In Sachen des Zeitsinnes und der Methode der richtigen und falschen Fälle, gegen Estel und Lorenz.

Von

G. Th. Fechner.

So schätzbar die Wundt'sche Methode der Minimaländerungen ist, und von jeher habe ich das Verdienst derselben anerkannt, und so viel Vertrauen die im Wundt'schen Institute angestellten Versuche unter der Leitung ihres Vorstandes in Anspruch nehmen, so vermöchte ich mich doch nicht allen, bisher daraus gezogenen Folgerungen zu fügen, und finde mich namentlich in Widerspruch mit den von zwei Schülern dieses Institutes, Estel und Lorenz, in ihren Abhandlungen vertretenen Ansichten, worüber folgends unter deren Namensüberschrift das Nähere.

Estel (Philosoph. Stud. II. 17. 475).

Dr. Estel hat in einer Abhandlung in diesen »Studien« II. 17 ff. mittelst Versuchen nach der Methode der Minimaländerungen nachzuweisen gesucht: 1) dass das Weber'sche Gesetz in Betreff des Zeitsinnes keine Gültigkeit hat; 2) dass der, von Wundt sog. mittlere Schätzungsfehler $\varDelta$ sich mit wachsender Hauptzeit t periodisch vergrößere und verkleinere. Wogegen ich meinerseits in einer Abhandlung der königl. sächs. Soc. d. Wiss. math. physikal. Cl. XIII. 3 ff.[1])

1) Als Separatabdruck unter dem Titel: »Ueber die Frage des Weber'schen Gesetzes und des Periodicitätsgesetzes im Gebiete des Zeitsinns«, Lpz. Hirzel 1884. — Nachträglich folgendes darin zu berichtigen:

S. 12, Z. 7 v. u. statt $\sqrt{\frac{t_o}{t}}$ l. $\sqrt{\frac{t_o}{t_u}}$

» 78 » 22 v. o. » ϑ l. $\mathfrak{D}$.

» 85 » 6 v. u. » Verhältnissschwellen l. Unterschiedsschwellen.

» 86 » 2 v. o. » $(\sqrt{v_o v_u} - 1)^2$ l. $(\sqrt{v_o v_u} - 1)^2$.

nachzuweisen gesucht habe, dass seine Schlüsse in beider Hinsicht unhaltbar sind: 1) sofern der Verf. den unvermeidlichen Versuchszufälligkeiten nicht die erforderliche Beachtung schenkt, 2) sofern er die nothwendige Elimination eines von ihm selbst anerkannten constanten Fehlers nicht erforderlich durchführt. — Hierauf hat der Verf. eine Erwiderung (folgends als »Replik« zur Unterscheidung von seiner Abhandlung bezeichnet) folgen lassen, die zwar meine Haupteinwände gegen seine Untersuchung wenig berührt, die ich aber wegen dessen, was sie mir gegentheils aufbürdet und selbst neu verschuldet, nicht einfach hinnehmen und auf sich beruhen lassen möchte. Einen Anlass, etwas von dem zurückzunehmen, was gegen seine Abhandlung einzuwenden war, habe ich in seiner Replik nicht gefunden, sondern nur neuen Anlass, ihm zu widersprechen.

Nun hat eine, seitdem in diesen Studien erschienene, Untersuchung von Mehner über dieselben Fragen, welche von Estel behandelt worden sind, zu der von Estel behaupteten Periodicität der $\varDelta$ zurückgeführt, was doch nicht hindert, den Estel'schen Nachweis derselben hiernach eben so wenig bindend als früher zu finden, abgesehen davon, dass das von Estel statuirte Gesetz dieser Periodicität von Mehner vielmehr widerlegt als bestätigt wird. Auf Bedenken, die sich auch noch gegen die Mehner'schen, von vornherein ganz schlagend erscheinenden, und jedenfalls größeres Gewicht als die Estel'schen in Anspruch nehmenden, Ergebnisse erheben lassen, gehe ich für jetzt nicht ein, da es sich hier eben nicht um die Mehner'sche, sondern Estel'sche Untersuchung handelt.

Die Entgegnung Estel's gegen meine Kritik seiner Abhandlung dürfte sich auf folgende 8 Punkte bringen lassen, die ich nach der Ordnung aufführe, in der sie vom Verf. aufgestellt worden sind, indess ich hinsichtlich der Weise, wie sie von ihm aneinandergeschlossen und zum Theil auseinander gefolgert sind, auf die Replik des Verf. selbst verweisen muss, um nicht die ganze Replik in extenso wiederzugeben. Folgends vorkommende Einschaltungen zwischen eckigen Klammern in wörtlichen Anführungen aus der Abhandlung oder Replik des Verf. sind von mir selbst zugefügt.

1) Vor Allem glaubt Estel »ein Missverständniss hinsichtlich der Auffassung des mittleren Schätzungsfehlers $\varDelta$« meinerseits constatiren zu müssen, ein Vorwurf, den ich ihm, wenn überhaupt einer in dieser

Hinsicht zu machen, nur zurückgeben kann. Um diesen Punkt ins Klare zu stellen, ist auf auf die sachliche Bedeutung des Δ als Function bestimmter Beobachtungswerthe zurückzugehen, worüber zwischen Estel und mir insofern kein Widerstreit besteht, als er zwar in seiner Abhandlung diese sachliche Bedeutung nur einseitig ins Auge fasst, aber in seiner Replik (wenigstens indirect) auch die zweite Seite derselben, die ich in meiner Abhandlung zugleich mit der ersten zur Geltung gebracht habe, anerkannt hat.

Estel selbst nämlich definirt in seiner Abhandlung den Werth Δ durch folgende Formel

$$\Delta = \frac{t_o + t_u}{2} - t = T - t \quad . . (1)$$

worin t die in die Versuche eingeführte sogenannte Hauptzeit, t_o, t_u die damit in den Versuchen gleichgeschätzten, doch um die Unterschiedsschwellen objectiv davon verschiedenen, sogenannten Vergleichszeiten nach oben und unten sind, indess $T = \frac{t_o + t_u}{2}$ der von Wundt sogenannte Schätzungswerth der Zeit ist.

