
.25		0.0001	0.0003	0.0009	0.0024	0.0059
.26		0.0001	0.0003	0.0008	0.0022	0.0057
.27		− 0.0001	+ 0.0003	− 0.0008	+ 0.0021	− 0.0054
.28		0.0001	0.0002	0.0007	0.0020	0.0052
.29		0.0001	0.0002	0.0007	0.0019	0.0049
3.30		− 0.0001	+ 0.0002	− 0.0007	+ 0.0018	− 0.0047
.31		− 0.0001	+ 0.0002	− 0.0006	+ 0.0017	− 0.0045
.32		0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0043
.33		0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0041
.34		− 0.0001	+ 0.0002	− 0.0005	+ 0.0015	− 0.0039
.35		0.0001	0.0002	0.0005	0.0014	0.0037
.36		0.0000	0.0002	0.0005	0.0013	0.0035
.37			+ 0.0001	− 0.0004	+ 0.0013	− 0.0034
.38			0.0001	0.0004	0.0012	0.0032
.39			0.0001	0.0004	0.0011	0.0031
3.40			+ 0.0001	− 0.0004	+ 0.0011	− 0.0029
.41			+ 0.0001	− 0.0003	+ 0.0010	− 0.0028
.42			0.0001	0.0003	0.0010	0.0026
.43			0.0001	0.0003	0.0009	0.0025
.44			+ 0.0001	− 0.0003	+ 0.0009	− 0.0024
.45			0.0001	0.0003	0.0008	0.0023
.46			0.0001	0.0003	0.0008	0.0022
.47			+ 0.0001	− 0.0002	+ 0.0007	− 0.0020
.48			0.0001	0.0002	0.0007	0.0019
.49			0.0001	0.0002	0.0007	0.0018
3.50			+ 0.0001	− 0.0002	+ 0.0006	− 0.0017

x	$\Phi(x)_1$	$\Phi(x)_2 : 2$	$\Phi(x)_3 : 4$	$\Phi(x)_4 : 8$	$\Phi(x)_5 : 16$	$\Phi(x)_6 : 32$
3.50			+ 0.0001	— 0.0002	+ 0.0006	— 0.0017
.51			+ 0.0001	— 0.0002	+ 0.0006	— 0.0017
.52			0.0001	0.0002	0.0005	0.0016
.53			0.0001	0.0002	0.0005	0.0015
.54			0.0000	— 0.0002	+ 0.0005	— 0.0014
.55				0.0001	0.0005	0.0013
.56				0.0001	0.0004	0.0013
.57				— 0.0001	+ 0.0004	— 0.0012
.58				0.0001	0.0004	0.0011
.59				0.0001	0.0004	0.0011
3.60				— 0.0001	+ 0.0003	— 0.0010
.61				— 0.0001	+ 0.0003	— 0.0010
.62				0.0001	0.0003	0.0009
.63				0.0001	0.0003	0.0009
.64				— 0.0001	+ 0.0003	— 0.0008
.65				0.0001	0.0003	0.0008
.66				0.0001	0.0002	0.0007
.67				— 0.0001	+ 0.0002	— 0.0007
.68				0.0001	0.0002	0.0007
.69				0.0001	0.0002	0.0006
3.70				— 0.0001	+ 0.0002	— 0.0006
.71				— 0.0001	+ 0.0002	— 0.0005
.72				0.0001	0.0002	0.0005
.73				0.0000	0.0002	0.0005
.74					+ 0.0001	— 0.0005
.75					0.0001	0.0004
.76					0.0001	0.0004
.77					+ 0.0001	— 0.0004
.78					0.0001	0.0004
.79					0.0001	0.0003
3.80					+ 0.0001	— 0.0003
.81					+ 0.0001	— 0.0003
.82					0.0001	0.0003
.83					0.0001	0.0003
.84					+ 0.0001	— 0.0003
.85					0.0001	0.0002
.86					0.0001	0.0002
.87					+ 0.0001	— 0.0002
.88					0.0001	0.0002
.89					0.0001	0.0002
3.90					+ 0.0001	— 0.0002
.91					0.0000	— 0.0002
.92						0.0002
.93						0.0001
.94						— 0.0001
.95						0.0001
.96						0.0001
.97						— 0.0001
.98						0.0001
.99						0.0001
4.00						— 0.0001