Zur Methode der richtigen und falschen Fälle im Gebiete der Schallempfindungen.

Von

Erich Mosch.

Mit 11 Figuren im Text.

1. Einleitung.

Unter den psychophysischen Methoden zeichnet sich die Methode der richtigen und falschen Fälle zweifellos dadurch aus, dass über ihre Anwendbarkeit die widersprechendsten Ansichten geherrscht haben und wohl noch herrschen. Eine Anzahl Fragen, die theils die mathematischen Grundlagen, theils die Deutung der Formelgrößen betrafen, gab Anlass zu den lebhaftesten Controversen, ohne dass eine Einigung erzielt worden wäre. Nach diesen Streitigkeiten ist dann ein Stillstand eingetreten; seit etwa 5 Jahren ist keine Arbeit erschienen, die zur Klärung der Fragen beigetragen hätte. Die letzte größere experimentelle Untersuchung über den Gegenstand ist die Dissertation von Kämpfe: »Beiträge zur experimentellen Prüfung der Methode der richtigen und falschen Fälle« [1]; von theoretischen Untersuchungen kommt nur die aus Anlass der Kämpfe'schen Arbeit entstandene Abhandlung von Bruns in Betracht: »Ueber die Ausgleichung statistischer Zählungen in der Psychophysik« [2]. In der Kämpfe'schen Arbeit ist ein äußerst umfassendes Material zur Discussion verschiedener Fragen verwendet worden, die sich hauptsächlich auf die Anwendbarkeit der in den Fechner'schen und Müller'schen Formeln für die Methode der richtigen und falschen Fälle auftretenden mathe-

1) Philos. Studien, VIII. Bd. S. 511. 2) Ebenda, IX. Bd. S. 1.

matischen Hülfsgrößen, insbesondere auf die Aufstellung eines Maßes für die Unterschiedsempfindlichkeit beziehen. Die Bruns'sche Abhandlung, die zum Theil auch die Veranlassung der vorliegenden Arbeit war, zeigt, dass die in der Astronomie und Physik schon seit langem angewandten Regeln der Ausgleichungsrechnung auch für die Psychophysik verwendbar seien, und eröffnet damit zum ersten Male einen Weg, auf dem es möglich ist, jene schon erwähnten Streitfragen auf exactere Weise und daher mit größerer Hoffnung auf Erfolg in Angriff zu nehmen. In vorliegender Arbeit soll daher der Versuch gemacht werden, die in dem Bruns'schen Aufsatze ausgesprochenen Gedanken auf dem Gebiete der Schallempfindungen in Anwendung zu bringen; außerdem war aber noch ein anderes Ziel gesteckt. Für die rechnerische Verwerthung der Methode der richtigen und falschen Fälle existirten nämlich verschiedene Formeln, und es kam zumeist auf den persönlichen Geschmack des Einzelnen an, für welche Behandlungsweise er sich entschied. Ueber die Anwendbarkeit dieser Grundformeln, die sämmtlich auf dem Gauß'schen Fehlergesetze beruhten, zerbrach man sich nicht weiter den Kopf, höchstens dass man, wenn man keine allzu großen Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung gefunden hatte, diesen Punkt durch die Bemerkung erledigt glaubte, dass die Formel die Beobachtungen genügend gut darstellte. Zweck dieser Arbeit soll es nun sein, auch einmal die Grundformeln, die nichts anderes als eine Anwendung des Gauß'schen Fehlergesetzes auf die Psychophysik darstellen, auf ihre Brauchbarkeit hin zu prüfen. Diese Prüfung kann nur auf Grund einer exacten mathematischen Behandlung des Zahlenmaterials, auf Grund einer Ausgleichung vorgenommen werden; die bei der Ausgleichung zurückbleibenden Widersprüche werden dann den Hauptgegenstand der Discussion bilden. Diese Behandlung, die Prüfung der Anwendbarkeit des Gauß'schen Fehlergesetzes, ist um so mehr jetzt eine dringende Forderung geworden, als Fechner selbst in einem nachgelassenen Werke[1]) gezeigt hat, dass das Gauß'sche Fehlergesetz durchaus nicht jene allgemeine Anwendbarkeit besitzt, die man bisher bei ihm voraus-

1) Collectivmaßlehre von G. Th. Fechner, herausgegeben von Gottl. Friedr. Lipps. Eine Darstellung der Fechner'schen Lehren gibt Lipps in Philos. Studien, XIII. Bd. S. 611: Ueber Fechner's Collectivmaßlehre und die Vertheilungsgesetze der Collectivgegenstände.

gesetzt hatte, dass es vielmehr oft durch allgemeinere Vertheilungsgesetze ersetzt werden muss, von denen Fechner selbst mehrere auf inductivem Wege ableitet. Eine mathematisch strenge Ableitung solcher allgemeiner Fehlergesetze hat dann Bruns[1]) gegeben.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit wird nach dem Gesagten mehr auf mathematischem als auf psychologischem Gebiete liegen, erst wenn die Formeln einer eingehenden Prüfung unterzogen sind, wird man zu Auseinandersetzungen psychologischen Charakters übergehen können, insbesondere zu Fragen nach der Bedeutung der Formelgrößen und zur Frage des Weber'schen Gesetzes; indessen werden wir uns bezüglich des letzteren auf wenige Bemerkungen beschränken können, besonders da es auf dem Gebiete, auf dem die hier zu beschreibenden Experimente ausgeführt worden sind, auf dem Gebiete der Schallempfindungen wohl hinreichend bestätigt worden ist.

Was die experimentelle Seite der Arbeit anbetrifft, so ist hier der Versuch gemacht worden, die Versuchsbedingungen möglichst zu verallgemeinern, es wurde nicht, wie bisher, nur mit 2 Schallreizen gearbeitet, sondern deren 4 benutzt; außerdem sind neben den gewöhnlich angewandten Urtheilen »größer«, »gleich«, »kleiner« noch die Urtheile »viel größer« und »viel kleiner« angewandt worden. Ursprünglich wurden auch die Urtheile »undeutlich größer« und »undeutlich kleiner« benutzt, doch ergab sich hier in der ersten Zeit ein ganz geringer Procentsatz dieser Urtheile, bis sie später ganz wegfielen, was übrigens auch mit den Angaben früherer Beobachter übereinstimmt. Diese beiden Klassen von Urtheilen konnten daher zur Berechnung nicht verwendet werden.

Die Urtheile »viel größer« und »viel kleiner« sind übrigens in jüngster Zeit auch auf einem anderen Gebiete in Anwendung gekommen, und zwar wurden sie von Wreschner[2]) zur Beurtheilung von Druckdifferenzen bei der Hebung von Gewichten benutzt. Wreschner hat in der Hauptsache die Urtheilsklassen »viel größer«, »größer«, »gleich«, »kleiner« und »viel kleiner«, und erhält für jede derselben einen regelmäßigen Gang der Urtheile. Was allerdings die

---

1) Bruns, Ueber die Darstellung von Fehlergesetzen. Astron. Nachr. 143. S. 329 und »Zur Collectivmaßlehre« in Philos. Studien, XIV. Bd. S. 339.

2) Wreschner, Methodologische Beiträge zu psychophysischen Messungen.

Verwerthung der Zahlen anbelangt, so ist von einer exacten, d. h. mathematischen Verarbeitung des Zahlenmaterials keine Rede. Alle Resultate werden vielmehr auf Grund allgemeiner Ueberlegungen über den Zahlenverlauf der Urtheile erlangt, dass man aber auf diesem Wege zu sicheren Ergebnissen über Unterschiedsempfindlichkeit und ähnliche Begriffe nicht gelangen kann, liegt auf der Hand; eine streng mathematische Behandlung ist für psychophysische Experimente unerlässlich. Es liegt daher für uns kein Grund vor, weiter auf die Wreschner'schen Ergebnisse Bezug zu nehmen.

Nach diesen allgemeinen Vorbemerkungen über die Ziele unserer Untersuchung gehen wir zunächst zu einigen Erläuterungen, die die mathematische Seite der Methode betreffen, über.

2. Mathematische Entwicklungen.

Die Anwendbarkeit der Methode der richtigen und falschen Fälle beruht bekanntlich darauf, dass eine gewisse, vom Experimentator festgesetzte Reizdifferenz D von der Versuchsperson nicht immer richtig erkannt wird, sondern dass diese bald ein richtiges, bald ein falsches Urtheil über D abgeben wird. Exacter ausgedrückt: Es werden 2 Reize R_1 und R_2 erzeugt, ihre Differenz $D = R_1 - R_2$ wird beobachtet. Es werden dann die Urtheile auftreten: $D > 0$, d. h. der 1. Reiz größer als der zweite; $D = 0$, d. h. beide Reize werden als gleich aufgefasst; und $D < 0$, d. h. der 2. Reiz erscheint größer als der erste. Für jede Differenz werden die Urtheile gesammelt und unter den Rubriken $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$ zusammengestellt. Von Differenz zu Differenz ändern sich dabei natürlich die Anzahlen der in den einzelnen Klassen abgegebenen Urtheile. Es fragt sich, ob man diese Veränderung der Anzahl der Urtheile mit den eingestellten Differenzen durch Formeln darstellen kann. Der erste, der dies versuchte, war Fechner. Bezeichnet man die Anzahl der in der Klasse $D > 0$ abgegebenen Urtheile mit P, die entsprechende Anzahl in der Klasse $D = 0$ mit Z und die in der Klasse $D < 0$ mit N, sowie die Gesammtzahl der abgegebenen Urtheile mit V, so dass $P + Z + N = V$ ist, so leitet Fechner auf Grund des bekannten Gauß'schen Fehlergesetzes die Gleichung ab:

$$\frac{P+\frac{1}{2}Z}{V}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hD}\exp(-t^2)dt,$$

wo h das Gauß'sche Präcisionsmaß ist und $\exp(-t^2)$ die Exponentialfunction von $-t^2$ bedeutet. Aus dieser Formel findet er dann, da P, Z und V aus den Beobachtungen bekannt sind, hD und hieraus h, das er als Maß der Unterschiedsempfindlichkeit betrachtet. Setzen wir noch $P=pV$, $Z=zV$, $N=nV$,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x}\exp(-y^2)dy=\Phi(x),$$

so dass p, z und n die relativen Häufigkeiten der 3 Urtheile $D>0$, $D=0$, $D<0$ bezeichnen, so lautet die Fechner'sche Formel:

$$p+\frac{1}{2}z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi(hD)$$

oder:

$$\Phi(hD)=2p+z-1.$$

Auf andere Weise geht G. E. Müller vor, dem sich übrigens später Fechner auch zum Theil angeschlossen hat. Die Fechner'sche Formel beruht nämlich auf der Voraussetzung, dass es erlaubt ist, die Gleichheitsfälle zu halbiren und die eine Hälfte den »größer«-Urtheilen, die andere den »kleiner«-Urtheilen hinzuzufügen. Gegen diese Vertheilung wendet sich Müller und gelangt zu den Formeln:

$$2p-1=\Phi[h(D-S)]$$

$$2(p+z)-1=\Phi[h(D+S)],$$

aus denen er h und S berechnet, wobei $2S$ die Größe des Gebietes ist, innerhalb dessen Gleichheitsfälle auftreten; das S ist nach Müller die Unterschiedsschwelle. Nicht h, sondern S liefert für ihn ein Maß der Unterschiedsempfindlichkeit.

Wir wenden uns nunmehr zu den Bruns'schen Formeln[1]). Die 3 Urtheile: $>$, $=$, $<$ werden auf einer Abscissenachse verzeichnet,

1) Bruns, Ueber die Ausgleichung etc. S. 5.

auf der auch die Reizdifferenzen von 0 an nach beiden Seiten abgetragen sind. Dann werden die Größer-Urtheile eine gewisse obere Schwelle von $+\infty$ bis x_o, die Gleich-Urtheile eine Zwischenstrecke von x_o bis x_u, endlich die Kleiner-Urtheile eine untere Strecke von x_u bis $-\infty$ umfassen. Bezeichnet man das Fehlergesetz allgemein mit $\varphi(z)$, setzt man ferner

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi(y)\,dy\,,$$

so findet **Bruns** nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgende Formeln:

$$p = \psi(\infty) - \psi(x_o - D)$$
$$z = \psi(x_o - D) - \psi(x_u - D)$$
$$n = \psi(x_u - D) - \psi(-\infty)\,;$$

diese 3 Gleichungen sind aber nicht unabhängig von einander, sondern durch die Relation verbunden: $p + z + n = 1$. In diesen Beobachtungsgleichungen ist zunächst die Form des Fehlergesetzes vollkommen unbestimmt gelassen. Die am nächsten liegende Annahme, die wir ja auch bei **Fechner** und **Müller** fanden, ist die, dass das **Gauß**'sche Fehlergesetz auch hier gilt. Es wäre also:

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp(-h^2x^2) \qquad \psi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hx} \exp(-t^2)\,dt$$

oder, wenn wir wieder die Bezeichnung anwenden:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dy \, \exp(-y^2)\,,$$

so lassen sich die Beobachtungsgleichungen folgendermaßen schreiben:

$$2p - 1 = \Phi[h(D - x_o)]$$
$$2z = \Phi[h(D - x_u)] - \Phi[h(D - x_o)]$$
$$1 - 2n = \Phi[h(D - x_u)]\,,$$

wovon aber eine, etwa die mittlere, überflüssig ist. Vergleicht man die Bruns'schen mit den Müller'schen Formeln, so erkennt man, dass letztere aus ersteren dadurch hervorgehen, dass man setzt: $x_0 = S$, $x_u = -S$.

Um x_o und x_u noch etwas schärfer zu definiren, setzen wir einmal in der 1. Formel $D = x_o$, das andere Mal in der 3. Formel $D = x_u$. Für $D = x_o$ kommt $p = \frac{1}{2}$; für $D = x_u$ kommt $n = \frac{1}{2}$; d. h. x_o ist diejenige Reizdifferenz, bei der die relative Häufigkeit der Größer-Urtheile ebenso groß ist, wie die aller anderen zusammen, bei der also die Wahrscheinlichkeit, dass das Urtheil $D > 0$ abgegeben wird, genau $\frac{1}{2}$ ist; entsprechend ist x_u diejenige Reizdifferenz, bei der die relative Häufigkeit der Kleiner-Urtheile ebenso groß ist, wie die aller andern zusammen.

Hierbei möchte ich gleich auf einen Punkt zu sprechen kommen, der stets ein Streitobject in den Anschauungen der Psychologen gebildet hat: auf die Bedeutung des S, bezw. in unseren Formeln auf die Bedeutung von x_o und x_u. Müller nennt ja S direct die Unterschiedsschwelle und will nur sie als Maß der Unterschiedsempfindlichkeit eingeführt wissen, andere leugnen die Bedeutung von S und gehen wieder auf das Fechner'sche h zurück.

Auch in der schon erwähnten Kämpfe'schen Arbeit wird gesagt[1]: »Für das Müller'sche S ergaben sich nur beim wissentlichen Verfahren Werthe, die als Maß der Unterschiedsempfindlichkeit dienen konnten. Sonst überall war S unregelmäßig und auffallend klein, es nahm mit wachsendem D rasch ab und wurde sehr zeitig Null. — S ist daher mit der Unterschiedsschwelle im allgemeinen nicht identisch, sondern in seiner Größe von den verschiedensten, namentlich wechselnden subjectiven Bedingungen abhängig«. Nun ist aber offenbar die Stelle, wo $p = \frac{1}{2}$ wird, d. h. wo die Wahrscheinlichkeit, das Urtheil $D > 0$ abzugeben, ebenso groß ist wie die Wahrscheinlichkeit, eins der beiden Urtheile $D \lesseqgtr 0$ abzugeben, eine ganz bestimmte. Eine Voraussetzung, die jedenfalls sehr nahe liegt, besteht

---

1) Kämpfe, l. c. S. 589.

offenbar darin, diese Werthe x_o und x_u als für alle Differenzen einer Reihe constante Größen zu betrachten. Zum mindesten kann man ja sehen, wie weit man mit dieser einfachsten Voraussetzung kommt, ehe man zu anderen übergeht. Hält man an dieser Bedingung fest, so sieht man, dass eine unregelmäßige Variation und ein Nullwerden von S, von dem Kämpfe spricht, unmöglich ist. Auf diese Beobachtungen werden wir übrigens bei einer späteren Gelegenheit ausführlicher zurückkommen.