Heiße nun d_0 die obere, d_u die untere Unterschiedsschwelle, so ist, wenn beide nach absolutem Werthe, also als positiv genommen werden, wie es nach meiner Abhandlung S. 13 sachgemäß ist,

$$\left.\begin{array}{l} d_0 = t_0 - t;\ d_u = t - t_u; \\ t_0 = t + d_0;\ t_u = t - d_u; \end{array}\right\} \quad . . (2)$$

und, durch Substitution dieser Werthe von t_0, t_u in (1),

$$\Delta = \frac{d_o - d_u}{2} \quad . . . (3).$$

Wie nun Δ nach Gleichung (1) als Differenz zwischen dem Schätzungswerth T und dem wirklichen Werthe der Hauptzeit t erklärt werden kann, so nach (3) als halbe Differenz zwischen der oberen und unteren Unterschiedsschwelle.

Zur vollständigen Entwickelung der factischen Bedeutung von Δ gilt es, beide Formeln (1) und (3) ins Auge zu fassen, wie das von vorn herein in meiner Abhandlung geschehen ist, indess Estel in seiner Abhandlung gar nicht auf (3) gekommen, mithin auch nicht auf die Folgerungen daraus eingegangen ist, vielmehr alle seine Folgerungen bloß aus (1) zieht und die Bedeutung des Δ ausschließlich davon abhängig macht. Erst in seiner Replik erkennt er, wie ja nicht anders möglich, die Gültigkeit von (3) nachträglich (indirect) dadurch an, dass er (S. 476), freilich ganz unvermittelt, sagt: »$\varDelta$ hänge von der Differenz der absoluten Unterschiedsschwellen ab.« Auch steht mit dieser Anerkenntniss nicht in Widerspruch, wenn er doch S. 476 setzt[1]) $\varDelta = \frac{d_o + d_u}{2}$ statt $\frac{d_o - d_u}{2}$, indem er d_u sozusagen unter dem, ihm voranstehenden $+$ Zeichen als an sich negativ nimmt, womit beide Werthe von $\varDelta$ sachlich auf dasselbe herauskommen.

Natürlich nun ist die Unterschiedsempfindlichkeit und hiermit subjective Schätzungsgenauigkeit der Zeit um so größer, je kleiner die Unterschiedsschwelle nach einer und der andern Seite ist, im Mittel also um so größer, je kleiner $\frac{d_o + d_u}{2}$ ist, wogegen die Genauigkeit des Resultats der Schätzung, was ich kurz die Genauigkeit der objectiven Schätzung nennen will, um so größer ist, je weniger T als Mittel der beiden Vergleichswerthe t_0 und t_u von dem Hauptwerthe t abweicht, also je kleiner $\varDelta = T - t$ ist.

Beides ist, denk' ich, einleuchtend, und der hiermit zusammenhängende Unterschied zwischen zwei, der Schätzungsgenauigkeit reciproken, Fehlern in meiner Abhandlung S. 11 und 12 eingehend besprochen. Wie kann also Estel meine Auffassung des $\varDelta$ für missverständlich erklären, da ich auf seine eigene Auffassung des $\varDelta$ als mittleren Schätzungsfehler eingegangen, sie auseinandergesetzt, als eine in gewissem Sinne zulässige anerkannt, nur zugleich auch einer, von Estel vernachlässigten, Auffassung des mittleren Schätzungsfehlers in einem anderen Sinne ihr Recht gegeben habe. Wenn also Estel trotzdem seine Replik mit dem Vorwurf des Missverständnisses der Auffassung des $\varDelta$ meinerseits beginnt, so kann ich mir denselben nur so zurechtlegen, er suche ihn darin, dass ich die Rücksicht auf die objective Genauigkeitsschätzung durch $\varDelta = T - t$ nicht mit gleicher Ausschließlichkeit oder doch Einseitigkeit vor der subjectiven durch $\frac{d_o + d_u}{2}$ zur Geltung bringe, als von ihm geschieht, worin ich doch nur eine Untrifftigkeit seinerseits finden kann.

Hinsichtlich der Specialdiscussion über den betreffenden Punkt

---

1) Nachdem ich in meiner Abhandlung S. 13 gezeigt, dass dies an sich unstatthaft, wie auch in Widerspruch mit dem Gebrauche seitens Wundt, ist, hätte Estel wohl Ursache gehabt, in seiner Replik davon abzugehen.

muss ich bemerken, dass Estel mir S. 475 mit seinem »Aber t ist doch weder $= t_0$ noch $= t_u$, sondern t_0 ist eben merklich größer, t_u aber kleiner als t«, unterschiebt, dass ich t_0 und t_u mit t objectiv gleich halte, während ich nur von Gleichschätzung spreche, und dass von seiner Bemerkung S. 476: »Es ist aber wohl denkbar, dass gerade bei der Zeit ϑ [wo $\varDelta$ null ist] die Unterschiedsempfindlichkeit eine geringe ist, und bei einem anderen Intervalle, für welches $\varDelta$ einen großen Werth hat, eine verhältnissmäßig geringe Aenderung von t bemerklich wird«, dass, sage ich, von dieser Bemerkung nur der erste Theil richtig, der zweite aber falsch ist, weil er in Widerspruch mit der, neuerdings von Estel selbst indirect anerkannten, Gleichung (3) ist. Denn $\varDelta$ kann danach nicht groß sein, ohne dass die obere Unterschiedsschwelle d_0 in starkem Uebergewicht gegen die untere ist, wonach jedenfalls nach oben hin, und allgemein gesprochen im Mittel, nur eine verhältnissmäßig große Aenderung von t bemerklich werden kann.

