

Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik.

Von

Gottl. Friedr. Lipps.

(Fortsetzung zu Band X S. 202.)

IV.

Die logische Entwicklung des Zahlbegriffs.

§ 1.

Die Untersuchung über »die logische Ordnung und die Zahl« schloss mit dem Hinweis darauf, dass die Einsicht in das Wesen der logischen Ordnung eine umfassende Begründung des Zahlbegriffs möglich mache. Dabei musste die Evidenz des Denkens als Stütze dienen, und es mussten die verschiedenen Entwicklungsstufen des Zahlbegriffs als bekannt vorausgesetzt werden. Denn nur so war es möglich, einestheils in der Normalreihe von Bewusstseinsinhalten die Zahlenreihe, anderentheils in der logischen Beziehung des Grundes zur Folge die Quelle der Beziehungen zwischen den Zahleinheiten unmittelbar zu erkennen.

Dieser Hinweis bildete den naturgemäßen Abschluss der Erörterungen über die logische Ordnung. Denn ohne ihn wäre man in Ungewissheit geblieben, ob der eingeschlagene Weg wirklich zu dem erstrebten Ziele führe. Es ist jedoch selbstverständlich, dass die Erkenntniss der evidenten Richtigkeit des betretenen Weges zwar die Gewissheit verleiht, den Zahlbegriff thatsächlich zu erreichen, nicht aber der Verpflichtung enthebt, den Weg, auch soweit er unmittelbar vor Augen liegt, wirklich zu durchmessen.

Auch bedarf es kaum der Erwähnung, dass hierbei für eine bereits vorhandene Kenntniss des Zahlbegriffs keine Verwendung sich bietet. Denn mit der Einsicht in das Wesen der logischen Ordnung ist alles gegeben, dessen man zur Entwicklung des Zahlbegriffs bedarf, und überdies wäre eine Rücksichtnahme auf die in den mathematischen Disciplinen vorliegende Entwicklungsstufe desselben nur geeignet, die formale mathematische Auffassungsweise in den Vordergrund zu stellen und eine Entscheidung darüber zu verhindern, ob der mathematische Zahlbegriff ein organisches Ganzes darstellt und wie seine verschiedenen Entwicklungsstufen logisch begründet sind.

Die weiterschreitende Untersuchung hat daher die Aufgabe, an die betreffs der logischen Ordnung gewonnenen Resultate anzuknüpfen und die in ihnen ruhenden Keime zur Entfaltung zu bringen.

Der Ausgangspunkt der Untersuchung muss demgemäß zunächst charakterisirt werden. Er wurde durch eine Beschreibung des Zustandekommens der logischen Ordnung gewonnen. Die Idee der logischen Ordnung aber war entstanden, indem man die That-sache beachtete, dass die Bewusstseinsinhalte im Bewusstsein als ihrem Träger zusammengefasst werden, und dabei nicht ihre Abgrenzung vom Gesamttinhalt, worauf die anschauliche Ordnung sich gründet, sondern ihr Vorhandensein als für sich erfassbare, durch die Apperception hervorgehobene Qualitäten ins Auge fasste.

Als Quelle der logischen Ordnung war folglich das Zusammen-sein apperceptirter Bewusstseinsinhalte, wie es als ein thatsächliches Erlebniss im Bewusstsein vorhanden ist, zu betrachten.

Einer natürlichen Neigung folgend, hätte man versucht sein können, in den Objecten des Denkens allein die Motive zu suchen, die das Denken zur logischen Ordnung führen. Man wäre dann ohne Zweifel dazu gelangt, die zusammengesetzte Beschaffenheit der Denkobjecte zu erkennen und in dem Beachten gemeinsamer Elemente den Anlass zu einem Zusammenfassen verschiedener Bewusstseinsinhalte durch das Denken zu finden. So hätte sich das logisch begründete Zusammensein von Bewusstseinsinhalten, wie es in dem beispielsweise angeführten Zusammenfassen der Thiere oder der Pflanzen, der physikalischen oder der chemischen Erscheinungen

vorliegt, in klar hervortretendem Gegensatz zu dem anfänglich zu Grunde gelegten erlebten Zusammensein ergeben. Die erwähnten Beispiele hätten dann auch die Erkenntniss ermöglicht, dass die logisch zusammengehörigen Objecte nicht nur mit Rücksicht auf ihre gemeinsamen Elemente als gleichwerthig betrachtet, sondern auch auf Grund ihrer Verschiedenheit in untergeordnete Gruppen geschieden und zu einem zusammenhängenden Gefüge verarbeitet werden können. Die Frage nach der Beschaffenheit eines solchen Gefüges hätte dann aber nur durch den Hinweis auf die Beschaffenheit der zusammengefassten Objecte ihre Erledigung finden können. Man hätte somit, da die Objecte im Gegebenen wurzeln und folglich ihre Kenntniss nur der Erfahrung entspringt, nichts weiter als eine empirische Kenntniss der logischen Ordnung erworben.

§ 2.

Die Folgen, die ein solches Vorgehen für die hier beabsichtigte Ableitung des Zahlbegriffs mit sich führen würde, lassen sich leicht übersehen. Ausgehend von dem logisch begründeten Zusammensein von Denkobjecten läge die Möglichkeit vor, die letzteren einerseits als gleichwerthig aufzufassen, andererseits in ihrer Verschiedenheit zu beachten. Im ersten Falle könnte bloß das Zusammensein als solches zur Begründung der Zahl herangezogen werden; denn das den Objecten zugewendete Interesse würde keine Gelegenheit finden, auf die Bethätigung des Denkens zu achten, die sich im reihenförmigen Erfassen jenes Zusammenseins kundgibt. Es bliebe daher nur der Ausweg offen, die Zahl als ein Merkmal eines solchen Zusammenseins, als eine mögliche Aussage von einem solchen, mithin als Anzahl, zu definiren, ohne dass der Process des Zählens berücksichtigt würde. Die Anzahlen müssten somit als Cardinalzahlen der ferneren Entwicklung zu Grunde gelegt werden. — Im letzteren Falle könnte bloß in den thatsächlich constatirten Abhängigkeiten zusammengehöriger Denkobjecte eine Unterlage gesucht werden, auf welcher die durch mathematische Operationen darstellbaren Beziehungen zwischen Zahlseinheiten festen Halt gewinnen. Man könnte jedoch lediglich das Vorhandensein geeigneter Abhängig-

keiten constatiren und darin einen glücklichen Zufall bezüglich des Zahlbegriffs erblicken. Denn so lange die Aufmerksamkeit den Objecten allein zugewendet ist, würde man nicht darauf achten, dass dieselben an und für sich in gar keiner Abhängigkeit stehen und dass sie bloß die empirischen Bedingungen für eine Bethätigung des Denkens darstellen, während es das Denken ist, das seiner Natur gemäß vom Grunde zur Folge fortschreitend jene Abhängigkeiten erst schafft. — In beiden Fällen würde man nur in soweit eine Begründung des Zahlbegriffs gewinnen, als das Getriebe des Denkens einerseits wohl definirte Mengen gleichwerthiger Objecte, andererseits Abhängigkeiten von Denkobjecten, die den mathematischen Operationen als Grundlage dienen können, zu Tage fördert.

Dies hätte zur Folge, dass eine Kluft entstehen würde zwischen der Zahl, insoweit sie als ein mathematisches Begriffsgebilde bloß formal existirt, und der Zahl, insofern sie in dem realen Leben des Denkens eine reale Gestalt gewinnt. Diese Kluft könnte sich verengern in dem Maße, als die Erfahrung mehr und mehr Gelegenheit gibt, die leeren mathematischen Schemata mit einem Inhalt zu füllen. So lange jedoch die Kluft besteht, könnte man versucht sein, die Erfüllbarkeit der formalen Schemata mit einem realen Inhalt als ein Postulat des Denkens hinzustellen, so dass die Möglichkeit ihrer völligen Beseitigung außer Zweifel stünde. Die Aufstellung eines Postulats enthielte aber schon das Zugeständniss, dass die Erfahrung allein zur Begründung des Zahlbegriffs nicht ausreiche, und dass die Natur des Denkens in Rechnung gezogen werden müsse; denn nur auf diese Weise kann ein Postulat als berechtigt erwiesen werden. Es wäre daher consequenter, wenn man jene Kluft einfach ignoriren und, unbekümmert um die mathematischen Begriffsgebilde, die Zahl nur insoweit anerkennen würde, als sie eine thatsächliche reale Grundlage besitzt und ihre Operationsgesetze erfahrungsgemäß bestätigt werden. Dann müsste z. B. selbst für die sogenannten positiven ganzen Zahlen, die der elementaren Arithmetik zu Grunde liegen, ein Bereich abgegrenzt werden, innerhalb dessen sowohl die Existenz der Zahlen als auch die Richtigkeit ihrer Operationsgesetze thatsächlich durch die Erfahrung verbürgt wären, und es bliebe dahingestellt, ob außerhalb

dieses Bereiches Zahlen überhaupt existiren und welchen Gesetzen sie gehorchen¹⁾.

Würde man also bloß in den Objecten des Denkens die Quelle der logischen Ordnung suchen und würde demzufolge bloß eine empirische Kenntniss der logischen Ordnung erworben, so könnte, wenn anders Inconsequenzen vermieden werden sollen, auch die Zahl und mit ihr die Wissenschaft von der Zahl nur auf die Erfahrung sich gründen.

Eine solche Begründungsweise würde, wie nebenbei bemerkt werden mag, ein interessantes Seitenstück zu der analogen Begründungsweise der Geometrie bilden, so dass keineswegs ohne weiteres, wie es vielfach geschieht, die Geometrie als »Erfahrungswissenschaft« in einen Gegensatz zu der »reinen Mathematik« der Zahl gesetzt werden darf. Es kann jedoch erst die Untersuchung der anschaulichen Ordnung entscheiden, ob die Auffassung der Geometrie als einer Erfahrungswissenschaft in ähnlicher Weise aus einer Beschränkung auf die empirischen Elemente der anschaulichen Ordnung folgt, wie dies soeben betreffs der arithmetischen Disciplinen und der logischen Ordnung sich ergab. Auch liegt die Hervorhebung einer derartigen Parallele zwischen den geometrischen und arithmetischen Disciplinen nicht im Plane der gegenwärtigen Untersuchung, in deren Interesse hier bloß eine Charakterisirung des in der logischen Ordnung gewonnenen Ausgangspunktes für die Untersuchung des Zahlbegriffs gegeben werden soll.

§ 3.

Zu diesem Zweck wurde hervorgehoben, dass man geneigt ist, zunächst in der Beschaffenheit der Denkobjecte die eigentliche Quelle der logischen Ordnung zu suchen. Diese Neigung ist darin begründet, dass es ein Denken ohne Objecte und dementsprechend ein logisches Ordnen ohne ein im Gegebenen wurzelndes, von der

1) Es läge dann der Fall vor, dass nicht bloß die indirecten Operationen der Subtraction und Division, sondern auch die directen Operationen der Addition und Multiplication bloß bedingter Weise ausführbar wären, nämlich nur dann, wenn durch die Ergebnisse der Operationen Glieder des abgegrenzten Zahlenbereichs dargestellt würden.

Erfahrung dargebotenes Material nicht gibt. Darum stellt auch die so resultirende Erkenntniß, trotz ihrer empirischen Natur, einen unentbehrlichen Bestandtheil der Untersuchung des Zahlbegriffs dar, eben weil sie dessen empirische Unterlage klarlegt. Auch wäre es unmöglich, darüber hinaus zu gehen, und es müsste thatsächlich jede Begriffsbildung, die einer solchen Fundamentirung nicht theilhaftig werden kann, als ein leeres Phantasiegebilde verworfen werden, wenn wirklich die Beschaffenheit der Denkobjecte allein bei der Erzeugung der logischen Ordnung in Betracht käme. Dem ist aber nicht so. Denn es ist nicht nur Thatsache, dass es ein Denken ohne Objecte nicht gibt; es ist in gleicher Weise Thatsache, dass die Objecte nur existiren, insofern sie gedacht werden.

Damit soll nicht gesagt sein, dass es überhaupt nicht thunlich sei, die Denkobjecte und die Denkhätigkeiten von einander zu trennen und zu verselbständigen. Es geschieht dies ja thatsächlich. Beispielsweise beruhte die frühere Feststellung des Gegebenen auf der Möglichkeit dies zu thun. Dort wurde jedoch zugleich bemerkt, dass die Thätigkeiten und die Objecte des Denkens nichts als Abstractionen sind, so dass es nicht gestattet ist, die factische Abhängigkeit der einen von den andern zu ignoriren. Das Bestehen einer solchen Abhängigkeit hat aber zur Folge, dass die logische Ordnung wesentlich durch die Natur des Denkens bedingt ist.

Aus diesem Grunde musste die Reflexion als Begleiterin des zur logischen Ordnung führenden Denkprocesses die Art und Weise der Bethätigung des Denkens beachten. Dadurch wurde der Denkprocess selbst und dessen Ergebniss in keiner Weise verändert; nur die Formen, an die das Denken gebunden ist, werden hervorgehoben. Sie ergaben sich als Bethätigungen des Denkens, durch welche einestheils das Zusammensein von Bewusstseinsinhalten im Bewusstsein in Form einer Reihe, andernteils die Verschiedenheit zusammengefasster Bewusstseinsinhalte in Form von Beziehungen des Grundes zur Folge erfasst wird.

Diese Denkformen wurden nun aber nicht deshalb aufgesucht, um in ihnen neue, selbständige Untersuchungsobjecte zu gewinnen. Sie können zwar mit dem nämlichen Rechte wie das Gegebene verselbständigt und als Objecte des über die möglichen Formen seiner Thätigkeit reflectirenden Denkens untersucht werden. Es kann

auch ein Bedürfniss nach einer solchen Untersuchung thatsächlich entstehen, da die Bewegung des Denkens an und für sich, ohne Rücksicht auf die verarbeiteten Objecte und die resultirenden Producte, ein unabweisbares Interesse erregt. Und wollte man hier diesem Bedürfnisse entsprechen, so müsste ohne Zweifel die Erkenntniss, dass das Denken seiner Natur nach reihenförmig ein Zusammensein erfasst und das Zusammengefasste nach Grund und Folge verkettet, als Ausgangspunkt gewählt werden¹⁾).

Indessen wird im vorliegenden Falle ein solches Bedürfniss nicht empfunden. Es war ja die Reflexion nicht um ihrer selbst willen, sondern bloß als Mittel, das Begreifen der logischen Ordnung zu ermöglichen, nöthig geworden. Auch konnte man gar nicht versucht sein den Denkformen als solchen eine selbständige Bedeutung beizumessen, da man von vornherein darauf angewiesen war, die der Reflexion entspringende Einsicht zu benutzen, um den Einfluss der Formen des Denkens auf den Charakter der logischen Ordnung festzustellen.

