Ueber den Unendlichkeitsbegriff in der Mathematik und Naturwissenschaft.

Von

Prof. Dr. Carl Cranz
in Stuttgart.

In dem Grenzgebiet zwischen der Philosophie einerseits und der reinen und angewandten Mathematik anderseits finden sich mehrere offene Fragen, die von der Seite der Mathematik so weit gefördert sind, dass es nunmehr eine lohnende Aufgabe der Philosophie sein kann, auf Klarstellung und allgemeine Uebereinstimmung der Meinungen hierüber hinzuarbeiten. Dazu gehören u. a. die Fragen nach dem Ursprung und nach dem Charakter der geometrischen Axiome, nach der Zahl und dem Zusammenhang der mechanischen Grundgesetze, nach der Bedeutung der mehrdimensionalen Geometrie und endlich nach dem eigentlichen Wesen des Unendlichen, insbesondere des sogenannten Unendlichkleinen in der Mathematik.

Diese letztere Frage hat der vorliegende Aufsatz zu seinem Gegenstand. Dass diese eine offene ist, dass nicht nur von der Seite der Philosophen, sondern selbst noch immer von der Seite mancher Mathematiker die widersprechendsten Ansichten hinsichtlich des Unendlichen in der Mathematik laut werden, wird sich im folgenden zur Genüge zeigen. Meine Absicht geht dahin, die wichtigsten der über den Gegenstand geäußerten entgegengesetzten Meinungen kurz anzuführen und zu kritisiren, die Irrthümer hervorzuheben, die sich an diesen Begriff knüpfen, und meine eigene Ansicht möglichst präcise zu entwickeln, um damit einen

Beitrag zur schließlichen Einigung über die Bedeutung dieses strittigen Begriffs zu liefern. Hingegen liegt es mir ferne, eine Geschichte des Unendlichkeitsbegriffs an dieser Stelle auch nur skizziren zu wollen, indem dies ein umfangreicheres Unternehmen für sich darstellen würde; ebenso beabsichtige ich nicht, die kosmologischen Streitfragen über die Endlichkeit oder Unendlichkeit von Raum und Stoff zu erörtern.

1) Im vulgären Sprachgebrauch ist uns der Begriff »unendlich« ein sehr geläufiger; wir sprechen von »unendlicher Geduld«, »unendlicher Langmuth«, »unendlicher Liebe und Allmacht«; nennen die Zahl der Sterne am Himmelsgewölbe, die Zahl der Tropfen im Meere »unendlich«; bezeichnen die Masse eines Staubtheilchens gegenüber derjenigen der Erde, die Masse der Erde gegenüber der Stoffmenge im Milchstraßensysteme als »unendlich klein«; lassen ein Meteor »in die Unendlichkeit sich verlieren« und speculiren über die »Unendlichkeit« von Raum, Zeit und Stoff.

Durchweg ist uns hier unendlich = jedes Messen und Zählen ausschließend; es ist ein mehr oder weniger unbestimmter Begriff, der lediglich die Unmöglichkeit, ein bestimmtes Denkobject als messbare Größe, in angebbarer Zahl zu fassen, mit einer in Gedanken ausgeführten Theilung oder Summirung je zu einem logischen Abschluss zu gelangen, andeutet.

Offenbar dieselbe Bedeutung des Unendlichkeitsbegriffs liegt vor, wenn der Mathematiker lehrt, dass durch eine Gerade unendlich viele Ebenen zu legen sind, auf einer Geraden in einem Punkt unendlich viele Geraden senkrecht stehen, eine Gerade unendlich viele Punkte, eine Ebene unendlich viele Geraden etc. beherberge, dass eine Aufgabe unendlich viele Lösungen zulasse, die Reihe der natürlichen Zahlen unendlich sei u. s. f.

Nur um mich des Oefteren kurz ausdrücken zu können und doch keinen neuen Namen oder kein neues Zeichen einführen zu müssen, will ich im Folgenden diesen eben erwähnten Begriff des Unendlichen (= Zahl und Maß ausschließend) denjenigen des gewöhnlichen Sprachgebrauchs nennen.

Eine andere Bedeutung des Unendlichkeitsbegriffs tritt uns da entgegen, wo in der reinen und angewandten Mathematik von einer Summe von unendlich vielen Gliedern oder kurz von einer »unendlichen Summe«, ebenso einem »unendlichen Product oder Kettenbruch«, ferner einer »unendlich kleinen Differenz«, einem »unendlich kleinen Abstand« zweier Punkte, einem »unendlich kleinen Zuwachs« etc. einer Strecke, einer Fläche, eines Körpers, kurz von einem »Differential« die Rede ist, oder wo in der neueren Geometrie der »unendlich ferne Punkt« einer Geraden, die »unendlich ferne Gerade« einer Ebene etc. zur Verwendung kommen. Hier ist der Unendlichkeitsbegriff ein bestimmterer: denn es handelt sich, wie wir sehen werden, lediglich um Ermittelung von Grenzwerthen variabler Größen bez. Grenzlagen von veränderlich gedachten Lagen. In einer solchen Wortverbindung wie z. B. »unendliche Summe«, »unendlich ferner Punkt einer Geraden« ist die Eigenschaftsbestimmung »unendlich« vom Mathematiker dem gewöhnlichen Sprachgebrauch entlehnt; wir erkennen, dass uns nichts hindert, die Additionen

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8},\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$$

fortzusetzen, sobald wir das Gesetz erkannt haben, und dass wir mit der Addition niemals zu Ende kommen würden. Allein, wenn der Mathematiker nach dem Werthe dieser »unendlichen Summe« fragt, so versteht er darunter einen ganz bestimmten positiven Begriff — ähnlich, wie etwa der Physiker mit dem Begriff der »Empfindlichkeit« einer Waage ein ganz bestimmtes Verhältniss im Auge hat, wenn auch das Wort Empfindlichkeit dem vulgären Sprachgebrauch entlehnt ist —; der Mathematiker will mit dieser Wortverbindung nicht andeuten, dass jedes Maß und jede Zahl hier ausgeschlossen sei, sondern er fragt nach einem Grenzwerth.

Folglich handelt es sich in der Mathematik bei Anwendung der erwähnten Wortverbindungen in der That um einen andern Begriff von Unendlich, dessen wahre Bedeutung wir im Folgenden discutiren werden. In diesen Fällen will ich — ebenfalls nur der Kürze halber — von dem Unendlichen als dem Grenzwerth-Unendlichen oder dem sogen. mathematischen Unendlich sprechen.

Eine eingehendere Discussion über die wahre Bedeutung dieses Begriffs, insbesondere des Differentials, — hinsichtlich dessen ich sogleich voranschicken möchte, dass ich darin nur eine abkürzende Redewendung von bloß formaler Bedeutung erblicken kann, —

scheint mir um so mehr angezeigt, als dieser Begriff schon in der niederen Mathematik, bei den Decimalen und den irrationalen Zahlen, sich einschleicht. Systematisch allerdings tritt dieser Begriff erst in der Analysis entgegen: der Mathematiker entwickelt Ausdrücke in unendliche Reihen, unendliche Producte, unendliche Kettenbrüche; er summirt unendlich viele unendlichkleine Flächen- und Körperstücke, um auf diese Weise den Flächeninhalt krummlinig begrenzter Flächen und den Rauminhalt krummflächig begrenzter Körper durch unendliche Processe zu ermitteln; er spricht von der Tangente als von der Verbindungslinie zweier unendlich benachbarter Curvenpunkte; und der Krümmungskreis, der das Maß der Krümmung an einer bestimmten Stelle einer Curve angibt, ist ihm der durch 3 unendlich nahe Curvenpunkte gelegte und damit eindeutig bestimmbare Kreis. Gelegentlich biegt der Geometer, wenn es ihm für seinen Zweck dienlich ist, gewissermaßen in Gedanken die gerade Linie zu einem Kreis mit unendlich großem Radius; und die schon erwähnten Begriffsbezeichnungen wie unendlich ferner Punkt einer Geraden, unendlich ferne Gerade einer Ebene, unendlich ferne Ebene des Raumes sind in einem Lehrbuch der neueren Geometrie auf derselben Seite Dutzende Male zu lesen. Auch in der rechnenden Physik und Technik wird bei Berechnungen des Schwerpunkts, des Wasser- und Luftdrucks, der Ausflussmenge bei sinkendem Wasserniveau, der Trägheitsmomente, bei Gelegenheit der Spiegel- und Linsenformeln, bei Ermittelung des Potentials, bei Elasticitätsberechnungen u. s. w. fortwährend in der bequemsten Weise von dem Begriff des Unendlichkleinen Gebrauch gemacht; das Unendlichkleine ist dem Mathematiker, Physiker und Techniker ein ebenso handlicher Begriff geworden, wie dem Chemiker der des Moleküls und Atoms.

Wie verhält es sich nun damit näher? Ist es in der That genau oder ist es nur angenähert richtig, wenn z. B. eine Gemeinde, die für alle Ewigkeit zu einer Besoldung jährlich 200 Mark beizusteuern hat, diese Verpflichtung bei 4 Procent jetzt auf einmal mit 5000 Mark ablöst? Denn sie ist doch thatsächlich verpflichtet, unendlich oft 200 Mark zu zahlen, was niemand zu leisten im Stande ist. Oder, wie ist es möglich, dass Achilles die Schildkröte einholt, der Pfeil das Ziel trifft, da doch thatsächlich unendlich viele Weg-strecken zurückzulegen sind? Ist der durch einen Unendlichkeitsprocess ermittelte Schwerpunkt einer parabolischen Scheibe genau richtig; sind die zwei sogenannten »unendlich benachbarten« Curvenpunkte, durch welche die Curventangente gelegt ist, thatsächlich ein und derselbe Punkt, oder stehen sie in Wirklichkeit um eine zwar überaus kleine, aber schließlich doch endlich kleine Strecke von einander ab? Existirt das Differential? Schneiden sich zwei Parallelen schließlich doch in einem Punkt, dem sogenannten unendlich fernen Punkt? u. s. f.

Ich glaube, man wird allgemein behaupten dürfen, dass über die wahre Bedeutung der sämmtlichen strittigen Begriffe in den exacten Wissenschaften lediglich dadurch Klarheit und Uebereinstimmung der Ansichten erzielt werden kann, dass auf die Geschichte der betreffenden Disciplin, auf die Entstehung des betreffenden Begriffs zurückgegangen wird. So wollen wir auch hier, statt uns über die erwähnten Fragen allgemeinen Ueberlegungen und Speculationen hinzugeben, lieber die Frage anders stellen: Wie ist dieser eben wiederholt angewandte Begriff Unendlich in der Mathematik entstanden?

Nehmen wir das ganz elementare Beispiel des Decimalbruchs 0,333 ..., was bekanntlich nach Uebereinkunft eine abkürzende Schreibweise für die umständlichere Form $\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots$ »und so fort bis ins Unendliche« darstellt.

Wir haben zunächst nichts als die endliche Summe $\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^x}$; diese Summe sei kurz mit y bezeichnet; zu jedem Werth von x, also zu $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ ... wird jedesmal ein anderer Werth der Summe y gehören; je größer x ist, um so größer wird auch y sein, und zwar verläuft diese Abhängigkeit stetig, also ohne plötzlichen Sprung; und in jedem Fall können wir den augenblicklichen Fehler gegenüber dem Werth $\frac{1}{3}$ angeben, und dieser Fehler wird kleiner und kleiner; genauer gesagt, wir können stets berechnen, wie groß x sein muss, damit der Unterschied von $\frac{1}{3}$ gegenüber der endlichen Summe y kleiner sei, als irgend eine beliebige kleine, aber endliche Größe ε, welche man sich vornimmt. Z. B. wenn $x = 3$ gewählt wird, ist der Fehler gegenüber von $\frac{1}{3}$ kleiner als $\frac{1}{1000}$; wenn $x = 8$, ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{100 \text{ Mill.}}$ u. s. f. Statt dessen sagen wir nun kürzer: der Grenzwerth der Summe ist $\frac{1}{3}$, oder noch kürzer: die Summe der unendlichen Reihe y ist $\frac{1}{3}$, aber in diesem Fall sprachlich ungenauer, weil ja niemand unendlich viele Glieder addiren kann; und wenn ich schreibe: $\frac{1}{3} = 0{,}333$ und einige Punkte daran, so drücke ich durch diese Punkte aus, dass das Gleichheitszeichen in diesem Fall eine andere Bedeutung hat, als z. B. in dem Fall $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$. (Es ist ein Verdienst von Hermann Schubert[1]), auch in einem höchst klar geschriebenen Schulbuch auf die Verschiedenheit in der Bedeutung des Gleichheitszeichens hingewiesen zu haben). Ich werde auf die hier Platz greifende Erweiterung des Begriffs der Gleichheit der Größen später zurückkommen. Wenn ich mich paradox ausdrücken wollte, so könnte ich sagen: das Gleichheitszeichen bedeutet in unserem Fall $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$, nahezu das Gegentheil von dem wie sonst; $\frac{1}{3}$ ist nicht gleich 0,3 oder 0,4; auch nicht gleich 0,33 oder 0,34, nicht einmal gleich 0,333 oder 0,334 u. s. f.; vielmehr ist es diesmal ein kurzes Zeichen statt der Worte: $\frac{1}{3}$ ist der Grenzwerth der Summe $\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots \frac{3}{10^x}$ für wachsendes x, wobei der Unterschied des Werthes der Summe gegenüber von $\frac{1}{3}$ mit wachsendem x stetig abnimmt.