2) Nach S. 57 der Estel'schen Abhandlung bedürfen die Unterschiedsschwellen d_0, d_u einer Correction wegen des $\varDelta$, sofern sie von diesem mit abhängen, wogegen ich mich schon in meiner Abhandlung S. 10 Anmerk. mit der Bemerkung erklärt habe, man habe allerdings sowohl d_0 als d_u, und hiermit $\varDelta = \frac{d_0 - d_u}{2}$ wegen eines darein eingehenden constanten Fehlers zu corrigiren, indess ich der Correction von d_0 und d_u wegen $\varDelta$ keinen Sinn abzugewinnen vermöge. Doch kommt der Verf. S. 477 seiner Replik auf diese Correc ion mit wesentlich folgender Motivirung zurück. Sofern $\varDelta$ von d_0 und d_u abhängt, findet auch das Umgekehrte statt, und müssen also, sofern $\varDelta$ ein Schätzungsfehler ist, d_0 und d_u wegen dessen Einfluss corrigirt werden, um auf die wahren, d. i. von diesem Fehler befreiten, Unterschiedsschwellen zu kommen. Wenigstens weiß ich seine Motivirung nicht anders zu verstehen. Nun aber, was heißt das anders als: d_0 so wie d_u müssen wegen des Einflusses von $\frac{d_0 - d_u}{2}$ corrigirt werden, da $\varDelta = \frac{d_0 - d_u}{2}$ ist. Dass dies wirklich keinen Sinn hat, wird wohl jeder zugeben. Auch hat Estel die betreffende Correction nur postulirt, nicht ausgeführt.

Kaum minder unverständlich aber erscheint mir der Weg, wie

Estel auf derselben S. 477 seiner Replik den Einfluss von $\varDelta$ auf die rohen Verhältnissschwellen v_o, v_u eliminiren will, um dadurch auf die wahre mittlere Verhältnissschwelle v und hiermit auf $v - 1$ zu kommen. Estel sagt: »Ich habe diese Elimination [des Einflusses von $\varDelta$] in meiner Arbeit nach dem Principe der Verhältnissmittelziehung vorgenommen [1]), glaube aber, dass man einfacher folgendermaßen verfahren kann. Aus den beobachteten rohen Unterschiedsschwellen d_o und d_u erhält man die mittlere $\frac{d_o + d_u}{2}$, diese entspricht aber nicht der Zeit t, sondern der Zeit $T = \frac{t_o + t_u}{2}$, wir erhalten also das von $\varDelta$ freie $v - 1 = \frac{d_o + d_u}{2\,t + d_o - d_u}$, worin für d_o und d_u ihre absoluten Werthe zu setzen sind«.

Nun ist aber zuvörderst $\frac{d_o + d_u}{2}$ nicht $= T = \frac{t_o + t_u}{2}$, sondern $= \frac{t_o - t_u}{2}$, da man nach den absoluten Werthen von d_o und d_u; auf die sich Estel hier selbst (abweichend von S. 476 der Replik) bezieht, nach den obigen Formeln (2) hat:

$$d_o = t_o - t: \text{ und } d_u = t - t_u;$$

ferner bleibt mir, selbst unter Voraussetzung obigen Werthes von $\frac{d_o + d_u}{2}$, bis auf Weiteres unklar, wie auf obigen Werth von $v - 1$ zu kommen. Sei es aber, dass Estel einen Weg dazu anzugeben vermag, den ich selbst nicht finde, so wüsste ich nicht, wiefern er zugleich einfacher und rationeller sein könnte, als der von ihm früher mit mir gemeinsam eingeschlagene Weg, das reine v und hiermit $v - 1$ aus den rohen Werthen v_o und v_u zu erhalten, und damit $= \sqrt{\frac{t_o}{t_u}}$ zu setzen. Und endlich, was abgesehen von allem Vorigen durchschlägt, wie kann Estel behaupten, dass in seinem obigen Ausdruck für $v - 1$

1) Hiermit kann Estel nur meinen (oder was sonst könnte er meinen?), dass er in seiner Abhandlung, mit mir übereinstimmend, $v_o = \frac{t_o}{t}$ und $v_u = \frac{t}{t_u}$ als mit einem entgegengesetzten Verhältnissfehler behaftet ansieht, und hiernach die reine mittlere Verhältnissschwelle $v = \sqrt{v_o\, v_u}, = \sqrt{\frac{t_o}{t_u}}$ setzt, was freilich keine Elimination des $\varDelta$, sondern nur eine solche des Verhältnissfehlers ist.

der Werth Δ eliminirt sei? Denn setze man darin für $d_o - d_u$ den gleich geltenden Werth 2 Δ, so hat man

$$v - 1 = \frac{d_o + d_u}{2\,(t + \Delta)}$$

und bleibt also Δ im Werthe von $v - 1$.

3) Auf S. 478 kommt Estel auf den, unter 1) erhobenen Vorwurf einer unrichtigen Auffassung des Δ aus einem anderen Gesichtspunkte als oben wie folgt zurück. »Aus der ganzen Berechnung Fechner's geht hervor, dass er Δ betrachtet als einen durch äußere Umstände, wie Anordnung der Versuche, Störungen u. dgl. hervorgerufenen Fehler; in Wirklichkeit ist aber Δ, wie schon aus den Vierordt'schen Versuchen zur Genüge hervorgeht, ein Fehler, der in unserem Bewusstsein begründet ist; der durch äußere Umstände in seinem absoluten Werthe wohl beeinflusst werden kann, aber im Grunde ein unveränderlicher, ein constanter Fehler ist«. Und unstreitig ist er es, so lange die inneren Verhältnisse des Bewusstseins und die äußeren Verhältnisse, welche das Bewusstsein bei den Zeitversuchen afficiren, dieselben bleiben. Sofern aber der Verf. selbst nichts anderes als eben dies behaupten kann, stimme ich ganz mit ihm überein, und der Irrthum Estel's liegt nur darin, dass er annimmt, ich thue es nicht. In der That halte ich den Fehler Δ wie alle psychophysischen Werthe der äußeren Psychophysik einerseits durch äußere Umstände bedingt, wie Estel auch thut, nur dass er statt »einerseits bedingt« setzt »beeinflusst«, andererseits durch immanente Verhältnisse unseres Bewusstseins, wodurch die Auffassungsweise der äußeren Verhältnisse bedingt wird. Hierüber ließe sich noch weitläufig sein, aber wozu?