Hierzu bedurfte man der Erkenntniss, dass die Denkformen eine Quelle für Merkmale und Beziehungen sind, die an den Denkobjecten zu Tage treten, ohne durch deren Beschaffenheit bedingt zu sein. In Uebereinstimmung damit beachtete man, dass das reihenförmige Erfassen eines Zusammenseins von Bewusstseinsinhalten den zusammengefassten Objecten Merkmale aufprägt, die nicht den Objecten an sich zugehören, sondern der zusammenfassenden Thätigkeit des Denkens als Merkmale der Reihenform entspringen. In gleicher Weise bemerkte man, dass das Erfassen der Verschiedenheit zusammengefasster Bewusstseinsinhalte den letzteren Beziehungen anheftet, die weder dem einen noch dem anderen Object an sich zugehören, sondern durch das Denken als Beziehungen des Grundes zur Folge geschaffen werden.

Es erweiterte sich so der anfänglich auf die Betrachtung des bearbeiteten Materials eingeschränkte Gesichtskreis, und man konnte

1) Da eine solche Untersuchung dem Gebiet der formalen Logik angehört, als deren Untersuchungsgegenstand die als Begriff, Urtheil und Schluss unterschiedenen Denkformen bezeichnet zu werden pflegen, so müsste alsdann auch erörtert werden, in welchem Zusammenhange die letzteren mit den hier hervorgehobenen Denkformen stehen.

die auf der empirischen Beschaffenheit des Geordneten beruhenden Elemente von den in der Natur des Denkens begründeten Elementen scheiden und in den letzteren das Wesen der logischen Ordnung erkennen, die der ersteren nur bedarf, um in die Erscheinung zu treten.

Die Bedeutung der hervorgehobenen Denkformen besteht demnach darin, dass sie Principien des logischen Ordners sind. Dabei ist die in Mathematik und Philosophie mannigfachen Schwankungen unterworfenen Bezeichnung als Princip in dem Sinne zu verstehen, dass die treibende Kraft für die Erzeugung der logischen Ordnung in den als Bethätigungsweisen des Denkens aufzufassenden Denkformen ruht. Diese Formen sind somit thatsächlich »Anfänge« des logischen Ordners, und man kann sagen, dass sie die logische Ordnung in virtueller Form darstellen und den actualen Ausgestaltungen derselben das charakteristische Gepräge aufdrücken.

So ist denn für die logische Ordnung sowohl das im Gegebenen wurzelnde Material des Denkens als auch die an bestimmte Formen gebundene Thätigkeit des Denkens unentbehrlich. Indem aber in den Merkmalen der Reihenform und in den Beziehungen des Grundes zur Folge der Kern der logischen Ordnung gefunden wird, tritt naturgemäß das Interesse an der Wirkungsweise der Denkformen in den Vordergrund, und man empfindet die Beschaffenheit der geordneten Objecte, welche zwar eine Bethätigung des Denkens erst ermöglicht, dieselbe aber zugleich in jedes Mal individuell bestimmter, von Fall zu Fall wechselnder Weise beeinflusst, als eine Zufälligkeit und Beschränkung.

§ 4.

Darin liegt der Grund dafür, dass im Anschluss an die aus der Untersuchung über »die logische Ordnung und die Zahl« resultirende Charakterisirung der logischen Ordnung das Bedürfniss sich regte, die in den Denkformen erkannten Principien des logischen Ordners zu einer vollendeten Entwicklung zu bringen. Dies hatte weiterhin zur Folge, dass die beiden Probleme erstanden, durch welche die aller Zufälligkeit und Beschränkung entkleideten Producte der Denkformen, die in der mit den Merkmalen der Reihenform behafteten

Normalreihe und in den Beziehungen des Grundes zur Folge vorliegen, zum Gegenstande besonderer Untersuchung gemacht werden sollen.

Die Erkenntniss, dass die Denkformen Principien des logischen Ordens sind, ermöglicht somit nicht nur das Begreifen der logischen Ordnung, sie führt vielmehr über dieses anfänglich gesetzte Ziel hinaus und eröffnet ein neues Forschungsgebiet, dessen Eigenart nunmehr klargestellt werden soll.

Da die durch die Denkformen erzeugten Merkmale und Beziehungen den Gegenstand der Untersuchung bilden sollen, so ist es selbstverständlich, dass ein Erforschen der Denkformen als solcher, wie sie als Aufgabe der formalen Logik bezeichnet wird, nicht zum Ziele führt. Es scheidet sich folglich das in Frage stehende Untersuchungsgebiet von demjenigen der formalen Logik.

Wenn nun aber die Objecte unentbehrlich sind, da nur an ihnen das Denken jene Merkmale und Beziehungen erzeugen kann, so ist zu beachten, dass die Objecte auch die Schranken setzen, die beseitigt werden sollen. Die hieraus erwachsende Schwierigkeit könnte dazu verleiten, in abgeblassten Schattenbildern, denen eine bestimmte, das Denken beeinflussende Qualität abgeht, das zur Aufnahme der Spuren des Denkens geeignete Material zu suchen. Man würde jedoch in derartigen Denkobjecten, die existiren sollen, ohne doch in bestimmter Weise zu existiren, nur die Ebenbilder der früher üblichen abstracten Begriffsvorstellungen oder abstracten Ideen finden, deren haltlose Scheinexistenz schon Berkeley¹⁾ zur Genüge aufgedeckt hat.

Es können daher die Objecte nur so, wie sie wirklich im Bewusstsein vorhanden sind, der Bethätigung des Denkens zu Grunde gelegt werden. Daraus folgt, dass die hier beabsichtigten Untersuchungen nicht auf die individuelle Beschaffenheit der Denkobjecte sich stützen dürfen. Denn sobald dieselbe in Betracht gezogen wird, setzt sie auch der Thätigkeit des Denkens Ziel und Grenzen, und eine Beseitigung der empfundenen Schranken ist unmöglich. Man würde daher das hier verfolgte Ziel nicht erreichen, wollte man erforschen, wie das Denken dies oder jenes irgendwie bestimmte

1) Ueber die Principien der menschlichen Erkenntnis: Einleitung.

Zusammensein von Objecten und die so oder anders gestalteten Verschiedenheiten zusammengefasster Objecte bearbeitet, um eine in der Beschaffenheit der Objecte begründete Erkenntniss zu gewinnen. Demzufolge scheidet sich das fragliche Forschungsgebiet auch von den auf die Erkenntniss der Objecte selbst abzielenden Untersuchungen, die gemäß der hier zu Grunde liegenden Auffassungsweise des Gegebenen als wesentlich psychologische Untersuchungen zu bezeichnen wären.

Wenn nun somit die Objecte einestheils unentbehrlich sind, andernteils ihre individuelle Beschaffenheit nicht verleugnen können und trotzdem der Denkhätigkeit keine einschränkenden Bedingungen auferlegen dürfen, so bleibt bloß übrig, das Vorhandensein der Objecte im Bewusstsein als Unterlage für die Bethätigung des Denkens vorauszusetzen. Man verlangt damit nichts Unmögliches. Denn die lebensvolle Wirklichkeit soll den Objecten nicht verloren gehen, sie soll nur nicht beachtet werden. So haben ja die Objecte außer der durch die Apperception hervorgehobenen Qualität noch unaufhebbare Beziehungen zum Gesamttinhalt des Bewusstseins, auf welche die anschauliche Ordnung im Raume und in der Zeit sich gründet; dennoch ist es möglich, die stets vorhandene anschauliche Ordnung unerörtert zu lassen und, bloß auf die Qualität der Bewusstseinsinhalte als appercipirter Denkobjecte gestützt, das Entstehen der logischen Ordnung zu betrachten. Mit dem nämlichen Recht kann man auch die stets vorhandene individuelle Beschaffenheit der Objecte unbeachtet lassen und lediglich den durch das Vorhandensein der Objecte ausgelösten Denkprocess verfolgen.

Damit betritt man das in Erörterung stehende Untersuchungsgebiet, das nun auch in positiver Weise charakterisirt werden kann, nachdem es bereits negativ bestimmt und als nicht zur formalen Logik und Psychologie gehörig erkannt worden.

Da man es dahingestellt sein lässt, welcher Art die Objecte sind und wie ihre Besonderheiten das Denken anzuregen und zu leiten vermögen, so kann die hier zum Gegenstande der Untersuchung gemachte Bethätigung des Denkens, ohne durch die Objecte gehemmt zu werden, in den ihm eigenthümlichen Formen sich vollziehen. Es haben ja die Objecte von vornherein noch gar keine bestimmte Bedeutung und gewinnen eine solche erst dadurch, dass sie mit den

durch das Denken erzeugten Merkmalen und Beziehungen behaftet werden.

An Stelle der Beschaffenheit der Objecte tritt jedoch das Vorhandensein der Objecte im Bewusstsein als Unterlage der Denktätigkeit. Die der Untersuchung zu Grunde liegenden Thatsachen bestehen sonach einestheils darin, dass Bewusstseinsinhalte im Bewusstsein vorhanden sind und, da sie anders nicht vorhanden sein können, von einander verschieden sind; andertheils darin, dass das Denken in dem Erfassen des Vorhandenseins und in dem Erfassen der Verschiedenheiten der Objecte sich bethätigt, und zwar im ersteren Fall in Folge des reihenförmigen Fortschreitens von einem Apperceptionsakt zum anderen die Merkmale der Reihenform, im letzteren Fall in Folge des logisch begründenden Fortschreitens die Beziehungen des Grundes zur Folge erzeugt.

Daraus erwächst nun die Aufgabe, das in solcher Weise sich bethätigende Denken zum Gegenstand der Reflexion zu machen, und man gelangt so zur Stellung der beiden bereits erwähnten Probleme, welche von den Merkmalen der Reihenform und von den Beziehungen des Grundes zur Folge zu handeln haben. Ihre Charakterisirung erhalten sie aber in gemeinsamer Weise dadurch, dass sie die Art und Weise, in welcher ein Vorhandensein von Bewusstseinsinhalten im Bewusstsein der Reflexion als möglich sich darstellt, zu erörtern haben. Denn daraus erhellt, dass die Beschaffenheit des Bewusstseins als des Trägers seiner Inhalte die Bethätigung des Denkens Bedingungen unterwirft, die unauflösbar und nothwendig sind, eben weil sie von der Natur des Bewusstseins abhängen.

Die auf dem hervorgehobenen Thatsachenmaterial beruhende Untersuchung kann somit als eine Untersuchung der Natur des Bewusstseins, und zwar, da die anschauliche Ordnung unbeachtet bleibt und die Bewusstseinsinhalte lediglich als apperzipirte Denkobjecte, behaftet mit den durch das Denken geschaffenen Merkmalen und Beziehungen in Betracht kommen, als eine Untersuchung der logischen Natur des Bewusstseins bezeichnet werden.

Das so charakterisirte Untersuchungsgebiet ist ein integrierender Bestandtheil der Erkenntnistheorie. Denn es ist nicht zu umgehen,

den Antheil der Denkformen an der Gestalt unserer Erkenntnisse hervorzuheben und weiterhin die durch die Natur des Bewusstseins bedingte Bethätigung des Denkens zu untersuchen, wenn es sich um die Erörterung der Grundlagen, des Werdens und der Ziele des Erkennens handelt. Im Zusammenhang mit den umfassenden Problemen der Erkenntnistheorie dienen jedoch solche Untersuchungen bloß als Hilfsmittel, während die in den Natur- und Geisteswissenschaften gebotene Erkenntnis das wesentliche Interesse beansprucht. Die letztere ist jedoch im vorliegenden Fall ohne Interesse; denn das Gegebene wurde als bloßes Erlebniss ohne Beurtheilung seiner Herkunft zu Grunde gelegt, und das Denken soll sich in der Bearbeitung der Bewusstseinsinhalte bethätigen, ohne durch hypothetische Ergänzungen eine wahre oder vermeintliche Erkenntnis des Ichs und der Welt erreichen zu wollen.

In Folge dessen stellt sich das hier in seiner Eigenart erörterte Forschungsgebiet als ein wohl umgrenztes, selbständiges Gebiet der Erkenntnistheorie dar. Es verlangt daher eine besondere Bearbeitung, die um ihrer selbst willen und nicht wegen ihrer Bedeutung für andere Gebiete zu leisten ist. Eine solche soll nun im Folgenden versucht werden.

§ 5.

Das Denken, wie es sich auf Grund des Vorhandenseins von Bewusstseinsinhalten im Bewusstsein als reihenförmiges Fortschreiten von einem Apperceptionsakt zum anderen bethätigt, soll zunächst den Gegenstand der Reflexion bilden.

Man muss daher vor allem ein deutliches Bewusstsein von diesem Denkprocess zu erlangen suchen. Dies erreicht man, wenn man jedes einzelnen Apperceptionsaktes, unterschieden von jedem anderen, und damit auch jedes Uebergangs von dem einen zum anderen, unterschieden von jedem anderen, bewusst wird.

Es bestehen nun die Apperceptionsakte, an und für sich betrachtet, in der Wiederholung eines und desselben Processes. Hinsichtlich der Denktätigkeit, auf der sie beruhen, sind sie daher nicht unterscheidbar, sondern völlig gleichwerthig. Es kann jedoch jeder einzelne Apperceptionsakt durch die individuelle Beschaffenheit

des appercipirten Objects ein Erkennungszeichen erhalten. Alsdann wird das Appercipiren des Objects *a* als Apperceptionsakt *a* und das Appercipiren des Objects *b* als Apperceptionsakt *b*, und so weiter zu bezeichnen sein, so dass auch der Uebergang von einem Apperceptionsakt zum anderen durch den Wechsel der appercipirten Objecte gekennzeichnet wird.

Es kann sich jedoch das Bedenken regen, ob wirklich jeder beliebige Apperceptionsakt durch das appercipirte Object bestimmt werden kann. Man kann ja ein und dasselbe Object in mehrfacher Auflage im Bewusstsein voraussetzen oder zu wiederholten Malen als Gegenstand der Apperception annehmen. Dann würden verschiedenen Apperceptionsakten Objecte mit der nämlichen Qualität zu Grunde liegen, so dass sie keine unterscheidende Merkmale liefern zu können scheinen. Wenn aber auch die Qualität die nämliche ist, so müssen sich die Objecte immerhin in verschiedener räumlicher Lage befinden, oder es muss ein und dasselbe Object zu verschiedenen Zeiten existirend vorausgesetzt werden. Man hat daher nur nöthig, auch die räumliche Lage und die Zeit des Existirens als zur Individualität der Objecte gehörig anzusehen, um selbst bei sonst gleicher Qualität die Objecte selbst zu Merkzeichen der Apperceptionsakte machen zu können.

Wenn also die appercipirten Objecte mindestens bezüglich ihrer räumlichen Lage oder der Zeit ihres Existirens verschieden sein müssen, falls sie sonst in jeder Hinsicht übereinstimmen, so zeigt sich mit voller Deutlichkeit, dass sie thatsächlich verschieden sein müssen, wenn sie überhaupt im Bewusstsein vorhanden sein sollen. Verschiedene Apperceptionsakte beziehen sich daher stets auf verschiedene Objecte und können durch die letzteren charakterisirt werden.

Dabei kommt lediglich die Thatsache, dass Verschiedenheiten vorhanden sind, in Betracht, nicht aber die Art der Verschiedenheit. Man würde daher gar nichts gewinnen, sondern bloß Zufälligkeiten in den Vordergrund stellen, wollte man insbesondere in räumlichen oder zeitlichen Verschiedenheiten der Objecte die Merkzeichen der Apperceptionsakte suchen. Andererseits ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn die Umstände des Raumes und der Zeit ganz bei Seite gelassen werden, da principiell

die anschauliche Ordnung der Objecte nicht in Betracht kommen soll, und wenn der Einfachheit wegen die Objecte mit specifisch psychologischen Qualitäten behaftet vorausgesetzt werden.