Oder, wenn ich schreibe: $e = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{\infty}$, so ist dies, mit anderer Bedeutung des Gleichheitszeichens, ein abkürzender Ausdruck

1) Dr. Hermann Schubert, System der Arithmetik und Algebra. Potsdam 1885.

für den längeren Satz: Man kann stets angeben, wie groß x sein muss, damit der Unterschied zwischen dem endlichen festen Grenzwerth e und der Function $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ kleiner sei als eine beliebige vorgeschriebene Zahl ε; oder: der Grenzwerth dieser Function ist e.

Daraus ist klar, dass in jener Wortverbindung das Wort »unendlich« nichts anderes als einen abkürzenden Ausdruck andeuten kann.

Auch leuchtet ein, dass man bei allen Stetigkeits- und überhaupt bei allen Grenzbetrachtungen stets endliche Summen, endliche Producte, endliche Kettenbrüche zu nehmen und dann zur Grenze überzugehen hat, nachdem der Fehler berechnet ist. Nur wenn der Fehler Null wird, darf mit dem Ausdruck gerechnet werden; die höhere Analysis ist eine systematische Differenzenabschätzung und Grenzwerthberechnung; (nicht eine Wahrscheinlichkeitsberechnung, wie sich Herr Franz Meyer in einer für mathematische Laien leicht misszuverstehenden und thatsächlich auch missverstandenen Weise ausdrückt).

Eben in der Differentialrechnung und ihrer Umkehrung, der Integralrechnung, geschieht diese Berechnung von Grenzwerthen in systematischer Weise, indem zunächst die am häufigsten vorkommenden Grenzwerthe, auf die sich andere zurückführen lassen, ermittelt werden, und damit gewissermaßen ein Einmaleins von Grenzwerthen hergestellt wird, mit dem dann fortwährend operirt wird.

Zugleich sieht man, dass die ganze höhere Analysis dargestellt werden **kann**, ohne dass jemals das Wort unendlichklein in den Mund genommen wird.

Diese Darstellung hat Professor Dr. Stolz[1]) in Innsbruck in consequenter Weise durchgeführt; früher für die niedere und höhere Arithmetik und Algebra, neuerdings auch für die höhere Analysis. Er hat dies, zugleich auch hinsichtlich der strengen Begründung und Einschränkung der einzelnen Sätze, in einer Weise gethan, dass wohl in Zukunft daran nicht mehr viel geändert werden kann. Es

---

1) O. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik; vergl. auch seine Aufsätze in den Berichten des naturwiss.-medic. Vereins in Innsbruck, XIV: »Die unendlich kleinen Größen«.

ist somit bewiesen, dass das sogenannte mathematische Unendlich (im früheren Sinne des Worts) in der Mathematik entbehrt werden kann, inhaltlich nicht nothwendig ist; und dies ist im vorliegenden Fall, wo es sich um die wahre Bedeutung des Unendlichen in der Mathematik handelt, besonders wichtig.

Wie das Unendlichkleine und Unendlichgroße vermieden werden kann, mögen einige möglichst einfache Beispiele zeigen: Ich nehme die Function $y = 2 + \frac{1}{3 + x}$; x ist die unabhängige veränderliche Größe, die alle möglichen Werthe durchlaufen kann; y hängt durch die erwähnte Gleichung in bestimmter Weise von x ab, ist die abhängige Variable oder die Function. Für $x = 1$ ist $y = 2\frac{1}{4}$, für $x = 2$ ist $y = 2\frac{1}{5}$, für $x = 1000$ ist $y = 2\frac{1}{1003}$ u. s. f.; je größer x gewählt wird, um so weniger unterscheidet sich y von dem Werth 2 und man kann stets angeben, wie groß der Werth von x genommen werden muss, damit der Unterschied von y gegenüber der festen Grenze 2 kleiner ist als eine beliebig kleine, aber endliche Zahl ε, die vorgeschrieben wird. Statt dessen sagen wir kürzer: der Grenzwerth von y für ein unendlich großes x ist 2; geschrieben: $\lim\limits_{x = \pm\infty} y = 2$; oder noch kürzer, mit veränderter Bedeutung des Gleichheitszeichens: $2 + \frac{1}{3 + \infty} = 2$.

Allgemeiner, ist y eine gegebene Function von x, so deutet ein Ausdruck wie z. B.: »$\lim\limits_{x = +\infty} y = b$« an: Jeder positiven Zahl ε kann eine positive Zahl G zugeordnet werden, derart, dass der absolute d. h. der ohne Rücksicht auf das Vorzeichen rein arithmetisch genommene Betrag von $y - b$ kleiner ist als ε für alle der Veränderlichen x zukommenden Werthe, welche größer als G sind.

Oder, die Formel: »$\lim\limits_{x = a + 0} y = b$« ist eine Abkürzung für den längeren Ausspruch: Es kann jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl h zugeordnet werden, derart, dass der absolute Betrag von $y - b$ kleiner ist als ε für jeden der Veränderlichen x gemäß ihrer Definition zukommenden Werth, der zwischen a und $a + h$ liegt.

Endlich die Schreibweise: »$\underset{x = a + 0}{y} = + \infty$ (bez. $- \infty$)« wählt der

Mathematiker statt der umständlichen Ausdrucksweise: Es kann jeder positiven (bez. negativen) Zahl G eine positive Zahl h zugeordnet werden, derart, dass y größer als G (bez. kleiner als G) ist für jeden der Veränderlichen x gemäß ihrer Definition zukommenden Werth, der zwischen a und $a + h$ liegt.

Weiterhin die sogenannte Ableitung oder der Differentialquotient einer Function lässt sich ebenfalls ohne Schwierigkeit mit Vermeidung des Unendlichkleinen erläutern: Es sei die Function $f_{(x)}$, — (kurze Schreibweise statt »Function von x«) — für alle Werthe von x in einem bestimmten Intervall um den Werth $x = a$ herum, nämlich in dem Intervall $a - d$ und $a + d$, eindeutig und stetig; man bildet dann die Differenz $f_{(a+h)} - f_{(a)}$, wobei h jedenfalls kleiner als der absolute, rein numerische Betrag von d sein soll. Es ist nun eine Erfahrungsthatsache, dass für sehr viele Functionen diese Differenz sich auf die Form umrechnen lässt: $h \cdot (m + n)$ — (und nur solche Functionen, bei denen dies der Fall ist, kommen in der angewandten Mathematik, in der Physik, Mechanik, Technik in Betracht) —; dabei soll m von h unabhängig sein; dagegen n ist von h abhängig, wird aber mit nullwerdendem h selbst zu Null, oder anders ausgedrückt: zu jeder gegebenen und sonst willkürlichen positiven kleinen Zahl ε gehört eine positive Zahl δ, so, dass für alle Werthe von h, die absolut genommen kleiner als δ sind, der absolute Betrag von n kleiner als ε ist. Dann heißt m der Differentialquotient von $f_{(x)}$; und $m \cdot h$ heißt das »Differential« von $f_{(x)}$ für den Werth a von x; letzteres Differential vielfach abgekürzt geschrieben $df_{(x)}$.

Z. B. sei, um ein ganz einfaches Beispiel zu wählen, die Function $f_{(x)}$ einfach die zweite Potenz von x, x^2, und a sei 2. Dann ist: $f_{(x+h)} - f_{(x)} = (x + h)^2 - x^2$ oder ausgerechnet $2xh + h^2$ oder $h(2x + h)$. Hier ist also $m = 2x$ und $n = + h$. Wenn h zu Null wird, so wird n zu Null, und folglich ist $2x$ allgemein der Differentialquotient von x^2; speciell für den Werth $x = 2$ von x wird derselbe $2 \cdot 2$ oder 4.

Die sogenannten Differentiale sind folglich ebenfalls nur rein symbolischer Natur, insofern als sie für sich allein keinerlei inhaltliche, sondern höchstens formelle Bedeutung zur Vereinfachung der Schreibweise in manchen Rechnungen der Differential- und

Integralrechnung haben; ich könnte sie etwa für solche Leser, die mit den höheren Theilen der Algebra bekannt sind, den Determinanten an die Seite stellen, deren Theorie zwar auch inhaltlich nichts neues bringt, aber in formeller Hinsicht zur Anordnung mancher Ausrechnungen auf kleinerem Raum oder zur eleganten Darstellung mit Vortheil verwendet werden kann.

Naturgemäß müssen dann auf Grund der Definition zuerst die Rechnungsregeln für die Rechnung mit den Determinanten, für ihre Addition, Multiplication u. s. w. festgestellt werden.

So auch hier bei den Differentialen. Will man ein System solcher Symbole aufstellen und damit rechnen, so darf dies nur auf Grund bestimmter Definitionen und Rechnungsregeln geschehen; diese Regeln sind zum Theil willkürlich; man wird natürlich die Regeln, welche für die natürlichen Zahlen gelten, soweit es geht, beizubehalten suchen, aber darauf sehen, dass keine Widersprüche der Regeln unter einander sich ergeben. Stolz hat unter Zuhülfenahme einer Methode von Euklid in strenger Weise gezeigt, wie eine solche Aufstellung von Rechnungsregeln erfolgen kann. Man legt den betreffenden Symbolen oder Zeichen in logischer Ordnung bestimmte Prädicate bei, die sich nicht widersprechen und nicht zu Unmöglichkeiten führen dürfen. Man weiß, dass es Functionen y der reellen veränderlichen x gibt, welche sich dem Werth 0 nähern, wenn sich x einem bestimmten Werth nähert; dadurch soll ein neues Symbol, das Unendlichkleine von y, mit dy bezeichnet, gesetzt sein; hierfür werden zunächst Regeln behufs Vergleichung der unendlich kleinen Größen angegeben, sodann auf Grund von Definitionen die Rechnungsregeln aufgestellt; es zeigt sich, dass diese Regeln der Hauptsache nach dieselben wie diejenigen für das Rechnen mit den absoluten Zahlen sind und dass sie nur an einigen Stellen davon abweichen. Die näheren Ausführungen mögen in dem Werk von Stolz nachgelesen werden. Wie gesagt, sind aber diese unendlich kleinen Größen nicht von fundamentaler Bedeutung, sondern können entbehrt werden. (Mit Unrecht bestreitet dies Herr Hoppe in Ohrtmann's Jahrbuch gegenüber den Stolzschen Ausführungen, indem er bemerkt, auf diese Weise werde nur der Name, nicht der Gebrauch der unendlich kleinen Größen vermieden; diese seien nicht zu entbehren. Ich denke, mit dem Namen wird zugleich der Gebrauch vermieden; weil es nur eine façon de parler ist, besser gesagt, weil diese Zeichen nur formelle Bedeutung haben). Dieses Wort Differential bez. diese Zeichen dx, dy dienen lediglich zur Abkürzung. Eine inhaltliche Bedeutung hat allein der Differentialquotient als Grenzwerth des Quotienten zweier Größen (hier der Größen $f_{(a+h)} - f_{(a)}$ und h), die jede für sich allein 0 würden, und wobei die eine der Größen in bestimmter Weise von der andern abhängt; wir drücken durch die Redensart Differential, bez. durch die Zeichen dy, dx nur aus, dass und wie eine Grenzwerthberechnung stattgefunden hat, und kürzen diese Berechnung je nachdem formell dadurch etwas ab.