Wenden wir uns nun wieder zu den Bruns'schen Formeln. Diese bezogen sich auf die 3 Urtheilsklassen $D > 0$, $D = 0$ und $D < 0$. Wie schon gesagt, ist nun der Versuch gemacht worden, noch weitere Urtheilsklassen einzuführen, nämlich »viel größer« ($\gg$) und »viel kleiner« ($\ll$). Die Formeln können ohne weiteres auf diesen Fall übertragen werden. Bezeichnen wir die relative Häufigkeit der $\gg$-Urtheile mit p', die der $\ll$-Urtheile mit m', so lauten die Formeln jetzt, wenn wir noch mit Bruns statt des Präcisionsmaßes h das »Unsicherheitsmaß« $U = 1 : h$ einführen:

$$p' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_o' - D}{U}\right)$$

$$p = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_o' - D}{U}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_o - D}{U}\right)$$

$$z = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_o - D}{U}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_u - D}{U}\right)$$

$$n = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_u - D}{U}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_u' - D}{U}\right)$$

$$n' = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_u' - D}{U}\right) + \frac{1}{2}.$$

Bei den folgenden Versuchen wurde aber nur mit $D \geqq 0$ operirt, es fiel daher naturgemäß die Anzahl der $\ll$-Urtheile so gering aus, dass diese Urtheile zur weiteren Rechnung unbrauchbar waren und daher zu den $<$-Urtheilen hinzugerechnet wurden. Es bleiben daher noch 4 Gleichungen, von denen wegen der Beziehung $p' + p + z + n = 1$ nur 3 von einander unabhängig sind. Diese 3 unabhängigen kann man folgendermaßen schreiben:

$$1 - 2p' = \Phi\left(\frac{x_0' - D}{U}\right)$$

$$1 - 2(p + p') = \Phi\left(\frac{x_0 - D}{U}\right)$$

$$2n - 1 = \Phi\left(\frac{x_u - D}{U}\right).$$

Dies sind die Grundgleichungen, von denen wir ausgehen. Der Gang der Rechnung gestaltet sich dann folgendermaßen: Aus den durch die Beobachtungen erlangten Tabellen für p', p, z, n schreibt man die Größen $1 - 2p'$, $1 - 2(p + p')$ und $2n - 1$ heraus und sucht dann aus einer Tafel der Φ-Function[1]) die Argumente, für die die betreffenden Φ-Functionen die Werthe $1 - 2p'$, $1 - 2(p + p')$, $2n - 1$ besitzen. Bezeichnen wir dies Aufsuchen des Argumentes B einer Φ-Function, die den Werth A hat, durch das Symbol $\operatorname{Arg}\Phi(A)$, so dass:

$$B = \operatorname{Arg}\Phi(A) \qquad \Phi(B) = A$$

ist, so erhält man demnach jetzt die Gleichungen:

$$\frac{x_0' - D}{U} = \operatorname{Arg}\Phi(1 - 2p') = -N_1$$

$$\frac{x_0 - D}{U} = \operatorname{Arg}\Phi(1 - 2\overline{p + p'}) = N_2$$

$$\frac{x_u - D}{U} = \operatorname{Arg}\Phi(2n - 1) = -N_3,$$

wobei die Größen N_1, N_2, N_3 aus den Beobachtungen zu entnehmen, also bekannte Zahlen sind, während auf den linken Seiten neben der bekannten Reizdifferenz D sich auch die gesuchten Unbekannten U, x_0', x_0 und x_u befinden. Man erhält demnach für jede Differenz D ein Gleichungensystem von 3 Gleichungen mit 4 Unbekannten:

$$x_0' - N_1 U - D = 0$$

$$x_0 + N_2 U - D = 0$$

$$x_u + N_3 U - D = 0.$$

---

1) In dieser Arbeit wurde die von Kämpfe in Philos. Studien, IX. Bd. zusammengestellte Tafel benutzt.

Hat man eine größere Anzahl Reizdifferenzen benutzt, so erhält man für jede der obigen 3 Formeln eine ebenso große Anzahl Gleichungen, als Reizdifferenzen, die dann am besten nach der Methode der kleinsten Quadrate auszugleichen sind, um die plausibelsten Werthe der Unbekannten zu erhalten. Schließlich sind dann noch die übrig bleibenden Widersprüche zu discutiren.

Dabei ist aber ein Punkt übergangen worden: es kann ja aus irgend welchen Gründen ein constanter Fehler in den Beobachtungen stecken. Der constante Fehler, der die Größe c haben möge, wird auf die Differenz D derart eingewirkt haben, dass man nicht D, sondern etwa $D - c$ beurtheilt hat, man hat also einfach in obigen Formeln statt D $D - c$ zu schreiben, oder, was auf dasselbe herauskommt, man schlägt das c zu den x und führt daher als neue Unbekannte ein: $x_0' + c = \xi_0'$, $x_0 + c = \xi_0$, $x_u + c = \xi_u$, wodurch unsere Grundgleichungen aber ihre Gestalt bewahren. Bei der Berechnung des c aus den schließlich gefundenen Werthen ξ_0 und ξ_u kann man dann annäherungsweise $x_0 = - x_u$ setzen, dann folgt für den constanten Fehler:

$$c = \frac{1}{2}(\xi_0 + \xi_u),$$

und zwar mit einer für die meisten Fälle genügenden Schärfe. Auf den constanten Fehler werden wir daher zunächst keine Rücksicht zu nehmen brauchen.

3. Die Versuchsanordnung.

Die Versuche bezogen sich auf die Unterscheidung von Schallstärken. Als Apparat diente das Fallphonometer[1]), dessen Princip kurz angedeutet werden mag: An 4 senkrecht zum Fußboden stehenden Stahlstäben mit Millimetertheilung sind 4 Elektromagnete verstellbar angebracht. An jedem Elektromagnet befindet sich eine Vorrichtung, durch die bei Stromschluss eine Elfenbeinkugel festgeklemmt werden kann; wird der Strom dann unterbrochen, so lässt diese Klemmvorrichtung nach und die Kugel fällt auf eine kleine Ebenholzplatte.

---

1) Genaue Beschreibung dieses Apparates siehe Wundt, Physiol. Psychol. 4. Aufl. 1. Bd. S. 363.

Solcher Ebenholzplatten sind also vier vorhanden, für jeden Elektromagnet eine; wesentlich war, dass dieselben genau gleichen Klang besaßen. Es wurden daher ein Dutzend solcher Platten geschnitten und durch Probiren vier davon herausgesucht, die am genauesten unter einander übereinstimmten, diese wurden dann, ohne zu wechseln, fortan benutzt. Die Ebenholzplatten liegen auf einem dicken Filze, welch letzterer auf einem Brett aus hartem Holze befestigt ist. Dies Brett ruhte aber bei unseren Versuchen nicht — wie in der »Physiol. Psychol.« gezeichnet ist — auf einem Kasten, der auf dem Boden steht; diese Anordnung ergab starke Klangstörungen. Das Brett wurde vielmehr vermittels einiger Stützen direct an den die Stahlstangen tragenden Untersatz geschraubt, so dass es nur durch diesen mit dem Erdboden in Verbindung stand. In der That fielen nun auch die starken Klangstörungen zum großen Theil fort. Die Kugeln fielen in mit Watte ausgefüllte Fangkästen; die außer allem Zusammenhang mit dem eigentlichen Apparat auf dem Fußboden standen.

Die vor der erwähnten Verbesserung des Fallbrettes zu Stande gekommenen Versuche mussten, da sie wegen der starken Klangverschiedenheiten sehr unsicher waren, ganz fortgelassen werden. Dass eine vollkommene Beseitigung aller Fehlerquellen bei dem Apparate ausgeschlossen ist, geht aus der Anordnung desselben von selbst hervor. Die vier Ebenholzplatten waren unmöglich ganz genau gleich zu erhalten; ebenso blieben trotz der Verbesserung des Fallbrettes noch andere Fehlerquellen wirksam, die sich nicht ganz fortbringen ließen. Immerhin waren die Störungen doch so weit beseitigt, dass sie nur sehr wenig empfunden wurden und ein sicheres Urtheil möglich war.

Die elektrische Auslösung der einzelnen Kugeln, wie sie in der Physiologischen Psychologie beschrieben ist, wurde, um Zeit zu sparen, nicht benutzt; die Versuche beanspruchten dann nämlich noch einmal so viel Zeit, als wenn man die Klemmvorrichtungen mit der Hand bediente. Letzteres Verfahren wurde daher bei der Ausführung der Versuche angewendet; die Klemmvorrichtungen waren so gestellt, dass die Kugeln von selbst festgehalten wurden; durch einen kurzen Druck der Hand gegen das Laufgewicht auf dem Elektromagneten konnte dann die Klemmvorrichtung gelockert und die Kugel fallen gelassen werden.

Es wurde mit allen 4 am Phonometer befindlichen Fallapparaten gearbeitet — sie sind in der Folge mit 1, 2, 3, 4 bezeichnet — und zwar nach folgendem Verfahren: Ein Reiz diente als Normalreiz und wurde für dieselbe Versuchsperson während einer vollen Versuchsreihe beibehalten. Die andern 3 Reize wurden nach je 24 Versuchen in ihrer Größe variirt, während 24 Versuche waren also die Höhen, von denen die Kugeln fielen, constant, nur wurden alle möglichen Combinationen in Bezug auf Raum- und Zeitlage, für 3 Vergleichsreize also 6 Combinationen, nach einem bestimmten, in jeder Stunde neuen Programm hervorgebracht. In jeder Stunde wurde für jede Kugel auf im Ganzen 6 Differenzen eingestellt, so dass pro Stunde 4 . 6 . 6 = 144 Versuche gemacht wurden. Während der Versuche wurden öfters Pausen eingeschoben, im allgemeinen 2 pro Stunde, jede 5 bis 10 Minuten lang, so dass die Versuchspersonen die ganze Zeit hindurch den Experimenten ohne Ermüdung mit derselben Aufmerksamkeit folgen konnten. Das Verfahren war vollkommen unwissentlich, die Versuchspersonen saßen mit dem Rücken gegen den Apparat und wussten weder von der Größe noch der Zeitfolge der Reize, noch der sonstigen Anordnung das Geringste. Die Urtheile wurden von den Versuchspersonen selbst notirt, welch letztere durch eine große Anzahl von Vorversuchen genügend eingeübt waren. Waren je 6 Urtheile notirt, so wurden dieselben durch ein Blatt Papier verdeckt, um die Reagenten vor jeder Beeinflussung durch frühere Urtheile zu schützen. Als Versuchspersonen dienten eine Anzahl Mitglieder des psychologischen Instituts; für die Rechnung in Betracht gezogen wurden nur die Beobachtungsreihen der Herren Donath (Dth), Mohs (Ms), Dr. Müller (Mr) und Pflaum (P), da nur mit ihnen eine größere Anzahl von Reihen beendet werden konnte. Allen Mitarbeitern an diesen Versuchen sei auch hier für ihre Liebenswürdigkeit bestens gedankt.

Die beiden Kugeln, mit denen die Schallreize hervorgebracht wurden, waren fast genau gleich schwer, sie wogen 15,90 bezw. 15,92 Gramm.

Jeder Versuch gestaltete sich nun folgendermaßen: Die Versuchspersonen — gewöhnlich waren zu gleicher Zeit 2 Reagenten anwesend — saßen an zwei verschiedenen Tischen, so dass eine Beeinflussung ausgeschlossen war, die eine etwa 3, die andere etwa 4 m vom Apparat entfernt, diesem den Rücken zukehrend. Nach einem vorher festgesetzten Programm waren die 4 Fallapparate auf bestimmte Höhen eingestellt; einer gab den Normalreiz ab. Dieser Normalreiz bestand für Ms und Mr in dem Schall der von 27 cm Höhe, für Dth und P im Schall der von 37 cm Höhe herabfallenden Kugel. Die andern 3 Reize dienten als Vergleichsreize und waren auf bestimmte Differenzen eingestellt, die, wie schon bemerkt, während 24 Versuche dieselben blieben; die Klemmvorrichtungen waren so eingestellt, dass die Kugeln festgehalten wurden und erst durch einen leichten Druck, den der Experimentator gegen die Elektromagnete ausübte, fallen konnten. Nun gingen die Versuche so vor sich: Lieferte z. B. 3 den Normalreiz, 1, 2, 4 also die Vergleichsreize, die auf die betreffenden Höhen eingestellt waren, und kam nun nach dem Programm der Versuch 4 . 3 an die Reihe, d. h. musste zuerst 4, dann 3 fallen, so wurde eine Kugel bei 4, die andere bei 3 eingeklemmt. Auf ein »Jetzt« des Experimentators machten sich die Versuchspersonen zum Reagiren fertig, nach etwa 2 Secunden fiel die Kugel aus 4, nach abermals $1^1/_2$ Secunden — diese Zwischenzeit war durch lange vorherige Uebung constant geworden — fiel die Kugel aus 3. Die Reagenten waren angewiesen, nun sofort das Urtheil zu notiren. Die meisten urtheilten nach der zuletzt gefallenen Kugel, so dass (bei Ms, Dth, P) das Urtheil $>$ in unserem angenommenen Falle bedeutet: $3 > 4$; nur Mr beurtheilte die 2. Kugel nach der ersten, so dass bei ihm das Urtheil $>$ in unserm Falle $4 > 3$ bedeutete. Die auf diese Weise zu Stande gekommenen Protokolle wurden dann vom Experimentator zu Tabellen verarbeitet.

4. Die Versuchsergebnisse.

Für jeden Beobachter ergaben sich schließlich 4 Klassen von Tabellen, die sich durch die Wahl des Normalreizes unterschieden, es wurden nämlich alle Beobachtungen zusammengenommen, bei denen 1 den Normalreiz lieferte, also der 1. Fallapparat constant auf der Höhe 27 bezw. 37 cm blieb; dies gab eine Klasse von Tabellen; analog für 2, 3 und 4. In jeder Klasse finden sich 3 Tabellen, die sich durch die Wahl des Vergleichsreizes unterschieden; z. B. gab es in der 1. Klasse die 3 Tabellen, die die Fälle enthielten: 1 . 2; 1 . 3;

1 . 4 . Im Folgenden soll die Bezeichnung des Normalreizes durch die 1. Zahl, des Vergleichsreizes durch die zweite beibehalten werden, so dass also 3 . 2 bei einer Tabelle bedeutet: 3 war Normalreiz, 2 Vergleichsreiz.

So waren für jede Versuchsperson 12 Tabellen vorhanden. In jeder Tabelle waren für jede Differenz die Anzahl der verschiedenen Urtheile $\gg$, $>$, $=$, $<$, $\ll$ eingetragen, wobei diese Zeichen stets den Vergleichsreiz auf den Normalreiz beziehen, so dass $\gg$ bedeutet: der Vergleichsreiz war »viel größer« als der Normalreiz. Eingestellt wurde auf folgende Differenzen: bei dem Normalreiz 27 cm auf 0, + 3, + 6, + 9, + 12, + 15 cm, bei dem Normalreiz 37 cm auf 0, + 4, + 8, + 12, + 16, + 20 cm Differenz; das positive Vorzeichen soll andeuten, dass mit dem Vergleichsreiz stets nach oben gegangen wurde, dass also der Vergleichsreiz stets größer war als der Normalreiz. Für jede Differenz in jeder Tabelle wurden 40 bis 48 Versuche angestellt, so dass in jeder Tabelle 240 bis 288 Versuche verzeichnet waren, im Ganzen also für jede Versuchsperson etwa 3000 Versuche vorlagen.

Noch einige wenige Worte über die Wahl der Reizdifferenzen. Diese waren nach vielfachen Versuchen nach der Methode der Minimaländerungen so gewählt worden, dass sie weder zu klein noch zu groß waren, vielmehr eine richtige Vergleichung der Reize schon ziemlich sicher zuließen. Es waren nach der genannten Methode eine Anzahl Reihen mit Herrn cand. med. Förster ausgeführt worden und zwar an den Reizen 1, 2 in der Höhe von 37 cm, nachdem zuvor constatirt worden war, dass der Reagent diese beiden Reize, wenn sie sich in der Nulllage befanden, fast genau gleich schätzte. Als constante Differenzen, um die der Normalreiz gegenüber dem Vergleichsreiz geändert wurde, dienten nach einander Differenzen von 1, 2 und 3 cm. Als arithmetische Mittel der Schwellenwerthe bei Anwendung dieser verschiedenen Differenzen wurden bezw. 7,9, 8,5 und 8,1 cm, also nahezu gleiche Werthe gefunden. Es zeigte sich ferner, dass die Abweichungen der Schwellenwerthe der einzelnen Reihen von diesen Mitteln bei der Differenz 1 cm am stärksten, dass sie bei 2 cm schon weniger stark, bei 3 cm am geringsten waren. Als Differenz, die bei der Methode der richtigen und falschen Fälle in Anwendung kommen sollte, wurde 4 cm angenommen, da bei dieser Differenz zu vermuthen war, dass die Urtheile eine ziemlich große Sicherheit besaßen. Dem Weber'schen Gesetz entsprechend musste dann bei der Höhe von 27 cm die Differenz von 3 cm gewählt werden. Bei den später angegebenen, für die übrigen Beobachter nach der Methode der Minimaländerungen gefundenen Schwellen betrug die Differenz immer je 2 cm; die Anzahl der Einzelreihen betrug für jede Schwelle etwa 15, es wurden damit ganz constante Schwellenwerthe erzielt.