Werden nun in dieser Weise die einzelnen Apperceptionsakte kenntlich gemacht, so kann auch ihre Aneinanderreihung bewusster Weise erfasst werden. Zwar ist — was nicht außer Acht gelassen werden darf — bezüglich der Denkhätigkeit sowohl jedes Glied der Reihe als auch jedes Fortschreiten von einem Gliede zum folgenden gleichwerthig mit jedem anderen. Aber mit Rücksicht auf die appercipirten Objecte ist jedes Glied und ebenso jedes Fortschreiten ein individuelles Glied und ein individuelles Fortschreiten, das dem Gedächtniss eingepägt und so festgehalten werden kann. In Folge dessen kann nunmehr jedem einzelnen Gliede die Bedeutung zuertheilt werden, den Uebergang von einem vorhergehenden zu einem nachfolgenden zu vermitteln. Die appercipirten Objecte dienen dann als Träger der Merkmale der Reihenform und ordnen sich zu einer gedächtnissmäßig fixirten Reihe im Bewusstsein zusammen, in welcher der Zusammenhang der Denkkakte erfasst und festgehalten wird.

Diese Reihe wurde schon im Anschluss an die Charakterisirung der logischen Ordnung gewonnen, als es sich darum handelte, an den Producten der logisch ordnenden Denkhätigkeit bloß die im reihenförmig fortschreitenden Denken begründeten Merkmale hervortreten zu lassen. Sie ist daher, im Einklang mit den an jener Stelle gemachten Festsetzungen, als Normalreihe zu bezeichnen. Dort ergab sie sich jedoch durch einen Abstractionsprocess, der auf Grund wiederholter Bethätigung des Denkens im Aneinanderreihen zusammengehöriger Objecte zu einer Verselbständigung der Merkmale der Reihenform in der Normalreihe führte. Hier gelangt man dagegen unmittelbar zu ihr, da der Denkprocess selbst zum directen Gegenstand der Reflexion gemacht wird und die Normalreihe als objectives Bild des reihenförmig fortschreitenden Denkens sich darstellt, das nur den Zweck hat, eine erfassbare und fixirbare Darstellung des im Entstehen sofort wieder sich verflüchtigenden Denkprocesses zu liefern. Es zeigt sich so, dass die Reflexion über die Reihenform des Denkens mit Nothwendigkeit zur Normalreihe führt.

Es ergibt sich aber auch zugleich, dass die Bedeutung und das Wesen der Normalreihe lediglich auf dem Denkprocess beruht, der auf diese Weise eine objective Darstellung findet. Daraus folgt, dass die wesentlichen Eigenschaften der Normalreihe durch die Natur des Denkens bedingt sind, und dass die Normalreihe alle Eigenschaften besitzen muss, welche die Reihenform des Denkens als Gegenstand der Reflexion auszeichnen. Man muss daher zunächst jene Eigenschaften angeben, um so eine Kenntniss der Forderungen oder Axiome zu gewinnen, die von der Normalreihe erfüllt werden müssen, falls sie ein vollkommenes Ebenbild der Reihenform des Denkens darstellen soll. Dann erst kann es entschieden werden, ob und in welcher Weise die Normalreihe auf Grund des Vorhandenseins von Bewusstseinsinhalten im Bewusstsein in der erforderlichen Ausgestaltung thatsächlich erzeugt und festgehalten werden kann.

§ 6.

Die Eigenschaften der Normalreihe beruhen nun einestheils darauf, dass es überhaupt eine Form des Denkens ist, die ihre objective Darstellung finden soll, andertheils darauf, dass es insbesondere um das reihenförmig fortschreitende Denken sich handelt.

Weil die Normalreihe in einer Denkform ihre Quelle hat, so ist sie kein Phantasiegebilde, das einer Laune oder einem zufällig vorhandenen praktischen Bedürfnisse seine Entstehung verdankt. Sie ist vielmehr in der Natur des Denkens begründet und muss sich folglich in jedem Bewusstsein entwickeln, sobald die Denkform zum Gegenstande der Reflexion gemacht wird. Sie trägt daher den Charakter der Nothwendigkeit und allgemeinen Gültigkeit. Da überdies jene Denkform nicht als eine Specialisirung allgemeinerer Formen sich ergab, sondern in ihr ein elementares und fundamentales Princip des logischen Ordners¹⁾ erkannt wurde, so kann auch die Normalreihe nicht als eine Specialisirung allgemeinerer Reihen, sondern nur als Objectivirung der Reihenbildung überhaupt gewonnen werden. Sie ist daher einzig in ihrer

1) Vergl. die vorhergehende Untersuchung: »Die logische Ordnung und die Zahl« § 5.

Art und das unaufhebbare Fundament jeglicher Reihenbildung.

Auf Grund der angegebenen Eigenschaften erhellt jedoch bloß der wissenschaftliche Charakter der Normalreihe im allgemeinen, während ihre besonderen Eigenschaften, durch welche sie von den Ausgestaltungen anderer Denkformen unterscheidbar wird, naturgemäß nur auf den Besonderheiten, die das reihenförmige Fortschreiten von einem Apperceptionsakt zum anderen bedingt, beruhen können.

Diese Besonderheiten bestehen wesentlich darin, dass in dem Aneinanderreihen von Apperceptionsakten eine und dieselbe Denkhätigkeit sich wiederholt, die durch das Vorhandensein von Bewusstseinsinhalten im Bewusstsein geweckt wird.

Da die Denkhätigkeit geweckt wird, so kann sie nicht als schlechthin existirend gedacht werden, sie muss vielmehr einen Anfang haben. Die Normalreihe muss daher mit einem Gliede — dem Anfangsgliede — beginnen.

Zu einem Aufhören der einmal begonnenen Denkhätigkeit liegt jedoch kein Grund vor. Ein solcher wäre nur dann vorhanden, wenn es sich um das Erfassen eines irgendwie bestimmten und darum auch begrenzten Systems von Bewusstseinsinhalten handeln würde. Es wird jedoch nicht die eine oder die andere Art von Bewusstseinsinhalten, sondern das Vorhandensein von Bewusstseinsinhalten als solches zu Grunde gelegt, und dies erweist sich der Reflexion als ebenso unbegrenzt und unendlich wie das Bewusstsein selbst. Die Normalreihe muss daher ohne Ende fortsetzbar gedacht werden.

Da ferner die Wiederholung ein und derselben Denkhätigkeit die ganze Reihe erzeugt, so sind alle Glieder gleichwerthig, insofern ein jedes derselben einem Apperceptionsakt sein Dasein verdankt. Es ist auch der Zusammenhang der Glieder allenthalben von gleicher Art, insofern jedes Glied in gleicher Weise wie jedes andere die Voraussetzung für das Fortschreiten zum folgenden bildet und — mit alleiniger Ausnahme des Anfangsgliedes — die Folge des vorhergehenden ist. Die Normalreihe muss daher als gleichartig oder homogen gedacht werden, so dass sie außer dem Anfangsglied kein ausgezeichnetes Glied besitzt.

Die Ausnahmestellung des Anfangsgliedes besteht jedoch nur darin, dass es den Ausgangspunkt für die thatsächliche Erzeugung der Normalreihe bildet. Wird aber die Reihe als bereits erzeugt gedacht, so kann an Stelle des Anfangsgliedes jedes andere Glied den Ausgangspunkt zur Reproduction der Normalreihe bilden. Denn in Folge des Zusammenhangs der unmittelbar verbundenen Glieder stehen auch die getrennten Glieder in einem durch die trennenden Glieder vermittelten Zusammenhang. Es ist folglich möglich, von jedem beliebigen Gliede zu jedem anderen vorhergehenden oder nachfolgenden Gliede entweder unmittelbar oder mittelbar überzugehen, so dass das Erfassen eines beliebigen Gliedes der Reihe das Erfassen aller Glieder nach sich zu ziehen vermag. Jedes einzelne Glied der Normalreihe involvirt daher die ganze Normalreihe.

Die Normalreihe in ihrer vollendeten Form muss somit eine vom Anfangsgliede aus ohne Ende fortlaufende, von jedem einzelnen Gliede aus reproducirbare, homogene Reihe von Bewusstseinsinhalten sein, die nicht eine Reihe neben anderen Reihen, sondern die einzigartige Grundreihe als die nothwendige und allgemeingültige Objectivirung der Reihenform des Denkens darstellt.

§ 7.

Fragt man nunmehr, ob und in welcher Weise die mit diesen Eigenschaften ausgestattete Normalreihe eine wirkliche Gestalt gewinnen kann, so muss die Möglichkeit ihrer Ausgestaltung von vornherein zugestanden werden. Denn man kann jedem einzelnen Apperceptionsakt das appercipirte Object als Merkzeichen zuordnen und so die Apperceptionsakte und das Fortschreiten von jedem einzelnen zum folgenden individualisiren.

Die Beschaffenheit der Objecte ist dabei ohne Einfluss. Sie dient ja nur zur Bezeichnung der Stelle innerhalb der Reihe, so dass es nur darauf ankommt, dass die Objecte in Folge ihrer Beschaffenheit unterscheidbar sind, nicht aber darauf, wie sie beschaffen sind. An und für sich kann daher jedes individuelle Object so gut wie jedes andere eine Stelle in der Reihe markiren, und wenn zu diesem Zweck insbesondere Wörter oder Schriftzeichen gewählt

werden, so veranlassen dies bloß praktische Rücksichten, die durch den auf Sprache und Schrift gegründeten Verkehr innerhalb der menschlichen Gesellschaft geboten sind. Es beeinträchtigt ferner das Zufällige in der Beschaffenheit der Reihenglieder nicht den fundamentalen Charakter der Reihe. Denn wenn auch eine Stelle in der Reihe ebensowohl durch diesen wie durch jenen Bewusstseinsinhalt markirt werden kann, so ist es doch immer die nämliche Stelle, die nur auf verschiedene Art markirt wird, und es entsteht daher auch immer die nämliche Reihe, wie auch die Bewusstseinsinhalte beschaffen sein mögen, die zur Bezeichnung der Reihenglieder verwendet werden. Es ist ja immer und überall die nämliche Form des Denkens, die ihr objectives Bild erhält.

Die Beschaffenheit des vorhandenen Materials kann somit die Erzeugung der Normalreihe nicht hindern, aber ebenso wenig kann ein Mangel an Material dem Aufbau der Reihe Schranken setzen. Es ist zwar jedes erlebte oder durch das Denken producirt vorhandensein von Bewusstseinsinhalten naturgemäß endlich und begrenzt, so dass man beim Erfassen desselben nothwendig zu Ende kommt. Demzufolge ist allerdings auch jede thatsächlich, Glied für Glied erzeugte Reihe von Bewusstseinsinhalten nicht bloß durch ein Anfangsglied, sondern auch durch ein Endglied ausgezeichnet. Dies ist aber selbstverständlich. Ist doch auch jedes thatsächlich vollführte Aneinanderreihen von Denkakten durch Anfang und Ende begrenzt. Hier handelt es sich jedoch nicht um die Betrachtung eines zu Ende geführten Denkprocesses, sondern um die Reflexion über die Ausführung desselben. Da es nun unmöglich ist, einen letzten Denkakt anzunehmen, auf den keiner mehr folgen kann, so ist es auch unmöglich, die Normalreihe, als das Bild des Denkprocesses, mit einem Endgliede zu denken, dem kein weiteres Glied sich anschließen kann. Dies hat jedoch nur zur Folge, dass die Normalreihe als eine in's Endlose fortsetzbare, nicht aber als eine in's Endlose fortgesetzte Reihe gedacht werden muss. Man bedarf daher nur der Möglichkeit, stets andere und andere Objecte in unerschöpflicher Folge zu Trägern der Merkmale der Reihenform machen zu können. Daran kann man aber nicht gehindert werden, da in Folge der Erfahrung und des Denkens ein stets neuer Vorrath von Bewusstseinsinhalten im Bewusstsein zur

Verfügung steht. So ist z. B. schon die Möglichkeit der Zusammensetzung von Lauten zu Wörtern und die Herstellung von Schriftzeichen eine unbegrenzte.

Wenn somit die Ausgestaltbarkeit der Normalreihe nicht bezweifelt werden kann, so scheint dagegen das Festhalten derselben schlechterdings unmöglich zu sein. Denn man kann die Reihe doch nur gedächtnismäßig festhalten, da der Zusammenhang zwischen der Beschaffenheit der Reihenglieder und der durch dieselben markierten Stellen in der Reihe nicht durch das Denken begründet, sondern an und für sich willkürlich ist. Das Gedächtniss kann aber die Reihe nur, soweit sie thatsächlich Glied für Glied erzeugt ist, festhalten und ist dabei überdies Schranken unterworfen, die es hindern, mit der Erzeugung der Reihe Schritt zu halten. Man ist daher nicht einmal im Stande, die Folge der Reihenglieder, soweit sie als thatsächlich im Bewusstsein vorliegend gedacht werden kann, zu fixiren; noch weniger vermag man dies bezüglich der unbegrenzten Reihe, da dies die doppelte Unmöglichkeit bedingen würde: einmal die Fortsetzung der Reihe ins Unbegrenzte als eine vollendete Thatsache anzunehmen, sodann die endlose Folge der Reihenglieder im Gedächtniss aufzubewahren.

Es ist folglich unmöglich, die Normalreihe dadurch herzustellen, dass jedem Gliede willkürlich ein irgendwie bestimmter individueller Bewusstseinsinhalt zugeordnet und diese Zuordnung durch das Gedächtniss fixirt wird. Vielmehr muss betont werden, dass auf diese Weise nur ein Anfang der Normalreihe gewonnen wird, der zwar je nach der vorhandenen Stärke des Gedächtnisses mehr oder minder weit sich erstrecken kann, der aber jedenfalls mit irgend einem Gliede abbrechen muss.

Daraus folgt jedoch nicht, dass die Herstellung der Normalreihe überhaupt unmöglich ist. Es zeigt sich nur, dass dieselbe ein noch ungelöstes Problem darstellt, zu dessen Lösung ein Mittel gefunden werden muss, um die durch die Natur des Gedächtnisses gezogenen Schranken zu überwinden.

§ 8.