Vielleicht wird dies manchem mathematischen Laien noch klarer durch ein mehr geometrisches Beispiel: Man denke sich einen stetigen, zusammenhängenden Linienzug, eine Curve (rechnerisch definirt durch eine etwa sammt allen Ableitungen stetige Function); und auf dieser Curve betrachte man einen Punkt A. Durch diesen Punkt sei eine Secante gelegt, welche die Curve in einem zweiten Punkte B trifft. Nun drehe man in Gedanken die Secante um A so, dass der zweite Schnittpunkt B sich dem Drehpunkt A mehr und mehr nähert, und denke sich mit der Drehung innegehalten, sobald B mit A zusammengefallen ist. Diese besondere Lage, diese Grenzlage der Secante, nennen wir die »Tangente der Curve im Punkt A«; es ist diejenige Gerade, welche die augenblickliche Richtung der krummen Linie in dem Punkt A angibt. Wenn aber umgekehrt der Mathematiker, wie dies häufig der Fall ist, die Tangente als die Verbindungslinie von zwei unendlich benachbarten Curvenpunkten, nämlich von A mit dem unendlich nahen Punkt definirt, so deutet er durch diese Redensart sogleich an, aber auch nur an, wie die Tangente durch einen Grenzübergang entstanden ist; gewissermaßen condensirt legt er in diesen wenigen drastischen Worten die ganze Schilderung der Geschichte jenes Grenzübergangs der Secante in die Tangente nieder; er erspart dadurch mehrere Sätze.

In ähnlicher Weise würde der mathematische Laie sehr irre gehen, wenn er etwa annehmen möchte, dass durch die Bezeichnungen: negative, irrationale, imaginäre Zahlen die Begriffsbestimmungen ausgedrückt werden sollen; speciell hier erinnert die mathematische

Sprachweise, ich könnte sagen in historisch-pietätvoller Weise, durch diese noch immer beibehaltenen Bezeichnungen: negativ = sinnverneinend, irrational = sinnlos, imaginär = scheinbar, eingebildet, an die Zeiten in der Geschichte der Mathematik, wo man noch nicht wagte, bez. noch nicht Veranlassung fand, durch Erweiterung des Zahlbegriffs diese Zahlen als solche in den Zahlencomplex einzufügen.

2) In der Geometrie der Lage wurde bekanntlich das Unendliche in der Form des unendlich fernen Punktes, der unendlich fernen Geraden, der unendlich fernen Ebene zuerst von Poncelet[1]) eingeführt und systematisch zuerst von Steiner[2]) verwendet, nachdem übrigens schon früher im 17. Jahrhundert Desargues ähnliche Gedanken ausgesprochen hatte.

Hier ist das Unendliche ebenfalls nichts als eine sehr bequeme Redensart, welche zum Zusammenfassen von mehreren Sätzen in einen dient, — wie sich leicht zeigt.

Wir haben die zwei Sätze: Erstens, Zwei Geraden schneiden sich in einem Punkt; Zweitens, Zwei parallele Geraden schneiden sich nicht. Diese zwei Sätze fassen wir in einen einzigen zusammen: Zwei Geraden schneiden sich stets in einem Punkt; — nämlich, wenn sie speciell parallel sind, so sagen wir, sie schneiden sich in einem sogenannten unendlich fernen Punkt, — indem wir dabei den Begriff »Punkt« auch auf diesen uneigentlichen unendlich fernen Punkt ausdehnen.

Wie viel unendlich ferne Punkte wir dabei der Geraden zuschreiben müssen, das hängt von den Axiomen, also von den Eigenschaften ab, welche wir der betreffenden zweidimensionalen Raumform zuertheilen, in welcher wir gerade in Gedanken Geometrie treiben. Bleiben wir bei der reellen Darstellung, und zwar bei der Flächengeometrie, so hat die Gerade keinen, einen oder zwei unendlichferne Punkte, je nachdem wir 1) das achte, elfte, aber nicht das zwölfte Axiom Euklids voraussetzen, — wie z. B. bei der Geometrie auf der Kugelfläche, bezw. je nachdem wir 2) das achte, elfte und zwölfte Axiom, wie in der Euklidischen ebenen Geometrie, oder je

1) Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures. Paris 1823. S. 49 u. 53.

2) Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin 1832.

nachdem wir 3) das achte und zwölfte, aber nicht das elfte Axiom als gültig zu Grunde legen, wie in der reellen Darstellung der sogenannten nichteuklidischen Geometrie auf der Traktrixfläche, wo es zu einer geodätischen Linie durch einen Punkt außerhalb 2 von einander verschiedene Parallelen giebt.

Halten wir die Voraussetzungen der euklidischen Geometrie fest, so ist der eine unendlichferne Punkt, der zu einer Geraden gehört, offenbar nichts anders, als ein Aequivalent für eine Richtungsangabe; alle Parallelen einer und derselben Richtung besitzen denselben unendlichfernen Punkt; aber einen bestimmten Ort besitzt dieser uneigentliche Punkt nicht.

(Auch hier handelt es sich um einen Grenzwerth bezw. eine Grenzlage; denn denken wir uns zwei Geraden, die sich in A schneiden, die erste Gerade fest, die andere veränderlich, nämlich um einen ihrer Punkte, etwa den Punkt B, in Drehung begriffen; das Loth von B auf die erste Gerade sei BC. Stets können wir dann angeben, wie groß die Strecke CA zu wählen ist, damit sich der Winkel ABC von einem Rechten so wenig unterscheidet, als man will; oder anders ausgedrückt, der Grenzwerth des Winkels ABC ist ein Rechter.)

Wenn wir so für die Gerade auch im Folgenden nur einen unendlichfernen Punkt voraussetzen, so folgt daraus nothwendig logisch weiter, dass wir uns die sämmtlichen unendlichfernen Punkte der Ebene auf einer Geraden, der sogenannten unendlichfernen Geraden, zwar nicht vorzustellen, aber zu denken haben; — da ja sonst eine wirkliche, also im Endlichen verlaufende Gerade in ihrer Weiterverlängerung die unendlichferne Curve in 2 Punkten schneiden könnte. In der rechnenden analytischen Geometrie ergibt sich die logische Nothwendigkeit, die sämmtlichen unendlichfernen Punkte der Ebene auf einer Geraden sich angeordnet zu denken, daraus, dass ihre Gesammtheit durch eine Gleichung ersten Grades dargestellt wird, ähnlich wie jede wirkliche Gerade. Und nur diese Thatsache soll, wie z. B. Clebsch ausdrücklich hervorhebt, durch jene Bezeichnung »unendlichferne Gerade« ausgedrückt werden, — nichts Anderes. Der neue Begriff gestattet dann, Sätze mit weniger Wort- und Zeichenaufwand zu beweisen und auszusprechen.

Auch die unendlichferne Gerade ist darnach nur ein zur Bequemlichkeit der Ausdrucksweise eingeführter Hülfsbegriff, ein Aequivalent für die Angabe der Stellung paralleler Ebenen, und wer nach der Lage dieser sogenannten Geraden sucht, oder dieselbe darzustellen bestrebt ist, wird also immer wieder in Widersprüche gerathen; man kann sich davon an dem Beispiel der unendlichfernen Tangente der Parabel überzeugen.

Und wenn wir gelegentlich, wie z. B. beim Taktionsproblem, die Gerade als Grenzfall eines Kreises von unendlichgroßem Radius behandeln, so ist dies wiederum nur eine mannigfach bequeme Hülfsbetrachtung. Z. B. sei die Aufgabe zu lösen: einen Kreis zu construiren, der eine Gerade L sowie einen Kreis K berührt und durch einen Punkt P geht. Betrachten wir die Gerade als Kreis mit unendlichgroßem Radius, so erkennen wir mit Leichtigkeit, dass die beiden Kreispunkte, welche auf dem zu L senkrechten Durchmesser des Kreises K liegen, als der innere und äußere Aehnlichkeitspunkt der beiden »Kreise« K und L zu betrachten sind; wir subsumiren damit diese Aufgabe als Specialfall unter die andere, etwa schon als gelöst betrachtete: Einen Kreis zu construiren, der 2 gegebene Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht; wir ersparen uns eine besondere Ueberlegung im vorliegenden Fall. Wenn wir uns selbst aber genau beobachten, wie wir jene zwei sogenannten Aehnlichkeitspunkte zwischen der Geraden und dem Kreise finden, so zeigt sich, dass wir uns zunächst die Gerade als Kreis mit sehr großem aber noch endlichem Radius vorstellen und dann in Gedanken zur Grenze übergehen. Die Gerade bleibt also nicht ein »heimlicher Kreis« (Lotze); es soll durch die erwähnte Betrachtungsweise nicht eine versteckte metaphysische Eigenschaft der Geraden ausgesprochen werden, sondern es ist nur eine für den betreffenden momentanen Gebrauch zu Hülfe genommene formelle Ausdrucksweise, die zur Zusammenfassung zweier Aufgaben in eine einzige mit Specialfällen dienen kann.

3) Dagegen in der angewandten Mathematik, in der rechnenden Physik, Mechanik und Technik liegen, — und dies muss betont werden —, die Verhältnisse sehr vielfach anders. Wenn wir hier von einem unendlichkleinen Winkel zwischen den Schwererichtungen in zwei Massenpunkten eines Körpers oder

zwischen den Lichtstrahlen von einem Stern her sprechen; wenn wir eine Kometenbahn berechnen und dabei die kleine Wirkung eines Saturnmonds oder vollends die des Sirius »als unendlichklein vernachlässigen«; wenn wir die Fläche eines kleinen ruhigen Sees als Kugelflächenstück von »unendlichgroßem« Radius bezeichnen u. s. f., so ist hierbei jener Winkel oder diese Einwirkung nicht wirklich mathematisch unendlichklein, die Krümmung dieser Fläche nicht wirklich Null, sondern von endlicher angebbarer Größe; die Resultate der gewöhnlichen Schwerpunktsberechnungen sind streng genommen sämmtlich falsch, mit endlichen Fehlern behaftet; der Schwerpunkt einer dreieckigen Scheibe ist nicht nur nicht im Schnittpunkt der Seitenhalbirenden gelegen; sondern, wenn wir die Scheibe selbst in der Hand drehen und wenden, so ändert fortwährend der Schwerpunkt in der Scheibe seine Lage, da die Anziehungskraft der Erde auf die oberen und unteren Theile verschieden groß ist. Freilich wird niemand daran denken, dies praktisch in der Rechnung zu berücksichtigen, oder besser gesagt, höchst selten wird dies zu berücksichtigen sein.

Hier macht sich also der Mathematiker vielfach eines unrichtigen Ausdrucks schuldig, indem er unendlichklein nennt, was endlichklein ist; ja es gehen in derselben physikalischen oder technischen Abhandlung oft auf derselben Seite die zwei Bedeutungen von unendlichklein a) mathematisch unendlichklein, also Null, b) endlichklein, aber zu vernachlässigen, durcheinander und nebeneinander her.

Diese Sprechweise ist allerdings eine nachlässige; aber es liegt kein zwingender Grund vor, davon abzugehen. Der einzige Nachtheil, der daraus entstehen könnte, wäre der, dass ein nichtmathematischer Leser, der die Verhältnisse nicht frei genug übersieht, irre geführt werden könnte, zu glauben, dass der Mathematiker hier mit seinem »Unendlichkleinen« dasselbe meine, wie in der Mathematik. Der Mathematiker selbst ist sich wohl bewusst, dass er hier nicht mathematisch unendlich kleine Größen vor sich hat, sondern endlich kleine Größen, die gegenüber andern nicht in Betracht kommen, ohne Einfluss sind.