Ehe wir auf die Tabellen weiter eingehen, sei zunächst noch kurz der Zeitfehler erwähnt, der sich bei Durchsicht der Tabellen herausstellte. Vergleicht man die Tabellen nach der Zeitfolge, d. h. vergleicht man die Versuche, bei denen ein bestimmter Normalreiz vorging, mit den Versuchen, bei denen derselbe folgte, so zeigt sich bei allen Versuchspersonen das gleiche Resultat. Alle überschätzten den Schall der zuletzt gefallenen Kugel, wie dies auch von früheren Beobachtern meist constatirt worden ist. Der Zeitfehler ist, da bei den Versuchen mit der Zeitlage gleichmäßig gewechselt wurde und die für beide Zeitlagen gefundenen Zahlen zusammengefasst wurden, in den folgenden Tabellen als eliminirt zu betrachten.

Als nun die Tabellen einzeln für die Rechnung fertig gestellt wurden, zeigte es sich, dass wegen der geringen Anzahl der Fälle die Zahlen noch einen zu unregelmäßigen Gang zeigten, die zufälligen Fehler also noch nicht hinreichend ausgeglichen waren. Es mussten demnach verschiedene Tabellen zu einer einzigen zusammengefasst werden. Bei genauerer Durchsicht der Tabellen und einigen Ueberschlagsrechnungen ergab sich nun Folgendes: Bei Dth und Ms wurden die Reize 1, 2 und 4 nach ihrer wirklichen Intensität beurtheilt; bei der Einstellung auf Gleichheit war die Anzahl der $>$-Urtheile annähernd gleich der Anzahl der $<$-Urtheile, und auch sonst verhielten sich die Tabellen in ihrem Verlaufe einander ähnlich; es wurden daher die Tabellen 12, 21, 14, 41, 24, 42 zu einer Tabelle (124) zusammengefasst. Der Reiz 3 dagegen wurde von den zwei Beobachtern unterschätzt, statt des Reizes 3 wurde also ein Reiz (3) — C gesetzt, wo C der constante Fehler ist. Es wurden daher zu einer Tabelle (124 . 3) die Urtheile der Reihen 13, 23, 43, zu einer andern (3 . 124) die Urtheile der Reihen 31, 32, 34 zusammengefasst. Zunächst seien daher die für Dth und Ms auf diese Weise berechneten Tabellen hier zusammengestellt. In diesen Tabellen sind aber nicht die absoluten Anzahlen der Urtheile für jede Differenzeinstellung gegeben, sondern diese Zahlen, dividirt durch die Gesammtzahl der bei jeder Einstellung erlangten Urtheile, d. h. die relativen Häufigkeiten der einzelnen Urtheile. Außerdem wurden diese relativen Häufigkeiten noch mit 2 multiplicirt, da für die späteren Rechnungen nicht p', p, z, n, n' (in der früheren Bezeichnungsweise), sondern $2p'$, $2p$, $2z$, $2n$, $2n'$ gebraucht werden. Jede Horizontalreihe in den folgenden Tabellen umfasst also die doppelten relativen Häufigkeiten der einzelnen Urtheile für eine bestimmte Differenz. Die Quersumme jeder solchen Reihe muss daher $2(p' + p + z + n + n') = 2$ sein.

In der Tabelle Ms (124) sind übrigens die Urtheile für $D = 0$ nicht zur Verwendung gekommen, da sie durch Klangverschiedenheiten stark gestört worden waren.

Wir kommen nun zu den Tabellen von Mr. Mit diesem wurden wegen Zeitmangels im wesentlichen nur Versuche an den 3 Reizen 234 angestellt, bei der Normalhöhe $h = 27$ cm. Bei der Auszählung ergab sich, dass die Reize 34 in der Nulllage auch wirklich gleich geschätzt wurden, dass dagegen der Reiz 2 überschätzt wurde, so dass für Mr 3 Tabellen angefertigt wurden: erstens wurden die Tabellen 34 und 43 zu einer einzigen (34) zusammengefasst, dann die Tabellen 23 und 24 zu einer: (2 . 34), endlich die Tabellen 32 und 42 zu einer einzigen (34 . 2). Im Uebrigen ist die Anordnung der Tabellen dieselbe wie bei denjenigen für Dth und Ms. Nur wurde noch eine Vereinfachung vorgenommen: schon bei den Tabellen für Dth und Ms erkennt man, dass die in den Spalten $2n'$ stehenden Zahlen für die weitere Rechnung unbrauchbar, weil zu klein sind, man wird also die Zahlen $2n'$ zu den Zahlen $2n$ hinzunehmen. Dies ist bei Mr geschehen, da auch hier die $2n'$ für die Rechnung unverwendbar waren.

Es bleiben schließlich noch die Tabellen von P. Diese weichen von allen übrigen dadurch ab, dass in ihnen fast gar keine Gleichheitsurtheile vorkommen, bei mehr als 3000 Versuchen finden sich im Ganzen 8 Gleichheitsurtheile. Diese wurden daher in den Tabellen ganz fortgelassen. In Betreff der übrigen Urtheile ist eine ziemlich große Unsicherheit zu bemerken, die Urtheile zeigen von Differenz zu Differenz ziemlich starke Schwankungen. Ungefähr gleich wurden geschätzt bei der Nullstellung die Reize 124, also wie bei Ms und Dth. Wurden jedoch die Tabellen 12, 14, 21, 24, 41, 42 zusammen-

Tabelle I. Dth.

	(124)					(124 . 3)					(3 . 124)				
D	$2n'$	$2n$	$2x$	$2p$	$2p'$	$2n'$	$2n$	$2x$	$2p$	$2p'$	$2n'$	$2n$	$2x$	$2p$	$2p'$
0	0,023	0,784	0,417	0,768	0,008	0,014	1,197	0,361	0,428			0,333	0,695	0,945	0,027
4	0,031	0,387	0,418	1,050	0,114		0,725	0,351	0,924			0,222	0,277	1,320	0,181
8		0,231	0,278	1,264	0,227	0,028	0,389	0,286	1,184	0,113			0,167	1,389	0,444
12		0,132	0,237	1,281	0,350		0,331	0,169	1,253	0,247		0,041	0,014	1,182	0,763
16		0,076	0,093	1,367	0,464		0,173	0,093	1,315	0,419		0,014	0,028	1,180	0,778
20		0,053	0,123	1,013	0,811		0,031	0,064	1,339	0,566			0,014	0,861	1,125

Tabelle II. Ms.

	(124)					(124 . 3)					(3 . 124)				
D	$2n'$	$2n$	$2x$	$2p$	$2p'$	$2n'$	$2n$	$2x$	$2p$	$2p'$	$2n'$	$2n$	$2x$	$2p$	$2p'$
0						0,016	0,750	0,953	0,266	0,015		0,125	1,444	0,417	0,014
3	0,015	0,297	1,071	0,557	0,060		0,297	1,328	0,328	0,047		0,028	1,125	0,805	0,042
6	0,007	0,121	0,739	0,984	0,149		0,250	0,833	0,850	0,067			0,778	1,139	0,083
9	0,023	0,077	0,457	1,058	0,385		0,143	0,524	1,079	0,254			0,535	1,169	0,296
12	0,007	0,084	0,217	0,969	0,723		0,048	0,302	1,111	0,539			0,375	1,167	0,458
15	0,007	0,061	0,143	0,803	0,986		0,094	0,156	1,031	0,719			0,139	1,111	0,750

Tabelle III. Mr.

	34				2.34				34.2			
D	$2n$	$2z$	$2p$	$2p'$	$2n$	$2z$	$2p$	$2p'$	$2n$	$2z$	$2p$	$2p'$
0	0,825	0,275	0,900		1,675	0,100	0,200	0,025	0,308	0,103	1,384	0,205
3	0,785	0,152	0,987	0,076	1,350	0,125	0,500	0,025	0,025	0,025	1,575	0,375
6	0,325	0,100	1,450	0,125	0,950	0,150	0,750	0,150	0,025		1,100	0,875
9	0,225	0,100	1,400	0,275	0,506	0,076	1,266	0,152	0,075		0,700	1,225
12	0,150	0,025	1,300	0,525	0,325	0,050	1,250	0,375		0,025	0,900	1,075
15	0,076	0,025	1,114	0,785	0,175	0,075	1,325	0,425	0,025	0,025	0,425	1,[illegible]25

gefasst, so waren immer noch so starke Unregelmäßigkeiten vorhanden, dass auf die Benutzung verzichtet werden musste. Der Reiz 3 wurde, wie bei Dth und Ms, unterschätzt; es wurden daher die Tabellen 13, 23, 43 einerseits und 31, 32, 34 andrerseits zusammengefasst, und diese konnten nun für die Rechnung Verwendung finden. Das Fehlen der Gleichheitsurtheile und der unregelmäßige Gang der einzelnen Tabellen schreibt sich wohl daher, dass der Reagent nach eigener Angabe durch die Klangverschiedenheiten des Apparats stark im Urtheilen behindert wurde, vor allem konnte er auch wegen dieser Klangdifferenzen nie 2 Reize als genau gleich stark wahrnehmen. Den übrigen Reagenten war es gelungen, von diesen Klangverschiedenheiten zu abstrahiren, sich also bei Beurtheilung der Schallstärke nicht durch die verschiedene Qualität des Schalls beeinflussen zu lassen. Und noch eine Besonderheit ist bei P hervorzuheben: es war ihm unmöglich, sich einen Maßstab dafür zu schaffen, ob ein Schall »größer« oder »viel größer« bezw. »kleiner« oder »viel kleiner« als ein anderer ist. Es finden sich bei ihm nur sehr wenig $\gg$-Urtheile, die daher zu den $>$-Urtheilen geschlagen wurden, so dass die P-schen Tabellen nur die beiden Spalten $2p$ und $2n$ umfassen. Aus unseren frühen Formeln für die Berechnung folgt übrigens aus dem Fehlen der Gleichheitsurtheile, dass für P $x_0 = x_u = 0$ ist.

Schließlich sei hier gleich noch eine Tabelle angesetzt, die später auch benutzt werden wird. Sie entstammt der bereits erwähnten

Tabelle IV. P.

	124.3		3.124	
D	$2n$	$2p$	$2n$	$2p$
0	1,359	0,641	0,847	1,153
4	0,800	1,200	0,514	1,486
8	0,762	1,238	0,222	1,778
12	0,268	1,732	0,083	1,917
16	0,175	1,825	0,042	1,958
20	0,125	1,875	0,014	1,986

Arbeit von Kämpfe[1]). Die Bezeichnungsweise bei Kämpfe ist derart, dass sein r gleich kommt $100\,p$, sein $f = 100\,n$, $g = 100\,z$ ist. Berücksichtigt man dies und schreibt außerdem statt der bei Kämpfe sich findenden Differenzen 0°, $^1/_2{}^{\circ}$, 1° etc. sofort die entsprechenden Differenzen, ausgedrückt in Normalintensität[2]), so gewinnt man die folgende Tabelle.

Tabelle V. K.

$D\rightarrow$	0,000	0,015	0,030	0,046	0,061	0,077	0,092	0,108	0,123	0,139	0,155	0,171
$2p$	0,633	1,020	1,213	1,346	1,426	1,520	1,620	1,693	1,800	1,808	1,896	1,912
$2z$	0,720	0,173	0,047	0,020	0,028	0,026	0,027	0,013		0,008	0,008	
$2n$	0,647	0,807	0,740	0,634	0,546	0,454	0,353	0,293	0,200	0,184	0,096	0,088

5. Die Ausgleichung der Beobachtungen.

Wir wenden uns nun zur Verwerthung der in den Tabellen gewonnenen Zahlen und gehen daher zu den S. 499 aufgestellten Fundamentalformeln zurück. Dieselben hatten die Form:

---

1) l. c. S. 545, Tabelle IVa.
2) l. c. S. 534, Tabelle III, Reihe: 60°.

$$x_0' - N_1 U - D = 0$$

$$x_o + N_2 U - D = 0$$

$$x_u + N_3 U - D = 0\,.$$

Hierbei war N_1 das zu $\Phi = 1 - 2p'$ gehörige, aus der Tafel für die Φ-Function zu entnehmende Argument, analog war

$$N_2 = \text{Arg}\,\Phi(2\overline{p + p'} - 1)\,, \quad N_3 = \text{Arg}\,\Phi(1 - 2n)\,.$$

Diese Zahlen wären also zuerst zu ermitteln. Ferner kommt in den Formeln D vor, die Reizdifferenz. Als Normalreiz hatten wir den Schall einer von der Höhe von 27 bezw. 37 cm herabfallenden Kugel angenommen; es fragt sich daher, wie die Schallintensität mit der Höhe variirt. Nun hat mit demselben Apparat und unter denselben Bedingungen wie hier — es fielen Elfenbeinkugeln auf die als Fallunterlage benutzte Ebenholzplatte — Paul Starke diesbezügliche Experimente angestellt[1]), auf Grund deren er zu dem Ergebniss gelangt, dass die Schallstärke in Grenzen, die weiter waren, als die in dieser Arbeit benutzten, sowohl bei constantem Gewicht proportional der Fallhöhe wie bei constanter Höhe proportional dem Gewichte zunimmt, dass also zwischen Schallstärke und lebendiger Kraft genaue Proportionalität bestehe[2]). Dasselbe hat auch Kämpfe bei dem von ihm benutzten Apparat (Schallpendel) nachgewiesen[3]), so dass kein Grund besteht, von dieser Annahme abzugehen. Wir werden daher annehmen, dass die Schallintensität proportional der Höhe zunimmt. Dann dürfen wir die Normalintensitäten direct durch die betreffenden Höhen (27 und 37 cm), ebenso die Schalldifferenzen durch die Höhendifferenzen messen, und daher in obigen Formeln für die Schalldifferenzen D die in den Tabellen verzeichneten Werthe der Höhendifferenzen D einsetzen, wobei noch der Vortheil herausspringt, dass die auf diese Weise aus den Formeln errechneten Größen x und U sofort in einem bekannten Maße erscheinen, also sofort vorstellbar sind.

Alle Coefficienten der Grundgleichungen sind demnach jetzt bekannt, und die nächste Aufgabe bestände darin, die Beobachtungen

---

1) Philos. Studien, V. Bd. S. 157 ff. 2) l. c. S. 169.

3) Kämpfe, Beiträge u. s. w. S. 534.

nach der Methode der kleinsten Quadrate auszugleichen. Dies kann aber auf zweierlei Weise geschehen. Am einfachsten ist es, das U als eine für alle drei Grundgleichungen constante Größe, also als unabhängig von der Art der abgegebenen Urtheile zu betrachten. Thut man dies, so erhält man z. B. für 6 Differenzen 6 . 3 = 18 Gleichungen mit den 4 Unbekannten U, x_0', x_0, x_u zur Ausgleichung. Will man das U nicht als constant ansehen, sondern für jede der 3 Gleichungen ein besonderes U annehmen, so würde man bei 6 Differenzen zunächst die 6 Gleichungen $x_0' - N_1 U - D = 0$ auszugleichen haben, worin also 2 Unbekannte vorkommen, entsprechend die beiden andern Gleichungen, und man erhielte für x_0', x_0 und x_u je einen, für U 3 Werthe. Diese Rechnung wäre aber deshalb nicht sehr zweckmäßig, weil nicht viele überschüssige Gleichungen vorliegen und daher zufällige Umstände in den Beobachtungen einen ziemlich großen Einfluss auf die Resultate ausüben würden. Um zunächst die Frage zu entscheiden, ob das U für die 3 Gleichungen einen annähernd constanten Werth erhalte, wurden die Reihen von Mr nach der 2. Methode behandelt; hier wurde also jede der 3 Gleichungen für sich ausgeglichen, dabei ergaben sich folgende Werthe von U:

Für (34)	die 3 Werthe:	$U = 10,78$	$U = 11,24$	$U = 12,36$
» (2 . 34)	» » »	$U = 12,12$	$U = 8,53$	$U = 8,84$
» (34 . 2)	» » »	$U = 10,18$	$U = 9,26$	$U = 8,65$

Vergleicht man die Zahlen einer Tabelle unter einander, so kann man sie als constant ansehen, denn die Abweichungen, die sie von einander zeigen, folgen offenbar gar keiner Regel, sondern sind wohl mehr durch zufällige Umstände bedingt. Die Tabellen der übrigen Versuchspersonen wurden daher in der Voraussetzung, dass U für die 3 Gleichungen constant bleibt, nach der 1. Methode ausgeglichen. Ueber die Ausgleichung selbst ist nichts weiter zu sagen, sie wurde nach dem bekannten Schema der Methode der kleinsten Quadrate vorgenommen, wie es sich sehr übersichtlich z. B. bei Encke[1]) findet.

---

1) J. F. Encke, Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen. 2. Bd. S. 80 ff.