Zu diesem Zweck muss eine gedächtnismäßig fixirte Folge von Bewusstseinsinhalten zu Grunde gelegt werden. Denn es können

nun einmal die an sich nicht unterscheidbaren Apperceptionsakte nur durch die Zuordnung von willkürlich, aber bestimmt gewählten Bewusstseinsinhalten unterscheidbar gemacht und in ihrer Aufeinanderfolge nur durch das Gedächtniss festgehalten werden. Man würde nichts gewinnen, wollte man neben der einen noch andere Reihen voraussetzen; denn sie alle würden sich zu einer einzigen Reihe zusammenschließen, die nur von vornherein in bestimmte Abtheilungen zerlegt wäre. Es wäre daher auch zwecklos, die Reihe erweitern zu wollen, sobald man mit ihr zu Ende gekommen ist; denn eine in's Endlose gehende Erweiterung ist unmöglich, es muss vielmehr auch die erweiterte Reihe ein Endglied haben. Demgemäß kann nur eine, übrigens ganz beliebige Reihe von Bewusstseinsinhalten zu Grunde gelegt werden, deren Bedeutung sich darin erschöpft, dass man von einem Anfangsgliede a zu einem Gliede b und von diesem zu einem Gliede c u. s. w. übergehen kann, um schließlich bei einem Endgliede d anzulangen. Die Allgemeinheit der Untersuchung wird daher in keiner Weise beeinträchtigt, wenn man der Einfachheit wegen auf die Buchstabenfolge a, b, c, d sich beschränkt. Sie muss genügen, um jede Stelle der Normalreihe in ganz bestimmter Weise zu markiren, soll anders das Problem der Normalreihe lösbar sein.

Ist nun diese Folge von Buchstaben zur Kennzeichnung von Stellen der Normalreihe aufgebraucht, so kann sie nur von neuem, und zwar in der nämlichen Weise durchlaufen werden. Denn das Hinzufügen anderer Buchstaben in bestimmter Folge oder das Wiederholen der nämlichen Buchstaben in veränderter Folge wäre gleichbedeutend mit der Voraussetzung einer anderen Reihe, die in gleicher Weise ein Anfangs- und Endglied haben müsste. Es resultirt somit zunächst, dass die Reihe a, b, c, d in fortgesetzter Wiederholung zum Markiren der Stellen der Normalreihe benutzt werden muss.

Damit ist indessen das erstrebte Ziel noch nicht erreicht. Denn das wiederholte Durchlaufen der zu Grunde gelegten Buchstabenfolge führt dazu, einen und denselben Buchstaben immer wieder zur Kennzeichnung von Stellen der Normalreihe zu verwenden, während doch ein Mittel gesucht wird, um jedes Glied der Normalreihe in eindeutig bestimmter Weise zu charakterisiren. Man findet

dasselbe, wenn man in Erwägung zieht, dass mit Rücksicht auf die homogene Natur der Normalreihe jeder wiederkehrende Buchstabe *a* oder *b* oder *c* oder *d* stets die nämliche Bedeutung hat, und dass demzufolge die ins Endlose gehende Aneinanderreihung der Buchstabenfolgen *a, b, c, d* ganz ebenso wie das Aneinanderreihen der Apperceptionsakte selbst der Wiederholung ein und desselben Denkprocesses entspringt. Das gesuchte Mittel besteht demgemäß darin, dass man die aneinander gereihten Buchstabenfolgen in eben derselben Weise zum Gegenstand der Reflexion macht, wie es betreffs der aneinander gereihten Apperceptionsakte bereits geschehen ist.

Die nämlichen Ueberlegungen, die für die letzteren Geltung haben, treten alsdann auch für die ersteren in Kraft. Die Buchstabenfolgen erweisen sich bezüglich der Denkhätigkeit, der sie ihr Dasein im Bewusstsein verdanken, als gleichwerthig und sind an und für sich nicht unterscheidbar; sie können jedoch ebenso wie die Apperceptionsakte durch Zuordnung von willkürlich aber bestimmt gewählten Bewusstseinsinhalten individualisirt und in ihrer Aufeinanderfolge durch das Gedächtniss festgehalten werden. Es muss daher wiederum eine gedächtnismäßig fixirte Folge von Bewusstseinsinhalten zu Grunde gelegt werden, um die einzelnen Buchstabenfolgen in ihrer Aneinanderreihung zu charakterisiren. Da dieselbe den nämlichen Bedingungen unterworfen ist wie die bereits benutzte Reihe der Buchstaben *a, b, c, d*, so ist es das Einfachste, eben diese Reihe zur Charakterisirung der Buchstabenfolgen zu verwenden.

Man erhält somit vorerst folgendes Schema zum Markiren der Stellen der Normalreihe:

$$a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; \dots$$

$$a \quad , \quad b \quad , \quad c \quad , \quad d \quad ; \quad a \quad , \quad b \quad , \quad c \quad , \quad d \quad ; \quad a \quad , \dots$$

Da die Reihe der Buchstabenfolgen ebenso wie die ursprüngliche Reihe nur in dem Anfangsgliede ein ausgezeichnetes Glied besitzt, so kann man die Ausnahmestellung desselben dadurch hervortreten lassen, dass es ohne besondere Bezeichnung bleibt. Alsdann ändert sich das erhaltene Schema in folgender Weise ab:

$a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; \dots$
 $a, b, c, d; a, \dots$

Wie man sieht, kehrt auch in der zur Bezeichnung der Buchstabenfolgen dienenden Reihe ein und derselbe Buchstabe in unbegrenzter Folge immer wieder. Die bereits empfundene Schwierigkeit macht sich daher von neuem geltend. Sie kann jedoch keine Verlegenheit bereiten, da das gefundene Mittel auf die neue Reihe ebenso wie auf die alte anwendbar ist. Auch erhellt unmittelbar, dass die alsdann entstehende Reihe ihrerseits der nämlichen Behandlung unterworfen werden und so in der begonnenen Art ohne Ende fortgeföhren werden kann.

Es resultirt daher auf diesem Wege ein ausreichendes Schema zur Markirung der Stellen der Normalreihe, das aus folgender Andeutung ersichtlich ist:

I* $\left\{ \begin{array}{l} a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; \dots \\ a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; \dots \\ a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; \dots \end{array} \right.$

oder aus:

II* $\left\{ \begin{array}{l} a, b, c, d; \dots \\ a, b, c, d; \dots \\ a, b, c, d; \dots \end{array} \right.$

Wenn man, wie es hier geschehen ist, von vornherein eine und dieselbe Buchstabenfolge immer wieder verwendet, so tritt das Bildungsgesetz des gefundenen Schema in größter Einfachheit und Deutlichkeit hervor. Indessen ist es selbstverständlicher Weise gestattet, neben der zuerst benutzten Buchstabenfolge a, b, c, d andere Reihen, die auch gedächtnismäßig fixirt sind, zu Grunde zu legen. Es ist jedoch nicht möglich, stets neue Reihen vorauszusetzen. Denn dies würde an den durch die Natur des Gedächtnisses gesetzten Schranken scheitern. Müssen sich doch alle diese im Gedächtniss festgehaltenen Reihen zu einer einzigen, durch Anfangs- und Endglied begrenzten Reihe zusammenfassen lassen, von welcher jene nur einzelne Theile darstellen, so dass schließlich trotzdem wieder

die nämliche Folge, nur in vergrößerten Intervallen, Verwendung finden müsste. Hierdurch würde aber das gefundene Schema zwar an Einfachheit und Uebersichtlichkeit verlieren, jedoch nichts gewinnen.

Schreitet man nunmehr dazu, auf Grund des Schema I* oder II* die einzelnen Stellen der Normalreihe zu bezeichnen, so bietet sich die Möglichkeit, den die Buchstabenfolge a, b, c, d markirenden Buchstaben a oder b oder c oder d entweder schon beim Durchlaufen der Folge in Kraft treten zu lassen, oder aber ihn als Merkzeichen dafür, dass die Folge bereits durchlaufen ist, zu benutzen. Im ersteren Fall ist er jedem Gliede der Folge beizugesellen, so dass aus dem Schema:

$$a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; \dots$$

$$a, \quad b, \quad c, \quad \dots$$

die Reihe:

$$a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; \dots$$

$$a, a, a, a, b, b, b, b, c, c, c, c, \dots$$

sich ergibt. Im letzteren Fall kann der die Buchstabenfolge markirende Buchstabe bloß als Vertreter der Folge selbst, nicht als Beigabe ihrer einzelnen Glieder Verwendung finden. Er tritt daher in der Bezeichnung der Reihenglieder erst dann auf, wenn die Folge mit ihrem letzten Buchstaben erschöpft ist. Dadurch wird aber dieser letzte Buchstabe überflüssig und seine Stelle bleibt unausgefüllt, bis mit dem Beginn der nächsten Folge die Glieder der letzteren die leere Stelle ausfüllen. Es resultirt darum aus dem Schema:

$$a, b, c, d; a, b, c, d; a, b, c, d; \dots$$

$$a, \quad b, \quad c, \quad \dots$$

die Reihe:

$$a, b, c, -; a, b, c, -; a, b, c, -; \dots$$

$$a, a, a, a, b, b, b, b, c, \quad \quad \quad \dots$$

wo die leeren Stellen durch $-$ angedeutet sind.

Die an erster Stelle angegebene Methode ist indessen nur bei dem Schema II* anwendbar, weil daselbst das Anfangsglied jeder neuen Reihe von Buchstabenfolgen ohne besondere Bezeichnung bleibt. Beim Schema I* kann sie dagegen keine abgeschlossene Bezeichnung liefern, da jede einzelne der ins Endlose ineinander

verketteten Reihen von Buchstabenfolgen an der Bezeichnung der Stellen der Normalreihe sich beteiligen müsste. Es könnte daher jede Stelle der Normalreihe nur mit dem Aufwand einer unbegrenzten Aneinanderreihung der Buchstaben a, b, c, d bezeichnet werden, was unmöglich ist.

Umgekehrt ist die an zweiter Stelle entwickelte Methode nur bei dem Schema I* durchführbar; denn nun tritt ja der das Anfangsglied einer Reihe von Buchstabenfolgen markirende Buchstabe stets erst als Stellvertreter der durchlaufenen Folge in Kraft. Beim Schema II* scheidet dagegen ihre Anwendbarkeit daran, dass nicht nur das Anfangsglied, sondern auch das unmittelbar sich anschließende Glied einer Aneinanderreihung von Buchstabenfolgen ohne unterscheidendes Merkzeichen bliebe.

Es liefert somit sowohl das Schema I* als auch das Schema II* die Normalreihe in je einer ganz bestimmten Ausgestaltung. Im Interesse der bequemereren Schreibweise liegt es jedoch, die unmittelbar sich ergebende Form dahin abzuändern, dass die unter einander stehenden Buchstaben neben einander gestellt und die leeren Stellen durch 0 bezeichnet werden. Man erhält alsdann die Normalreihe auf Grund des Schema I* in der Form:

$$I \left\{ \begin{array}{l} a, b, c, a0, aa, ab, ac, b0, ba, bb, bc, c0, ca, cb, cc, a00, \\ a0a, a0b, a0c, aa0, aaa, \dots, acc, b00, b0a, b0b, \dots, bcc, \\ c00, \dots, ccc, a000, \dots, cccc, a0000, \dots \end{array} \right.$$

und auf Grund des Schema II* in der Form:

$$II \left\{ \begin{array}{l} a, b, c, d, aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, ca, cb, cc, cd, \\ da, db, dc, dd, aaa, aab, \dots, add, baa, \dots, bdd, caa, \dots, cdd, \\ daa, \dots, ddd, aaaa, \dots, dddd, aaaaa, \dots \end{array} \right.$$

Zugleich ergibt sich ganz allgemein als Antwort auf die Frage, ob und inwiefern die Normalreihe hergestellt und festgehalten werden kann:

Die Normalreihe kann im Bewusstsein eine dauernde Gestalt gewinnen, indem die von einem Anfangsgliede aus ohne Ende fortlaufende Reihe von Denkakten zunächst durch eine gedächtnismäßig fixirte Folge von Bewusstseinsinhalten in fortgesetzter Wiederholung markirt, so dann die so resultirende Aneinanderreihung der zu Grunde

gelegten Folge mittelst der nämlichen oder anderer gleichfalls in bestimmter Folge festgehaltener Bewusstseinsinhalte in derselben Weise behandelt und weiterhin jede von neuem entstehende Aneinanderreihung eben dieser Behandlung unterworfen gedacht wird. Dabei sind die als Merkzeichen verwendeten Bewusstseinsinhalte ganz willkürlich; sie müssen jedoch in ihrer Gesamtheit zu einer durch Anfang und Ende begrenzten, durch das Gedächtniss festgehaltenen Reihe sich zusammenschließen, die entweder bei jeder Verwendung erschöpft oder abtheilungsweise herangezogen wird, in jedem Fall aber in unbegrenzter Wiederholung wiederkehrt.

Dies ist der Plan, nach welchem der Bau der Normalreihe hergestellt werden muss; er liegt auch den Reihen I und II zu Grunde, woselbst die benutzte Buchstabenfolge *a, b, c, d* bei der jedesmaligen Verwendung erschöpft wird.

§ 9.

Jede so resultirende Ausgestaltung der Normalreihe erfüllt die früher (§ 6) angegebenen Axiome; denn sie ist ja nichts anderes als eine objective Darstellung der Reihenform des Denkens. Ihre Glieder sind darum lediglich die Träger der Merkmale der Reihenform, und sie können dies sein, weil das Schema zur Reihenbildung es gestattet, jedes Glied, mag es als thatsächlich im Gefolge der vorhergehenden Glieder erzeugt im Bewusstsein vorliegen oder nur als möglicher Weise erzeugbar gedacht werden, in ganz bestimmter Individualität herzustellen.

Die Erzeugung der Normalreihe macht es folglich möglich, die anfänglich gestellte Aufgabe einer Untersuchung der Reihenform des Denkens dadurch zu bewältigen, dass die Normalreihe in irgend einer Form vorausgesetzt und auf Grund der Axiome, die von ihr erfüllt werden müssen, zum Gegenstand der Untersuchung gemacht wird. Da nämlich die Eigenschaften des reihenförmig fortschreitenden Denkens, als die Axiome der Normalreihe, die Quelle der Untersuchung bilden, so betrifft dieselbe thatsächlich die Form des Denkens. Da jedoch diese Denkform ein Princip des logischen

Ordners ist, das nicht an und für sich, sondern nur in den Erzeugnissen der an die Reihenform gebundenen Denkhätigkeit erfassbar ist, so kann lediglich die Normalreihe als directes Untersuchungsobject dienen; denn sie stellt den Zustand des Bewusstseins dar, der entsteht, wenn einzig und allein das reihenförmig fortschreitende Denken den vorhandenen Bewusstseinsinhalten gegenüber sich be-thätigt, und wenn, damit dies möglich ist, bloß das Vorhandensein, nicht aber die Verschiedenheit der Bewusstseinsinhalte in Betracht gezogen wird.

Die Normalreihe ist nun aber nichts anderes als die Zahlenreihe. Dies bedarf keines Beweises; es folgt vielmehr unmittelbar daraus, dass die Form I der Normalreihe die Zahlenreihe in der gebräuchlichen Form darstellt, wenn an Stelle der Buchstabenfolge a, b, c, d die Zeichenfolge:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ?$$

zu Grunde gelegt wird. Dabei wird das Zeichen ? bloß vorübergehend in dem Schema I* eingeführt; in der Bezeichnung der Reihenglieder wird es durch das Zeichen 10 ersetzt, so dass that-sächlich das System der Glieder der Normalreihe mit unserem von den Indern ausgebildeten Zahlensystem übereinstimmt.