4) Auf derselben S. 478 sagt Estel: »Der von Fechner vorgeschlagene Wechsel in der Lage der Normal- und Vergleichszeiten ist durch die Natur des Zeitproblems selbstverständlich ausgeschlossen. Wenn man eine Zeit aus der Erinnerung schätzen will, so muss diese Zeit zuvor gegeben sein«. Letzteres ist richtig, ist aber auch der Fall, wenn ich, wie ich nicht nur vorgeschlagen, sondern in anderen Versuchsgebieten wirklich ausgeführt habe, und warum soll es im Zeitgebiete weniger ausführbar sein, bei jedem einzelnen Vergleiche die veränderliche Vergleichsgröße der constanten Normalgröße t vorausgehen lasse und, je nachdem mir diese kleiner oder größer als die vorherige Vergleichsgröße erscheint, diese in der Richtung abändere,

dass ihre Erscheinung der Erscheinung der Normalgröße t näher kommt, und dies so lange wiederhole, bis die Gleichheit der Erscheinung möglichst vollkommen ist. Da ich dies Verfahren S. 80 meiner Abhandlung beschrieben habe, warum nimmt der Verf. nicht darauf Rücksicht?

Freilich auch Mehner glaubt mir (S. 573 seiner Abhandlung) in betreffender Hinsicht widersprechen zu müssen; aber aus bloßem Missverständniss. Denn näher zugesehen ist ja Mehner's B-Verfahren eben nichts Anderes, als das Verfahren, was ich bei Estel vermisse und was nach Estel nicht möglich sein soll, indess Mehner's B-Verfahren die wirkliche Ausführbarkeit davon beweist. Ja der, von der Zeitfolge abhängige, constante Fehler, auf den sich nach Estel's Versuchen nur indirect schließen ließ, weil Estel die betreffende Umkehr der Zeitfolge nicht vorgenommen hat, lässt sich aus Mehner's Versuchen, der sie vorgenommen hat, direct nachweisen und bestimmen, worauf anderwärts näher einzugehen.

5) In m. Abh. S. 100—101 bezeichne ich den Werth $\varDelta$, nachdem er auf dem von mir angegebenen Wege wegen des constanten Verhältnissfehlers, der in seine Elemente eingeht, corrigirt worden ist, mit $\mathfrak{D}$, und finde ihn

$$\mathfrak{D} = \frac{(v-1)^2}{2v} t$$

hiernach nothwendig positiv. Unter v ist die reine oder sog. wahre mittlere Verhältnissschwelle verstanden. Unstreitig hierauf bezieht sich Estel, wenn er noch auf derselben Seite 478 sagt: »1) Will man, wie Fechner es thut, aus dem wahren Werthe der relativen Verhältnissschwelle $v-1$ rückwärts den zugehörigen [wahren] Werth von $\varDelta$ [d. i. $\mathfrak{D}$] berechnen, so muss sich überall [das wahre] $\varDelta = 0$ ergeben [!], wenn anders die zur Berechnung von v angewendete Methode richtig sein soll, denn jede Berechnung von v_o und v_u setzt $\varDelta = 0$ voraus [!]. Ergeben sich also, wie bei Fechner, positive Werthe für das sogenannte corrigirte $\varDelta$, so ist die Methode der Verhältnissmittelziehung entweder nicht berechtigt oder wenigstens nicht genau genug«.

Aber wie kommt denn Estel zu den von mir mit [!] bezeichneten ganz nichtigen Behauptungen?

Näher zugesehen stellt sich die Sache so: Zu den reinen oder sog.

wahren Werthen der oberen und unteren Verhältnissschwellen v_o, v_u gelangt man durch Correction der rohen Werthe wegen des ihnen anhaftenden Verhältnissfehlers, eine Correction, die Estel selbst wenigstens früher zugelassen hat. Hierdurch werden in den Grenzen der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes beide Schwellen einander gleich. Wenn aber die reinen oder wahren v_0 und v_u einander gleich sind, können nicht zugleich die reinen Unterschiedsschwellen d_o, d_u einander gleich sein, mithin nicht das reine Δ (d. i. $\mathfrak{D}$) als Unterschied beider null sein, während Estel behauptet, jede Berechnung von v_0 und v_u setze $\Delta = 0$ voraus.

In der That hat man (immer corrigirte Werthe vorausgesetzt)

$$v_0 = \frac{t_0}{t} = \frac{t + d_0}{t} \text{ und } v_u = \frac{t}{t_u} = \frac{t}{t - d_u} .$$

Dies gibt bei der Gleichsetzung von v_0 mit v_u

$$t^2 = (t + d_0)(t - d_u) ,$$

mithin

$$t(d_0 - d_u) - d_0 d_u = e ,$$

mithin, da $d_0 - d_u = 2\Delta$,

$$\Delta = \frac{d_0 d_u}{2t} ,$$

also könnte Δ nur null sein, wenn d_0 oder d_u oder beide null wären; was aber nur bei $t = 0$, wobei keine Versuche Platz finden, der Fall sein könnte. Unstreitig an sich ein interessantes Resultat, dass im Fall reiner Werthe, wofür ich aber lieber deutsche als lateinische Buchstaben verwende, für den, beim Weber'schen Gesetze nothwendigen Fall, dass $v_0 = v_u$, beide Werthe

$$\mathfrak{d}_0 - \mathfrak{d}_u \text{ und } \frac{\mathfrak{d}_0 \mathfrak{d}_u}{t} \text{ oder } t(\mathfrak{d}_0 - \mathfrak{d}_u) \text{ und } \mathfrak{d}_0 \mathfrak{d}_u$$

einander gleich sind.