Die Gewichte der Unbekannten wurden durch Wiederholung der Rechnung mit umgekehrter Reihenfolge der Unbekannten gefunden, wobei diese doppelte Rechnung zugleich eine Prüfung für die Werthe der Unbekannten selbst gab. Sodann wurden noch die mittleren Fehler der Unbekannten berechnet. Es ergibt sich als Resultat dieser Rechnungen die folgende Tabelle, in der die schließlich erhaltenen Werthe der Unbekannten bis auf 2 Stellen genau (die Rechnung wurde mit 4 Decimalen geführt) zusammengestellt sind.

Tabelle VI.

Reihe		U	x_o'	x_o	x_u
Ms.	(124)	9,94 ± 1,23	15,42 ± 1,16	5,45 ± 0,95	— 1,81 ± 1,58
	(124.3)	9,57 ± 0,81	16,93 ± 1,07	7,00 ± 0,72	— 1,07 ± 1,02
	(3.124)	9,62 ± 0,40	16,94 ± 0,47	4,91 ± 0,31	— 11,19 ± 0,71
Mr. (34)	1. Gl.	10,78 ± 0,59	17,09 ± 0,49		
	2. Gl.	11,24 ± 0,95		1,23 ± 0,68	
	3. Gl.	12,36 ± 1,31			— 1,10 ± 1,06
Mr. (2.34)	1. Gl.	12,12 ± 1,77	20,41 ± 2,02		
	2. Gl.	8,53 ± 0,65		6,88 ± 0,36	
	3. Gl.	8,84 ± 0,31			5,80 ± 0,17
Mr. (34.2)	1. Gl.	10,18 ± 1,59	8,96 ± 0,80		
	2. Gl.	9,26 ± 4,97		— 4,46 ± 7,99	
	3. Gl.	8,65 ± 7,46			— 5,05 ± 10,36
Dth.	(124)	14,29 ± 1,08	22,37 ± 1,28	2,91 ± 1,02	— 2,58 ± 1,15
	(124.3)	12,56 ± 0,64	23,16 ± 0,79	5,63 ± 0,57	2,02 ± 0,66
	(3.124)	11,90 ± 0,88	16,65 ± 0,92	— 1,83 ± 1,17	— 6,08 ± 1,41
P.	(124.3)	15,25 ± 2,52		4,05 ± 1,43	4,05 ± 1,43
	(3.124)	25,24 ± 5,90		— 6,30 ± 4,07	— 6,30 ± 4,07

Die mit $\pm$ versehenen beigefügten Zahlen sind die mittleren Fehler der betreffenden Unbekannten.

Für die Kämpfe'sche Tabelle ergab sich:

$$U = 0{,}164 \pm 0{,}021$$

$$x_0 = 0{,}008 \pm 0{,}013$$

$$x_u = -0{,}007 \pm 0{,}014$$

Ehe wir nun zur Discussion der Zahlen obenstehender Tabelle übergehen, muss zunächst noch die mathematische Untersuchung weiter geführt werden, da wir ja auf Grund der Ausgleichung die Richtigkeit unserer Grundformeln prüfen wollten. Zu diesem Zwecke wollen wir die Widersprüche berechnen. Im allgemeinen, bei astronomischen und physikalischen Rechnungen zum Beispiel, wird man diese Rechnung ja nur vornehmen, um eine letzte Controle der Ausgleichung zu haben, da bekanntlich die durch directes Einsetzen der für die Unbekannten berechneten Werthe in die Beobachtungsgleichungen gefundene Quadratsumme der Widersprüche gleich sein muss dem letzten bei der Ausgleichung selbst auftretenden Coefficienten $[nn\,.\,j]$ in der Gauß'schen Bezeichnungsweise. Bei uns jedoch hat die Berechnung der Widersprüche noch einen andern Grund. Während man es in der Astronomie und Physik meistens mit Formeln zu thun hat, die keinem Zweifel unterworfen sind, handelt es sich bei uns gerade darum, die Fundamentalformeln zu prüfen, und diese Prüfung kann auf Grund der Widersprüche vorgenommen werden. Findet es sich, dass die Widersprüche der einzelnen Beobachtungsgleichungen regellos vertheilt sind, dass ihr Vorzeichen beliebig wechselt und sie in ihrer Größe ohne erkennbares Gesetz variiren, so werden wir sagen können, dass unsere Formeln sich hinreichend zur Darstellung des Ganges der Beobachtungen eignen, und werden keinen Grund haben, davon abzugehen. Stellt es sich jedoch heraus, dass die Widersprüche zweifellos einem erkennbaren Gesetze folgen, dass sie nicht regellos vertheilt sind, sondern einen stetigen Verlauf zeigen, so werden wir zunächst sagen müssen, dass die Ausgleichung aus irgend welchen Ursachen als noch nicht vollendet zu betrachten ist, und werden dann die weiteren Schritte zu überlegen haben. In der That werden wir sehen, dass gerade dieser letzte Fall eintritt.

Wir werden folgendermaßen verfahren: Haben wir für eine bestimmte Tabelle, z. B. Dth (124), die Unbekannten $U = 14{,}29$ $x_0' = 22{,}37$ u. s. w., so setzen wir in die Ausdrücke $x_0' - N_1 U - D$, $x_0 + N_2 U - D$, $x_u + N_3 U - D$ die für die Unbekannten gefundenen Werthe ein und erhalten so im allgemeinen von Null abweichende Werthe, die Widersprüche. Auf diese Weise erhalten wir den in den folgenden Tabellen dargestellten Verlauf der Widersprüche. Dabei bezeichnet Δ_1 die aus der Gleichung $x_0' - N_1 U - D = 0$, Δ_2 die aus $x_0 + N_2 U - D = 0$ und Δ_3 die aus $x_u + N_3 U - D = 0$ folgenden Widersprüche.

Tabelle VII. Ms.

	(124)			(124 . 3)			(3 . 124)		
D	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_1	Δ_2	Δ_3
0				+ 0,47	— 0,30	+ 0,85	+ 0,22	— 0,45	— 0,76
3	— 0,80	— 1,06	+ 2,30	+ 0,49	— 2,00	+ 2,99	+ 0,11	+ 0,60	+ 0,76
6	— 0,70	+ 0,63	+ 2,89	— 1,46	+ 0,30	+ 0,71	— 0,85	+ 0,83	
9	+ 0,31	+ 0,58	+ 0,75	+ 0,21	+ 0,91	— 0,16	+ 0,83	+ 0,13	
12	+ 0,93	+ 0,62	— 0,12	+ 0,77	+ 1,32	+ 0,31	— 0,11	— 1,06	
15	+ 0,30	— 0,76	— 2,17	— 0,50	— 0,22	— 4,74	— 0,23	— 0,03	

Tabelle VIII. Mr.

	(34)			(2 . 34)			(34 . 2)		
D	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_1	Δ_2	Δ_3
0		+ 0,24	+ 0,83	+ 1,21	— 0,44	— 0,35	— 0,16	+ 0,93	+ 1,19
3	+ 0,57	— 1,14	— 1,72	— 1,80	+ 0,05	— 0,04	— 0,43	+ 5,38	+ 5,66
6	— 0,60	+ 1,58	+ 1,50	+ 2,07	+ 0,13	+ 0,19	+ 1,83	+ 4,28	+ 2,66
9	— 0,22	+ 0,05	+ 0,50	— 0,87	+ 1,20	+ 0,96	+ 2,02	— 1,79	— 3,16
12	+ 0,25	+ 0,01	— 0,52	+ 0,81	+ 0,24	— 0,04	— 2,36	— 1,77	
15	+ 0,01	— 0,73	— 0,59	— 1,43	— 1,18	— 0,72	— 0,90	— 6,62	— 6,34

Tabelle IX. P.

	(124 . 3)	(3 . 124)
D	$\varDelta$	$\varDelta$
0	− 1,87	− 1,98
4	+ 3,45	+ 2,53
8	+ 0,08	+ 4,10
12	+ 2,73	+ 2,02
16	− 0,40	− 1,48
20	− 3,98	− 5,17

Tabelle X. Dth.

	(124)			(124 . 3)			(3 . 124)		
D	$\varDelta_1$	$\varDelta_2$	$\varDelta_3$	$\varDelta_1$	$\varDelta_2$	$\varDelta_3$	$\varDelta_1$	$\varDelta_2$	$\varDelta_3$
0	− 4,42	+ 0,04	− 0,11		− 1,41	− 0,36	− 1,96	− 2,13	+ 2,07
4	+ 2,40	+ 1,00	+ 1,60		+ 0,78	+ 1,14	+ 1,39	− 0,14	+ 0,20
8	+ 2,16	+ 1,58	+ 1,52	+ 1,09	+ 1,02	+ 1,23	+ 2,21	+ 1,80	
12	+ 0,93	− 0,03	+ 0,63	+ 0,88	− 0,38	− 1,35	+ 2,11	+ 2,32	− 0,89
16	− 1,03	+ 0,81	− 0,65	− 0,02	− 0,49	− 1,88	− 1,72	− 0,72	− 1,40
20	− 0,05	− 3,42	− 3,03	− 1,94	+ 0,46	+ 1,18	− 2,03	− 1,15	

Bei einer Durchsicht dieser Zahlen erkennt man eine gewisse Regelmäßigkeit im Verlaufe derselben. Man findet nämlich, dass die Zahlen im allgemeinen von einem Minimum regelmäßig anwachsen zu einem Maximum, um dann wieder stetig abzufallen. Sind — wie in Tabelle X 4. Spalte — die ersten Reizdifferenzen für die Rechnung unbrauchbar gewesen, so kommt doch noch deutlich das Sinken von einem positiven zu einem negativen Werthe zum Ausdruck. Am leichtesten übersieht man den gemeinsamen Charakter des Verlaufs dieser Widersprüche, wenn man die einzelnen Werthe graphisch darstellt; es kommt dann als gemeinsames Kennzeichen aller Tabellen eine gegen die Abscissenachse concave Curve zum Vorschein. Hier seien nur einige Curven auf diese Weise vor Augen geführt, nämlich die aus Tabelle IX Spalte 2 und die aus Tabelle X Spalte 1 bis 3 entstehenden.

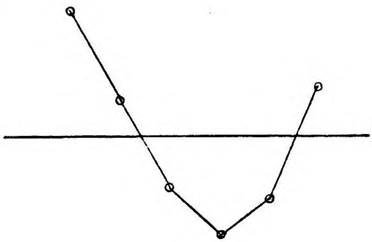

Fig. 1.

Man erkennt deutlich den übereinstimmenden Verlauf. Allerdings kommen ab und zu Sprünge vor; vergleicht man jedoch die Reizdifferenzen, an denen solche Unstetigkeiten vorkommen, mit denen in den Ausgangstabellen I bis IV, so sieht man sofort, dass genau an diesen Stellen auch die zu Grunde gelegten, den Beobachtungen entnommenen Werthe $2p'$, $2p$, $2n$ starke Sprünge zeigen, was darauf

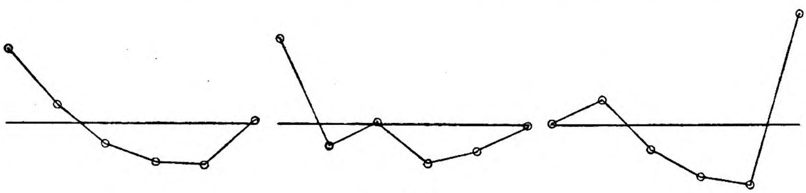

Fig. 2.

hindeutet, dass jene Unstetigkeiten in den Curven zum großen Theil von der Unsicherheit der Beobachtungen herrührt, die durch die Fehler des Apparats, namentlich durch Klangverschiedenheiten hervorgerufen worden ist.

Wie steht es nun aber mit der K'schen Reihe? K hatte unter bedeutend günstigeren Bedingungen gearbeitet, als dies bei dem hier verwendeten Apparat möglich war. Er hatte zu seinen Versuchen das Schallpendel[1]) gewählt, und von diesem nur den einen Arm benutzt, so dass dieselbe Kugel stets an derselben Stelle den Schalleindruck erzeugte, was natürlich Klangverschiedenheiten so gut wie völlig ausschließen musste, während in unserem Fall, wo 2 Kugeln auf 4 verschiedene Ebenholzplatten fallen, die Bedingungen natürlich

1) Wundt, Physiol. Psychol. 4. Aufl. I. Bd. S. 361.

ungünstiger waren. Bei ihm müsste also ein stetiger Verlauf der Widersprüche noch stärker hervortreten als bei unseren Curven. Aus diesem Grunde, um eine Controle unserer eigenen Resultate zu haben, ist die oben angeführte Reihe mit ausgeglichen worden und wird von jetzt an stets neben unseren eigenen Reihen betrachtet werden. Von allen Reihen, die K in seiner Arbeit mitgetheilt hat, ist die obige deshalb gewählt worden, weil gerade sie von Kämpfe besonders als Beweis für die Unverwendbarkeit der Müller'schen Schwelle, die unserem x_o und x_u entspricht, angezogen wird, und sie sich in der That von allen Tabellen in der K'schen Behandlungsweise am unregelmäßigsten ausnimmt. Behandelt man sie indess, wie es hier gethan ist, mit Hülfe der Ausgleichungsrechnung und bildet dann die übrig bleibenden Widersprüche, so zeigen diese in der That einen ganz regelmäßigen Verlauf, der wieder die oben besprochenen Kennzeichen an sich trägt; namentlich ist dies bei der Widerspruchscurve der Gleichung für x_o sichtbar, während die Widerspruchscurve für x_u von den übrigen in so fern abweicht, als sie mit einem extremen Werth beginnt; im übrigen verläuft sie dann aber wie gewöhnlich; jedenfalls zeigt auch sie einen ganz stetigen Verlauf. Es mögen nun die auf den K'schen Fall bezüglichen Tabellen und Widerspruchscurven folgen.

Auf Grund dieser Bemerkungen darf man daher wohl sagen, dass die aus den Ausgangsformeln gefundenen Werthe der Unbekannten in den Gleichungen Wider-

Tabelle XI.

$D \rightarrow$	0,000	0,015	0,030	0,046	0,061	0,077	0,092	0,108	0,123	0,139	0,155	0,171
$\varDelta_2$	−0,057	−0,003	+0,017	+0,024	+0,021	+0,019	+0,018	+0,010	+0,007	−0,008	−0,017	−0,031
$\varDelta_3$	+0,056	+0,013	+0,010	+0,012	+0,011	+0,008	+0,006	−0,003	−0,008	−0,023	−0,031	−0,046

sprüche hinterlassen, die nicht regellos gelagert sind, sondern die einen stetigen und für alle Beobachter ähnlichen Verlauf darbieten.

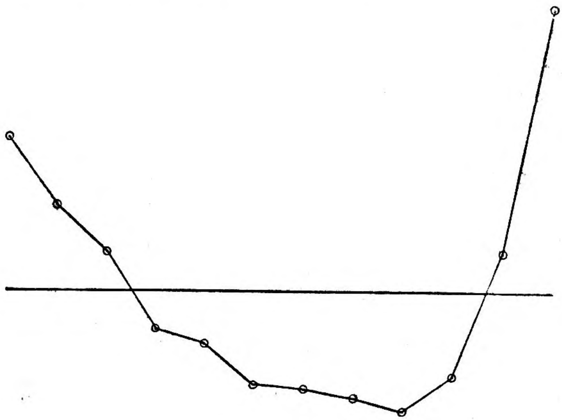

Fig. 3.

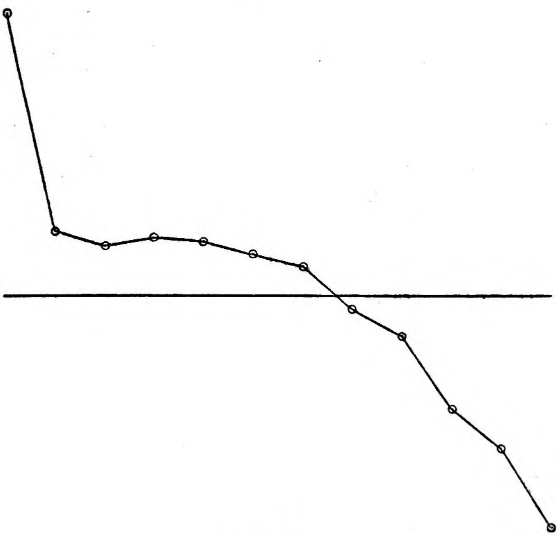

Fig. 4.