Die absolute Größe dieser zu vernachlässigenden Werthe oder, wie sich der Physiker und Techniker, wie gesagt, mitunter auch hier, mit anderer Bedeutung des Worts, auszudrücken beliebt, dieser »unendlich kleinen« Werthe kann dabei sehr verschieden sein; sie hängt von der Genauigkeit ab, die in dem betreffenden Fall erzielt werden soll und kann. Wenn der Astronom die Entfernung der Erde vom Sirius ermittelt, so kommt die Höhe des Beobachtungsorts über der Meeresfläche, ja selbst der Erdradius nicht mehr in Betracht; dieser wird dann gelegentlich als unendlich klein bezeichnet, d. h. also hier: als zwar endlich klein, aber die Genauigkeit des Resultats nicht mehr beeinflussend; in andern Fällen dagegen kann die Länge eines Milliontel Millimeter noch von Einfluss auf das Resultat sein.

Darauf kommt es in der angewandten Mathematik besonders an, zu entscheiden, welche Größen gegenüber den andern noch in Betracht kommen, welche nicht; denn gerade die Thatsache, dass nicht jeder Körper auf jeden andern in Raum und Zeit eine bemerkbare Wirkung ausübt, macht das Erkennen von Naturgesetzen möglich; stets handelt es sich ja dabei um eine Unzahl von Abstractionen, und die Naturgesetze selbst sind Resultate von zahlreichen Abstractionen.

Aber es sind und bleiben die hierbei als unendlich klein bezeichneten Fehler endliche Fehler. Und wenn Christian v. Wolf[1]) sagt: »Man kann ein Sandkörnlein in Ansehung eines großen Berges für nichts und also seine Größe in Ansehung der Höhe des Berges als unendlich kleine halten«, so hat er sich eben nicht den richtigen Begriff von mathematisch unendlichklein gebildet, den er anzustreben scheint.

4) Im Vorstehenden haben wir den Begriff des Unendlichen in der Mathematik bis auf seine Wurzel verfolgt und es hat sich gezeigt, dass das Unendlichkleine und Unendlichferne in der reinen Mathematik nichts anderes als eine zur Vereinfachung der Ausdrucksweise bequem dienende Redewendung, bez. ein dieselbe abkürzendes Symbol ist, das bei Größenverhältnissen daran erinnert, dass und wie eine Grenzwerthberechnung stattgefunden hat, und bei Lagenverhältnissen zur Zusammenfassung von mehreren Sätzen oder Aufgaben in einen Satz oder eine Aufgabe, bez. zum

1) Ch. v. Wolf, Der Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften letzter Theil. Halle 1771. S. 254. Citat nach S. Günther.

bequemen Specialisiren verwendet werden kann, — ähnlich wie der Begriff der mehrdimensionalen Räume, worüber ich mich in einem andern Aufsatz ausgesprochen habe[1]); und ähnlich wie die negativen und gebrochenen Zahlen, die Potenzen mit gebrochenen Exponenten und nach dem Vorschlag von Leibniz die Differentialquotienten mit negativen Differentialindices dazu verwendet werden können, um die Unterscheidung von Addiren und Subtrahiren, von Multipliciren und Dividiren, von Potenziren und Radiciren, von Differentiren und Integriren unnöthig zu machen.

Auf welche Abwege man geräth, falls man das Unendliche nicht in dieser Weise auffasst, zeigen in mehr humoristischer Weise die hübschen Sophismen in dem Werk von Vieta und die »mathematischen Unterhaltungen« von Riecke; in ernsterer Weise zeigt dies ein Umblick in der neueren und neuesten Geschichte der Mathematik.

Bei den Mathematikern des 17. Jahrhunderts[2]) nimmt man wahr, dass sie sehr ungenirt mit dem Unendlichen umgehen. Man nahm — nur nicht so vorsichtig, wie es im Alterthum Archimedes gethan hatte — Quadraturen und Cubaturen vor; Cavaleri und Fermat rechneten mit divergirenden Reihen; Wallis stellte unendliche Producte auf und Brouncker verwandelte diese in unendliche Kettenbrüche, wobei jedoch unmittelbar an endliche Summen, Producte und Kettenbrüche die entsprechenden unendlichen Processe angeschlossen werden, ohne dass im geringsten gefragt wird, ob man mit einem solchen Ding, wie z. B. »$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} +$ u. s. w. in infinitum«, wirklich auch rechnen darf, wie mit einer gewöhnlichen Größe; einige Punkte oder »$+$ etc.« ersetzen alle weiteren Untersuchungen, — wie es übrigens auch noch heute in manchem Algebrabuch zu finden ist.

Wallis ferner scheut sich auch nicht, gelegentlich der Aufstellung der Integralformeln folgende Schlüsse zu ziehen: Es ist

---

1) C. Cranz, Gemeinverständliches über die sogenannte vierte Dimension. Samml. gemeinverst. wissensch. Vorträge, herausg. von Virchow u. Wattenbach. Neue Folge, fünfte Serie. Heft 112/113.

2) Vgl. hierüber bes. R. Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen 1889.

offenbar $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0}$; und folglich, schließt er weiter, ist auch: $\frac{1}{0} < \frac{1}{-1} < \frac{1}{-2} < \frac{1}{-3}$ etc. Er erhält so: $\frac{1}{0} < \frac{1}{-1}$ oder: $\infty < -1$: demgemäß nennt er die negativen Zahlen »größer als unendlich«, plus quam infiniti, »überunendliche Zahlen«. Nur damit die Allgemeinheit der Formel $\frac{1}{m} < \frac{1}{m-1}$ gewahrt bleibt, wird die wahre Bedeutung einer Rechnungsoperation aufgegeben, — ein Verfahren, das noch Leibniz und Euler billigen.

Jakob Bernoulli führt die Division $\frac{1}{1+x}$ aus, und erhält $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots$; darin nimmt er speciell $x = 1$ und hat: $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ bis ins Unendliche $= \frac{1}{2}$. Und er nennt dies ein »Paradoxon non inelegans«.

Der Mönch Guido Grandi veröffentlichte gerade über diese Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ eine größere Schrift im Jahre 1703; dabei löste er die Schwierigkeit des Paradoxons in folgender Weise: Er nimmt an, zwei Brüder erben in einer Theilung aus dem väterlichen Nachlass einen Stein von unschätzbarem Werth, den zu veräußern das Testament verbietet. Daher kommen sie unter sich darüber überein, dass der Stein abwechslungsweise in dem Museum eines jeden je ein Jahr lang niedergelegt werde. Wenn nun festgesetzt wird, dass diese Bestimmung in alle Ewigkeit zwischen den beiden Familien gelten solle, so wird der Familie jedes Bruders der Stein unendlich oft gegeben werden $(+1)$ und unendlich oft genommen werden (-1), und doch hat jede den halben Besitz des Steins.

Zugleich schließt Grandi aus: $1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. $= \frac{1}{2}$ weiter: $0 + 0 + 0 + \ldots = \frac{1}{2}$; die Summe unendlich vieler Nullen ist eine endliche Zahl $\frac{1}{2}$, und er findet hierin einen Beweis für die Möglichkeit der Schöpfung der Welt aus dem Nichts.

Leibniz ist zwar mit der juridischen Erklärung Grandi's nicht einverstanden; dagegen wohl damit, dass mit dieser Reihe

$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ gerechnet werden könne, für welche er ebenfalls $\frac{1}{2}$ erhält, und zwar durch eine Art Wahrscheinlichkeitsrechnung: Wenn man weitere und weitere Glieder der Reihe hinzunimmt, so ist der Werth derselben 1 und gleich darauf 0; abwechselnd 1, 0, 1, 0 etc. Der wahrscheinlichste Werth ist somit nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung das arithmetische Mittel zwischen 0 und 1, das heißt $\frac{1}{2}$. Es ist dies nicht viel besser, als wenn Leibniz mit Beiziehung der Optik sagen würde: der Werth der Reihe ist abwechselnd Null und Eins in rascher Folge, dauernd nicht schwarz und nicht weiß, sondern abwechselnd schwarz und weiß; man sieht rasch darüber hin und sagt: grau.

Auch die drei Bernoulli haben nichts erhebliches gegen die Richtigkeit solcher Schlussfolgerungen einzuwenden; nur Varignon verwahrt sich gegen eine solche Behandlung der Probleme.

Heutzutage begnügen wir uns zu sagen: Eine solche Reihe $1 - 1 + 1 - 1 \ldots$ ist nichts als eine Anzahl von neben einander stehenden Zeichen; es ist Tinte, es ist Kreide, — es ist ein Ausdruck, mit dem man nicht rechnen darf; kurz die Reihe convergirt nicht gegen einen festen Grenzwerth, sondern schwankt unendlich oft hin und her; der Werth bis zu einem beliebigen $n$ten Glied ist Eins, wenn man bei einem ungeraden, und ist Null, wenn man bei einem geraden Glied abbricht; — weiter nichts.

Auch Euler bekümmert sich vielfach nicht darum, ob eine Reihe convergirt oder nicht; er macht zwar die Bemerkung, dass man mit der Summation derartiger Reihen sehr vorsichtig sein müsse (er hatte zum ersten Mal die sogenannte Semi-Convergenz einer Reihe bemerkt); er selbst trägt aber kein Bedenken, mit der Reihe, die beiderseits ins Unendliche geht,

$$\ldots \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} + 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$$

zu rechnen, und erhält dafür 0 (beide Theile sind geometrische Progressionen, der eine Theil ist $\frac{a}{1-a}$, der andere $\frac{a}{a-1}$, addirt gibt dies 0).

Er findet ferner, indem er Formeln, die für endliche Reihen erhalten sind, ohne weitere Gewissensbisse auch auf unendliche Reihen anwendet, z. B. $1 - 3 + 5 - 7 + 9 + \ldots.$ gleich 0, ferner $1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - \ldots.$ ebenfalls gleich 0 — Ausdrücke, wie man sie übrigens ebenfalls noch heutzutage da und dort in Schulbüchern antrifft. Ueberhaupt behandelt Euler das Unendlichgroße stets als eine Zahl, mit der ebenso gerechnet werden kann, wie mit einer endlichen Größe.

5) Die jetzige Periode der mathematischen Wissenschaft ist durch das Bestreben charakterisirt, an dem mächtigen Gebäudecomplex der Mathematik theils einzelne Abtheilungen weiter auszubauen, theils aber und besonders die Fundamente zu controliren, auf welchen das Gebäude ruht; — zu untersuchen, unter welchen Bedingungen der und jener Satz gültig, die und jene Methode anwendbar; wann eine Function integrirbar und differentiirbar, ob die Zahl der Axiome eine nothwendige und ausreichende sei, etc.

Und so sollte man denken, dass es der neueren, öfters sogenannten Präcisions-Mathematik gelungen sein werde, über einen grundlegenden Begriff, wie den des mathematischen Unendlich, allgemeine Uebereinstimmung der Meinungen unter ihren Vertretern zu erzielen. Dies ist jedoch keineswegs der Fall, wenn auch die Bemerkung P. du Bois-Reymond's etwas zu weit gehen dürfte, der gelegentlich sagt: »Noch heute erscheinen in der ‚unfehlbarsten aller Wissenschaften‘ kaum zwei Lehrbücher hinter einander, die, wenn sie auf die Grundbegriffe näher eingehen, nicht auf das Schroffste sich widersprächen. Hinsichtlich ihrer Begründung ist demnach die Lehre von den Differentialen seit Leibniz .... kaum vorgeschritten.« Allerdings von namhaften Philosophen und Mathematikern der Gegenwart oder jüngsten Vergangenheit liegen Begriffsbestimmungen über das mathematische Unendlich vor, die sich zum Theil direct widerstreben. Ich möchte mich im Folgenden vorzugsweise mit den Meinungsäußerungen der Herren Franz Meyer, Cantor, P. du Bois-Reymond kritisch beschäftigen; vorher jedoch noch einige andere Schriftsteller auf diesem Gebiet ohne inneren Zusammenhang unter einander anführen, so wie sie mir in der Litteratur aufgestoßen sind.