Der von Estel mit vorigem Einwurf in Verbindung gesetzte Einwurf gegen die, von mir zur besseren Ausgleichung der Zufälligkeiten vorgenommene Mittelziehung aus den durch verschiedene Beobachter erhaltenen Werthen von v resp. $v - 1$ aber würde freilich im Rechte sein, wenn ich die Periodicitätsfrage der v danach untersucht hätte, statt dass ich die Gültigkeitsfrage des Weber'schen Gesetzes danach untersucht, und die Statthaftigkeit der betreffenden Mittelziehung für diesen Zweck noch besonders S. 50 m. Abh. nachgewiesen habe.

6) In m. Abh. habe ich behauptet, dass die Periodicität von $\varDelta$, sollte eine solche stattfinden, solidarisch mit einer Periodicität von v sein würde. In der That, wenn $\varDelta = \frac{d_o - d_u}{2}$ periodisch ist, müssen auch d_o oder d_u oder wenigstens einer von beiden Werthen periodisch sein, dann aber auch v und $v—1$ als Functionen von d_o d_u periodisch sein, sofern

$$v = \sqrt{\frac{t + d_o}{t - d_u}} \ldots \text{(a)}\,.$$

In der That habe ich geglaubt und glaube noch, es sei selbstverständlich und bedürfe keines besonderen Beweises, dass die Function eines periodischen Werthes oder auch zweier von einander unabhängigen periodischen Werthe ihrerseits periodisch sei. Doch glaubt Estel S. 479 seiner Replik einen Ausnahmefall von jener Solidarität entdeckt zu haben. Setze man nämlich

$$d_o = \alpha t - t - \alpha d_u \qquad \text{(b)}$$

und nehme für α einen constanten Werth oder eine nicht periodische Function von t und d_u an, indess d_o und mithin $\varDelta$ periodisch bleiben, so ergibt sich daraus durch Substitution von d_o in (a)

$$v = \sqrt{\frac{t + d_o}{t - d_u}} = \sqrt{\alpha}, \qquad \text{(c)}$$

also v constant oder nicht periodisch.

Aber es ist doch vor Allem erst die Frage, ob die Gleichung (b) unter Voraussetzung eines nicht periodischen α bei periodischem d_o bestehen kann; ob nicht vielmehr α als Function des periodischen d_o, was sie nach (b) ist, wenn man α auf eine Seite bringt, selbst nothwendig periodisch ist. Also setzt der Beweis des Verf. das zu Beweisende voraus. Und gesetzt, es gäbe einen Ausnahmefall, wie ihn Estel voraussetzt, was wäre damit gethan, wenn weder eine theoretische noch experimentale Andeutung vorliegt, dass dieser Ausnahmefall in den Versuchen Platz hat.

7) Wenn Estel einen, S. 71, 72 in Bezug auf unzulängliche Bestimmung der Indifferenzpunkte von mir erhobenen Vorwurf damit glaubt »zurückweisen« zu können, dass er das, was ich in s. Abh. vermisst habe, in s. Replik S. 480 wenigstens theilweise nachholt, so beweist er damit vielmehr die Triftigkeit des Vorwurfs der früheren Versäumniss; und entschieden muss ich gegen den Schluss seiner

Ablehnung dieses Vorwurfs protestiren, wo er sagt: »Endlich hielt ich mich berechtigt, den Indifferenzwerth für *Tr* aus Wundt's physiologischer Psychologie. Band II, S. 286 zu entnehmen, wo er nicht, wie Fechner irrthümlich angibt, in verschiedenartigen, sondern in durchaus den meinigen gleichartigen Beobachtungen bestimmt ist.« Aber wie kann Estel das sagen, nachdem ich S. 72 m. Abh. mit ausdrücklicher Beziehung auf die betreffende Stelle bei Wundt constatirt habe, dass der Indifferenzpunkt von *Tr* früher bei einem Verfahren erhalten worden war, wo eine der Hauptzeit *t* gleiche Zwischenzeit zwischen Hauptzeit und Vergleichszeit eingeschaltet wurde, während bei den neuen Versuchen die Zwischenzeit fehlte. Nach Wundt's ausdrücklicher Angabe aber ändert sich der Indifferenzpunkt mit der Größe der Zwischenzeit und wird sich also natürlich auch ändern, je nachdem eine solche da ist oder fehlt.

8) Estel entschuldigt noch auf S. 480, 481 seiner Replik manche Unvollkommenheiten des Versuchsverfahrens durch äußere Verhältnisse; wogegen nichts zu sagen; nur bleiben es deshalb doch Unvollkommenheiten, von denen man immerhin zugeben mag, dass nicht zu viel darauf ankam; aber damit sind die wesentlichen Einwände gegen seine Untersuchung nicht gehoben. Außerdem gibt er S. 476, 481 eine, in meiner Abhandlung von mir noch vermisste, Aufklärung über manche Punkte seines Verfahrens, wogegen natürlich auch nichts anderes zu sagen, als dass sie schon früher zu wünschen gewesen wäre.

Hiernach nur noch folgende Bemerkung: Soviel ich in meiner Abhandlung gegen die Arbeit Estel's einzuwenden gefunden, habe ich doch nicht ermangelt, schließlich »die Treue, den Eifer und die Beharrlichkeit« hervorzuheben, womit derselbe im Sinne einer an sich guten Methode experimentirt hat, und ich glaube, es wäre ein Gewinn gewesen, wenn der Verf. sich dabei beruhigt hätte, statt meine Kritik aus Gesichtspunkten anzufechten, welche den Anlass zur Kritik nur gesteigert und gehäuft haben. Denn damit wäre uns Beiden Zeit und Mühe und dieser Zeitschrift Raum erspart worden.