Ehe man jetzt zu weiteren Schlüssen aus diesem Ergebnisse übergeht, wird man, um ganz sicher zu gehen, dass diese Regelmäßigkeiten nicht doch vielleicht nur zufällige sind und nur für die durch die Ausgleichung gefundenen Werthe der Unbekannten auftreten, noch versuchen müssen, sie durch eine Variation der Unbekannten zu beseitigen; man wird den Unbekannten andere Werthe ertheilen, die man aber natürlich, um die Widersprüche nicht allzu groß zu machen, in der Nähe der gefundenen Werthe annehmen wird. Auf diese Weise sind für P (3 . 124), für Dth (124) und für K die Unbekannten variirt und die Widersprüche berechnet worden. Durch Aendern der Werthe der x erreicht man nun offenbar keine andere Gestalt der Widerspruchscurven, da die x in den Gleichungen nur als additive Größen auftreten, die neuen Widersprüche wären also von den alten nur durch ein constantes Glied unterschieden, was auf die Gestalt der Curve offenbar gar keinen Einfluss hat. Man braucht daher nur das U zu variiren; so wurde bei P. (3 . 124), wo das $U = 25{,}24$ gefunden worden war, einmal $U = 20$, dann $U = 30$ gesetzt und x der Einfachheit halber $= - 6$ angenommen. Analog wurden die für Dth und K gefundenen Werthe in der aus den folgenden Tabellen ersichtlichen Weise geändert.

Man sieht aus diesen Tabellen ohne weiteres, dass sich im Verlaufe der Zahlen nichts geändert hat, sie zeigen nach wie vor einen stetigen Gang und zwar denselben, den wir bei den früheren Curven getroffen haben. Durch neue Hypothesen über die Werthe der Unbekannten wird also nichts im Wesen der Widersprüche geändert. Andrerseits aber zeigt der regelmäßige Verlauf derselben, dass noch keine völlige Ausgleichung erzielt worden ist, dass also die Rechnungen noch unvollständig waren. Da dies nun an den Unbekannten, demgemäß also am Ausgleichungsverfahren nicht liegen kann, so müssen wir die Ursache davon tiefer suchen. Dann bleibt aber in unseren Formeln nur ein Glied übrig, das diese Regelmäßigkeit der Widersprüche bedingen kann: die Größen N; diese aber hängen ab von der Φ-Function, mit anderen Worten, von der Form des Fehlergesetzes. Würde das Vertheilungsgesetz in der Gauß'schen Form Beobachtung und Rechnung gut mit einander in Einklang bringen können, so dürften die übrig bleibenden Widersprüche keinen regelmäßigen Gang zeigen, sondern müssten regellos vertheilt sein. Es muss daher der Schluss gezogen werden, dass das Gauß'sche Fehlergesetz zur genaueren Darstellung der Beobachtungen nicht ausreicht.

Zunächst wird es sich also darum handeln, Näheres über ein Vertheilungsgesetz zu sagen, das den an dasselbe zu stellenden

Tabelle XII. P.

$x = -6$

	$U = 20$	$U = 30$
D	Δ	Δ
0	− 2,58	− 0,87
4	+ 0,17	+ 4,75
8	+ 0,57	+ 6,14
12	− 0,90	+ 5,85
16	− 5,51	+ 1,26
20	− 9,26	− 0,89

Tabelle XIII. Dth.

$x_u = -2$

	$U = 13$	$U = 15$
D	Δ	Δ
0	− 0,75	− 1,41
4	+ 0,45	+ 1,59
8	+ 0,01	+ 1,71
12	− 1,16	+ 0,98
16	− 2,69	− 0,18
20	− 5,22	− 2,48

Tabelle XIV. K.

$x_o = 0,02$

$U \downarrow$	$D \rightarrow$	0,000	0,015	0,030	0,046	0,061	0,077	0,092	0,108	0,123	0,139	0,155	0,171
0,1	Δ	− 0,040	− 0,013	− 0,006	− 0,008	− 0,016	− 0,023	− 0,030	− 0,041	− 0,049	− 0,064	− 0,076	− 0,091
0,2	Δ	− 0,080	− 0,011	+ 0,018	+ 0,030	+ 0,029	+ 0,031	+ 0,032	+ 0,026	+ 0,025	+ 0,011	+ 0,003	− 0,011

Ansprüchen besser genügt als das einfache Gauß'sche. In der That ist ja, wie bereits früher gesagt, von Fechner in einer ganzen Anzahl von Fällen nachgewiesen worden, dass das Gauß'sche Fehlergesetz nicht allgemeine Gültigkeit hat, ja dass es als ein Ausnahmefall gelten darf, wenn es die Vertheilung von Collectivgegenständen hinreichend genau darstellt; dass aber im allgemeinen ein anderes, erweitertes Gesetz an seine Stelle treten muss.

6. Die Erweiterung des Gaufs'schen Fehlergesetzes.

Fechner, der in der »Collectivmaßlehre« sich mit der Aufstellung neuer Vertheilungsgesetze beschäftigt, geht dabei von dem Gauß'schen Gesetz aus. Dies baut sich bekanntlich auf der Voraussetzung auf, dass bei einer Anzahl Einzelbeobachtungen desselben Objects das arithmetische Mittel aus allen diesen Einzelbestimmungen den wahrscheinlichsten Werth der zu messenden Größe repräsentirt, und setzt dann die Wahrscheinlichkeit W, dass eine Abweichung x vom arithmetischen Mittel innerhalb der unendlich nahen Grenzen x und dx vorkomme, gleich

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} h \exp(-h^2 x^2) dx .$$

h ist dabei das Präcisionsmaß. Aus diesem Gesetze geht zunächst hervor, dass bei gleichbleibendem Präcisionsmaß die Wahrscheinlichkeit für größere Fehler x geringer wird. Andrerseits aber ist in diesem Gesetze noch die Annahme enthalten, dass positive und negative Fehler gleich häufig vorkommen, dass also in der Vertheilung der Abweichungen zu beiden Seiten des arithmetischen Mittels Symmetrie herrsche. Letzteres ist nun aber, wie Fechner an verschiedenen Collectiv-Gegenständen zeigt, durchaus nicht immer der Fall; vielmehr zeigt die Vertheilung der Abweichungen oft eine deutliche Asymmetrie, und damit ist man dann vor die Aufgabe gestellt, ein neues diese letztere Erscheinung berücksichtigendes Vertheilungsgesetz aufzustellen. Wie Fechner diese Aufgabe löst, interessirt uns hier weniger, da sein Gedankengang auf unsern speciellen Fall keine Anwendung finden kann. Hier liegt die Sache anders. Wir haben es nicht mit einfachen Auszählungen wie in der Collectivmaßlehre zu thun, bei uns handelt es sich vielmehr um die zum Vertheilungsgesetze gehörige Integralformel. Um eine Auszählung zu ermöglichen, müsste man jedes einzelne Urtheil auch durch einen numerischen Werth ausdrücken können. Solche Schätzungen von Schallintensitäten sind aber bei kleinen Reizdifferenzen unmöglich, und wir haben es daher mit ganzen Urtheilsklassen zu thun, daher auch nicht mehr mit dem ursprünglichen Gauß'schen Gesetz, sondern mit der aus diesem abgeleiteten Integralformel. Wir konnten also auch nicht, wie bei gewöhnlichen Collectivgegenständen, die Frage nach der Gültigkeit des Gauß'schen Gesetzes durch eine einfache Auszählung erledigen, sondern mussten uns complicirterer Methoden bedienen.

Während nun Fechner seine Gesetze mehr durch begriffliche Ueberlegungen ableitete und weniger auf streng mathematische Deduction achtete, hat Bruns die gleiche Frage, die sich Fechner vorgelegt hatte, auf streng mathematischem Wege gelöst. Wir gehen daher nur auf die von Bruns aufgestellten Formeln ein, deren Ableitung[1]) sich mit kurzen Worten etwa folgendermaßen darstellen lässt.

Sei $H(b)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass gewisse Größen x zwischen den Grenzen $-\infty$ und b vorkommen; oder anders ausgedrückt: $H(b)$ bezeichne die relative Häufigkeit der x in den Grenzen $-\infty \ldots. b$. Seien nun zunächst die x in dem betrachteten Gebiete discret vertheilt und zwar seien die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die verschiedenen x_r auftreten, durch y_r bezeichnet. Fällt dann b nicht mit einem der x zusammen, so ist offenbar die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eins von den x im Gebiete $-\infty \ldots. b$ eintrifft, durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten gegeben, mit der die einzelnen x eintreten, d. h.

$$H(b) = \Sigma\, y_r\,.$$

Fällt nun b mit einem x zusammen, so setzt Bruns fest, dass in diesem Falle nicht der ganze Betrag der zu $x = b$ gehörigen y zur Summe hinzugefügt wird, sondern nur der halbe. Bezeichnet noch $sg(z)$ die Werthe $+1$, 0 oder -1, je nachdem $z >, =$ oder < 0 ist, und setzt man

$$2E(x) = \mathrm{sg}\,(b - x) + 1,$$

1) Bruns, Zur Collectivmaßlehre. Philos. Studien, Bd. XIV. S. 355.

so wird diese Festsetzung zusammen mit der früheren Formel ausgedrückt durch die Gleichung

$$H(b) = \Sigma\, y_r E(x_r)\,.$$

In der That, fällt x nicht mit b zusammen, so dass $x < b$ ist, so wird $sg(b-x) = +1$, $2E(x) = 2$, d. h. $E(x) = 1$ und $H(b) = \Sigma y_r$, wie wir früher fanden. Fällt aber x mit b zusammen, so wird $sg(b-x) = 0$, $E(x) = \frac{1}{2}$, also $H(b) = \frac{1}{2}\, y_b$, wo y_b die zu $x = b$ gehörige Wahrscheinlichkeit bezeichnet. Die Formel deckt also alle vorkommenden Fälle. Um dieselbe aber praktisch anwendbar zu machen, muss noch die Größe $sg(b-x)$ durch andere Functionen ersetzt werden, mit denen man rechnen kann. Das Wesentliche der Bruns'schen Abhandlung besteht nun eben gerade darin, dass in ihr für $sg(y-x)$ eine Darstellung in Form einer convergenten Reihe gegeben wird. Auf diese Weise gelangt man zur Darstellung von $H(b)$ in Reihenform. Bruns zeigt noch, dass die erhaltene Reihe auch für stetige Häufigkeiten Anwendung findet; er führt dann verschiedene Vereinfachungen ein und gelangt schließlich zu dem Resultat, dass sich eine beliebige relative Häufigkeit zwischen den Grenzen $-\infty$ und b darstellen lässt durch die folgende convergente Reihe:

$$2H(b) - 1 = \Phi(x) + a_1 \Phi_1(x) + a_2 \Phi_2(x) + \ldots,$$

wobei $\Phi(x)$ die aus dem Gauß'schen Fehlergesetz stammende Transcendente

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dy \, \exp\,(-\,y^2)$$

ist, während $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ u. s. w. die 1., 2., u. s. w. Ableitung dieser Function bedeuten, also:

$$\Phi_1(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\,(-\,x^2)$$

$$\Phi_2(x) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}\, x \exp\,(-\,x^2) \text{ u. s. w.}$$

$a_1\, a_2 \ldots$ sind dabei gewisse constante Größen, die für die Collectivgegenstände anschauliche Bedeutung haben, da sie gewisse Durchschnittswerthe repräsentiren; bei uns fällt diese Anschaulichkeit so gut wie ganz weg, wir betrachten sie einfach als Coefficienten.

Will man das Häufigkeitsgesetz für die Größen x nicht zwischen den Grenzen $-\infty$ und b, sondern allgemein zwischen a und b, also $H(ab)$ haben, so erkennt man ohne weiteres, dass hier eine ganz analoge Reihe entsteht. Es ist ja:

$$\begin{aligned} 2H(ab) &= 2H(b) - 2H(a) \\ &= \Sigma\, [\operatorname{sg}(b-x) - \operatorname{sg}(a-x)]\, y_r \\ &= \Sigma\, \alpha_r \Phi_r(x)\,. \end{aligned}$$

Aus obiger Formel erkennt man aus dem Umstande, dass das erste Glied der Reihenentwicklung die Φ-Function ist, dass in der That das Gauß'sche Gesetz im allgemeinen nur eine näherungsweise Darstellung eines allgemeineren Vertheilungsgesetzes ist.

7. Anwendung des verallgemeinerten Vertheilungsgesetzes.

Es wird nun unsere Aufgabe sein, dies Vertheilungsgesetz für unseren Zweck zu verwerthen. Bei uns liegt, um dies kurz zu wiederholen, die Sache folgendermaßen. Wir hatten zunächst die Gültigkeit des Gesetzes $2\,H(ab) = \Phi(x)$ angenommen, wodurch wir die Formeln erhielten:

$$1 - 2p' = \Phi\left(\frac{x_0' - D}{U}\right)$$

$$1 - 2(p + p') = \Phi\left(\frac{x_0 - D}{U}\right)$$

$$2n - 1 = \Phi\left(\frac{x_u - D}{U}\right).$$

Um nicht fortwährend diese 3 Gleichungen anzuführen, sei es gestattet, nur die erste zu behandeln; für die beiden andern gilt dann genau dasselbe. Wir gingen also aus von der Gleichung

$$1 - 2p' = \Phi\left(\frac{x_0' - D}{U}\right),$$

sahen jedoch, dass diese Gleichung ihren Zweck nicht erfüllt. Nun thun wir einen Schritt weiter und benutzen das erweiterte Vertheilungsgesetz. Wir stellen also jetzt die Formel auf:

$$1 - 2p' = \Phi\left(\frac{x_0' - D}{U}\right) + s_1\Phi_1\left(\frac{x_0' - D}{U}\right) + s_2\Phi_2\left(\frac{x_0' - D}{U}\right) + \dots$$

und sehen zu, ob eine solche Formel den Verlauf der Zahlen besser darstellt. Jetzt sind

$$\delta_1 = 1 - 2p' - \Phi\left(\frac{x_0' - D}{U}\right)$$

die Widersprüche, die zwischen Rechnung und Beobachtung übrig bleiben, es sind dies zwar andere Widersprüche, als diejenigen, die für die Gleichung $x_0' - N$, $U - D = 0$ galten, da aber diese beiden Formeln genau mit einander übereinstimmen, so werden wir erwarten, dass auch die Widersprüche δ_1 einen regelmäßigen Gang zeigen, was in der That auch der Fall ist, wovon man sich aus späteren Tabellen überzeugen kann. Man hat demnach die Gleichungen:

$$\delta_1 = s_1\Phi_1\left(\frac{x_0' - D}{U}\right) + s_2\Phi_2\left(\frac{x_0' - D}{U}\right) + \dots$$

$$\delta_2 = t_1\Phi_1\left(\frac{x_0 - D}{U}\right) + t_2\Phi_2\left(\frac{x_0 - D}{U}\right) + \dots$$

$$\delta_3 = u_1\Phi_1\left(\frac{x_0 - D}{U}\right) + u_2\Phi_2\left(\frac{x_u - D}{U}\right) + \dots,$$

wo die s, t, u noch unbekannte Constante sind. Links stehen die bekannten Widersprüche, rechts stehen zum Theil die Derivirten der Φ-Function, deren numerische Werthe für die früher berechneten Unbekannten man aus Tafeln zu entnehmen hat, zum Theil die Constanten s, t, u. Die Aufgabe besteht nun einfach darin, für die s, t, u solche Werthe zu finden, dass die links stehenden Widersprüche ihren regelmäßigen Gang verlieren. Wäre dies auf keine Weise zu erreichen, so müssten wir auch von der Annahme, dass jene Regelmäßigkeit der Widersprüche durch das Gauß'sche Gesetz bedingt ist, abgehen.

Bis zu welcher Ableitung von Φ man dabei gehen muss, lässt sich nicht von vorn herein sagen, dies hängt zum Theil auch von der Genauigkeit der Beobachtungen ab. Man hat also für jede Differenz eine Gleichung für die $\gg$-Urtheile

$$\delta_1 = s_1\Phi_1 + s_2\Phi_2 + \dots$$

und entsprechend für die andern Urtheile. Im allgemeinen hat man also in jeder Tabelle für jede Art Widersprüche je 6 Gleichungen mit einer zunächst noch dahinstehenden Anzahl von Unbekannten. Diese sind auszugleichen. Welche Methode man für diese Ausgleichung anwendet, ist ziemlich unwesentlich, da jedoch die Methode der kleinsten Quadrate recht unangenehme Zahlenrechnungen erfordert, so ist diese nicht gewählt worden. Mit Vortheil bedient man sich des Cauchy'schen Ausgleichungsverfahrens[1]). Die Methode ist sehr einfach und kurz, ist auch insofern bequem, als man, wenn man zunächst z. B. obige Gleichungen für 3 Unbekannte ausgeglichen hat und sieht, dass diese Zahl noch nicht genügt, noch eine weitere Unbekannte hinzunehmen kann, ohne dass dadurch etwas an den früheren Rechnungen sich ändert.