Herr H. Fr. Th. Beyda[1]) identificirt ohne weiteres die mathematische Null mit dem Nichtseienden und das mathematische Unendlich mit dem im gewöhnlichen Leben sogenannten Unendlichen und die Null mit dem Nichts. Auf diese Weise kommen folgende Sätze zum Vorschein. »Der unendlichste Theil einer Größe ist vollkommen das Nichts, ein Nichtseiendes« .... »in der Differentialrechnung muss das Differential dx von x als Nichtseiendes betrachtet werden und die wirklich unendlichen Theile von x machen das Integral aus« .... »es bekommt dadurch diese höchste Wissenschaft der Mathematik, die herrlichste Erfindung unseres Leibniz, erst ihre feste Grundlage« .... »es ist nun klar und deutlich bewiesen, dass es drei Sein: Unendliches, Endliches und Nichtseiendes geben müsse; auch das Verhältniss derselben zu einander kann genau angegeben werden, wie es in der Philosophie nur die größten Denker ahnen konnten: Es muss sich das Nichtseiende zum Endlichen verhalten wie dieses zum Unendlichen« $\left(\frac{1}{0} = \infty = \infty \cdot 1, \text{ also } \infty : 1 = 1 : 0\right)$ .... »die Welt ist weder ein Unendliches noch ein Nichtseiendes, die Welt ist endlich« .... »Auch der Raum und die Zeit müssen endlich sein« .... »Andere Namen für diese Trias des Unendlichen, Endlichen und Nichtseienden sind: Nothwendiges, Wirkliches, Mögliches oder Sein, Werden und Wahrsein; zu vergleichen sind diese drei Sein mit den drei christlichen Tugenden: Glaube, Liebe, Hoffnung« .... Mit Hülfe von Betrachtungen über die trigonometrische Tangente wird endlich die Unsterblichkeit der Seele bewiesen.

Man sieht, die übrigens nicht neue Erfindung Beyda's besteht lediglich darin, dass der Begriff des mathematischen Unendlich und der Null falsch aufgefasst wird, womit dann sofort die Thüre zu allen möglichen Phantastereien aufgestoßen ist.

Herr Bergbohm[2]) vermisst neben der Differentialrechnung, die

---

1) H. Fr. Th. Beyda, Das Unendliche, was es den Philosophen und was es den Mathematikern bisher gewesen und wie es sich mathematisch darstellt nach einer neuen Erfindung. Bonn, ohne Jahreszahl. Besprochen z. B. in Ohrtmann's Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik.

2) Dr. Julius Bergbohm. Neue Rechnungsmittel der höheren Mathematik. Stuttgart 1891.

sich mit den unendlich kleinen Größen beschäftigt, eine analoge Rechnungsmethode, welche die unendlich großen Quotienten zum Gegenstand hat, er benennt die neue Rechnungsart Immensalrechnung; ferner will er auf die unendlich kleinen Größen außer den Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division auch noch die Potenzen- und Logarithmenrechnung anwenden (»Potentialrechnung, Radicalrechnung, Logarithmalrechnung«).

Gewiss ist es möglich, sobald gewisse Symbole als Zahlen definirt sind, nach bestimmten Principien Rechnungssysteme für sie aufzustellen, wobei man sich nur zu hüten hat, dass keine Widersprüche sich ergeben, auch ist es wohl möglich, die bisherigen Operationssysteme zu erweitern, z. B. wäre es mit keiner Schwierigkeit verbunden, in der Algebra noch über die Potenzlehre hinausgehend eine neue Operation zu betrachten, welche als $n$fach angewandtes Potenziren definirt würde, ähnlich wie die Potenz a^n eine mehrfach angewandte Multiplication $a \cdot a \cdot a \ldots.$ ($n$mal) darstellt. Allein es hat sich gezeigt, dass solche Erweiterungen der Rechnungssysteme unnöthig sind, im letzteren Fall vor allem deshalb, weil bei der Potenz Basis und Exponent nicht vertauschbar sind. Wenn Herr Bergbohm fehlerlos zeigen könnte, dass und wie mit seinen Erweiterungen ein thatsächlicher erheblicher Nutzen geschaffen würde, hätten seine Schriften eine Bedeutung; so aber ist seine Mühewaltung jedenfalls vergeblich.

Interessanter ist eine Controverse, die sich über die Bedeutung der unendlich kleinen Größen zwischen den Herren Lasswitz und Sigmund Günther[1]) erhoben hatte. Ich werde Herrn Lasswitz zunächst selbst reden lassen.

» . . . Auch der Mathematiker, so gern er es sich verschweigt, wird zugeben müssen, dass das, was er gewöhnlich unendlichklein nennt, in Wahrheit nur eine solche Größe ist, die unter der möglichen Fehlergrenze liegt und daher auch mit dieser ihren Werth ändern kann. Darin gründet sich auch der Spielraum, welchen man dem Unendlichkleinen und

1) Avenarius, Vierteljahrsschrift für wissenschaftl. Philosophie, 1. Jahrg. Lasswitz, Ein Beitrag zum kosmologischen Problem und zur Feststellung des Unendlichkeitsbegriffs, III. 329. S. Günther, Der philosophische und mathematische Begriff des Unendlichen, ebenda IV. 513.

-großen lässt . . . Auf derselben Seite (vieler Lehrbücher) kann man vielleicht eine Gleichung finden, in welcher der eben »verschwundene« Ausdruck durchaus nicht verschwindet, vielmehr seine Quadrate oder höheren Potenzen ihm gegenüber verschwinden.

»Und das ist auch ganz in der Ordnung; man möge nur eingestehen, dass man es gar nicht mit unendlichkleinen und auch nicht einmal bloß mit beliebig kleinen Größen zu thun hat. Das Differential dx bedeutet weder ein wirklich Unendlichkleines (das wäre der Widerspruch einer existirenden Unendlichkeit), noch auch allein etwas beliebig Kleines, sondern es bedeutet eine im Begriff reell existirende sehr kleine Größe, einen Theil von x, welcher so klein ist, dass er für unsere menschliche Betrachtung vollständig verschwindet gegen x selbst, während $(dx)^2$ wieder ihm gegenüber verschwindet. Das ist die Relativität des Unendlichkeitsbegriffs, bei der die Mathematik sich wohlbefindet; aber auch bei der strengsten Betrachtung darf man sich nicht verhehlen, dass man sich selbst täuscht, wenn man von unendlichkleinen Größen spricht, während nur sehr kleine gemeint sind. Diese Täuschung beruht darauf, dass der ganze Process, welchen man in der Mathematik einen Uebergang zur Grenze nennt, psychologisch nichts weiter ist als ein Abwenden der Aufmerksamkeit von gewissen Beziehungen der Größen und ein Concentriren derselben auf andere, die bei gewissen Veränderungen der ersteren ungestört bleiben. Man sieht das, indem man den geometrischen Grenzübergang zu machen sucht. Man versuche nur den Verlauf einer Curve und ihrer Tangente in der Nähe des Berührungspunkts sich vorzustellen. Immer wird man finden, dass wir von unendlichnahen Punkten nur insofern sprechen, als wir unsere Aufmerksamkeit auf sehr nahe Punkte richten; Punkte, welche sich so nahe sind, dass wir ihre Entfernung im Vergleich zu denjenigen, wie sie sich etwa noch in der Figur dem Auge darstellen lassen, als verschwindend betrachten können. Wir nennen sie darum schlechthin unendlichnahe; — das ist nur ein Wort für einen psychologischen Act, das sehr bequem ist und daher gebraucht werden mag. Wie nahe die Punkte sich sind, das ist uns eben in diesem Falle gleichgültig, wir fragen nicht weiter darnach . . .«

Die Günther'sche Arbeit beschäftigt sich fast ausschließlich mit einer Widerlegung der vorstehend geäußerten Ansichten. Ich bin übrigens der Meinung, dass Herr Günther zum Theil etwas ungerecht mit seinem Gegner fährt. Herr Günther hat bei seinen Ausführungen das Unendlichkleine der reinen Mathematik, das Differential im Auge und in so fern ist er im Recht; Herr Lasswitz dagegen denkt offenbar lediglich an die sogenannten unendlichkleinen Größen in der Mechanik und Physik, welche thatsächlich von endlicher, nur das Hauptresultat nicht mehr beeinflussender Größe sind, und insofern ist er (abgesehen z. B. von den obigen Aeußerungen über die Curventangente) seinerseits im Recht. Der Missstand liegt nur darin, dass Herr Lasswitz das Unendlichkleine der reinen Mathematik, das den vollzogenen Grenzübergang andeutende Symbol einerseits und das Unendlichkleine der angewandten Mathematik, das thatsächlich Endlichkleine andererseits, nicht von einander scheidet.

Von Herrn ~~G.~~ H. Cohen[1]) ist ein selbständiges Werk über das Unendlichkleine erschienen, — (dasselbe hat durch Herrn G. Frege[2]) eine herbe Kritik erfahren). Ich gestehe, dass ich, durch den Titel angelockt, das Buch mit der Erwartung in die Hand genommen habe, hier die bestimmt ausgesprochene Ansicht eines Philosophen hinsichtlich der mathematischen Infinitesimalmethode und also damit des mathematischen Unendlich historisch und systematisch deducirt zu erhalten. Thatsächlich beschäftigt sich auch Herr Cohen mit den Anfängen der Geschichte der Differential- und Integralrechnung und außerdem denke ich, wenn irgendwo die Infinitesimalmethode ihre Durchführung erhalten hat und in wichtigen Anwendungen ihre Triumphe formaler Natur gefeiert hat, so ist dies in der Differential- und Integralrechnung der Fall. Demgegenüber ist man erstaunt zu lesen: »Die intern mathematische Begründung liegt, außer sofern sie in der Grenzmethode im allgemeinen getroffen werden kann, außerhalb unserer Competenz und unseres Anliegens. Denn eigentlich mathematische Ausführungen, die den Differentialbegriff als eine Definition aufstellen, gehören der

1) G. Cohen, Das Princip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte. Berlin 1883.

2) Zeitschr. f. Philos. und philos. Kritik. 87. Bd. S. 324 ff.

allgemeinen Functionentheorie an und können nur innerhalb derselben so geprüft wie geleistet werden.«

Einige der Grundgedanken Herrn Cohen's sind diese: »Das Infinitesimale ist intensive Realität . . . die infinitesimale Zahl stellt nicht nur die Realitätseinheit dar, sondern sie realisirt als solche, sie verleiht dem Sein in der Qualität die Realität . . . Wenn das Differential die Realität als eine constituirende Denkbedingung geltend macht, so bezeichnet das Integral das Reale als Gegenstand«.

Nach dem Obigen kann ich Herrn Cohen mit keinem dieser Sätze folgen. Ich bedaure nur, dass Herr Cohen sich nicht veranlasst gefunden hat, den speciell mathematischen Unendlichkeitsbegriff in den Kreis seiner Erörterungen zu ziehen; es würde gewiss von hohem Interesse sein, seine Ansichten über das eigentliche Wesen der mathematischen Infinitesimalmethode zu vernehmen. Denn dass Herr Cohen »das Detail der mathematischen Forschung nach dem Umfang seiner Studien nicht überschauen kann«, wird kaum ein bleibendes Hinderniss bieten können, da im Grunde nur die ihm gewiss zur Verfügung stehende Kenntniss der Elemente der Differential- und Integralrechnung hierzu erforderlich ist.

Tiefer gehende Einzelfragen hat Herr Franz Meyer [1]) in einem in Tübingen gehaltenen Vortrag angeregt. Er stützt sich hierbei, mit welchem Recht haben wir zu untersuchen, auf die Dedekindschen [2]) Schriften. Zunächst recapitulirt er die Grundgedanken von Herrn Dedekind:

Unter einem Ding versteht man irgend einen Gegenstand unseres Denkens; wenn man eine Reihe von Dingen unter irgend einem gemeinsamen Gesichtspunkt zusammenfasst, so erscheinen sie als die Elemente eines Ganzen. Nach Aussonderung irgend welcher dieser Elemente verbleibt noch ein Theil des Ganzen. Ist es ausnahmslos möglich, zwei solche Inbegriffe von Dingen aufeinander zu beziehen, d. h. ihre Elemente eindeutig einander zuzuordnen, so besitzen die beiden Inbegriffe oder Mengen gleiche Mächtigkeit.

---

1) Fr. Meyer, Zur Lehre vom Unendlichen. Tübingen 1889.

2) Vergl. besond. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1888.