Man könnte allerdings einwenden, dass so zwar das sogenannte indische und in ähnlicher Weise jedes andere auf die Position der Zahlzeichen gegründete Zahlensystem in voller Identität mit der Normalreihe sich ergibt, dass aber das System der Zahlwörter und die nicht auf der Position beruhenden Zahlzeichensysteme davon auszuschließen seien. Dieser Einwand wäre jedoch nicht stichhaltig. Denn die zuletzt genannten Zahlenbezeichnungen kann man als Beispiele von unvollkommenen Lösungen des Problems der Normalreihe entwickeln.

Sie bieten sich ungesucht dar, wenn man nicht eine ins Endlose gehende, sondern nur eine den praktischen Bedürfnissen entsprechende, hinreichend weit gehende Reihe zu construiren sucht. Zu diesem Zweck mit einer einzigen Folge von Bewusstseinsinhalten in der Weise sich zu begnügen, dass die Glieder der Normalreihe nur so weit markirt werden, als jene Folge reicht, ist unthunlich, da sie entweder zu kurz wäre oder bei genügender Erstreckung an

einander gesetzt werden, ohne dass man (eben wegen der Verschiedenheit der Buchstaben der verschiedenen Folgen) nöthig hätte, leer bleibende Stellen als solche zu markiren. Auf Grund des Schema IV* erhält man ferner die Reihe:

$$\text{IV } \left\{ \begin{array}{l} a, b, c, d, ea, eb, ec, ed, fa, fb, fc, fd, \dots hd, iea, ieb, iec, ied, \\ ifa, ifb, \dots \dots \dots ihd, jea, jeb, \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

die direct in die Reihe II übergeht, wenn an Stelle der verschiedenen Buchstabenfolgen ein und dieselbe Folge benutzt wird.

Beide Reihen III und IV müssen schließlich abbrechen, da es nicht möglich ist, ohne Aufhören stets neue Folgen von Bewusstseinsinhalten im Gedächtniss festzuhalten. Ihr Bau ist dafür offenbar einfacher als derjenige der Reihen I und II, wenigstens insofern, als jeder Buchstabe oder, allgemeiner gesagt, jedes Merkzeichen unabhängig von jedem andern ist und seine Stellung keinen Einfluss auf seine Bedeutung hat. Man könnte daher die verschiedenen Gruppen angehörigen Merkzeichen in beliebiger Weise aneinanderreihen und z. B. das Glied *iea* der Reihe III oder IV auch durch *eia* oder *eai* oder *aie* bezeichnen, wenn nicht die praktische Rücksicht auf die Uebersichtlichkeit der Bezeichnung ein Festhalten der Zeichenfolge, wie sie in der gegebenen Darstellung der Reihen hervortritt, gebieten würde. Immerhin wird ersichtlich, dass ein solches Festsetzen der Zeichenfolge, aus dem dann im Bereiche der Zahlbezeichnung das von H. Hankel¹⁾ zuerst hervorgehobene »Gesetz der Zahlenfolge« wird, bloß praktischen Rücksichten entspringt und nicht in der Methode der Bezeichnung dieser Reihenglieder und der entsprechenden Zahlenbezeichnung begründet ist. Die der Reihenbildung zu Grunde liegende Methode besteht vielmehr nur darin, dass die einzelnen Zeichen neben einander gestellt werden und jedes Zeichen seine ihm eigenthümliche Bedeutung hat. Es herrscht somit hier lediglich die Methode der Juxtaposition im Gegensatz zu den auf die Methode der Position gegründeten Reihen I und II und es tritt klar hervor, dass die letztere Methode dann und nur dann befolgt werden kann, wenn die nämlichen Merkzeichen bei der Markirung der aneinander gereihten Zeichen-

1) Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig 1874. S. 32.

folgen von neuem verwendet werden, und dass sie befolgt werden muss, wenn eine ins Endlose sich erstreckende Reihe construirt werden soll.

Um nun zunächst aus der gegebenen unvollkommenen Lösung des Problems der Normalreihe das System der Zahlwörter abzuleiten, ist nichts weiter erforderlich, als die Buchstabenfolge a, b, c, d durch die Folge der Zahlwörter von Eins bis Zehn, die Buchstabenfolge e, f, g, h durch die Folge der Zahlwörter Zehn, Zwanzig bis Hundert und die Buchstabenfolge i, j, k, l durch die Folge der Zahlwörter Hundert, Zweihundert bis Tausend zu ersetzen, woraus die Fortsetzung bis zu der durch den Vorrath an Zahlwörtern gesetzten Grenze erhellt. Es resultirt alsdann, von unwesentlichen Abweichungen abgesehen, auf Grund des Schema III* unmittelbar die bekannte Reihe der Zahlwörter. Die Uebereinstimmung des letzten Gliedes jeder Folge mit dem Anfangsgliede der sich anschließenden Folge ist gestattet, weil das letzte Glied jeder Folge in der Bezeichnung der Reihenglieder nicht auftritt.

Um sodann die Möglichkeit zu erweisen, jedes der historisch vorliegenden, nicht auf Position gegründeten Zahlzeichensysteme gleichfalls aus dem Schema III* zu gewinnen, stütze ich mich auf die Abhandlung Alexander von Humboldt's¹⁾: »Ueber die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und den Ursprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen«, in welcher eine bequeme Uebersicht über die historisch vorhandenen Zahlzeichensysteme gegeben wird. Ihr zufolge wird, von der Positionsmethode abgesehen, die Zahlbezeichnung geleistet: »bald durch rohe Juxtaposition, wie bei den Tuskern, Römern, Mexicanern und Aegyptern; bald durch nebenstehende Coefficienten, wie bei den Tamul sprechenden Bewohnern der südlichen indischen Halbinsel; bald durch gewisse, über den Gruppenzeichen stehende Exponenten oder Indicatoren, wie bei den Chinesen, Japanesen und den Myriaden der Griechen, bald in der inversen Methode, durch eine Zahl von Nullen oder Punkten, welche neun Ziffern oben angehängt werden, um den relativen oder Stellenwerth jeder Ziffer zu bezeichnen, gleichsam Gruppenzeichen, welche

1) Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, 4. Bd. S. 213 figd.

durch 1^o u. s. w. in der Bezeichnung der Reihenglieder ersetzt wird.

Es ergeben sich demgemäß als die wesentlichsten Modificationen der Reihe III die Reihen:

$$\text{IIIa} \left\{ \begin{array}{l} a, aa, aaa, b, ba, baa, baaa, bb, bba, bbba, bbaaa, bbb, bbba, bbbaa, \\ bbbbaa, c, ca, caa, \dots cbbbbaa, cc, cca, \dots \end{array} \right.$$

und

$$\text{IIIb} \left\{ \begin{array}{l} a, b, c, a^\alpha, a^\alpha a, a^\alpha b, a^\alpha c, b^\alpha, b^\alpha a, b^\alpha b, b^\alpha c, c^\alpha, c^\alpha a, c^\alpha b, c^\alpha c, a^\beta, a^\beta a, a^\beta b, \\ a^\beta c, a^\beta a^\alpha, a^\beta a^\alpha a, a^\beta a^\alpha b, \dots a^\beta c^\alpha c, b^\beta, b^\beta a, \dots b^\beta c^\alpha c, c^\beta, c^\beta a, \dots c^\beta c^\alpha c, a^\gamma, \dots \end{array} \right.$$

so dass man in der That die Quelle der nicht auf die Position gegründeten Systeme von Zahlbezeichnungen in der Reihe III findet.

In Folge dessen erhält man das Resultat:

Jede Zahlenreihe ist als eine Lösung des Problems der Normalreihe aufzufassen. Sie ist entweder eine vollkommene Lösung vom Typus I oder II und beruht alsdann auf der Methode der Position, so dass die verwendeten Merkzeichen eine von ihrer Stellung abhängende Bedeutung erhalten; oder sie ist eine unvollkommene Lösung vom Typus III oder IV, die sich auf die Methode der Juxtaposition stützt, so dass jedes Zeichen seine unwandelbare, von der Stellung unabhängige Bedeutung von vornherein hat. — Die historisch vorliegenden Zahlenreihen sind entweder solche vom Typus I oder solche vom Typus III.

Bemerkenswerth ist, dass die Typen II und IV unter den historisch vorliegenden Zahlenreihen nicht vertreten sind. Dies erklärt sich daraus, dass die historische Entstehung der Zahlenreihe nicht wie die hier gegebene logische Entwicklung derselben die Stellung des Problems der Normalreihe zur Voraussetzung hat, sondern durch das Bedürfniss, ein Zusammensein gleicher oder als gleich betrachteter Bewusstseinsinhalte im Bewusstsein zu erfassen, veranlasst wird. Wird nämlich ein solches System (z. B. die Finger der Hand) durch eine gedächtnissmäßig fixirte Folge von Zeichen erfasst oder gezählt, so liegt es zwar nahe, ein neues Zeichen (im beispielsweise angeführten Fall die Hand) als Repräsentanten der

durchlaufenen Folge einzuführen, man wird aber nicht darauf verfallen, ein neues Zeichen jedem Gliede der wiederholten Folge als Merkzeichen beizufügen, um die wiederholte Folge als solche zu kennzeichnen.

Es ist ferner beachtenswerth, dass die Reihe II auf der Position der verwendeten Zeichen beruht, ohne jedoch, wie es bei der Reihe I der Fall ist, der Null zu bedürfen, da keine leerbleibenden Stellen zu markiren sind. Dies zeigt unwiderleglich, dass die Positionsmethode nicht, wie vielfach angenommen wird, an die Erfindung des Nullzeichens geknüpft ist, dass vielmehr ein Positionssystem ohne Null nach dem Typus II logisch gleichberechtigt mit den gebräuchlichen Positionssystemen ist, wenn es auch den letzteren an praktischer Verwendbarkeit nachsteht.

§ 10.

Die im Vorstehenden nachgewiesene Identität der Zahlenreihe mit der Normalreihe hat zur Folge, dass die Aufgabe einer Untersuchung der Reihenform des Denkens auf Grund der Normalreihe als eine mathematische Aufgabe erkannt wird, die nicht erst gelöst werden muss, sondern ihre Lösung in den Untersuchungen über die Zahlenreihe bereits gefunden hat. Die Erkenntniss, dass die Reihenform des Denkens ein Princip des logischen Ordners ist, das in der Normalreihe seine Ausgestaltung findet, erschließt somit nicht — wie anfänglich angenommen werden musste — wirklich ein neues Untersuchungsgebiet; sie eröffnet vielmehr nur einen Zugang zur Zahlenreihe und zu den auf sie gegründeten mathematischen Untersuchungen.

Es tritt so klar zu Tag, dass die Zahlenreihe in der Reihenform des Denkens ihre Begründung findet. Sie ist daher nicht eine willkürliche Schöpfung des menschlichen Geistes, die ebenso wohl unterbleiben könnte, sondern ein Product des Denkens, das mit Nothwendigkeit in jedem Bewusstsein durch das reihenförmige Fortschreiten von einem Apperceptionsakt zum anderen entsteht. Es ist allerdings nicht nothwendig, zuvor in der Beschaffenheit des Denkens den Grund ihres Entstehens zu erkennen. Denn das Denken bethätigt sich von selbst in den ihm eigenthümlichen

Formen. Eben deswegen ist es auch möglich, die Zahlenreihe als gegeben hinzunehmen, ohne sich um ihren Ursprung zu kümmern. Alsdann kann aber nur die praktische Bedeutung der Zahlenreihe eingesehen werden, die es ermöglicht, ein System gleicher Objecte zu erfassen und zu ordnen und dabei die Glieder der Zahlenreihe als Antworten auf die Frage: »wie viel« oder: »der wie viele« zu verwenden.

Die Möglichkeit, die Frage nach der Herkunft der Zahlenreihe unbeantwortet zu lassen, entbindet jedoch nicht der Verpflichtung, diese Frage zu beantworten, wenn man die logische Natur der Zahlenreihe erkennen will. Da sich nun die Zahlenreihe als das objective Bild der Reihenform des Denkens darstellt, so erschöpft sich ihre Bedeutung darin, dass man von einem Anfangsgliede »Eins« zu einem folgenden Gliede »Zwei« und von diesem zu einem weiteren Gliede »Drei« u. s. w. übergehen kann, ohne an ein letztes Glied zu gelangen. Die Zahlen: Eins, Zwei, Drei u. s. w. sind darum zunächst weder Anzahlen noch Ordnungszahlen, sondern nichts weiter als Glieder der Zahlenreihe, die mit den Merkmalen der Reihenform behaftet sind.

Daraus folgt, dass die Zahlen lediglich als Glieder der Zahlenreihe der Untersuchung zu Grunde gelegt werden können, und dass hierbei nur die Eigenschaften, welche die Reihenform des Denkens auszeichnen und in den Axiomen der Normalreihe (§ 5) ihren Ausdruck bereits gefunden haben, von maßgebendem Einfluss zu sein vermögen. Bezeichnet man nun die Thätigkeit des Denkens, durch welche die Zahlenreihe zum Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchung wird, als Zahlenoperation, so sind demgemäß auf Grund der früher entwickelten Axiome die Operationsarten und Operationsgesetze zu bestimmen, wenn zuvor festgestellt ist, wie überhaupt eine Bethätigung des Denkens an den Zahlen oder ein Operiren mit den Zahlen möglich ist.

Da die Zahlenreihe das im Bewusstsein objectivirte, gleichsam erstarrte Bild des in lebendigem Flusse von einem Apperceptionsakt zum anderen fortschreitenden Denkens ist, so kann das Denken an der Zahlenreihe auch nur in der Form sich bethätigen, welche in dieser Reihe ihre Darstellung finden soll: man kann nur von einem Gliede der Reihe zu einem anderen übergehen und dabei

sich der Zwischenglieder bedienen, wenn das andere nicht ein unmittelbar benachbartes Glied ist. Bezeichnet man dieses successive Erfassen aufeinander folgender Glieder als Zählen, so besteht demnach die Grundoperation im Zählen. Die Arten des Zählens aber und die Gesetzmäßigkeiten, die hierbei auftreten, sind nun aus den Axiomen der Zahlenreihe abzuleiten.

Von diesen Axiomen gründen sich die einen darauf, dass es eine Form des Denkens ist, auf welcher die Zahlenreihe beruht. Ihnen zufolge muss die Zahlenreihe den Charakter der Nothwendigkeit und allgemeinen Gültigkeit besitzen und, da in der Denkform ein elementares und fundamentales Princip des logischen Ordners gefunden wurde, als einzigartiges Fundament jeglicher Reihenbildung anerkannt werden. Hierdurch wird jedoch nur der wissenschaftliche Charakter der Zahlenreihe im allgemeinen bestimmt, ohne dass Bedingungen für die Untersuchung derselben sich ergeben würden. Es können daher bloß diejenigen Axiome in Betracht kommen, die auf die Reihenform des Denkens sich gründen. Es sind dies folgende:

1) Die Zahlenreihe muss ein Anfangsglied haben. 2) Sie muss ohne Ende fortsetzbar sein. 3) Sie muss eine homogene Reihe sein, insofern jedes Glied der Wiederholung des nämlichen Denkaktes sein Dasein verdankt und jeder Fortgang von einem Gliede zum folgenden auf der Wiederholung der nämlichen Thätigkeit beruht. 4) Sie muss durch jedes einzelne ihrer Glieder bestimmt werden können, so dass ein einziges Glied die ganze Reihe wie im Keime in sich trägt.