Die Rechnungen wurden nun folgendermaßen angestellt: Die δ_1 wurden mit den früheren Werthen der x und U berechnet; ferner wurden für jedes $(x_0' - D) : U$ etc. die Ableitungen der Φ-Function aus der der erwähnten Bruns'schen Abhandlung beigegebenen Tabelle[2]), die von Φ_1 bis Φ_6 geht, entnommen, und zwar zunächst bis zur 3. Ableitung. Dann wurden die Gleichungen nach der Cauchy'schen Methode ausgeglichen. Die 1. Ableitung bewirkte im Gange der Widersprüche keine Aenderung, wie sich übrigens auch schon daraus ersehen lässt, dass Φ_1 stets positiv ist, wodurch der Gang der Widersprüche, die sich theils auf positivem, theils auf negativem Gebiet befinden, nicht wesentlich geändert werden kann. Die 2. Ableitung änderte den Gang stets schon etwas ab, doch ohne die Regelmäßigkeiten zu beseitigen. Dies wurde in den meisten Fällen durch die 3. Ableitung bewirkt; in manchen Fällen aber blieben auch hier noch die Regelmäßigkeiten bestehen. Dann wurde auch noch Φ_4 hinzugenommen und die 4. Unbekannte nachträglich ausgeglichen. Jetzt war in allen Fällen Unregelmäßigkeit im Verlaufe der Widersprüche erreicht, durch weiteres Hinzunehmen von Unbekannten erreichte man keine Steigerung der Unregelmäßigkeiten. So war mit 4 Unbekannten die Ausgleichung beendet.

---

1) Eine Darstellung dieses Verfahrens findet sich z. B. von Villarceau in der »Connaissance des temps pour l'an 1852«.

2) Zur Collectivmaßlehre, l. c. S. 368 ff.

Trotz der großen Vortheile, die das Cauchy'sche Verfahren in Bezug auf Schnelligkeit der Rechnung bietet, sind die eben angedeuteten Rechnungen doch noch ziemlich langwierig, sobald es sich um die Ausgleichung einer größeren Anzahl von Tabellen handelt, wie sie hier vorliegen. Da es sich außerdem in erster Linie für uns darum handelt, die Anwendbarkeit der Bruns'schen Formel zu zeigen, weniger darum, jene unbekannten Coefficienten der Φ_k kennen zu lernen, die für uns ja bloße Zahlen sind und die, wie wir später sehen werden, für unsere psychologischen Betrachtungen keine große Bedeutung haben, so wurde darauf verzichtet, alle früheren Resultate nochmals vorzunehmen, sondern es wurde von jedem Beobachter eine Tabelle in der gesagten Weise behandelt, und zwar Ms (124), P (3 . 124), Dth (124), Mr (2 . 34), und *K*. Diese Auswahl kann folgendermaßen gerechtfertigt werden: Die bei der allerersten Ausgleichung übrig bleibenden Widersprüche zeigen zwar im allgemeinen denselben Gang, sind aber doch durch die zufälligen Fehler des Apparats, durch schlechte Klangverhältnisse u. s. w. manchmal stark beeinflusst. Bei denjenigen Reihen, in denen schon bei der Auszählung der Urtheile starke Unstetigkeiten in den Zahlen sich bemerkbar machten, wurde dies auch nach der Ausgleichung fühlbar, da in solchen Reihen auch die Widersprüche starken Schwankungen unterworfen sind, während bei den Anfangsreihen, die sich schon beim ersten Anblick als gute zu erkennen gaben, auch die Widersprüche ganz regelmäßig verlaufen, so dass wir auch das letztere durchaus als das Normale betrachten konnten. Zu den Rechnungen, die jetzt folgen sollten, konnten daher nur gute Widerspruchscurven benutzt werden, und aus diesem Grunde wurden die oben angeführten Tabellen verwendet, die alle denselben regelmäßigen Gang der Widersprüche ergeben; als Controlle wurden dann wieder die K'schen Reihen benutzt. Die Ergebnisse der Ausgleichung sind in den folgenden Tabellen niedergelegt. Es sind darin die oben mit s, t, u bezeichneten Coefficienten der Ableitungen der Φ-Function verzeichnet. Das Vertheilungsgesetz tritt dann in der Form auf[1]):

$$2H(ab) = \Phi + A_1\Phi_1 + A_2\frac{\Phi_2}{2} + A_3\frac{\Phi_3}{4} + \ldots .$$

---

1) Die Bruns'schen Tabellen geben nicht $\Phi_1\ \Phi_2 \ldots$ direct, sondern $\frac{1}{2^{k-1}}\Phi_k$.

Tabelle XV.

Reihe		A_1	A_2	A_3	A_4
Ms für	x_o'	+ 0,141	+ 0,255	+ 0,350	
	x_o	+ 0,222	— 0,367	+ 0,478	
	x_u	— 0,119	+ 0,183	— 0,070	+ 0,329
Mr für	x_o'	+ 0,865	+ 1,283	+ 0,676	
	x_o	— 0,042	— 0,081	+ 0,238	
	x_u	+ 0,043	— 0,099	+ 0,190	
Dth für	x_o'	+ 0,008	+ 0,202	0,000	+ 0,064
	x_o	+ 0,093	— 0,171	+ 0,294	
	x_u	+ 0,343	— 0,640	+ 0,493	
P		+ 1,199	— 2,150	+ 1,225	
K für	x_o	+ 0,226	— 0,203	+ 0,251	+ 0,330
	x_u	— 0,091	— 1,291	+ 0,214	— 1,284

So hätten wir nach dieser Tabelle z. B. für P die Entwicklung

$$2n - 1 = \Phi\left(\frac{x_u - D}{U}\right) + 1{,}199\,\Phi_1 - 1{,}075\,\Phi_2 + 0{,}613\,\Phi_3 .$$

Irgend welche Gesetzmäßigkeiten wird man kaum aus der Tafel herauslesen können, die Coefficienten für die verschiedenen x stimmen im allgemeinen nicht überein, nur für Mr ist eine solche Uebereinstimmung vorhanden. Bemerkenswerth ist vielleicht, dass die Coefficienten für Φ_2 in der Entwickelung von $1 - 2(p + p')$ stets, in der Entwickelung von $2n - 1$ mit einer einzigen Ausnahme (Ms) negativ sind, doch können irgend welche Gesetzmäßigkeitenn naturgemäß erst mit Erfolg discutirt werden, wenn ein größeres Material vorliegt, als uns hier zur Verfügung steht. Wir müssen uns daher mit diesen Zahlenangaben begnügen.

Um sich eine Vorstellung davon machen zu können, wie durch Hinzunehmen der einzelnen Φ_k eine Vertheilung der Widersprüche erreicht wird, sind im Folgenden diese Widersprüche zusammengestellt und zwar zunächst für Ms, Mr, Dth und P. Dabei bedeutet δ die bei der allerersten, früheren Ausgleichung zurückgebliebenen Widersprüche; nimmt man das Glied mit Φ_1 hinzu, so bleiben nach dieser Ausgleichung noch die Widersprüche Δ_1, nimmt man das Glied mit Φ_2 hinzu, so bleiben die Widersprüche Δ_2 u. s. w. (s. Tabelle XVI bis XIX).

Man sieht aus diesen Tabellen, dass im allgemeinen die Ausgleichung bei Φ_3 abgebrochen werden kann, da dann schon eine hinreichende Unregelmäßigkeit im Gange der Widersprüche eingetreten ist. Doch musste einigemale auch Φ_4 hinzugenommen werden.

Auch bemerkt man, dass in der That das Glied mit Φ_1 den geringsten, das Glied mit Φ_2 schon einen größeren Einfluss auf den Gang der Widersprüche ausübt, während dann in fast allen Fällen das Glied mit Φ_3 entscheidend wirkt. Φ_3 ist also als die Function zu betrachten, durch die die Asymmetrie des Vertheilungsgesetzes, die Abweichung vom Gauß'schen Gesetze dargestellt wird.

Schließlich bleibt dann noch die K'sche Reihe übrig. Hier musste bis Φ_4 gegangen werden. Wird dann die Ausgleichung noch weiter getrieben, so ändert sich die Form der Widerspruchscurve nicht mehr. Dies soll in Tabelle XX u. XXI und den Figuren 5—11 veranschaulicht werden.

Fig. 5 stellt die ursprüngliche Widerspruchscurve dar, die Curve der δ. Nimmt man das Glied mit Φ_1 hinzu und gleicht aus, so bleiben die Widersprüche Δ_1, deren Verlauf in Fig. 6 dargestellt ist. Nimmt man dann nach einander die Glieder mit Φ_2, Φ_3 ... Φ_6 hinzu, so bleiben die Widersprüche Δ_2, Δ_3 ... Δ_6, deren Verlauf in den Curven Figg. 7, 8 ... 11 gezeichnet ist.

Bemerkenswerth ist an diesen K'schen Curven das Verhalten der ersten Ordinate. Während bei allen übrigen Beobachtern die erste, zur Differenz Null gehörige Ordinate ein Minimum ist, ist sie hier stark positiv und lässt sich auch durch die Ausgleichung nicht wesentlich herabdrücken, so dass die Curven einen von den Curven der andern Beobachter abweichenden Gang zeigen. Etwas Sicheres über diese Abweichung lässt sich nicht sagen, vielleicht hat sie ihren Grund in zufälligen Umständen bei Anstellung der Versuche.

Tabelle XVI. Dth.

	D	δ	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
x_o'	0	+ 0,019	+ 0,021	+ 0,041	+ 0,041	+ 0,051
	4	— 0,045	— 0,040	— 0,008	— 0,008	— 0,001
	8	— 0,072	— 0,063	— 0,025	— 0,025	— 0,029
	12	— 0,045	— 0,030	— 0,008	— 0,008	— 0,023
	16	+ 0,064	+ 0,085	+ 0,063	+ 0,063	+ 0,052
	20	+ 0,003	+ 0,027	— 0,063	— 0,063	— 0,052
x_o	0	— 0,003	+ 0,026	+ 0,040	+ 0,004	
	4	— 0,078	— 0,048	— 0,041	— 0,005	
	8	— 0,106	— 0,079	— 0,080	— 0,029	
	12	+ 0,001	+ 0,021	+ 0,015	+ 0,031	
	16	— 0,026	— 0,013	— 0,020	— 0,044	
	20	+ 0,085	+ 0,090	+ 0,084	+ 0,039	
x_u	0	+ 0,008	+ 0,059	+ 0,055	+ 0,011	
	4	— 0,097	— 0,054	— 0,053	— 0,009	
	8	— 0,089	— 0,058	— 0,059	+ 0,010	
	12	— 0,017	+ 0,002	+ 0,004	+ 0,001	
	16	+ 0,010	+ 0,020	+ 0,021	— 0,011	
	20	+ 0,028	+ 0,032	+ 0,033	— 0,001	

Tabelle XVII. P.

	D	δ	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
x	0	+ 0,123	+ 0,279	+ 0,028	— 0,010	
	4	— 0,050	+ 0,090	— 0,027	+ 0,012	
	8	— 0,201	— 0,081	— 0,074	— 0,006	
	12	— 0,222	— 0,124	— 0,037	— 0,004	
	16	— 0,169	— 0,093	+ 0,039	+ 0,017	
	20	— 0,127	— 0,071	+ 0,073	— 0,004	

Tabelle XVIII. Ms.

	D	δ	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
x_o'	0					
	3	+ 0,017	+ 0,024	+ 0,001	— 0,029	
	6	— 0,031	+ 0,045	+ 0,018	+ 0,014	
	9	— 0,024	— 0,002	— 0,019	+ 0,015	
	12	— 0,096	— 0,066	— 0,054	— 0,016	
	15	— 0,034	— 0,001	+ 0,053	+ 0,015	
x_o	0					
	3	+ 0,110	+ 0,116	+ 0,055	+ 0,001	
	6	— 0,071	— 0,085	— 0,090	— 0,031	
	9	— 0,057	— 0,052	— 0,039	+ 0,031	
	12	— 0,043	— 0,039	— 0,004	— 0,007	
	15	+ 0,037	+ 0,039	+ 0,077	+ 0,005	
x_u	0					
	3	— 0,182	— 0,074	+ 0,059	+ 0,027	+ 0,010
	6	— 0,138	— 0,064	— 0,058	— 0,026	— 0,009
	9	— 0,024	+ 0,018	— 0,027	— 0,027	+ 0,005
	12	+ 0,042	+ 0,062	— 0,018	— 0,013	+ 0,005
	15	+ 0,051	+ 0,059	+ 0,009	+ 0,040	— 0,008

Tabelle XIX. Mr.

	D	δ	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
x_o'	0	— 0,008	— 0,009	— 0,004	— 0,027	
	3	+ 0,017	+ 0,015	+ 0,023	+ 0,005	
	6	— 0,057	— 0,061	— 0,051	— 0,046	
	9	+ 0,031	+ 0,024	+ 0,031	+ 0,068	
	12	— 0,049	— 0,059	— 0,064	— 0,022	
	15	+ 0,103	+ 0,090	+ 0,064	+ 0,021	
x_o	0	+ 0,029	+ 0,039	+ 0,012	— 0,055	
	3	— 0,005	+ 0,009	— 0,015	— 0,013	
	6	— 0,006	+ 0,011	+ 0,003	+ 0,068	
	9	— 0,143	— 0,127	— 0,115	— 0,055	
	12	— 0,021	— 0,009	+ 0,014	+ 0,011	
	15	+ 0,072	+ 0,079	+ 0,101	+ 0,044	
x_u	0	+ 0,029	+ 0,037	+ 0,016	— 0,041	
	3	+ 0,004	+ 0,012	— 0,004	+ 0,002	
	6	— 0,025	— 0,012	— 0,015	+ 0,037	
	9	— 0,103	— 0,092	— 0,082	— 0,041	
	12	+ 0,004	+ 0,012	+ 0,028	+ 0,024	
	15	+ 0,034	+ 0,038	+ 0,052	+ 0,015	

Tabelle XX. K. x_o.

D	δ_1	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6
0,000	+ 0,312	+ 0,366	+ 0,498	+ 0,398	+ 0,160	+ 0,136	+ 0,136
0,015	+ 0,028	+ 0,082	+ 0,185	+ 0,152	— 0,053	— 0,077	— 0,078
0,030	— 0,063	— 0,010	+ 0,064	+ 0,082	— 0,077	— 0,068	— 0,068
0,046	— 0,089	— 0,038	+ 0,005	+ 0,059	— 0,042	— 0,028	— 0,028
0,061	— 0,074	— 0,030	— 0,015	+ 0,058	+ 0,010	+ 0,017	+ 0,017
0,077	— 0,072	— 0,027	— 0,038	+ 0,032	+ 0,045	+ 0,047	+ 0,048
0,092	— 0,089	— 0,048	— 0,081	— 0,023	+ 0,038	+ 0,035	+ 0,035
0,108	— 0,082	— 0,045	— 0,095	— 0,063	+ 0,040	+ 0,029	+ 0,029
0,123	— 0,121	— 0,088	— 0,150	— 0,146	— 0,016	— 0,027	— 0,027
0,139	— 0,067	— 0,039	— 0,108	— 0,137	+ 0,010	+ 0,004	+ 0,003
0,155	— 0,101	— 0,077	— 0,149	— 0,208	— 0,057	— 0,050	— 0,051
0,171	— 0,072	— 0,052	— 0,124	— 0,208	— 0,063	— 0,036	— 0,035

Tabelle XXI. K. x_u.

D	δ	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
0,000	— 0,305	— 0,227	— 0,219	— 0,135	— 0,113
0,015	— 0,043	+ 0,033	+ 0,039	+ 0,067	+ 0,081
0,030	— 0,010	+ 0,064	+ 0,068	+ 0,054	+ 0,053
0,046	— 0,014	+ 0,056	+ 0,058	+ 0,013	+ 0,001
0,061	— 0,012	+ 0,054	+ 0,055	+ 0,002	— 0,021
0,077	— 0,015	+ 0,045	+ 0,044	— 0,009	— 0,023
0,092	— 0,040	+ 0,014	+ 0,012	— 0,029	— 0,024
0,108	— 0,028	+ 0,020	+ 0,017	— 0,006	+ 0,017
0,123	— 0,062	— 0,020	— 0,023	— 0,024	— 0,001
0,139	— 0,024	+ 0,011	+ 0,007	+ 0,028	+ 0,042
0,155	— 0,066	— 0,037	— 0,041	+ 0,001	— 0,005
0,171	— 0,037	— 0,013	— 0,017	+ 0,039	— 0,002

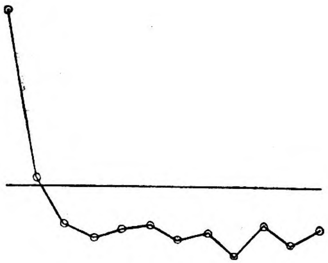

Fig. 5.

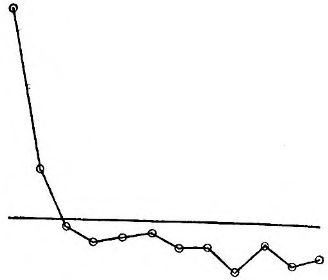

Fig. 6.