Unendlich heißt ein Inbegriff von Dingen, wenn er mit einem Theil seiner selbst gleiche Mächtigkeit besitzt, andernfalls endlich. Z. B. eine geradlinige Strecke A und ein beliebiger Theil B derselben sind von gleicher Mächtigkeit, da jedem Punkt der einen ein bestimmter Punkt der zweiten zugeordnet werden kann, oder, um ein anderes Beispiel zu wählen, die Reihe der natürlichen Zahlen ist unendlich. Um dies zu beweisen, denke ich mir die Zahlenreihe 1, 2, 3, 4 . . . angeschrieben; sie sei die Reihe A; sodann dieselbe Reihe noch einmal angeschrieben, aber in sich verschoben und so darunter geschrieben, dass die Eins unter Zwei, Zwei unter Drei u. s. f. zu stehen kommt, — sie heiße jetzt die Reihe B. Dann gehört zu jeder Zahl in A eine ganz bestimmte darunter stehende Zahl in B und doch fehlt in B die Zahl Eins. Dieses besondere Element heißt die Einheit, die Eins. Diese geht durch dieselbe Zuordnung in ein anderes Element über, die Zwei u. s. f. So lässt sich also das Reich der ganzen Zahlen begründen, indem man von einem Inbegriff von Dingen ausgeht, von der Eigenschaft, dass er Element für Element einem solchen Theil seiner selbst zugeordnet werden kann, der sich von dem ursprünglichen Ganzen nur durch das Fehlen eines einzigen Elements unterscheidet etc.

»Für unsere Vorstellung«, sagt Herr Franz Meyer, »sinken allerdings die gemeinhin »Zahlen« genannten Dinge vermöge der erwähnten Abstractionen zu bloßen Schatten herab, dafür sind sie aber auch aller subjectiven Willkür entzogen und, strengen, rein logischen Regeln unterworfen, bieten sie für den Arithmetiker völligen Ersatz für jene populären Zahlen.« Weiterhin zieht Herr Fr. Meyer aus diesen Erörterungen den Schluss, »dass auf höherer Stufe des Erkennens das Unendliche sich als das Ursprüngliche, das Endliche als das Abgeleitete, Secundäre erweise« »Die erste Phase der Entwickelung unserer Erkenntniss, die Phase der naiven Wahrnehmung zeigt die endliche Zahl als Abschluss einer endlichen Zählung, sie zeigt die Ruhe eines Körpers als Abschluss einer endlichen Bewegung. In der zweiten Phase, der des analysirenden Verstandes, tritt das umgekehrte Verhältniss in Kraft. Haben wir erst einmal streng präcisirt, was es heißt, von irgend einer ganzen Zahl zur nächstfolgenden überzugehen, den Lauf einer Bewegung zu verfolgen, so erscheint nunmehr durch Denknothwendigkeit die unendliche Kette der ganzen Zahlen, die unendliche Bewegung eines Körpertheilchens als das Ursprüngliche und Natürliche, dagegen die endliche Anzahl, die endliche Reihe als ein Secundäres und Abgeleitetes, als Etwas, das erst durch einen gewaltsamen Hemmungsprocess ins Dasein tritt. Damit scheint mir auch ein alter Einwand gegen die Lehre vom Unendlichen hinlänglich widerlegt zu sein, der Einwand nämlich, dass unendliche Inbegriffe von Dingen nicht existiren können, da sie unser endlicher Verstand nicht zu begreifen vermag«. Er nennt auch das Endliche und Unendliche ein »wunderbares Brüderpaar, das eine irdischer, das andere göttlicher Natur, im menschlichen Geistesleben friedlich nebeneinander wohnend«. Im Besonderen glaubt er daraus die Erkenntniss geschöpft zu haben, dass gerade die Ur- und Grundbegriffe der einzelnen Wissenschaften von wesentlich unendlicher Natur sind und dass eben dieser Umstand die schrankenlose Ausdehnung der Wissenszweige erst ermöglicht. Reiche Ausbeute gewähre, sagt er, in dieser Hinsicht die Philosophie und Theologie, namentlich die ihnen gemeinsame Ethik. So erhalte die Lehre von der Unsterblichkeit der Seele von diesem Standpunkt aus eine neue Beleuchtung.

Wiewohl ich mich mit dem von Herrn Dedekind vorausgesetzten Verhältniss der Mathematik zur Logik theilweise nicht befreunden kann, glaube ich kaum, dass Herr Dedekind die Interpretation seiner Gedanken durch Herrn Fr. Meyer völlig acceptiren wird, jedenfalls ist Herr Fr. Meyer in einer mir ungerechtfertigt scheinenden Weise über die Dedekind'schen Schriften hinausgegangen.

Niemand leugnet, dass beim Aufbau der Arithmetik die Begriffe der Zahl und der Gleichheit fortwährend Erweiterungen erfahren müssen. Denn ursprünglich ist ja die Zahl nichts anderes als das Resultat der wiederholten Setzung eines Objects oder auch das Resultat des einfachen Zählens, wobei man von einer Reihe von Objecten eines nach dem andern ins Auge fasst, von ihren besonderen Merkmalen, wie Farbe, Größe etc. absieht, sie als gleichartig betrachtet und in Gedanken zu einer einzigen Gruppe zusammenfasst. Indem man jedoch späterhin durch Ausdehnung der Definitionsgleichung der Subtraction, Division etc. auch die anfangs als unmöglich verworfenen Formen, wie 2 — 2, 2 — 3 etc. als Zahlen zulässt, also die Null die negativen Zahlen etc. einführt, erweitert man fortwährend den Zahlbegriff.

Zugleich aber auch den Begriff der Gleichheit zweier Größen: Anfangs wird dieser Begriff so aufgefasst[1]): Zwei (aus einem unbestimmt gelassenen Grundelement e oder der abstracten Einheit 1 zusammengesetzte) Zahlen a und b nennt man dann gleich ($a = b$), wenn zu jedem Element der einen Zahl ein Element der andern gehört, und ungleich, wenn bei der Gegenüberstellung der Elementenreihen in der einen Elemente vorkommen, denen in der andern keine entsprechen. Die Zahl, welche mehr Elemente enthält, heißt im letzteren Fall die größere, die andere die kleinere.

Z. B. Ich habe eine Reihe von Bäumen vor mir und anderseits eine Reihe von Rechenkugeln. Diese beiden Reihen ordne ich Element für Element einander zu, indem ich jedesmal, wenn ich einen bestimmten Baum ins Auge gefasst habe, eine Rechenkugel bei Seite schiebe; so fahre ich fort, bis ich mit der Baumreihe oder mit der Kugelreihe zu Ende bin. Habe ich beim Betrachten des letzten Baumes gerade auch die letzte Kugel zur Seite gerückt, so sind die zwei Anzahlen gleich; kam ich mit der Baumreihe früher zu Ende, so ist die Zahl der Bäume kleiner als die der Rechenkugeln, und umgekehrt.

Zur Einführung der irrationalen Größen als Zahlen wird sodann der Begriff der Gleichheit etwas verallgemeinert, z. B. Herr Biermann thut dies in der folgenden Weise. Er sagt: »Es werden jetzt auch Größen in den Kreis der Betrachtung gezogen, die im Gegensatz zu den früheren durch Zusammensetzung einer unbeschränkten Anzahl von Elementen gebildet sind, wie z. B.

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10_4} + \dots.$$

Durch eine solche Reihe sei ebenfalls nun ein Object, eine Größe für sich gesetzt, und nun wird definirt: Nimmt man aus einer

1) Vergl. hierüber auch z. B. Biermann, Theorie der analytischen Functionen. Leipzig 1887.

Größe a eine willkürliche, aber beschränkte Anzahl von Elementen heraus, so sagt man, man habe einen Bestandtheil herausgegriffen. Danach heißt b ein Bestandtheil von a, wenn eine beschränkte Anzahl von Elementen in a so transformirt werden können, dass in a neben b noch andere Elemente vorkommen. Solche Größen, in denen jede Zahl als Bestandtheil enthalten ist, heißen unendlich, z. B. wird $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ unendlich heißen, da diese Reihe das Element $\frac{1}{2}$ beliebig oft enthält (indem ja

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots \frac{1}{n+n} > n \cdot \frac{1}{2n} \quad \text{also} > \frac{1}{2}$$

ist). Und eine Größe a heißt endlich, wenn es eine aus einer angebbaren Anzahl von Elementen gebildete Zahlengröße gibt, die in a nicht als Bestandtheil enthalten ist, oder wenn man gar eine aus einer beschränkten Anzahl von Elementen zusammengesetzte Zahlengröße b angeben kann von der Beschaffenheit, dass jede aus Elementen von a gebildete Zahlengröße in b enthalten ist; gleich heißen dann jetzt allgemeiner zwei Größen, wenn jeder Bestandtheil der einen Größe in der andern als Bestandtheil enthalten ist«.

Ich kann nicht einsehen, wie auch bei solchen Betrachtungen das Unendliche in der Mathematik als das Ursprüngliche, das Endliche als das Secundäre und Abgeleitete sich nothwendig ergeben solle. Das heißt doch, die natürlichen einfachen Dinge auf den Kopf stellen. Es ist mir auch nicht erfindlich, wie auf Grund solch rein arithmetischer Begriffserweiterungen plötzlich das Unendliche als von göttlicher Natur sich herausstellt, und was gar die Lehre von der Unsterblichkeit der Seele mit diesem Unendlichen zu thun hat.

Das mathematische Unendlich in unserem obigen Sinn ist ein anderes Unendlich[1]) als dasjenige des gewöhnlichen Sprachgebrauchs, das wir verwenden, wenn von unendlicher Geduld, unendlicher Langmuth, unendlicher Allmacht Gottes die Rede ist. Eben deshalb darf das mathematische Unendlich weder als Stütze

---

1) Vrgl. über diese mehrfache Form des Unendlichkeitsbegriffs auch Wundt, Essays. Leipzig 1885. Abschn. III. »Die Unendlichkeit der Welt«. S. 85.

der Religion noch als Kampfmittel gegen dieselbe benutzt werden. In der Mathematik ist das Unendliche eine abkürzende Redensart; in der Religion ist es, könnte ich sagen, hoffentlich keine Redensart.

Auch sonst oft genug hat ja eine Bezeichnung in der Mathematik eine Bedeutung, die sehr verschieden ist von derjenigen der gleichlautenden Bezeichnung im gewöhnlichen Sprachgebrauch. Ich weiß kein drastischeres Beispiel für das Ungehörige dieses Zusammenwerfens zweier gleichlautenden Begriffe, die in zwei Gebieten völlig verschiedene Bedeutung haben, anzuführen, als das folgende: Ich erinnere mich vor einigen Jahren eine Schrift über Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Hand gehabt zu haben, worin der Verfasser, angeregt durch den Umgang mit einem Philosophen, sich an dem Begriff der mathematischen Hoffnung (bekanntlich einer Abkürzung für das Product aus der Wahrscheinlichkeit eines Spielers zu gewinnen und dem Einsatz des Gegners) dermaßen begeistert, dass er von da aus dazu übergeht, auch den Begriff der mathematischen Traurigkeit und Fröhlichkeit zu definiren; und er ist so auf dem besten Weg, den Grund zu einer mathematisch auszugestaltenden Lehre von den Affecten zu legen.

Ferner ist bekanntlich die sog. »mechanische Arbeit« in der Mechanik eine abkürzende Bezeichnung für das Product aus der Maßzahl der zu überwindenden Widerstandskraft und des dem Widerstand entgegen zurückgelegten Wegs. Z. B. beim Heben eines Gewichts P kg auf die Höhe h m ist die der Anziehungskraft der Erde entgegen zu leistende Arbeit $P \cdot h$ Meterkilogramm. Aber dieser Begriff deckt sich keineswegs ohne weiteres in allen Fällen mit dem gleichlautenden, weniger bestimmt definirten Arbeitsbegriff des gewöhnlichen Lebens. Wenn z. B. ein Akrobat eine schwere Last mit horizontal gehaltenem Arm längere Zeit frei hinaus hält, so ist der Weg h Null; die »mechanische Arbeit« wäre also Null, und doch empfindet der Mann sicherlich eine erhebliche Arbeitsleistung seiner Muskeln. — Aehnlich ließe sich von dem Begriff »Centrifugalkraft« nachweisen, dass demselben nur eine Abkürzung des Ausdrucks zu Grunde liegt, dass es sich hier nicht um eine Kraft im sonstigen Sinn dieses Wortes handelt.