Dem zuletzt genannten Axiom zufolge muss das Erfassen einer Zahl a genügen, um jede andere Zahl b in eindeutig bestimmter Beziehung zu a zu erhalten. Diese Beziehungen, die von vornherein, und zwar auf Grund der Erzeugung der Zahlenreihe vom Anfangsgliede aus feststehen, bedingen es, dass der Uebergang von a zu b , der an und für sich an der objectiv vorliegenden Zahlenreihe ganz in gleicher Weise wie der Uebergang von b zu a durch successive Erfassen der Zwischenglieder (wenn solche vorhanden sind) erfolgen kann, als specifisch verschieden von dem Uebergange von b zu a angesehen werden muss. Denn gelegentlich der Erzeugung der

Zahlenreihe musste einer dieser Uebergänge — es sei dies der von a zu b führende — schon einmal bewerkstelligt werden, so dass er durch directes Weiterzählen in der Zahlenreihe, vom Anfangsgliede aus, erfolgt. Den von b zu a führenden Uebergang kann man dagegen erst dann ausführen, wenn die Zahlenreihe ein objectiv im Bewusstsein vorliegender Untersuchungsgegenstand geworden ist. Er beruht somit zwar in gleicher Weise wie der erstere auf dem Process des Zählens, er hat diesen ersteren aber zur Voraussetzung und besteht in der Umkehrung desselben, so dass er durch Rückwärtszählen in der Zahlenreihe, dem Anfangsgliede zu, erfolgt. Die Grundoperation des Zählens ist somit entweder ein vom Anfangsglied fortführendes Vorwärts- oder Weiterzählen oder ein dem Anfangsglied zuführendes Rückwärtszählen.

Da nun dem an dritter Stelle genannten Axiom zufolge die Zahlenreihe eine homogene Reihe ist, so besteht der Process des Zählens in der ganzen Erstreckung der Zahlenreihe in der nämlichen Thätigkeit: der Uebergang von Eins zu Zwei ist der nämliche wie der Uebergang von a zu dem ihm folgenden oder zu dem ihm vorhergehenden Glied. Man kann somit die vom Anfangsglied aus durchlaufenen Successionen von Zahlen mit den von einem beliebigen Glied a aus vorwärts oder rückwärts durchlaufenen Successionen vergleichen und die succedirenden Zahlen auf einander beziehen und einander zuordnen. Dadurch wird die Operation des Zählens auf die Zahlenreihe selbst von irgend einem Glied a aus angewendet, indem die an a nach vorwärts oder nach rückwärts sich anschließenden Glieder mittelst der Reihe der Zahlen: Eins, Zwei, Drei u. s. w. abgezählt werden. Auf diese Weise kann man die Anzahl der Glieder eines durch die Zahlen a und b begrenzten Intervalls (a, b) der Zahlenreihe bestimmen; und zwar ist $(a, b) = \alpha$ zu setzen, wenn die Reihe der Zahlen $1, 2, \dots, \alpha$ der Reihe der Zahlen von a bis b Glied für Glied zugeordnet werden kann. Es resultirt demgemäß aus der homogenen Beschaffenheit der Zahlenreihe die Bestimmbarkeit der Gliederanzahl von Intervallen der Zahlenreihe und die Gleichheit solcher Intervalle, wenn sie durch die nämliche Reihe $1, 2, \dots, \alpha$ abzählbar sind. Insbesondere ist das Intervall (a, b) gleich zu setzen dem Intervall (b, a) und $(1, a) = (a, 1) = a$.

Da nunmehr eine Zahl a nicht bloß die Stelle in der Zahlenreihe, sondern auch die Anzahl der Glieder des Intervalls $(1, a)$, sowie jedes anderen durch die Reihe $1, 2, \dots, a$ abzählbaren Intervalls (c, d) bezeichnet, so kann das Zählen zur Bestimmung eines Intervalls dienen, dessen Gliederzahl durch Weiterzählen vermehrt, durch Rückwärtszählen vermindert wird. Auf Grund dieser Interpretation ist das Weiterzählen als Addiren, das Rückwärtszählen als Subtrahiren zu bezeichnen. Man erhält so die Definitionen:

Man addirt zu der Zahl a die Zahl b oder man bildet die Summe $a + b$, indem man von a aus um b Stellen der Zahlenreihe weiterzählt und so das Intervall $(1, a)$ durch Hinzufügen des Intervalls $(a + 1, a + b)$ zu dem Intervall $(1, a + b)$ erweitert; die Zahlen a und b heißen die Summanden.

Man subtrahirt von der Zahl a die Zahl b oder man bildet die Differenz $a - b$, indem man von a aus um b Stellen der Zahlenreihe rückwärts zählt und so das Intervall $(a, 1)$ durch Absonderung des Intervalls $(a, a - b + 1)$ auf das Intervall $(a - b, 1)$ beschränkt; a heißt der Minuend, b der Subtrahend.

Dabei sollen die b auf das Glied a folgenden Reihenglieder durch $a + 1, \dots, a + b$ und die b unmittelbar vorhergehenden Glieder durch $a, a - 1, \dots, a - b + 1$ bezeichnet gedacht werden.

Wird nun in der angegebenen Weise durch Addition der Zahlen a, b und c die Summe $a + b + c$ oder das Intervall $(1, a + b + c)$ erzeugt, so folgt aus der homogenen Beschaffenheit der Zahlenreihe, dass:

$$(1, a + b + c) = (1, a) + (a + 1, a + b) + (a + b + 1, a + b + c),$$

oder, da Intervalle mit gleicher Gliederzahl einander gleich zu setzen sind und somit $(a + 1, a + b) = (1, b)$, $(a + b + 1, a + b + c) = (1, c)$:

$$(1, a + b + c) = (1, a) + (1, b) + (1, c).$$

In eben derselben Weise kann jedoch auch gesetzt werden:

$$(1, a + b + c) = (1, a) + (a + 1, a + b + c) = (1, a) + (1, b + c),$$

oder:

$$(1, a + b + c) = (1, a + b) + (a + b + 1, a + b + c) = (1, a + b) + (1, c).$$

Es ist daher:

$$1a) \quad (1, a + b + c) = (1, a) + (1, b) + (1, c) = (1, a) + (1, b + c) \\ = (1, a + b) + (1, c).$$

Dies ist aber nichts anderes als das Associationsgesetz für die Addition der Zahlen, das nun auch in der Form:

$$1) \quad (a + b + c) = a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$$

geschrieben werden kann. Es beruht folglich das Associationsgesetz für die Addition auf der homogenen Beschaffenheit der Zahlenreihe.

Wird ferner durch Addition der Zahlen a und b sowohl die Summe $a + b$ oder das Intervall $(1, a) + (a + 1, a + b) = (1, a + b)$ als auch die Summe $b + a$ oder das Intervall $(1, b) + (b + 1, b + a) = (1, b + a)$ erzeugt, so folgt durch Gleichsetzen der Intervalle mit gleicher Gliederzahl zunächst:

$$(1, a + b) = (1, a) + (a + 1, a + b) = (1, a) + (1, b),$$

$$(a + b, 1) = (a + b, a + 1) + (a, 1) = (b, 1) + (a, 1) = (1, b) + (1, a),$$

und daraus, da $(1, a + b) = (a + b, 1)$:

$$2) \quad (1, a) + (1, b) = (1, b) + (1, a) \text{ oder } a + b = b + a,$$

wodurch das Commutationsgesetz für die Addition erwiesen ist. Es beruht somit das Commutationsgesetz in gleicher Weise wie das Associationsgesetz darauf, dass die Zahlenreihe dem dritten Axiom zufolge als homogen vorausgesetzt werden muss, und es ergibt sich demgemäß der Begriff der aus vertauschbaren Summanden bestehenden Summe als eine Folge dieses Axioms.

Der hier gegebene Beweis der beiden Operationsgesetze für die Addition unterscheidet sich von den Beweisen mittelst der sogenannten vollständigen Induction (oder des Schlusses von n auf $n + 1$), wie sie beispielsweise H. Hankel¹⁾ und v. Helmholtz²⁾ geben, dadurch, dass hier das Axiom der Homogenität der Zahlen-

1) Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen. Leipzig 1867, S. 37, 38.

2) Zählen und Messen. In den Philosophischen Aufsätzen, Ed. Zeller gewidmet. Leipzig 1887, S. 26, 28.

reihe bewusster Weise die Grundlage der Beweisführung ist, während es dort unausgesprochen und wohl auch unbewusst das inductive oder nach exacter Analogie erfolgende (von n zu $n + 1$ weiterführende) Beweisverfahren ermöglicht.

Bestimmen demzufolge einerseits das vierte und das dritte Axiom die beiden Operationsarten des Vorwärts- und Rückwärtszählens und die Gesetze der Association und Commutation für das in Intervalle abgetheilte Zählen, so bedingen andererseits das zweite und das erste Axiom die Ausführbarkeit der angegebenen Operationen. Da nämlich die Zahlenreihe ins Endlose fortsetzbar gedacht werden muss, so kann es zur Ausführung des Weiterzählens oder Addirens nie an Reihengliedern fehlen: es gibt zu jeder Zahl, auf Grund des zweiten Axioms, eine folgende Zahl. Da aber die Zahlenreihe ein Anfangsglied besitzt, so kann das Rückwärtszählen oder Subtrahiren nur bis zu diesem Glied zurück, nicht aber darüber hinaus führen. Das Anfangsglied bedeutet ja, dass die Zahlenreihe anfängt und nicht als ohne Anfang bestehend aufgefasst werden kann. Die Subtraction ist daher dann und nur dann ausführbar, wenn der Subtrahend in der Reihe der Zahlen vor dem Minuenden steht: es gibt dem ersten Axiom zufolge kein dem Anfangsglied vorangehendes Glied der Zahlenreihe.

Die Subtraction $a - a$ kann folglich nicht in der Weise ausgeführt werden, dass man von der durch a bezeichneten Stelle der Zahlenreihe aus um a Stellen rückwärts zählt; denn man kann von a aus zwar um $a - 1$ Stellen bis zum Anfangsglied 1 rückwärts zählen, man kann aber nicht über 1 hinausgehen, eben weil es keine Stelle mehr gibt, zu der man übergehen könnte. Dies hindert jedoch nicht, das bei der Construction der Normalreihe bereits zur Ausfüllung leerer Stellen verwendete Zeichen 0 auch zur Bezeichnung nicht vorhandener Anzahlen oder nicht vorhandener Intervalle der Zahlenreihe zu benutzen und dann auch $a - a = 0$ zu setzen. Alsdann bezeichnet aber 0 nicht eine dem Anfangsglied vorangehende Stelle der Zahlenreihe, sondern es sagt nur aus, dass das »Intervall« $a - a$, das von jeder Stelle b der Zahlenreihe aus abzählbar ist, keine Glieder oder 0 Glieder besitzt. Es ist somit $a - a = 0$ bloß eine Folgerung daraus, dass $b + a - a = b + 0 = b$ zu setzen ist. Die Null kann also zwar als

›uneigentliche Anzahl‹ und als ›Hülfzeichen‹ bei der Zahlbezeichnung nach dem Typus I, nicht aber als ›Stelle der Zahlenreihe‹ auftreten¹⁾.

§ 11.

Die Charakterisirung der Zahlenoperationen wäre damit beendet, wenn der Process des Zählens nur in der Weise ausgeführt werden könnte, dass die Zahlenreihe Glied für Glied abgezählt wird. Die Möglichkeit, Intervalle von bestimmter Gliederanzahl in der Zahlenreihe abzugrenzen, gestattet jedoch, die Zahlenreihe als eine Reihe von Intervallen aufzufassen und den Zählprocess in der Weise zu vereinfachen, dass nicht Glied für Glied, sondern Intervall für Intervall gezählt wird. Die Gliederanzahl der auf einander folgenden Intervalle ist dabei an und für sich gleichgültig, falls sie nur für jedes Intervall eine fest bestimmte ist. Soll jedoch das Abzählen der succedirenden Intervalle ins Endlose fortsetzbar sein, so müssen die Gliederanzahlen in gesetzmäßiger Weise bestimmt werden können, so dass auf Grund der willkürlich angenommenen Anzahl a der Glieder des ersten Intervalls $(1, a)$ die Anzahl a_1 der Glieder des nächsten Intervalls $(a + 1, a + a_1) = (1, a_1)$, sodann die Anzahl a_2 der Glieder des nun folgenden Intervalls und weiterhin die Gliederanzahl $a_3, a_4 \dots$ der nunmehr sich anschließenden Intervalle in unbegrenzter Folge unmittelbar angebbar ist. Da zu einer solchen gesetzmäßigen Bestimmung der Gliederanzahlen bloß die Grundoperation des Addirens oder Weiterzählens zur Verfügung steht, so erhellt, dass die Gliederanzahlen a, a_1, a_2, \dots entweder alle einander gleich sein oder eine arithmetische Reihe erster, zweiter, dritter Ordnung u. s. w. bilden müssen. Ist aber das Gesetz, das die Reihe a, a_1, a_2, \dots erzeugen soll, bestimmt, so genügt in der That das Abzählen der aneinander gereihten Intervalle, um mit

1) Als ein Uebersehen der durch das erste Axiom begründeten Bedeutung des Anfangsgliedes der Zahlenreihe muss es daher bezeichnet werden, wenn v. Helmholtz in der citirten Abhandlung (S. 34) sagt: ›In Bezug auf die Subtraction ist nur zu bemerken, dass man die Zahlen als Zeichen einer Reihenfolge auch in absteigender Richtung in das Unbegrenzte fortsetzen kann, indem man von der 1 rückwärts zur 0, von da zu (-1) , (-2) u. s. w. übergeht, und diese neuen Zeichen ebenso wie die früher allein gebrauchten positiven ganzen Zahlen behandelt.‹

der Anzahl dieser Intervalle die schließlich erreichte Stelle der Zahlenreihe und damit auch das durch diese Stelle markirte Gesamtintervall in eindeutig bestimmter Weise zu erhalten. Alsdann gelangt man durch das Abzählen von n auf einander folgenden Intervallen $a, a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ zu der Zahl:

$$3) \quad n \cdot [a] = a + a_1 + a_2 + \dots a_{n-1}; \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Das durch diese Gleichung definirte Zählen von auf einander folgenden Intervallen mit gesetzmäßig bestimmter Gliederanzahl stellt nun eine neue Operationsart dar. Ist dieses Zählen ein Weiterzählen, so ist es als erweitertes Multipliciren, ist es aber ein Rückwärtszählen, so ist es als erweitertes Dividiren zu bezeichnen, und man erhält somit die Definitionen:

Eine Zahl a wird mit einer Zahl n multiplicirt (in erweitertem Sinne), oder es wird das Product $n \cdot [a]$ gebildet, wenn man vom Anfangsglied der Zahlenreihe aus n Intervalle mit der Gliederanzahl $a, a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ abzählt und so durch Aneinanderreihen der n Intervalle $(1, a), (1, a_1), \dots (1, a_{n-1})$ das Gesamtintervall $(1, n \cdot [a])$ erzeugt; a heißt der Multiplicand, n der Multiplicator; der Multiplicand bezeichnet das Ausgangsintervall, der Multiplicator dagegen die Anzahl der Intervalle, ohne für sich allein zur Bezeichnung eines Intervalls dienen zu können.