Lorenz (Philos. Stud. II. 390, 655).

Dass ich die folgende Controverse nicht leicht nehme, motivirt sich jedenfalls dadurch, dass die Frage, auf die sie sich bezieht, eine fundamentale für die ganze Verwendung und Verwerthung der Methode der richtigen und falschen Fälle ist; ja meines Erachtens würde diese Methode den größten Theil ihrer Brauchbarkeit verlieren, wenn die Abhandlung, gegen die ich mich folgends wende, Recht in Bezug auf dieselbe hätte. Jedoch zur Sache.

Gauß hat bekanntlich ein Gesetz der Beziehung zwischen verhältnissmäßiger Zahl und Größe der Beobachtungsfehler δ aufgestellt, nach welchem das sog. Präcisionsmaß h, als ein, mit der durchschnittlichen Größe der Fehler umgekehrt proportionaler Werth $\left(=\frac{1}{\delta_m \sqrt{\pi}}\right)$ ein Maß der Genauigkeit der Beobachtungen gibt. Meinerseits habe ich dies Maß auf die Empfindlichkeitsmessung nach der Methode der r. u. f. F. übertragen, und in meinen »Elem. d. Ps.« I. S. 104 ff., eingehender und schärfer aber in meiner »Revision« S. 86 ff., gezeigt, wie der Uebergang vom Maße im einen Gebiete zum andern zu nehmen.

Nun wird man unstreitig nicht geneigt sein, die Gültigkeit des Gauß'schen Gesetzes (kurz G. G.) für Beobachtungsfehler zu beanstanden; ebenso wenig wüsste ich, was man gegen die Principien, nach denen ich dasselbe auf die Methode der r. u. f. F. übertragen habe, einwenden könnte; auch hat Lorenz in seiner Abhandlung, bezüglich dieses Gesetzes, nichts dagegen eingewandt; glaubt aber nachweisen zu können, dass sich doch eine Folgerung des G. G. in Anwendung desselben auf diese Methode nicht bestätige, dasselbe daher hier zu verlassen sei; und dies ist der Punkt, um den es sich im Folgenden handeln wird, da ich seinen Nachweis für misslungen halte.

Dabei setze ich zwar, um nicht ab ovo anzufangen, im Allgemeinen eine Kenntniss der Lorenz'schen Abhandlung voraus, werde aber leichterer Orientirung halber über die hier einschlagenden wesentlichsten Punkte derselben noch in besondern Bemerkungen zurückkommen, und bezeichne Kürze halber die (von Lorenz behauptete) Ungültigkeit des G. G. in Anwendung auf unsere Methode als Ungültigkeit desselben schlechthin.

In die, das G. G. ausdrückende Integralformel geht der Werth $t = hD$ ein; darin ist t nach der, auf das G. G. gegründeten, Fundamentaltafel[1]) aus $\frac{r'}{n}$ ableitbar, wenn unter $\frac{r'}{n}$ die Verhältnisszahl der eigentlich richtigen Fälle $\frac{r}{n}$ mit Zurechnung der halben Zahl der zweideutigen Fälle verstanden wird. h hat die obige Bedeutung[2]). $D = Q' - Q$ ist der Unterschied zwischen den beiden, von mir kurz mit Q und Q' zu bezeichnenden, Schallreizen, von denen jedoch (mit Rücksicht auf die Bestimmungsweise derselben nach Oberbeck'schem Princip) vom Verf. der constant gehaltene Q mit Ph^{ε}, der variirte Q' mit pH^{ε} bezeichnet wird.[3]) t und D also sind durch Ableitung aus Beobachtungen als gegeben anzusehen und hiernach $h = \frac{t}{D}$ aus t und D zu berechnen. Wenigstens principiell soll es so sein; der Verf. freilich hat den Weg, D direct als Unterschied aus den Schallreizwerthen Q', Q, d. i. pH^{ε}, Ph^{ε} zu bestimmen, in den für ihn maßgebenden Tabellen verlassen; doch wird dies erst später zur Sprache zu bringen sein.

Nun ist eine Folgerung des G. G., dass, wenn der eine Reiz Q constant erhalten wird, während der andere Q' und mithin $D = Q' - Q$ sich ändert, doch $h = \frac{t}{D}$ constant bleibt, so lange die Unterschiedsempfindlichkeit constant bleibt, indem sich t dann proportional mit D ändert und das, aus $\frac{r'}{n}$ nach der Fundamentaltabelle abzuleitende, $t = hD$ proportional mit dem unabhängig davon bestimmten D geht, vorausgesetzt nur, dass D bei seiner Aenderung klein gegen Q und Q' bleibt.

---

1) Siehe meine Elem. I, 104 ff. oder Revision 66 ff.

2) Zu erinnern ist jedoch hierbei, dass der Verf. die Bezeichnung h nicht bloß in diesem Sinne, sondern auch für die Fallhöhe der größeren Kugel braucht, und dem Zusammenhange überlässt, zwischen beiden Bedeutungen zu entscheiden.

3) In diesen Ausdrücken bedeutet h die Fallhöhe der größeren Kugel P, so wie H die Fallhöhe der kleineren Kugel p, mit Rücksicht, dass der Schall einer größeren Kugel bei kleinerer Fallhöhe dem Schall einer kleineren Kugel bei größerer Fallhöhe gleich gemacht werden kann, indess (nach S. 443) $\varepsilon = \frac{\log \frac{P}{p}}{\log \frac{H}{h}}$ für diesen Fall ist, was die bekannte Oberbeck'sche Formel ist. Dieser Werth ε ist durch vorläufige Versuche innerhalb der Grenzen der Werthe P, p, H, h bestimmt, von welchen bei der Methode d. r. u. f. F. Gebrauch gemacht wird, worüber insbesondere S. 444, 445 zu vergleichen.