Auch Herr G. Cantor[1]) betrachtet das Unendliche des gewöhn-

---

1) Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, Neue Folge, 88. Bd.

lichen Sprachgebrauchs als vergleichbar mit dem sogenannten mathematischen Unendlich.

Er unterscheidet mehrere Arten des Unendlichen:

Erstens das Actual-Unendliche und dieses wieder nach drei Beziehungen:

a) Sofern es in der höchsten Vollkommenheit, im völlig unabhängigen außerweltlichen Sein, in Deo, in Deo extramundano, aeterno, increato, omnipotente, sive natura naturante realisirt sei, wo er es Absolutunendliches oder kurzweg Absolutes nennt.

b) Sofern es in der abhängigen, creatürlichen Welt, in concreto seu in natura naturata vertreten ist.

c) Sofern es als mathematische Größe, Zahl oder Ordnungstypus vom Denken in abstracto aufgefasst werden kann.

In den beiden letzten Beziehungen, wo es als beschränktes, noch weiterer Vermehrung fähiges und sofern dem Endlichen verwandtes Actualunendliches sich darstellt, nennt er es Transfinit-Unendliches, transfinitum und setzt es dem Absoluten entgegen als infinitum creatum, gegenüber dem infinitum increatum. Beispiele: Der Inbegriff aller endlichen ganzen positiven Zahlen, die Gesammtheit aller Punkte eines Kreises, aller gleichartig vorzustellenden Monaden, die einen Körper ausmachen, etc.

In jeder von diesen 3 Beziehungen kann die Möglichkeit des Actualen bejaht oder verneint werden; daraus folgen im Ganzen acht verschiedene Standpunkte, die Cantor sämmtlich in der Philosophie vertreten findet und von welchen er selbst denjenigen einnimmt, der unbedingt affirmativ ist in Bezug auf alle drei Rücksichten.

Dass ein infinitum creatum als existent angenommen werden müsse, lasse sich, sagt er, mehrfach beweisen. Ein Beweis gehe vom Gottesbegriff aus und schließe zunächst aus der höchsten Vollkommenheit des Wesens Gottes auf die Möglichkeit der Schöpfung eines transfinitum ordinatum; sodann aus seiner Allgüte und Herrlichkeit auf die Nothwendigkeit der thatsächlich erfolgten

---

S. 224, G. Cantor, Die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das Actual-Unendliche; ferner 91. Bd. S. 81 und 252, sowie 94. Bd. S. 240, Mittheilungen zur Lehre vom Transfiniten.

Schöpfung eines transfinitum; ein anderer Beweis zeige a posteriori, dass die Annahme eines transfinitum in natura naturata eine bessere, weil vollkommenere Erklärung der Phänomene, im besonderen der Organismen und der psychologischen Erscheinungen ermöglicht, als die entgegengesetzte Hypothese.

Diesem Actualunendlichen mit seinen Unterabtheilungen stellt er Zweitens das Potential-Unendliche gegenüber. Dieses wird da ausgesagt, wo eine unbestimmte veränderliche endliche Größe vorkommt, die entweder über alle endlichen Grenzen hinauswächst, wie z. B. die Zeit von einem bestimmten Moment ab gezählt, oder unter jede endliche Grenze der Kleinheit abnimmt, was z. B. die legitime Vorstellung eines sog. Differentials sei; allgemein überall da, wo eine unbestimmte Größe in Betracht kommt, die unzählig vieler Bestimmungen fähig ist. Actualunendlichkleine Größen verwirft er, wiewohl oder vielmehr weil er actualunendlichgroße Zahlen kenne.

Dies die kürzeste Skizzirung der Cantor'schen Unterscheidungen mit Anlehnung an die eigenen Worte Herrn Cantor's.

Auf dem Boden, auf den er sich damit gestellt habe und den er für den einzig richtigen halte, stehen, sagt er, nur wenige; vielleicht sei er der zeitlich Erste, der diesen Standpunkt mit voller Bestimmtheit und in allen seinen Consequenzen vertrete. »Doch das weiß ich sicher, dass ich nicht der letzte sein werde, der ihn vertheidigt.«

In der That haben die Cantor'schen Thesen manche Angriffe erfahren. Cantor klagt über einen allgemeinen horror infiniti, der ihm entgegentrete, und zum Schutz seines Transfinit-Unendlichen sieht man ihn mit einem gewaltigen Rüstzeug von historischen Citaten kämpfen, die bis auf Aristoteles, Augustin und Origenes zurückgehen. Die Hauptirrthümer der gegen ihn vorgebrachten Beweise, sagt er, rühren daher, dass von vorn herein den in Frage stehenden Zahlen alle Eigenschaften der endlichen Zahlen zugemuthet werden, während die unendlichen Zahlen durch ihren Gegensatz zu den endlichen ein neues Zahlengeschlecht constituiren.

Ich könnte mich mit den Cantor'schen Auseinandersetzungen zu einem großen Theil einverstanden erklären, wenn Herr Cantor mir gestattete, sein Actualunendliches mit dem Unendlichen des gewöhnlichen Sprachgebrauchs (= Maß und Zahl ausschließend), dagegen sein Potentialunendliches mit dem mathematischen Grenzwerth-Unendlichen zu identificiren, welche beide Begriffe innerlich ihrem eigentlichen Wesen nach nichts miteinander gemein haben. Ich glaube jedoch nicht, dass Herr Cantor dem zustimmen würde.

Analog wie Herr Cantor die reale Existenz des Actualunendlichgroßen vertheidigt, so scheint, wenn ich ihn recht verstehe, Herr Cohen die Existenz des Actualunendlichkleinen zu behaupten, ohne übrigens diesen Namen zu gebrauchen. Ebenso lässt P. du Bois-Reymond in seiner allgemeinen Functionentheorie den Idealisten die These beweisen: Das Unendlichkleine, das Differential, existirt, erfreut sich thatsächlicher Existenz; und wenigstens in seinen früheren Vorträgen zu Tübingen Anfang der 80er Jahre hat P. du Bois-Reymond diesen Satz als Aeußerung der eigenen Ansicht wiederholt ausgesprochen.

Der Grund für diese Behauptung liegt bei P. du Bois-Reymond der Hauptsache nach — denn die weiteren Ausführungen würden uns hier zu weit führen — in folgendem:

Denken wir uns irgend eine Reihe, z. B.

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \ldots\ldots,$$

also den Decimalbruch 3,14159 .... oder irgend einen andern Decimalbruch, dessen Ziffern sogar herausgewürfelt sein mögen, so convergirt diese unendliche Reihe und wir denken uns nun unter Zugrundelegung einer Längeneinheit, z. B. des cm, auf einer Geraden von einem und demselben Punkt aus, immer nach derselben Seite hin, zuerst 3 cm und 4 cm abgetragen; sodann 3,1 cm und 3,2 cm, dann 3,14 cm und 3,15 cm und so fort; so haben wir zwei Reihen von Punkten, die immer dichter auf einander folgend von zwei Seiten her den wahren Werth π der Reihe immer enger einschließen. Je weiter wir gehen, um so kleiner wird der Abstand zwischen den beiderseitigen Endpunkten der jedesmal aufgetragenen zwei Strecken. Allein stets bleibt eben eine allerdings immer kürzer werdende Strecke zwischen diesen zwei Punkten übrig, und vollkommen genau werden diese Endpunkte niemals zusammenfallen können, weil niemals eine Häufung von Punkten eine Strecke geben kann; — also existirt das Unendlichkleine, sagt P. du Bois-Reymond.

Dieser Schluss ist nach meiner Ansicht nicht richtig. In der erwähnten Eigenthümlichkeit liegt nicht ein Beweis für die Existenz des Unendlichkleinen, sondern ein Ausdruck für den Gegensatz zwischen Stetigem und Unstetigem. Das Unstetige, das Nacheinander, die Folge von Punkten, als Abstractionen aus kleiner und kleiner gedachten Massen, etwa Kugeln, die ich nacheinander ins Auge fasse, — und das Stetige, das Nebeneinander, die gerade Linie, als Abstraction des dünner und dünner gedachten Stabs, sind eben von Grund aus ungleichartig, weshalb ich durch noch so starke Häufung des einen nicht einen Theil des andern erhalten kann.

Darin liegt nichts Auffallendes mehr. Sonst müsste es, wenn ich z. B. auf andern Gebieten irgend welche zwei ungleichartige Dinge herausgreife, auffallend erscheinen, weshalb sich nicht aus einer Häufung von Lichteindrücken ein Gewicht, durch Summation von Hoffnungen ein Goldklumpen erhalten lässt.

Aehnlich scheint es mir auch weitaus einfacher zu sein, in der Eigenthümlichkeit, dass das Parallelenaxiom in der Geometrie bezw. der Satz vom Parallelogramm der Kräfte in der Mechanik nicht bewiesen werden kann, eine Eigenschaft des Raums bezw. einen Ausdruck für die unabhängige Wirkung der Naturkräfte zu erblicken, als hieran anschließend sich in metaphysische Speculationen zu vertiefen.

Man kann übrigens schließlich begreifen, wie mancher Mathematiker oder Techniker durch seinen langjährigen intimen Verkehr mit dem Unendlichkleinen sich dazu verleiten lassen kann, diesem wirkliche Existenz zuzuschreiben; etwa ähnlich wie mancher Chemiker in Folge des häufigen Umgangs mit den Atomen vergisst, dass er es immerhin hier mit einem allerdings sehr bequemen, anschaulichen und zusammenfassenden Hilfsbegriff zu thun hat, der auf Hypothesen beruht. Er hat so häufig schwarze, weiße, grüne, gelbe Kugeln als Atome betrachtet und in der Ebene oder im Raum zu Molecülen zusammengesetzt, dass er es für selbstverständlich und nothwendig hält, dass die Atome unabhängig von uns existiren; es wäre doch auch denkbar, dass die Stofferfüllung des Raums eine stetige ist; — (womit ich natürlich nicht gesagt haben will, dass ich meinerseits die chemische Atomtheorie auch als bequemes Denkmittel verwerfe oder nicht benütze).

Da, wo die Frage nach der Existenz des Unendlichkleinen aufgeworfen wird, scheint mir vor allem nicht beachtet zu werden, dass der Mathematiker stets mit endlichen Differenzen Δx, Δy rechnet, auch wo er in kurzer und vielleicht vom philosophischen Standpunkt aus nachlässig zu nennender Ausdrucksweise Differentiale dx, dy schreibt, oder von »unendlichkleinen« Differenzen und Zuwächsen spricht, während er thatsächlich endliche Differenzen und Zuwächse meint; erst zum Schluss, nachdem die Umrechnungen ausgeführt sind, geht er dann zur Ermittlung des Grenzwerthes über. Oft genug kann man in mathematischen, physikalischen oder technischen Schriften lesen, z. B.: Man denke sich zwei unendlich nahe Querschnitte x und $x + dx$ des Drahtes; der erste besitze die Temperatur t Grad, der andere die Temperatur $t + dt$ Grad etc., oder es wird auch auf eine Zeichnung verwiesen, in welcher zwei nahe Querschnitte angedeutet sind; diese werden unendlich nahe genannt und damit weiter operirt, wie wenn der Raum zwischen ihnen das unendlich vergrößerte Abbild wirklich existirender Differentialgrößen wäre. Hier ist vollends klar, dass der Schriftsteller nur Worte sparen will; thatsächlich meint er endlich nahe Querschnitte, abstehend um Δx, von Temperaturen, die um ein Endliches Δt verschieden sind; und schließlich geht er zur Grenze über. Eine solche Ausdrucksweise ist unter Fachgenossen erlaubt und durch die Pflichten der Oekonomie des Denkens und des Ausdrucks geboten. Auch der Pädagog wird stets mit Vortheil von der so anschaulichen Vorstellungsweise Gebrauch machen, die darauf beruht, dass man das Differential wie eine im Fluss des Kleiner- und Kleinerwerdens begriffene Größe, die eben der Null sich nähert, aber doch noch von Null verschieden ist, bezw. als einen Zuwachs dx behandelt, der dieselbe Realität besitzt, wie die zugehörige Strecke x selbst. Und wenn ich oben hervorgehoben habe, dass das Differential sich vermeiden lasse, so kann meine Meinung nicht die sein, dass dasselbe jetzt aus dem Wortschatz der Schriftsteller und Lehrer verschwinden solle; im Gegentheil habe ich selbst seit Jahren in Wort und Schrift gerne die unendlichkleinen Größen benützt, benütze sie und werde sie benützen. Allein im vorliegenden Fall steht, losgelöst von allen

Rücksichten der sprachlichen Bequemlichkeit, die philosophische Frage nach der Realität der Differentiale auf der Tagesordnung.