Eine Zahl b wird durch eine Zahl a dividirt (in erweitertem Sinne), oder es wird der Quotient $b : [a]$ gebildet, wenn man von b aus, in der Zahlenreihe rückwärts, soweit es möglich ist, die Intervalle a, a_1, a_2, \dots markirt und die Reihe dieser Intervalle abzählt. Gibt es n Intervalle und erreicht man mit dem letzten Intervall, das a_{n-1} Glieder hat, das Anfangsglied, so ist $b : [a] = n$ und $(1, b) = (1, n[a])$; erreicht man dagegen das Anfangsglied nicht, bleibt vielmehr ein Intervall $(1, c) = c$ übrig, so ist $b : [a] = n$, Rest c , und $(1, b) = (1, n[a]) + (1, c)$; b heißt der Dividend, a der Divisor, c der Rest, und alle diese Zahlen können als Stellvertreter von Intervallen der Zahlenreihe dienen¹⁾.

1) Man könnte einwenden, dass durch diese Definition bloß eine Art der Division defnirt wird, diejenige nämlich, durch welche bei gegebenem Product

Diese Definitionen haben Geltung ohne Rücksicht auf das Gesetz, das die Reihe der Anzahlen a, a_1, a_2, \dots erzeugt. Sie gelten daher auch, wenn $a = a_1 = a_2 = \dots$, wenn also an Stelle der Gleichung 3) die Gleichung

$$3a) \quad n \cdot a = a + a + \dots + a$$

den einfachsten Fall des Zählens von n Intervallen mit einer und derselben Gliederanzahl a definirt. Man erhält als Specialisirung des erweiterten Multiplicirens und Dividirens das gewöhnliche Multipliciren und Dividiren oder das Multipliciren und Dividiren schlechthin.

Die Ausführbarkeit dieser Operationen wird in der nämlichen Weise wie beim Addiren und Subtrahiren durch das erste und zweite Axiom bestimmt; die Multiplication (im gewöhnlichen und erweiterten Sinn) ist stets durchführbar; die Division (im gewöhnlichen und erweiterten Sinn) dann und nur dann, wenn der Divisor in der Reihe der Zahlen dem Dividenden nicht nachfolgt; er darf jedoch mit letzterem zusammenfallen und es ist alsdann $a : a = 1$ resp. $a : [a] = 1$.

Die Operationsgesetze ferner ergeben sich für die erweiterte und gewöhnliche Multiplication ebenso wie für die Addition auf Grund der durch das dritte Axiom bedingten homogenen Beschaffenheit der Zahlenreihe.

Ich beweise sie für die gewöhnliche Multiplication in folgender Weise.

Bildet man das Product $(a + b) \cdot c$, so ist das hierdurch dargestellte Gesamtintervall:

und gegebenem Multiplicand der Multiplicator gesucht wird, und dass somit noch zu definiren sei, wie bei gegebenem Product und gegebenem Multiplicator der Multiplicand zu suchen sei. Es zeigt sich jedoch unmittelbar, dass die Frage, welche Intervallreihe $a, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ mit der vorgegebenen Anzahl von n Theilintervallen ein gegebenes Gesamtintervall erfüllt, nur dann beantwortet werden kann, wenn man alle möglichen, das gegebene Gesamtintervall erfüllenden Intervallreihen erst bestimmt und sodann nachsieht, ob sich unter ihnen eine Intervallreihe mit der vorgegebenen Anzahl von n Gliedern befindet.

$$\begin{aligned}
 (1, (a+b)c) &= (1, c) + (c+1, 2c) + (2c+1, 3c) + \dots + ((a+b-1)c+1, (a+b)c) \\
 &= (1, c) + (1, c) + (1, c) + \dots + (1, c) \\
 &= (1, c) + (c+1, 2c) + \dots + ((a-1)c+1, ac) + \\
 &\quad + (1, c) + (c+1, 2c) + \dots + ((b-1)c+1, bc) \\
 &= (1, ac) + (1, bc),
 \end{aligned}$$

indem zunächst die a ersten, sodann die b folgenden Intervalle zusammengeslossen werden. Es ist daher:

$$4a) \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

zu setzen.

Bildet man ferner das Product $c \cdot (a+b)$, so ist das erzeugte Gesamtintervall:

$$\begin{aligned}
 (1, c(a+b)) &= (1, a+b) + (a+b+1, 2(a+b)) + (2(a+b)+1, 3(a+b)) + \dots + ((c-1)(a+b)+1, c(a+b)) \\
 &= (1, a+b) + (1, a+b) + (1, a+b) + \dots + (1, a+b) \\
 &= (1, a) + (1, b) + (1, a) + (1, b) + (1, a) + (1, b) + \dots + (1, a) + (1, b) \\
 &= (1, a) + (a+1, 2a) + (2a+1, 3a) + \dots + ((c-1)a+1, ca) \\
 &\quad + (1, b) + (b+1, 2b) + (2b+1, 3b) + \dots + ((c-1)b+1, cb) \\
 &= (1, ca) + (1, cb)
 \end{aligned}$$

Es ist daher auch:

$$4b) \quad c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b.$$

Die beiden Formeln 4a und 4b stellen aber das distributive Gesetz für die Multiplication dar.

Multiplicirt man nunmehr erst b mit a , um sodann durch Multiplication des Products $b \cdot a$ mit c das Product $c \cdot (b \cdot a)$ oder das Intervall $(1, c(ba))$ zu erzeugen, so ist:

$$\begin{aligned}
 (1, c(ba)) &= (1, ba) + (ba+1, 2(ba)) + (2(ba)+1, 3(ba)) + \dots + ((c-1)(ba)+1, c(ba)) \\
 &= (1, ba) + (1, ba) + (1, ba) + \dots + (1, ba);
 \end{aligned}$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned}
 (1, ba) &= (1, a) + (a+1, 2a) + (2a+1, 3a) + \dots + ((b-1)a+1, ba) \\
 &= (1, a) + (1, a) + (1, a) + \dots + (1, a),
 \end{aligned}$$

so dass $(1, c(ba))$ einer Summe von $c \cdot b$ Intervallen $(1, a)$ gleichzusetzen ist, die sich zu dem Gesamtintervall:

$$(1, a) + (a+1, 2a) + (2a+1, 3a) + \dots + ((cb-1)a+1, (cb)a) = (1, (cb)a)$$

zusammenschließen lassen. Daraus folgt:

Mit der gewöhnlichen und erweiterten Multiplication und Division wird indessen die größtmögliche Abkürzung des Zählprocesses keineswegs erreicht; sie besteht ja nur darin, dass Intervalle mit vorbestimmter Gliederanzahl statt der Glieder selbst gezählt werden. Eine weitergehende Abkürzung kann dadurch gewonnen werden, dass in ähnlicher Weise, wie die ursprüngliche Reihe der Zahlenglieder durch eine Reihe von Intervallen mit vorbestimmter Gliederanzahl ersetzt wurde, so auch die nun vorhandene Intervallenfolge von neuem in umfassendere Intervalle von gleichfalls vorbestimmter Gliederanzahl abgetheilt, sodann mit der neu entstehenden Intervallenfolge in der nämlichen Weise verfahren und dieses Verfahren ohne Ende fortgesetzt gedacht wird. Es entsteht so ein System von einander umfassenden Intervallenfolgen, und es besteht der Zählprocess nun nicht mehr im Zählen der aneinander gereihten Intervalle, sondern im Zählen der Uebergänge von einer Intervallenfolge zu der dieselbe umfassenden Intervallenfolge.

Lässt man jede einzelne der so definirten Intervallenfolgen aus Intervallen mit gleicher Gliederanzahl bestehen, so wird zunächst durch directes Abzählen von a Gliedern der Zahlenreihe ein Intervall I_1 erzeugt, sodann durch Abzählen von a_1 Intervallen I_1 ein Intervall I_2 gewonnen, weiterhin durch Abzählen von a_2 Intervallen I_2 zu einem Intervall I_3 u. s. w. fortgeschritten. Soll dieser Uebergang von einem Intervall zu dem dasselbe umfassenden Intervall in unbegrenzter Wiederholung möglich sein, so muss nur noch ein Gesetz vorhanden sein, durch das die Folge der Anzahlen a, a_1, a_2, \dots für ein beliebig angenommenes a erzeugt werden kann, um in ungehinderter Weise durch das Abzählen der Uebergänge von einem Intervall zu dem aus ihm erzeugten, umfassenderen Intervall die schließlich erreichte Stelle der Zahlenreihe und das durch diese Stelle definirte Gesamtintervall in eindeutig bestimmter Weise zu erhalten. Es kann alsdann gesetzt werden:

$$7) \quad I_n = [a]^n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \dots \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot a; \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

falls die Anzahl der in der angegebenen Weise einander umfassenden Intervalle n beträgt.

Die durch diese Gleichung definirte, im Abzählen der Uebergänge von einer Intervallenfolge zu einer dieselbe umfassenden

Intervallenfolge bestehende neue Operationsart ist als erweitertes Potenziren zu bezeichnen; aus ihr erhält man als Specialfall das gewöhnliche Potenziren oder das Potenziren schlechthin, wenn die jeweilige Gliederanzahl der in Betracht kommenden Intervalle immer die nämliche, wenn also $a = a_1 = a_2 = \dots$ ist. Es ist alsdann mit Benutzung der üblichen Schreibweise:

$$7a) \quad I_n = a^n; \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Setzt man dagegen fest, dass jedes folgende Intervall eine um 1 vermehrte Gliederanzahl haben soll, dass also:

$$a_1 = a + 1, \quad a_2 = a_1 + 1, \quad a_3 = a_2 + 1, \dots$$

so erhält man die schon von Vandermonde¹⁾ in seinem »Mémoire sur des irrationnelles de différents ordres« angegebene Verallgemeinerung des Potenzirens:

$$7b) \quad I_n = [a]^n = (a + n - 1)(a + n - 2) \dots (a + 1) \cdot a; \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Aber auch diese Operationsart stellt die größtmögliche Abkürzung des Zählprocesses noch nicht dar; denn man kann wiederum eine weitergehende Abkürzung erreichen, wenn man das Abzählen der einander umfassenden Intervallfolgen nicht direct, sondern selbst wieder in Intervallen vornimmt. Alsdann tritt z. B., wenn man die einfachsten Verhältnisse voraussetzt und alle vorkommenden Intervalle a -gliedrig annimmt, an Stelle der Potenz a^n die Potenz von dieser Potenz, nämlich a^{a^n} , die in gleicher Weise wie a^n nur den

1) Histoire de l'académie royale des sciences; année 1772, p. 489. — Indessen gewinnt Vandermonde diese Verallgemeinerung des Potenzirens nicht auf dem im Text befolgten Wege. Es handelt sich vielmehr für ihn darum, zum Zweck der Auflösung der Gleichungen eine Verallgemeinerung der durch Wurzelauziehen definirten Irrationalitäten zu erhalten, zu der er in folgender Weise gelangt: Nachdem er bemerkt hat, dass das Product von n Zahlen p, p, \dots, p , die eine arithmetische Reihe nullter Ordnung bilden, durch p^n bezeichnet wird, und nun die Annahme gebrochener Exponenten n die bekannte Classe von Irrationalitäten erzeugt, bezeichnet er ein Product von n Zahlen $p, p - 1, p - 2, \dots, p - n + 1$, die eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden, durch $[p]^n$, um nun für diese symbolische Schreibweise durch Annahme negativer und gebrochener Exponenten n ähnliche Definitionen zu gewinnen wie für p^n . Auch gibt er an, dass die Producte der Glieder höherer arithmetischer Reihen zu noch allgemeineren Irrationalitäten führen. Es hat somit Vandermonde nur die Verwendung dieser Operationsart zur Definition von Irrationalitäten, nicht aber ihre logische Begründung im Auge.

einfachsten Fall einer neuen Operationsart darstellt. Es zeigt sich so, dass immer wieder auf Grund einer bereits definirten Operationsart die Definition einer neuen Operationsart gewonnen werden kann, so dass die Möglichkeit, Operationsarten aufzustellen, eine unbegrenzte ist.

Es ist übrigens eine weitergehende Entwicklung derselben gar nicht nöthig, da aus den bisherigen Darlegungen das principiell Wichtige, auf das allein es hier ankommt, zur Genüge hervortritt. Dies besteht in der Erkenntniss, dass alle in der Weise resultirenden Operationsarten abkürzende Zählmethoden sind, die in letzter Linie auf der Grundoperation des Glied für Glied erfolgenden Weiterzählens beruhen; dass die Gesetze dieser Operationen ebenso wie diejenigen der Addition und Multiplication Folgerungen aus dem Axiom von der homogenen Beschaffenheit der Zahlenreihe sind; dass ferner dem Weiterzählen das Rückwärtszählen und darum auch jeder Art des abkürzenden Weiterzählens Arten des abkürzenden Rückwärtszählens zur Seite stehen, und dass zwar jede Art des Weiterzählens in unbeschränkter Weise durchführbar ist, die Arten des Rückwärtszählens aber nur in beschränkter Weise ausgeführt werden können, da im Anfangsglied der Zahlenreihe eine unüberwindliche Schranke gesetzt ist.

Auf Grund dieser Erkenntniss erhellt, dass in der That die Axiome der Normalreihe genügen, um die Operationsarten und die Operationsgesetze für die Zahlen als Glieder der Zahlenreihe abzuleiten und so die »Mathematik der Zahlenreihe« zu begründen, wobei durch diesen Namen die zahlentheoretischen und arithmetisch-algebraischen Untersuchungen, insofern sie einzig und allein die sogenannten absolutenganz Zahlen betreffen, zusammenfassend bezeichnet werden sollen.

Mit diesem Ergebniss mündet die aus der Einsicht in die Bedeutung der Reihenform des Denkens resultirende Denkbewegung direct in mathematische Untersuchungsgebiete. Sie erfüllt so den Zweck, zu dem sie dienen soll, indem sie die Ueberleitung von dem in der Reihenform des Denkens erkannten Princip des logischen Ordens zu der Mathematik der Zahlenreihe darstellt und dadurch das logische Fundament, auf dem die Mathematik der

Zahlenreihe ruht, bloßlegt. Dasselbe tritt offen zu Tage, wenn man rückwärtsschauend beachtet, dass die Zahlenreihe nichts anderes als die Normalreihe ist, durch welche die Aufgabe gelöst wird, die Reihenform des Denkens in erfassbarer und fixirbarer Weise objectiv darzustellen, und dass die Axiome der Zahlenreihe Folgerungen aus der Beschaffenheit des reihenförmig fortschreitenden Denkens sind, welche die Forderungen ausdrücken, die nothwendig erfüllt werden müssen, falls die Zahlenreihe ein vollkommenes Bild des Bewusstseinszustandes sein soll, der durch das reihenförmig sich bethätigende Denken erzeugt wird.

§ 12.