Diese Folgerung nun ist es, die Lorenz durch seine Versuche nicht bestätigt findet. Um es zu beurtheilen, ist ein Blick auf die Haupttabellen zu werfen, auf welche der Verf. sich stützt, das sind die Tabellen XI—XIV, S. 448—451. In diesen, für 4 verschiedene Versuchsreihen geltenden, Tabellen sind nämlich für eine Reihe abgeänderter Q' (d. i. pH^{ε}) bei constantem Q (d. i. Ph^{ε}) die h mit den t und D, aus denen sie als Werthe $\frac{t}{D}$ abgeleitet sind, verzeichnet, und zwar specificirt für die 4 Hauptfälle, die in jeder der 4 Hauptreihen je nach den 4 Versuchslagen zu unterscheiden sind. Diese Tabellen sind wegen mannigfacher Versehen weiterhin (S. 655 ff.) berichtigt, und, um es im Voraus zu bemerken, ist die Berücksichtigung derselben folgends stets mit Rücksicht auf diese Berichtigungen geschehen.

Mag man nun die eine oder andere der 4 Haupttabellen im Ganzen oder jede ihrer 4 Abtheilungen (Hauptfälle) im Besonderen in Betracht ziehen, so zeigt $h = \frac{t}{D}$ die mannigfachsten Aenderungen.

Der Verf. argumentirt aber aus demselben Gesichtspunkte gegen das G. G. nicht bloß nach seinen eigenen Schallversuchen, sondern auch nach meinen früheren Gewichtsversuchen. Nach ihm (S. 412) »sprechen dieselben vielmehr gegen als für das Gesetz«. Um ihm nun vor Allem hierüber Rede zu stehen, und zugleich gewisse, in die Controverse einschlagende, Unterschiede zwischen beiden Versuchsgebieten zu erläutern, mögen folgende Vorbemerkungen darüber Platz finden.

Insofern überhaupt Versuche in beiden Gebieten zur Feststellung oder Prüfung gesetzlicher Verhältnisse zu dienen haben, hat jedes von beiden gewisse Vortheile und Nachtheile, die erwogen werden müssen, um ihre Resultate einander gegenüber richtig beurtheilen zu können. Der Hauptnachtheil der Gewichtsversuche gegen die Schallversuche liegt darin, dass das Spiel der Zufälligkeiten bei jenen viel größer, und damit schwerer gleichförmig und vergleichbar für verschiedene Versuchsabtheilungen zu erhalten ist. Während bei den Schallversuchen der Schall immer durch dieselbe glatte Luft und den constanten Gehörapparat zum percipirenden Nerven gelangt, schiebt sich bei den Gewichtsversuchen der Angriff der Hand am Handgriff der Gewichtsgefäße ein, wobei Drehung und Druck der Hand, Zustand der Hand selbst, Hebungsrichtung der Gefäße, Alles mehr oder weniger wechselbar ist, und sich bei aller Vorsicht nicht immer unveränderlich herstellen lässt, was unstreitig der Hauptgrund ist, dass man zur Ausgleichung dieser Zufälligkeiten eine viel größere Anzahl von Versuchen nach unserer Methode bedarf, als in anderen Gebieten. Namentlich aber leiden die einhändigen Versuche, bei welchen dieselbe Hand von einem zum andern der neben einander stehenden Gewichtsgefäße überzugehen hat, an dem Nachtheile, dass das eine mit etwas anderer Drehung des Handgelenks und anderer Stellung der Hand gehoben wird, als das andere, und obwohl natürlich diesem Uebelstande so gut als möglich durch regelmäßigen Wechsel zwischen rechter und linker Lage des Mehrgewichtes begegnet wird, beweist doch der Umstand selbst, dass die einhändigen Versuche meist minder gute Resultate geliefert haben, als die zweihändigen, wo dieser Nachtheil wegfällt, dass er nicht ganz beseitigt worden ist.

Allerdings kommt ein entsprechender Nachtheil, nur in anderer Form, auch bei den Schallversuchen durch Mängel der Versuchstechnik zur Geltung, deren der Verf. S. 447 gedenkt, scheint aber doch nicht gleich stark zu wiegen.

Ein anderer Nachtheil der Gewichtsversuche gegen die Schallversuche liegt darin, dass, während beide den constanten Zeitfehler und einen, von der Richtung des Aufsteigens oder Absteigens mit den Reizwerthen abhängigen, constanten Fehler gemein haben, welche durch Entgegensetzung bei den Versuchen zu eliminiren sind, die Gewichtsversuche noch einem constanten Raumfehler unterliegen, von dem die Schallversuche frei sind, wodurch sich die Aufgabe der Elimination für erstere vergrößert. Hiegegen sind drei Nachtheile der Schallversuche in Gegenrechnung zu bringen.

1) Die Verhältnisse, unter denen die Aufmerksamkeit bei den Gewichtsversuchen, wenigstens wie ich selbst sie angestellt habe, in Wirkung tritt, sind ohne Vergleich günstigere, als bei den Schallversuchen. In der That:

Ich hebe beide Gewichte nach fester Regel tactmäßig nach einander und bei jeder Hebung der Hand richtet sich in gleichem Tacte die Aufmerksamkeit auf die Schwere des gehobenen Gewichtes; beides ist solidarisch; der psychische Mechanismus geht Hand in Hand mit dem physischen; sie passen sich von selbst einander an, und da jede Hebung wie Niedersetzung eine Secunde dauert (wonach wieder eine