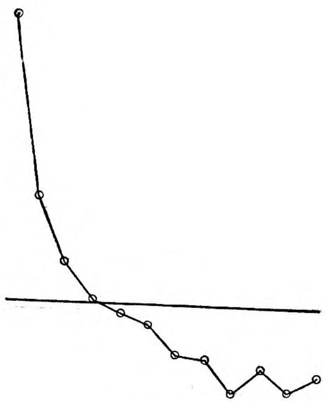

Fig. 7.

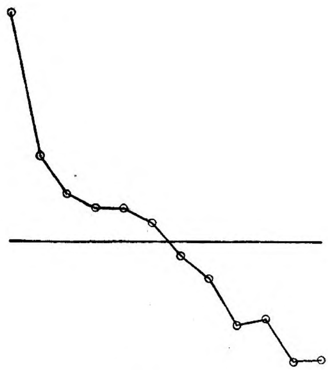

Fig. 8.

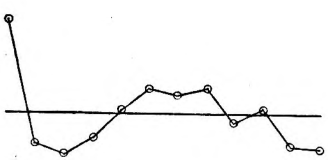

Fig. 9.

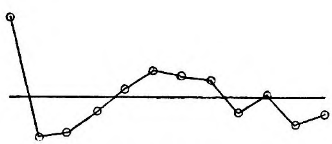

Fig. 10.

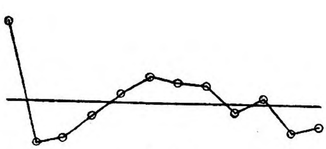

Fig. 11.

Wir sind mit der Betrachtung des Verlaufs der Widersprüche zu Ende. Fassen wir noch einmal kurz das Resultat zusammen. Wir sahen, dass das Gauß'sche Gesetz nicht zur Darstellung der Beobachtungen ausreicht. Durch Annahme des Bruns'schen verallgemeinerten Vertheilungsgesetzes konnte jedoch dieser Mangel beseitigt werden, man konnte die aus den Beobachtungen gewonnenen Zahlen befriedigend darstellen durch die Formel:

$$2H(ab) = \Phi + a_1\Phi_1 + a_2\Phi_2 + a_3\Phi_3 + \ldots,$$

worin die Constanten a gewisse durch Ausgleichung zu findende Größen sind. Ueber diese Constanten selbst, sowie bis zu welchem Gliede der Reihe man gehen muss, lässt sich Allgemeines nicht aussprechen. Nur über den letzteren Punkt kann man soviel sagen, dass es für die meisten Fälle genügen wird, bis Φ_3 zu gehen, in den wenigsten Fällen wird man noch Φ_4 benutzen müssen. Nimmt man noch höhere Ableitungen, so ändert sich im Verlaufe der Widersprüche nichts, nur würden, wie man z. B. aus den K'schen Curven sieht, die numerischen Beträge der Widersprüche noch weiter heruntergedrückt.

Uebrigens können wir nun unsere Reihenentwicklungen noch etwas vereinfachen. Die Coefficienten dieser Reihen haben nämlich die Bedeutung gewisser Durchschnittsgrößen[1]). Durch passende Wahl der in diesen Durchschnittsgrößen vorkommenden Constanten gelingt es, die beiden ersten Coefficienten zum Verschwinden zu bringen, so dass dann die Reihe sofort mit dem Gliede Φ_3 anfängt. Die neuen Coefficienten werden folgendermaßen berechnet[2]). Man hat zunächst die Coefficienten A_1, A_2, A_3, A_4 ...., von diesen sollen A_1 und A_2 zum Verschwinden gebracht werden. Zu diesem Zwecke berechnet man:

$$B_2 = A_2 - A_1^2$$
$$B_3 = A_3 - 2A_1A_2 - \tfrac{2}{3}A_1^2$$
$$B_4 = A_4 - 2A_1A_3 + 2A_1^2A_2 - A_1^4$$

und mit diesen B findet man dann:

$$C_3 = B_3 : (1 + 2B_2)^{\frac{3}{2}}$$
$$C_4 = (B_4 - B_2^2) : (1 + 2B_2)^2 .$$

1) Bruns, Zur Collectivmaßlehre. S. 359.

2) Bruns, l. c. S. 364 f.

Dann hat die gesuchte Reihenentwicklung die Form:

$$2H - 1 = C_3 \Phi_3 + C_4 \Phi_4 + \dots.$$

Damit haben natürlich auch die beiden in den Durchschnittsgrößen vorkommenden Constanten andere Werthe erhalten. So hat U jetzt den Werth:

$$U_0 = U \sqrt{1 + 2B_2}\,.$$

Ehe wir nun zur Berechnung der neuen Coefficienten übergehen, sei noch auf einen Umstand hingewiesen: In C_3 sowie in U_0 kommt die Wurzelgröße $\sqrt{1 + 2B_2}$ vor, und es ist klar, dass eine Umrechnung in die neue Form nur möglich ist, wenn die Ungleichung

$$1 + 2B_2 > 0$$

erfüllt ist, da sonst C_3 und U_0 imaginär würden. Es muss also sein:

$$1 + 2(A_2 - A_1^2) > 0$$

oder:

$$A_1^2 - A_2 < 0{,}5\,.$$

Prüfen wir daraufhin unsere Coefficienten, so sehen wir, dass diese Ungleichung im allgemeinen zwar erfüllt ist, dass aber Ausnahmen existiren und zwar in der Reihenentwicklung Dth für x_u, wo $A_1^2 - A_2 = 0.758$, P, wo $A_1^2 - A_2 = 3.587$ und K für x_u, wo $A_1^2 - A_2 = 1.299$ ist. In allen übrigen Fällen besteht die Ungleichung und geht daher die Neuberechnung der Coefficienten glatt von statten. Was ist aber in jenen Ausnahmefällen zu thun? Die Abweichung von der Ungleichung kann verschiedene Gründe haben; in unserem Fall ist die folgende Erklärung sehr naheliegend. Wir haben es mit einem »unvollständigen Collectivgegenstande« zu thun, da wir ja nur von einem bestimmten kleinsten bis zu einem bestimmten größten Reizunterschiede gegangen sind, alles Uebrige also für uns verloren gegangen ist. Bei einem solchen unvollständigen Collectivgegenstande können daher die Reihenentwicklungen auch nicht richtig sein und dies muss dann Veranlassung zu derartigen Ausnahmen geben, wie wir sie kennen gelernt haben. In diesen Fällen verfahren wir[1]) so, dass wir nicht die Reihe

1) Bruns, Zur Collectivmaßlehre, S. 367.

$$2H - 1 = \Phi + A_1\Phi_1 + \dots$$

ansetzen, sondern die Reihe

$$2H - 1 = K + K_0\Phi + K_1\Phi_1 + \dots,$$

worin K, K_0, K_1, ... durch Ausgleichung gefunden werden müssen. Die Größen K_1, K_2 .... sind aber jetzt nicht die wahren Durchschnittsgrößen, vielmehr entsprechen unseren früheren Coefficienten A_1, A_2 .... jetzt die Größen: $K_1 : K_0$, $K_2 : K_0$, ... und mit diesen ist dann die Reduction vorzunehmen.

Auf diese Weise wurden die Reihen von Dth (x_u), P und K (x_u) nochmals ausgeglichen. Die neuen Coefficienten $K_1 : K_0$ .... $K_4 : K_0$ hatten dann die Werthe:

bei Dth: $-$ 0,289, $-$ 0,0155, $+$ 0,1265

bei P: $-$ 10,779, $+$ 14,445, $-$ 8,374

bei K: $-$ 1,013, $+$ 0,559, $-$ 0,159, $-$ 0,120.

Prüft man nun abermals diese Coefficienten auf die Bedingung:

$$A_1^2 - A_2 < 0{,}5,$$

so sieht man, dass bei Dth und K diese Bedingung erfüllt ist, dass aber bei P eine außerordentlich starke Abweichung von der Ungleichung vorhanden ist. Bei K und Dth kann also jetzt die Reduction glatt von statten gehen, während dies bei P unmöglich ist. Bei diesem ist die Abweichung so stark, dass man sie wohl der Existenz bedeutender Fehler bei Abgabe der Urtheile zuschreiben darf; in der That ist ja auch schon mehrmals auf starke Abweichungen der P'schen von den andern Reihen hingewiesen worden, so dass wir wohl berechtigt sind, zu sagen: die P'sche Reihe ist so stark von zufälligen Fehlern beeinflusst, dass sie von der weiteren Verwerthung ausgeschlossen werden muss.

Es seien nun noch die neuen Coefficienten C_3 C_4 der Reihen für x_0', x_0 und x_u, sowie die neuen Unsicherheitsmaße U_0 in Tab. XVa zusammengenstellt. Damit ist die Ausgleichung dann vollkommen erledigt.

Tabelle XVa.

Reihe →		x_o'	x_o	x_u
Ms	C_3	+ 0,149	+ 8,863	— 0,027
	C_4			+ 0,161
	U_0	12,05	4,08	11,50
Mr	C_3	— 0,686	+ 0,320	+ 0,278
	U_0	17,44	7,79	7,90
Dth	C_3	— 0,002	+ 0,625	+ 0,086
	C_4	+ 0,012		
	U_0	16,93	11,43	12,80
K	C_3		+ 0,895	+ 17,47
	C_4		— 0,529	— 141,25
	U_0		0,115	0,042

Jetzt drängt sich aber noch eine Frage auf. Wir haben bis jetzt immer mit den aus der angenäherten Formel berechneten Größen U und x operirt. Offenbar müssen sich jedoch diese durch Annahme eines neuen Fehlergesetzes auch geändert haben, und man muss nun neue, dem neuen Vertheilungsgesetze angepasste Werthe von x_o', x_o, x_u und U suchen.

Zunächst sind die Formeln für diese Neuberechnung der Unbekannten aufzustellen, wobei zu bedenken ist, dass die x und U jedenfalls nur recht kleine Aenderungen erfahren werden, die wir mit dx und dU bezeichnen wollen. Wir wollen die Formeln nur für die Gleichungen mit p' aufstellen, für die übrigen sind sie ganz analog. Außerdem bezeichnen wir abkürzungsweise das erweiterte Fehlergesetz mit Ψ und gehen wieder auf die noch nicht reducirten Formeln zurück.

$$\Psi\left(\frac{x_o'-D}{U}\right) = \Phi\left(\frac{x_o'-D}{U}\right) + s_1\Phi_1\left(\frac{x_o'-D}{U}\right) + \dots .$$

Dann sollen ja die $>$-Urtheile darstellbar sein durch die Formel:

$$p' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\overline{\Psi},$$

wo $\overline{\Psi}$ die Function Ψ bedeuten soll, berechnet für die neuen, noch unbekannten Größen x_0' und U. Außerdem können wir mit den alten Größen x_0' und U die Function $\Psi\left(\frac{x_0' - D}{U}\right)$ berechnen und erhalten dann gewisse Werthe (p'), die von den beobachteten Größen p' abweichen. Also:

$$(p') = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Psi.$$

So erhält man durch Subtraction dieser beiden Formeln:

$$(p') - p' = \frac{1}{2}(\overline{\Psi} - \Psi).$$

Da wir nun angenommen haben, dass x_0' und U sich nur wenig verändern, so wird auch $\overline{\Psi}$ nur wenig von Ψ abweichen, wir können setzen:

$$\overline{\Psi} = \Psi + d\Psi,$$

so dass jetzt unsere Formel die Gestalt hat:

$$(p') - p' = \frac{1}{2} d\Psi.$$

$(p') - p'$ können wir auch, wie leicht einzusehen, durch die zuletzt berechneten, nach dem Cauchy'schen Ausgleichungsverfahren übrig gebliebenen Widersprüche $\varDelta(x_0')$ ausdrücken, indem

$$(p') - p' = \frac{1}{2}\varDelta x_0'$$

ist, wo $\varDelta(x_0')$ die für die 1. Gleichung: $1 - 2p' = \Psi$ zurückbleibenden Widersprüche sind. Dann nimmt die Formel die Gestalt an:

$$\varDelta(x_0') = d\Psi$$

oder, wenn wir $d\Psi$ weiter ausführen:

$$\varDelta(x_0') = \Psi'(x_0')\left\{\frac{1}{U}dx_0' - \frac{x_0' - D}{U^2}dU\right\},$$

wo $\Psi'(x_0')$ die Ableitung von Ψ nach $\frac{x_0' - D}{U}$ bedeutet, oder es kommt schließlich:

$$\frac{\Delta(x_0') \cdot U}{\Psi'(x_0')} = dx_0' - \frac{x_0' - D}{U} dU,$$

worin also:

$$\Psi'(x_0') = \Phi_1\left(\frac{x_0' - D}{U}\right) + s_1\Phi_2\left(\frac{x_0' - D}{U}\right) + s_2\Phi_3\left(\frac{x_0' - D}{U}\right) + \ldots$$

ist. Die linke Seite obiger Gleichung ist mit den alten Größen zu berechnen, auf der rechten Seite stehen in linearer Form die Zuwüchse, die diese Größen erhalten. Man hat also wieder ein System linearer Gleichungen und kann nach irgend einem Verfahren daraus die Werthe dx_0' und dU berechnen. Ganz analog werden für die übrigen Urtheilsklassen die folgenden Formeln in Betracht kommen:

$$\frac{\Delta(x_0) \cdot U}{\Psi'(x_0)} = dx_0 - \frac{x_0 - D}{U} dU$$

$$\frac{\Delta(x_u) \cdot U}{\Psi'(x_u)} = dx_u - \frac{x_u - D}{U} dU.$$

Mit Hülfe dieser Formeln wurde die K'sche Reihe von neuem vorgenommen und die Zuwüchse von x_0 und U berechnet. Es fand sich (nach dem Cauchy'schen Ausgleichungsverfahren):

$$dU = -0{,}054 \quad dx_0 = +0{,}010\,.$$

Danach würden die neuen Werthe von U und x_0 jetzt sein:

$$U = 0{,}164 - 0{,}054 = 0{,}110$$

$$x_0 = 0{,}008 + 0{,}010 = 0{,}018\,.$$

Die Correctionen beeinflussen offenbar die ursprünglichen Werthe nur wenig. Zwar scheint die Correction für x_0 sehr groß, da sie den Werth von x_0 selbst übersteigt, doch muss man bedenken, dass diese Correction immer noch innerhalb der Grenzen des mittleren Fehlers liegt, der ja $\pm$ 0,013 beträgt. Außerdem wird jede andere Ausgleichungsmethode als die, die wir angewendet haben, andere Werthe als Correctionsglieder hinzufügen, und man wird sich daher, wenn nicht Messungen vorliegen, die eine außerordentliche Genauigkeit beanspruchen, mit den ursprünglichen Werthen begnügen können. Für die folgenden Betrachtungen genügen die ursprünglichen Werthe vollkommen, so dass auch nur für diesen einen Fall der K'schen Reihe die Anwendung der Correctionsformeln gezeigt wurde, während im übrigen diese Verbesserungen nicht ausgeführt wurden.

8. Psychologische Betrachtungen.

Wir haben eine Discussion der in Tabelle VI vorliegenden Werthe bis jetzt verschoben, da zunächst unser Augenmerk darauf gerichtet war, die Formeln zu prüfen. Jetzt wenden wir uns wieder jener Tabelle zu, die in etwas knapperer Form — außerdem sind bei Mr die arithmetischen Mittel der verschiedenen U gebildet worden — nochmals hier ihren Platz finden möge.

Tabelle XXII.

Reihe		U	x_o'	x_o	x_u
Ms	(124)	9,94	15,42	5,45	— 1,81
	(124 . 3)	9,57	16,93	7,00	— 1,07
	(3 . 124)	9,62	16,94	4,91	— 11,19
Mr	(34)	11,46	17,09	1,23	— 1,10
	(2 . 34)	9,83	20,41	6,88	5,80
	(34 . 2)	9,36	8,96	— 4,46	— 5,05
Dth	(124)	14,29	22,37	2,91	— 2,58
	(124 . 3)	12,56	23,16	5,63	2,02
	(3 . 124)	11,90	16,65	— 1,83	— 6,08
P	(124 . 3)	15,25		4,05	4,05
	(3 . 124)	25,24		— 6,30	— 6,30

Was zunächst die U anbetrifft, so zeigen diese für jede einzelne Versuchsperson einen ziemlich constanten Werth, nur bei P weichen die beiden U stark von einander ab. Vielfach ist das U als eine Größe angesehen worden, die der Unterschiedsempfindlichkeit parallel geht, eine Hypothese, die zuerst von Fechner gemacht wurde. Aus den Grundformeln, die zur Berechnung des U und x verwendet wurden, vermag man einen Grund dieser Annahme durchaus nicht einzusehen; sie ist durchaus hypothetischer Natur. U bedeutet in den Formeln eine rein mathematische Hülfsgröße, die wohl ihr Dasein dem Vorkommen des Präcisionsmaßes in dem Gauß'schen Vertheilungsgesetze verdankt; wie aber diese Größe zu jener psychologischen Bedeutung kommen sollte, ist unerfindlich; außerdem liefert das Präcisionsmaß wohl eine Beurtheilung dafür, mit welcher Genauigkeit Beobachtungen angestellt worden sind, die Beobachtungsgenauigkeit hängt aber doch kaum mit der Unterschiedsempfindlichkeit zusammen. Um diesen Punkt weiter zu prüfen, wurden außerdem bei Mr, Ms und Dth nach der Methode der Minimaländerungen Bestimmungen der beiden oberen Schwellen vorgenommen, nämlich die Schwellen für die Urtheile »größer« und »viel größer«. Zwischen diesen Schwellen und der Größe U ließ sich kein Zusammenhang erkennen.