Diese Realität behauptet, wie gesagt, Herr Cohen und der Idealist du Bois-Reymond's in der ausgesprochensten Weise. Herr Cohen denkt vielleicht an das Beispiel des End-Atoms dx, das im Begriffe steht, sich vom Ganzen abzulösen; oder an eine gewisse Trieb- und Zeugungskraft, vermöge deren die Strecke x aus sich heraus ein Unendlichkleines dx abzustoßen, zu »differentiiren« strebt, wie der Stamm die Knospe. Allein das Differential der Analysis kommt nur da in Betracht, wo eine Größe als variabel vorausgesetzt ist; das Atom ist seiner Definition nach eine feste, nicht eine im Fluss des Kleinerwerdens begriffene, nicht eine variable Größe, deshalb dürfen beide Begriffe nicht identificirt werden.

Wenn das Differential dx eines Körpers x ein Theil oder auch eine Eigenschaft des Körpers wäre, so müsste ihm wohl Realität zuzuschreiben sein; denn einen Körper unterscheide ich vom andern durch die Gesammtheit seiner bleibenden Eigenschaften; unmöglich kann aber das Differential eines Körpers eine denselben mitbestimmende Eigenschaft sein; ich bin keineswegs genöthigt, mit der Vorstellung des Körpers selbst stets auch die Vorstellung dieses Anhängsels, dieses sogen. unendlichkleinen Zuwachses dx herumzuschleppen; sobald ich den Körper als constantes, abgeschlossenes, geometrisches Gebilde betrachte, nicht gerade einmal Veranlassung habe, etwas an ihm variabel vorauszusetzen, so fällt damit von selbst das Differential aus meiner Vorstellung weg. Auch ein Theil des Körpers oder der Strecke kann das Differential nicht sein; eine unendlichkleine Strecke kenne ich nicht.

Man könnte vielleicht einwenden: das Differential dx ist ein reines Denkobject und hat als solches naturgemäß Realität, und zwar ebensolche Realität, wie die Strecke x, die als ideales Gebilde, als Resultat einer vom menschlichen Geist vollzogenen Abstraction, ebenfalls ein Werk unserer Raumvorstellung ist. Allein man wird mir zugeben, dass auch so betrachtet z. B. der »unendlichfernen Geraden« der Ebene nicht in demselben Sinn des Wortes Realität zugeschrieben werden kann, wie einer wirklichen Geraden; denn die letztere ist die Abstraction aus einem reellen, unabhängig von mir existirenden geraden Stabe, an dem ich mir die Dickenausdehnung wegdenke, allein niemals wird es mir gelingen, die unendlichferne »Gerade«, der ich zudem noch ihrem Wesen nach keine bestimmte Lage in der Ebene zuschreiben darf, als Abstraction aus einem materiellen Stab aufzufassen. Es hat keinen Sinn, nach der Realität der unendlichfernen Geraden zu fragen, und so auch bei dem Differential. Um eine Existenz unabhängig von unseren Gedanken kann es sich bei demselben deshalb überhaupt nicht handeln, weil die Definitionen und Rechenregeln für die Operationen mit dem Unendlichkleinen zum Theil willkürlich sind, wie oben gezeigt wurde.

Kann es einen Sinn haben, zu fragen: haben die Determinanten reale Existenz? — Gewiss nicht. Denn sie sind willkürlich definirte Schemata, deren Rechenregeln unter Anlehnung an die sonst gebräuchlichen so gewählt sind, dass keine Widersprüche sich herausstellen und deren Definition eine willkürliche ist.

Oder, existirt eine Centrifugalkraft, die z. B. auf einen an einem Seil befestigten und horizontal im Kreis herumbewegten Stein wirken würde? — Sofern ich meine Gedanken darauf richte und die Centrifugalkraft zu einem Gegenstand meines Denkens mache, — ja! Sofern sich aber nachweisen lässt, dass auf den Stein selbst in der Richtung des Seils thatsächlich zwar eine Centripetalkraft nach innen, aber nicht eine Kraft nach außen wirkt, vielmehr die sogenannte Centrifugalkraft nur einen abkürzenden Ausdruck für das Product aus einer Masse und einer Beschleunigung darstellt, — nein!

Oder: Existiren die Kraftlinien? Wenn ich einen Magnetstab auf den Tisch lege und den Nordpol mit Eisenfeile bestreue, so ordnen sich die Eisentheilchen in strahlenförmigen Linien, und wenn ich einen Südpol gegenüber anbringe und am Tisch rüttle, so biegen sich die Linien und vereinigen sich nach dem Südpol zu etc. Die Kraftlinien scheinen hier allerdings reale Existenz unabhängig von uns zu besitzen. Aber thatsächlich liegen doch nur so und so viele Eisentheilchen auf dem Tisch, denen wir ideale Linien substituiren, gewissermaßen als Leitlinien unserer Gedanken für die hier wirkenden magnetischen Kräfte.

Faraday, der die Theorie der elektrischen und magnetischen Kraftlinien ausbildete, stellte sich diese in der anschaulichsten Weise vor; wenn man seine Schriften liest, so glaubt man diese Linien sich gegenüber zu sehen; glaubt wahrzunehmen, wie in ihrer Längsrichtung eine Spannung, quer zu ihnen ein Druck wirkt; zu sehen, wie sie von einem Pol in dichter Fülle ausgehen und ins Weite sich verlieren, wie sie von einem in die Nähe gebrachten Eisenstück herangezogen werden u. s. f. Der Elektrotechniker von heutzutage operirt bei seinen physikalischen Ueberlegungen und seinen Berechnungen gerne mit diesen Linien; ihre Richtung gibt ihm die Richtung der elektrischen und magnetischen Kräfte an und ihre Zahl deren Stärke.

Aber trotzdem ist sich der Elektrotechniker klar darüber, dass er hier nur ein selbsterfundenes und selbstdefinirtes Denkmittel vor sich hat, das ihm lediglich dazu dient, manche Ueberlegungen gewissermaßen schematisch zu gestalten und dadurch abzukürzen, sowie manche Formeln einfach zu schreiben.

Nehmen wir z. B. die Aufgabe: es liege ein kreisförmiger Draht vor, der von einem elektrischen Strom von der Stromstärke 21 Ampère durchflossen wird, Halbmesser 5 cm, und andererseits ein magnetischer Pol von 90 magnetischen Einheiten; der Pol ist entgegen der zwischen beiden wirkenden Kraft aus der Entfernung 40 cm in die kleinere Entfernung 30 cm heranzubringen. Wie groß ist hierbei im Durchschnitt die zu überwindende Kraft? Wenn der Elektrotechniker als Resultat erhält: 0,72 Dynen (981 Dynen = dem Druck eines Gramms), so drückt er dieses Resultat gerne auch in der anderen Form aus: das magnetische Feld des Kreisstroms ist zwischen den beiden Punkten im Durchschnitt 0,008 Einheiten stark, oder auch: man hat sich dort durch jedes Quadratmeter 80 Kraftlinien zu denken. Dabei ist ihm wohlbekannt, dass hinter dieser Redensart die im Grund willkürliche Definition steckt: An den Stellen eines magnetischen Feldes, an welchen ein Einheitspol eine Anziehungs- oder Abstoßungskraft gleich einer Dyne erfährt, herrscht die Feldstärke Eins; durch jedes Quadratcentimeter einer Niveaufläche denkt man sich dort eine Kraftlinie gehend. Und das ist gewiss doch eine willkürliche Annahme, dass von einem magnetischen oder elektrischem Einheitspol gerade 4 π Kraftlinien ausgehend gedacht werden; der Grund ist ein rein formeller. Niemand wird daran denken, dass in jenem Fall thatsächlich und unabhängig von unserem Denken gerade nur 80 Kraftlinien das Quadratmeter durchsetzen;

es ist eine bloße bequeme Sprechweise; die Frage: »existiren jene 80 Kraftlinien?« hat darnach offenbar keinen Sinn.

Zum Schluss möchte ich mir gestatten, meine Ansicht über das mathematische Unendliche kurz zusammenzufassen:

Das sogen. mathematische Unendliche, oder Grenzwerth-Unendliche, wie es bei veränderlich gedachten Größen oder Lagen innerhalb der Mathematik in der Form des Differentials, sowie des unendlich fernen Punktes einer Geraden, der unendlich fernen Ebene des Raumes etc. zur Verwendung kommt, besitzt keine inhaltliche, sondern nur **formale** Bedeutung, könnte deshalb vermieden werden; es dient nur als **eine bequem abkürzende Redewendung;** bei Lageverhältnissen, um mehrere Sätze in einen zusammenzudrängen, mehrere Aufgaben unter eine einzige Gruppe unterzubringen, oder, um unter Ersparung von Einzelüberlegungen schematisch zu specialisiren; bei Größenverhältnissen, um einen vollzogenen Grenzübergang anzudeuten. (Dagegen in der Naturwissenschaft und überall da, wo es sich um wirklich vorhandene Objecte handelt, werden vielfach Größen als unendlich klein bezeichnet, welche in Wirklichkeit endlich klein sind; und diese werden sodann in der Rechnung den eigentlichen Differentialen der reinen Mathematik zugeordnet. Diese Bezeichnungsweise der Naturwissenschaft, die da erlaubt ist, wo über den wahren Sinn keine Zweideutigkeit entstehen kann, deutet dann lediglich an, dass eine Größe a so klein gegenüber einer andern Größe b ist, dass im Hinblick auf den Genauigkeitsgrad der betreffenden Rechnung das schließliche Resultat durch Vernachlässigung von a nicht mehr beeinflusst wird.) Von einem constanten Unendlichgroßen oder Unendlichkleinen zu reden oder nach der Realität der mathematischen Differentiale zu fragen, hat, da diese nur einer Abkürzung des Ausdrucks dienen, keinen Sinn. Alle Speculationen, welche auf der Verwendung des eigentlich mathematischen Unendlichen für Fragen der Religion, Ethik, Kosmologie oder Metaphysik beruhen, sind aus demselben Grund gegenstandslos.

Ueberblickt man dieses Resultat, so erscheint unsere Auffassung vom mathematischen Unendlichen gewiss sehr nüchtern und wenig poetisch; sie leistet uns auch zweifelsohne nicht so erhabene Dienste, wie z. B. Herrn Beyda, der aus jenem Begriff eine Kräftigung seiner Unsterblichkeitslehre zu ziehen weiß.

Allein dafür scheint unsere Auffassung vielleicht klarer und einfacher, und Weiteres wollen wir nicht. Und wenn Herr Dühring[1]) sagt: »Die Nebel des wüst Unendlichen, sei es nun in der Richtung auf das Große oder auf das Kleine, verunstalten sammt den Phantasien über eine mehr als blos verneinende Bedeutung des Imaginären die Analysis und behindern eine materiell und formell gesunde Gestaltung der Physik«, so denke ich, es hängt lediglich von dem Denken dessen, der sich damit beschäftigt, ab, ob das mathematische Unendliche ein wüstes ist, das Nebel erzeugt. Ich fühle mich bei der skizzirten Auffassung über das mathematisch Unendliche völlig beruhigt und acceptire gerne einen Ausspruch Herrn Mach's: dass vielfach eine Aufklärung in wissenschaftlichen Fragen eine gewisse Enttäuschung mit sich bringt.

Wenn der eine oder andere Leser, der etwa als mathematischer Laie mittelst dieser Zeilen sich über das wahre Wesen des Unendlichen in der Mathematik zu orientiren suchte, eine gewisse Enttäuschung hinsichtlich der Bedeutung des mathematischen Unendlichen empfindet, aber andererseits geneigt ist, diesen Mach'schen Satz umzukehren, so ist der Zweck dieser Zeilen erreicht.

Stuttgart, technische Hochschule, November 1894.

---

1) Dr. E. Dühring, Logik und Wissenschaftstheorie. Leipzig 1878. S. 373.