Wenn nun so die durch die Einsicht in das Wesen der Reihenform des Denkens geweckten, specifisch logischen Bedürfnisse durch die Construction der Zahlenreihe und durch die Aufstellung der die Zahlenoperationen und ihre Gesetze begründenden Axiome ihre Befriedigung erlangen, so sind sie offenbar nicht im Stande, eine Weiterführung des Zahlbegriffs zu motiviren. Es scheint vielmehr das Hervorheben des logischen Fundaments der sogenannten ganzen absoluten Zahlen jede weitergehende Entwicklung des Zahlbegriffs unmöglich zu machen. Denn man kann zwar beispielsweise die Aufgabe stellen, es soll b von a subtrahirt oder b in a dividirt werden, auch wenn a in der Zahlenreihe vor b steht; man kann aber die Aufgabe nicht lösen, weil nun einmal die Zahlenreihe eine mit einem Anfangsglied beginnende Reihe von unmittelbar aneinander sich schließenden Gliedern ist, so dass weder Zwischenglieder als Bruchzahlen eingeschoben, noch auch Glieder als negative Zahlen dem Anfangsglied vorgesetzt werden können. Es findet eben in der Reihenform des Denkens lediglich die Mathematik der Zahlenreihe ihre Begründung.

Der Hinweis auf die Gerade, an der die negativen und gebrochenen Zahlen ebenso wie die ganzen positiven Zahlen ihre anschauliche Deutung finden, kann nichts nützen. Denn eine von einem Nullpunkt ausgehende äquidistante Punktreihe ist kein äquivalentes Bild der Zahlenreihe; die Zahlenreihe ist nämlich durch jedes ihrer Elemente (dem vierten Axiom zufolge) vollständig bestimmt, eine solche Punktreihe aber erst durch Festlegen des

Nullpunktes und des auf ihn folgenden Punktes, oder durch irgend zwei andere fest markirte Punkte, und überdies besitzt die Zahlenreihe (dem ersten Axiom zufolge) kein Nullglied, das dem Anfangsglied Eins vorangehen könnte.

Dies beweist jedoch nicht, dass man überhaupt kein Recht habe, negative, gebrochene, irrationale und imaginäre Zahlen einzuführen; sie werden ja durch mathematische Bedürfnisse gefordert und finden auch thatsächlich praktische Verwerthung. Es folgt daraus vielmehr nur, dass die im Vorhergehenden dargelegten logischen Grundlagen der absoluten ganzen Zahlen die Keime zu der Weiterentwicklung des Zahlbegriffs nicht enthalten. Man scheint somit darauf angewiesen zu sein, ohne Rücksicht auf die logische Bedeutung der Zahlen lediglich in der mathematischen Bedeutung derselben die Motive zu suchen, die von der ganzen absoluten Zahl zu der allgemeinen, reellen und imaginären oder complexen Zahl führen.

Alsdann kann von einer logisch motivirten Entwicklung des Begriffs der allgemeinen Zahl allerdings nicht die Rede sein. Man kann jedoch eine nachträgliche Rechtfertigung der weitergehenden Begriffsbildungen in der Weise versuchen, dass man die specifisch mathematischen Merkmale des Begriffs der absoluten ganzen Zahl hervorhebt und angibt, welche Merkmale unter Festhalten der übrigen fallen gelassen werden können, um so von dem ursprünglich vorhandenen speciellen Begriff zu den allgemeineren Begriffsbildungen zu gelangen.

Es beruht nun die mathematische Bedeutung der absoluten ganzen Zahlen offenbar auf den im Vorstehenden abgeleiteten Operationen, welchen diese Zahlen unterworfen werden und durch welche wiederum solche Zahlen erzeugt werden können. Es ist daher zu beachten, dass es Zahlen sind, von denen man ausgeht, dass es ferner Zahlenoperationen sind, die an denselben ausgeführt werden, und dass es schließlich wiederum Zahlen sind, die als Resultate jener Operationen sich ergeben. Hält man von diesen drei Merkmalen nur das an zweiter Stelle genannte als das mathematisch wesentlichste unter allen Umständen fest, so ist die Möglichkeit vorhanden, entweder bloß das dritte oder bloß das erste oder sowohl das dritte als auch das erste Merkmal fallen zu lassen und so

auf drei verschiedene Arten an Stelle des ursprünglich vorhandenen engeren Zahlbegriffs einen erweiterten Zahlbegriff zu definiren. In allen drei Fällen treten Symbole an Stelle der die Glieder der Zahlenreihe darstellenden absoluten ganzen Zahlen, und eben diese Symbole sind als die allgemeinen Zahlen zu betrachten.

Im ersten Fall bleiben als Merkmale des verallgemeinerten Zahlbegriffs bloß die beiden folgenden: dass es absolute ganze Zahlen sind, die als Material zu Operationen bereit liegen, und dass es die Zahlenoperationen sind, die an ihnen ausgeführt werden sollen. Aus der Verknüpfung jener Zahlen durch diese Operationen ergeben sich nun Ausdrücke oder Formen, die, auch wenn die Operationen thatsächlich nicht ausführbar sind, durch Symbole zusammenfassend bezeichnet und als »allgemeine Zahlen« ebenso wie die absoluten ganzen Zahlen den Operationen unterworfen werden. Es ergeben sich so die negativen, gebrochenen und irrationalen Zahlen in gleichberechtigter Weise als Formen, die aus der Verknüpfung der ganzen absoluten Zahlen durch die Zahlenoperationen des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens und Dividirens resultiren. Sie unterscheiden sich von einander bloß durch die Normalform, auf die sie gebracht werden können. Diese Normalform ist für die negativen Zahlen: $0 - a$ oder mit Unterdrückung der Null: $-a$, für die gebrochenen Zahlen: $\frac{a}{b}$ an Stelle von $a : b$, während die irrationalen Zahlen durch unendlich oftmalige Wiederholung der genannten Operationen aus den absoluten ganzen Zahlen herstellbar sind, also durch unendliche Formen sich darstellen lassen.

Im zweiten Fall lässt man die Bedingung fallen, dass wirklich absolute ganze Zahlen oder auch aus solchen Zahlen gebildete Formen den Zahlenoperationen zu Grunde liegen sollen. Man erhält daher in diesem Fall folgende Merkmale des verallgemeinerten Zahlbegriffs: es sind absolute ganze Zahlen oder aus solchen Zahlen gebildete Formen, die als Operationsresultate sich ergeben, und es sind Zahlenoperationen, die vorgenommen werden und aus denen jene Zahlen oder Formen auch dann resultiren sollen, wenn es unmöglich ist, eine absolute ganze Zahl anzugeben oder eine aus solchen Zahlen bestehende Form »realiter« herzustellen, die den

Operationen unterworfen jene Zahlen oder Formen thatsächlich erzeugt. Man gelangt so zur Forderung von »idealen Formen«, die, durch Symbole bezeichnet und als imaginäre Zahlen definirt, den Charakter einer Zahl dadurch erhalten, dass aus ihnen durch Vornahme bestimmter Operationen bestimmte absolute ganze Zahlen oder aus solchen Zahlen gebildete Formen resultiren sollen. — So gibt es z. B., wenn $a > b$, stets eine wirklich herstellbare Form, die ins Quadrat erhoben die Zahl $a - b$ erzeugt und symbolisch durch das Zeichen $\sqrt{a - b}$ dargestellt wird. Ist aber $a < b$, so wird die wirkliche Darstellung einer solchen Form unmöglich. Es gibt eben keine thatsächlich herstellbare Form, deren Quadrat einer negativen Zahl gleich wäre. Trotzdem fordert das Streben nach Allgemeinheit eine Herstellung der Zahl $(a - b)$ als Quadrat einer anderen Zahl auch dann, wenn $a < b$, und dieser Forderung wird durch Annahme einer idealen Form Genüge geleistet, die ins Quadrat erhoben $a - b$ ergeben soll und in der nämlichen eindeutigen Weise den Zahlenoperationen unterliegt, wie eine reelle Form oder eine absolute ganze Zahl. — Auch die in solcher Weise definirten »idealen Formen« können in eine Normalform gebracht werden. Sie lassen sich nämlich durch $x + i \cdot y$ darstellen, wo x und y absolute ganze Zahlen oder wenigstens reelle Formen vorstellen, während i eine ideale Form darstellt, die durch die Bedingung $i^2 = -1$ definirt ist. Es ergibt sich somit der Begriff der sogenannten complexen Zahl $x + iy$ als Resultat der durch den ersten und den zweiten Fall bedingten Erweiterung des Begriffs der absoluten ganzen Zahl.

Im dritten Fall endlich bleibt als einziges Merkmal bestehen, dass es Zahlenoperationen sind, die ausgeführt werden sollen. Da weder das Material, an welchem operirt werden soll, noch auch die Operationsresultate, die gewonnen werden sollen, irgend welchen Bedingungen unterworfen werden, so können bloß Symbole als Unterlage für die Ausführung der Operationen und als Ergebnisse der ausgeführten Operationen figuriren, und diese Symbole können nur insofern als Zahlen definirt werden, als es Zahlenoperationen sind, denen sie zu Grunde liegen und als deren Resultate sie sich ergeben sollen. Die so in allgemeinsten Weise definirten complexen Zahlen sind aber nichts anderes als die gewöhnlichen in der Form

$x + iy$ darstellbaren complexen Zahlen, so lange die für die absoluten ganzen Zahlen und für die aus ihnen hergestellten oder als herstellbar vorausgesetzten reellen oder idealen Formen gültigen Operationsgesetze in Kraft bleiben. Zu den sogenannten höheren complexen Zahlen, wie sie beispielsweise in Hamilton's Quaternionen und in Grassmann's alternirendem Zahlensystem vorliegen¹⁾, gelangt man erst dann, wenn man jene aus der homogenen Natur der Zahlenreihe gefolgerten Operationsgesetze zum Theil fallen lässt. Da aber von vornherein gar nichts darüber ausgemacht ist, welche Operationsgesetze in Kraft bleiben und welche ihre Geltung verlieren sollen, so herrscht offenbar schrankenlose Willkür, und es ist schließlich jedes System von Operationen gestattet, wenn es nur wirklich ein System ist, dessen Zusammenhang nicht durch Widersprüche gelöst wird. Diese Willkür wird nur einigermaßen gedämmt, dass man mit H. Hankel²⁾ das Princip der Permanenz der formalen Gesetze zum hodegetischen Grundsatz macht und die Operationen mit den Symbolen »solchen formalen Regeln« unterwirft, »dass sie die actualen Operationen an anschaulichen Objecten und den deren Verhältnisse ausdrückenden Zahlen als untergeordnete in sich enthalten können.« Die Zahlenoperationen mit den ihnen von Haus aus eigenthümlichen Gesetzmäßigkeiten werden so zu Specialisirungen allgemeinerer Operationen. Diese allgemeinen Operationen aber bilden das Untersuchungsobject der allgemeinen Operationenlehre, in welcher der Bau der auf die absolute ganze Zahl gegründeten Disciplinen sich zu vollenden scheint.

Durch eine successive Begriffserweiterung kann man somit zum Begriff der allgemeinen Zahl gelangen, wenn man, von der logischen Begründung der absoluten ganzen Zahlen absehend, bloß die specifisch mathematischen Merkmale derselben ins Auge fasst. Fragt man nun aber, was man sich bei diesen allgemeinen Zahlen eigentlich denken soll, so muss man zugestehen, dass sie inhaltsleere Symbole sind. Man kann zwar auf die Anwen-

1) Vergl. die Darstellung dieser Zahlensysteme bei Hankel, Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen, VII. und VIII. Abschnitt.

2) Vorlesungen über die complexen Zahlen, S. 11.

dungen¹⁾ hinweisen, die sie bei der Lösung von Problemen der Geometrie und Mechanik oder auch der Analysis finden können. Solche Anwendungen begründen jedoch bloß den praktischen Werth jener Symbole, nicht aber den logischen, der somit nach wie vor fraglich bleibt.

Es hat sonach den Anschein, als ob eine logische Begründung der über die absolute ganze Zahl hinausgehenden Begriffsbildungen unmöglich sei. Dann wäre es geboten, die arithmetischen Disciplinen, wie Kronecker²⁾ es in Aussicht stellt, »zu arithmetisiren, d. h. einzig und allein auf den im engsten Sinne genommenen Zahlbegriff zu gründen, also die Modificationen und Erweiterungen dieses Begriffs wieder abzustreifen, welche zumeist durch die Anwendungen auf die Geometrie und Mechanik veranlasst worden sind«.

Dies wäre in der That das allein Sachgemäße, wenn die Reihenform des Denkens das einzige Princip des logischen Ordners und somit das einzige Fundament des Zahlbegriffs und der arithmetischen Disciplinen wäre. Es bethätigt sich nun aber das Denken nicht nur auf Grund des Vorhandenseins von Bewusstseinsinhalten im Bewusstsein durch das Fortschreiten von einem Apperceptionsakt zum anderen, sondern auch auf Grund der Verschiedenheit der vorhandenen Bewusstseinsinhalte durch das Verknüpfen nach Grund und Folge. Durch die Reflexion über die Reihenform des Denkens, die zu einer Begründung der Mathematik der Zahlenreihe führte, wird darum bloß das eine der beiden Probleme erledigt, deren Stellung als Frucht der Einsicht in die Bedeutung der Denkformen

1) Die reellen Zahlen finden als Punkte einer Geraden, die complexen Zahlen $x + iy$ als Punkte einer Ebene eine Deutung, welche ihre geometrische Verwendung ermöglicht. — Betreffs der höheren complexen Zahlen erwähne ich beispielsweise, dass Hamilton zu seinen Quaternionen durch das Streben geführt wurde, Operationsarten zu erfinden, die in ähnlicher Weise die Geometrie des Raumes beherrschen, wie die gewöhnlichen complexen Zahlen die Geometrie der Ebene; dass ferner Lipschitz (Untersuchungen über die Summen von Quadraten, 1886, S. 12, 26, 71—74) durch die allgemeine Lösung des Problems, eine Summe von n Quadraten in sich selbst zu transformiren, zur Aufstellung von symbolischen Operationsregeln gelangte, die als specielle Fälle diejenigen der gewöhnlichen complexen Zahlen und der Quaternionen enthalten.

2) Ueber den Zahlbegriff. Philosophische Aufsätze zu Zeller's Jubiläum, S. 265; oder Crelle's Journal, Bd. 103, S. 337.

für das Zustandekommen der logischen Ordnung sich ergab. Das andere Problem harrt noch seiner Behandlung.

Es beruht darauf, dass die im Bewusstsein vorhandenen Bewusstseinsobjecte nothwendig von einander verschieden sein müssen, und dass das Denken diese Verschiedenheiten erfasst, indem es Beziehungen des Grundes zur Folge zwischen den Objecten erzeugt. Es besteht demgemäß darin, dass das nach Grund und Folge verknüpfende Denken in ähnlicher Weise zum Gegenstand der Reflexion gemacht wird, wie es betreffs des reihenförmig fortschreitenden Denkens bereits geschehen ist. Seine Lösung wird das logische Fundament der nur scheinbar als Modificationen und Erweiterungen des Begriffs der absoluten ganzen Zahl sich darstellenden Begriffsbilde aufdecken und so zur Evidenz bringen, dass diese angeblichen Modificationen und Erweiterungen nicht abgestreift werden können, sondern in ähnlicher Weise wie die Zahlenreihe und ihre Glieder, die absoluten ganzen Zahlen, in der Natur des Denkens begründet sind.

(Fortsetzung folgt.)

XIV. 157-241.