Im Folgenden sind die U mit diesen Schwellenwerthen zusammengestellt, und man wird die Richtigkeit des Gesagten erkennen.

Tabelle XXIII.

Reagent	Mittleres U	S_o	S_o'
Ms	9,71	7,8	18,4
Mr	10,22	3,7	10,0
Dth	12,92	6,0	18,0

Dass sich das Unsicherheitsmaß proportional der Schwelle ändert, wie man oft angenommen hat, ist nach obiger Tafel durchaus nicht der Fall.

Wir wollen nun weiterhin zunächst zu den x_o und x_u übergehen. Dies waren ja die Differenzen, für welche die Wahrscheinlichkeit, einen Reiz »größer« bezw. »kleiner« zu beurtheilen, nach dem einfachen Gauß'schen Gesetz den Werth $\frac{1}{2}$, nach dem erweiterten

Vertheilungsgesetz einen etwas kleineren Werth hat. Man kann wohl versucht sein, eher diese Größen als das U für Werthe zu nehmen, die mit der Unterschiedsempfindlichkeit zu thun haben. Dass sie dagegen mit den Schwellen, die man nach der Methode der Minimaländerungen findet, nicht zusammenhängen, wird aus dem Folgenden hervorgehen.

Zunächst sind in unseren Werthen für x_o und x_u diese noch zum Theil mit constanten Fehlern behaftet; nur die ersten Reihen für jede Versuchsperson: Ms (124), Mr (34), Dth (124) darf man als frei von diesen Fehlern ansehen. Vergleicht man die zu diesen Reihen gehörigen x_o und x_u:

Ms	$x_o = 5{,}45$	$x_u = -\ 1{,}81$
Mr	$1{,}23$	$-\ 1{,}10$
Dth	$2{,}91$	$-\ 2{,}58$,

so sieht man, dass x_o stets $> - x_u$ ist. In der That müsste dies, wenn das Weber'sche Gesetz gelten würde, auch der Fall sein.

Um nun die constanten Fehler aus den übrigen x zu eliminiren, ist es am einfachsten, dazu die x_o und x_u zu benutzen. Man könnte etwa das Weber'sche Gesetz als gültig annehmen, also, wenn (x_o) und (x_u) die Werthe der von constanten Fehlern freien x_o und x_u bedeuten, setzen:

$$\frac{R + (x_o)}{R} = \frac{R}{R + (x_u)},$$

wo R den Normalreiz bedeutet, d. h. die constanten Fehler würden sich dann aus der Gleichung ergeben:

$$\frac{R + x_o + c}{R} = \frac{R}{R + x_u + c}.$$

Wir wollen indessen eine andere Hypothese machen, die schon im Anfange dieser Arbeit erwähnt wurde. Die wahren absoluten Werthe von x_o und x_u werden sehr nahe einander gleich sein, und wir werden einen sehr angenäherten Werth von c erhalten, wenn wir $x_o = - x_u$ setzen. Dann wird

$$c = \frac{x_o + x_u}{2}.$$

Auf diese Weise erhalten wir folgende Werthe von c:

Tabelle XXIV.

	Reihe	Const. Fehler
Ms	(124 . 3)	+ 2,97
	(3 . 124)	— 3,14
Mr	(2 . 34)	+ 6,34
	(34 . 2)	— 4,76
Dth	(124 . 3)	+ 3,88
	(3 . 124)	— 3,96
P	(124 . 3)	+ 4,05
	(3 . 124)	— 6,30

Aus dieser Tabelle ersieht man, dass der Reiz 3 von Ms um etwa 11%, von Dth um etwa 11%, von P um etwa 14% der Normalintensität gegenüber den Reizen 1, 2, 4 unterschätzt wurde, während Mr den Reiz 2 gegenüber den Reizen 3, 4 um etwa 21% der Normalintensität überschätzte.

Gehen wir nun wieder zu den x zurück, x_o und x_u haben wir als entgegengesetzt gleich angenommen; diese beiden Werthe fallen also zu einem einzigen zusammen, den man aus der Formel erhält:

$$x = x_o - c = x_u - c .$$

Entsprechend erhält man die wahren Werthe (x_o'), worin ja auch der constante Fehler steckt, aus

$$(x_o') = x_o' - c .$$

Die so berechneten Werthe von x_o' und x findet man in folgender Tabelle für die einzelnen Reihen, zusammen mit den Schwellen der Methode der Minimaländerungen zusammengestellt.

Tabelle XXV.

Reihe		x	x_0'	S_0	S_0'
	(124)	5,45	15,42		
Ms	(124 . 3)	4,03	13,96	7,8	18,4
	(3 . 124)	8,05	20,08		
	(34)	1,23	17,09		
Mr	(2 . 34)	0,54	14,07	3,7	10,0
	(34 . 2)	0,30	13,72		
	(124)	2,91	22,37		
Dth	(124 . 3)	1,75	19,28	6,0	18,0
	(3 . 124(	2,13	20,61		

Man erkennt aus diesen Tabellen den Zusammenhang zwischen x und x_0'; es findet gleichzeitiges Anwachsen und Abnehmen dieser beiden Größen statt.

Ein sehr geringer numerischer Werth von x, wie ein solcher in früheren Arbeiten, so auch bei Kämpfe, constatirt worden ist, lässt sich hier nur bei Mr feststellen, bei Dth hat x schon größere Werthe und bei Ms erreichen die Werthe von x sogar die Größe der Unterschiedsschwellen. Die x_0' sind sämmtlich größer als die entsprechenden Schwellen S_0' der Methode der Minimaländerungen. Ein erkennbarer Zusammenhang zwischen den Schwellen der Methode der Minimaländerungen und unseren x scheint nach diesen Zahlen nicht zu bestehen. Mag man auch — und das kann der Bedeutung der x nach natürlich unbenommen bleiben — in den x eine Art von Unterschiedsschwellen erblicken, so ist doch zu bedenken, dass diese mit den Schwellen der Methode der Minimaländerungen nicht übereinstimmen. In der That sind ja auch die Voraussetzungen, von denen beide Methoden ausgehen, so verschieden, die Bedingungen, unter denen die Experimente zu Stande kommen, so von einander abweichend, dass es nicht einzusehen ist, wie man Werthe, die auf die eine Weise gewonnen sind, mit gewissen Größen der andern Methode wegen einer entfernten Aehnlichkeit vergleichen kann.

Die Werthe x sind insofern von psychologischen Factoren abhängig, als sie eine innerhalb der Reihe vollständig bestimmte Reizdifferenz definiren, was man offenbar als eine Art Schwelle ansehen darf. Letzterer Grund mag vielleicht nicht stichhaltig erscheinen, da wir ja gleich am Anfang gesagt haben: wir wollen wegen der Bedeutung der x dieselben als innerhalb einer Reihe constante Größen annehmen; nachdem wir aber gezeigt haben, dass, wenn man dies thut, die Beobachtungen sich dem Gauß'schen Gesetz nahezu, dem erweiterten Gauß'schen Gesetz völlig anschmiegen, ist damit in der That der Beweis erbracht, dass es sich um Parameter handelt, die innerhalb einer Versuchsreihe jedenfalls sehr wenig variiren.

Was die psychologische Bedeutung des Unsicherheitsmaßes U anbetrifft, so lässt sich aus unseren Reihen nichts darüber aussagen. Mit der Unterschiedsschwelle hat U jedenfalls nicht viel zu thun. Wohl aber ist nach der Bedeutung, die U in dem Gauß'schen Gesetze besitzt, — je größer U ist, über eine desto größere Strecke dehnen sich ja die Fehler aus; es drückt daher U die von Bruns sogenannte »Streuung« des Vertheilungsgesetzes ziffernmäßig aus —, zu vermuthen, dass U von psychologischen Factoren abhängig ist. Hier käme wohl in erster Linie die Abhängigkeit von der Aufmerksamkeit in Betracht, Schwankungen derselben würden sich wahrscheinlich in der Größe von U widerspiegeln.

Die psychologischen Bedeutungen der beiden Hauptgrößen der Methode der richtigen und falschen Fälle liegen daher auf zwei verschiedenen Gebieten. So großes Interesse das Auffinden der x bietet, so würde es sich doch wohl verlohnen, auch einmal das Verhalten des U etwa unter verschiedenen Bedingungen der Aufmerksamkeit zu untersuchen, um damit seine psychologische Bedeutung näher zu ergründen.

Was nun die Prüfung des Weber'schen Gesetzes anbelangt, die sich in früheren Untersuchungen immer an den Gebrauch der Methode der richtigen und falschen Fälle anschloss, so ist diese nach den obigen Auseinandersetzungen mit wenigen Bemerkungen abgethan. Die Prüfung geschah immer derart, dass man innerhalb einer Reihe die Constanz von $hi = i : U$ oder, nach einer genaueren von Merkel aufgestellten Formel die Constanz von $h\left(i+\frac{1}{2}D\right)$, wo i die Normalintensität, D die Reizdifferenz bedeutet, nachwies. Die Prüfung würde in unserem Sinne unzulässig sein, da sie sich darauf gründet, dass das h eine die Unterschiedsempfindlichkeit repräsentirende Größe darstellt. Man hat früher stets eine Constanz von hi durch alle Differenzen gefunden; wir sind zu dem Ergebnisse gelangt, dass man in der That diese Annahme machen darf, wieder aus dem Grunde, weil mit dieser Annahme die Beobachtungen sich gut durch das Vertheilungsgesetz darstellen lassen. Ist nun hi constant, so dürfte allerdings $h\left(i+\frac{1}{2}D\right)$ keine constante Größe sein, sondern müsste mit D wachsen. Vergleichen wir nun mit diesem Schluss die Kämpfeschen Resultate. Kämpfe hat in einer Tabelle[1]) die Werthe hi zusammengestellt, in einer anderen[2]) die Werthe $h\left(i+\frac{1}{2}D\right)$, die nach Merkel bei Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes eine genauere Constanz aufweisen müssten. In der That ist aber das Umgekehrte der Fall, die hi zeigen eine annähernde Constanz, während die $h\left(i+\frac{1}{2}D\right)$, wie auch Kämpfe bemerkt, ein kleines, aber immerhin deutliches Wachsthum mit Zunahme von D zeigen. Aus dieser Inconstanz wird man natürlich nicht schließen, dass das Weber'sche Gesetz ungültig ist, sondern eher zu der Annahme neigen, dass der Größe h oder U nicht die angenommene psychologische Bedeutung beizulegen ist.

Auch die Größen x können wir zu einer Prüfung des Weber'schen Gesetzes nicht benutzen. Vielmehr liegt die Sache hier folgendermaßen: Haben die Größen x eine psychologische Bedeutung, wie es nach unseren Betrachtungen wahrscheinlich ist, so müsste in der That bei Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes für verschiedene Normalintensitäten i und die bezüglichen Werthe x das Verhältniss $x:i$ einen für alle Normalintensitäten gleichen Werth haben. Zu dieser Prüfung gehören aber weitere ausgedehnte Versuchsreihen, bei denen verschiedene Normalintensitäten benutzt werden müssten. Mit unserem

1) l. c. S. 567. Tab. II. 2) l. c. S. 587. Tab. XV.

Versuchsmaterial kann diese Frage noch nicht discutirt, sie muss daher offen gelassen werden.

In Bezug auf die Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes sind wir so zu einem befriedigenden Abschlusse nicht gelangt. Nur soviel können wir sagen, dass U jedenfalls zu einer Prüfung ungeeignet ist; alle anderen Fragen können erst nach Aufbringung von neuem Versuchsmaterial beantwortet werden.

Schluss.

Im Folgenden mögen noch einmal die Resultate der vorliegenden Arbeit zusammengestellt werden.

Der Zweck der Untersuchung war, die Methode der richtigen und falschen Fälle im Gebiete der Schallempfindungen vorwiegend nach der mathematischen Seite hin einer Prüfung zu unterziehen. Die Versuche wurden am Fallphonometer mit 4 Reagenten vorgenommen. Die Methode war vollkommen unwissentlich; um dies in einem möglichst hohen Grade zu erreichen, wurde mit 4 Schallreizen zu gleicher Zeit gearbeitet, wodurch die Reagenten über die Art der angewandten Reizdifferenzen stets im Unklaren bleiben mussten. Als Urtheile wurden verwendet: »viel größer«, »größer«, »gleich«, »kleiner« und »viel kleiner«. Auch die Urtheile »viel größer« und »viel kleiner« erwiesen sich — mit einer Ausnahme — als durchaus brauchbar und wohl unterscheidbar von »größer« und »kleiner«.

Als Grundlage für die mathematische Behandlung des Beobachtungsmaterials wurden zunächst die von Bruns entwickelten Formeln angenommen, die den Müller'schen Formeln einigermaßen entsprechen. Aus diesen Formeln wurden vermittels Ausgleichung durch die Methode der kleinsten Quadrate die plausibelsten Werthe der Unbekannten — des Unsicherheitsmaßes U und der Grenzen der verschiedenen Urtheile x_0', x_0 und x_u — ermittelt. Neben den eigenen Tabellen wurde zur Controlle noch eine Kämpfe'sche Tabelle zur Berechnung herangezogen. Es wurden sodann die nach der Ausgleichung übrig bleibenden Widersprüche berechnet; dieselben zeigten im allgemeinen einen und denselben regelmäßigen Verlauf. Hieraus musste geschlossen werden, dass das Gauß'sche Fehlergesetz in seiner einfachen Gestalt nicht im Stande ist, die beobachteten Zahlen hinreichend genau darzustellen. Es wurde daher zu dem von Bruns entwickelten verallgemeinerten Vertheilungsgesetz übergegangen, das sich als eine Summe von Ableitungen der Gauß'schen Transcendente, multiplicirt mit gewissen unbekannten Constanten, darstellt. Es zeigte sich, dass dies Gesetz in der That im Stande ist, jenen regelmäßigen Verlauf der Widersprüche zu einem unregelmäßigen zu gestalten, dass also das verallgemeinerte Vertheilungsgesetz den Thatsachen der Beobachtungen besser Rechnung trägt als das einfache Gauß'sche. Bis zu welchem Gliede der Reihe man gehen muss, um eine solche genaue Darstellung zu erzielen, ist von vornherein nicht zu sagen. Doch genügten in den meisten Fällen die Φ-Function und ihre drei ersten Ableitungen. Ueber die Coefficienten des Gesetzes, die bei der Ausgleichung als Unbekannte auftreten, lässt sich nichts Bestimmtes sagen. Um die Berechnung zu einem völligen Abschlusse zu bringen, müssen noch die Unbekannten von neuem berechnet werden, um sie dem jetzigen Vertheilungsgesetze anzupassen. Dies wurde hier nur in einem Falle durchgeführt, da die Aenderungen, die die Unbekannten erfahren, nur klein sind und für die weiteren Betrachtungen unwesentlich erschienen.

Die anfangs berechneten Werthe der Unbekannten U und x wurden sodann einer Discussion unterzogen. Dabei zeigte es sich, dass das Unsicherheitsmaß U wohl kaum mit der Unterschiedsempfindlichkeit etwas zu thun hat, vielmehr eher mit andern psychologischen Factoren in Zusammenhang steht. Ob die Werthe x_o', x_o und x_u mit der Unterschiedsempfindlichkeit zusammenhängen, wurde dahingestellt gelassen. Das Weber'sche Gesetz konnte vermittels der Größe U jedenfalls nicht geprüft werden; wie sich die x in dieser Beziehung verhalten, muss einer späteren eingehenden Behandlung des Gegenstandes überlassen bleiben.

Es harren also, wie man sieht, noch eine ganze Anzahl Fragen ihrer Erledigung, und wenn diese Untersuchung einen Anstoß dazu geben würde, die psychophysischen Methoden von neuem in Angriff zu nehmen, so wäre ihr Zweck vollauf erfüllt.

Zum Schlusse möchte ich mir noch gestatten, Herrn Professor Wundt, in dessen Laboratorium diese Versuche ausgeführt wurden, und Herrn Professor Bruns für ihre vielfache liebenswürdige Unterstützung meinen besten Dank auszusprechen.