Secunde bis zur Hebung des zweiten Gewichtes verfließt), hat die Aufmerksamkeit auch Zeit, der Seele das Gefühl der Schwere des Gewichtes einzuprägen. Das Vergleichsurtheil wird somit nicht erst nach Hebung des zweiten Gewichtes gefällt, sondern es wird während der Hebung des zweiten Gewichtes selbst darauf reflectirt, ob es schwerer oder leichter als das erste erscheint, und der von mangelnder Erinnerung abhängige Schätzungsfehler, ohne den es überhaupt nirgends bei diesen Versuchen abgeht, möglichst dadurch compensirt, dass abwechselnd zuerst das leichtere und schwerere Gewicht gehoben wird. Da außerdem nach jedem Vergleiche (durch Hebung des einen und anderen Gewichtes) 5 Sec. Zeit bleiben, ehe zu einem neuen Vergleiche geschritten wird, so ruht die, einer continuirlichen Anspannung unfähige, Aufmerksamkeit während dieser Zeit, und wendet sich dann nach mechanisch gewordener Gewöhnung mit neuer Frische einem neuen Vergleiche zu.

Bei den Schallversuchen hingegen ist so zu sagen Alles anders in diesen Beziehungen. Die Schalle werden hier nicht so tactmäßig erzeugt, dass die Aufmerksamkeit eben so tactmäßig nach unverbrüchlicher Gewohnheit mitgehen und physischer und psychischer Mechanismus sich auf einander einrichten können; und jeder Schall ist nur momentan, bietet also auch der Aufmerksamkeit nur einen momentanen Angriffspunkt; außerdem kann der Umstand, dass es nicht dasselbe Individuum ist, was den Schall erzeugt und was die Aufmerksamkeit richtet, dem günstigsten Zusammentreffen beider nur hinderlich sein. Nach der Gesammtheit dieser Umstände aber kommen Versuchsfälle vor (S. 427), wo die Aufmerksamkeit fehl schlägt, und die Frage entsteht, ob und wie man solche Fälle mit in Rechnung nehmen soll.

2) Bei den Gewichtsversuchen ist der Unterschied D durch directes Maß ohne Schwierigkeit objectiv genau, frei von zufälligen und constanten Fehlern, unabhängig von der Verschiedenheit der vier Hauptfälle mit sich selbst identisch festzustellen, was von Wichtigkeit ist, weil das G. G. nur auf ein solches D beziehbar ist. Bei den Schallversuchen aber muss dieser Unterschied aus den Gewichten P, p und Fallhöhen h, H nach einer an sich problematischen Formel berechnet werden, von der inzwischen zuzugestehen, dass sie innerhalb der Grenzen der Versuche als Interpolationsformel brauchbar ist, wenn der in die Formel ein-

gehende Werth ε durch vorgängige Versuche innerhalb dieser Grenzen für die verschiedenen Verhältnisse von P, p, h, H festgestellt ist. Nun findet aber der Uebelstand statt, dass je nach den Versuchslagen der Werth ε (und hiermit D) wegen des Einflusses der von den Versuchslagen abhängigen constanten Fehler einen verschiedenen Werth annimmt (wie man direct aus Tab. VIII S. 444 ersieht), woraus erst durch angemessene (in derselben Tabelle ausgeführte) Mittelziehung ein, zur Berechnung des reinen objectiven D taugliches ε, und mittelst desselben ein solches D selbst gewonnen werden kann, wozu die (aus Tab. VIII abgeleitete, interpolatorisch zu benutzende) Tab. IX p. 445 den Weg eröffnet. Principiell ist also allerdings die Bestimmung des reinen, für die vier Hauptfälle identischen D, auf welches das G. G. zu beziehen, möglich, aber auf einem indirecten, complicirten und die Chance zufälliger Beobachtungsfehler und Rechnungsfehler steigernden Wege. Und hierzu schon vorgreiflich die Bemerkung: dass dieser Weg, das reine, in sich identische, objective, von constanten Fehlern freie D zu finden, zwar vom Verf. S. 444, 445 angegeben, aber in den Tabellen XI—XIV, welche die Hauptunterlage seiner Bestreitung des G. G. bilden, nicht benutzt, sondern ein anderer Weg (S. 447) eingeschlagen ist, welcher statt eines einzigen D vier D's für die vier Hauptfälle gibt, und dessen Unangemessenheit für die Prüfung des Gesetzes sich unter Punkt (3) nachweisen lassen wird.

3) Wegen der sehr geringen Unterschiedsempfindlichkeit im Schallgebiete müssen bei den Versuchen verhältnissmäßig viel größere D's zugezogen werden, als im Gewichtsgebiete, ein Umstand, von dem sich weiterhin (unter Punkt 4) zeigen wird, dass er von ausschlaggebender Wichtigkeit für unsere Controverse ist.

Hauptsächlich von dem unter 1) angegebenen Umstande mag es abhängen, dass, während ich bei meinen Gewichtsversuchen keinen Anlass finde, verschiedene Arten zweideutiger Zwischenfälle z zwischen eigentlich richtigen Fällen r und falschen Fällen f zu unterscheiden, hingegen der Verf. (S. 426) Fälle z und g unterscheidet, erstere als solche, wo ein Unterschied zwar empfunden, aber dessen Richtung nicht erkannt wird, bedingt durch mangelnde Versuchstechnik oder Mangel an Aufmerksamkeit, letztere als Fälle wirklicher Gleichheitsempfindung. Inzwischen bedingt dies bezüglich Prüfung des G. G. keinen wesentlichen Rechenunterschied zwischen uns, sofern die Fälle

r', mit denen der Verf. hierbei rechnet, ebenso aus den eigentlich richtigen r mit Zurechnung der Hälfte seiner $z + g$, als die, mit denen ich rechne, durch Zurechnung der Hälfte meiner z, beiderseits also durch Zurechnung der Hälfte der zweideutigen Fälle entstehen.

Fassen wir nun hiernach die Behauptung des Verf. näher in's Auge, dass meine eigenen Gewichtsversuche »vielmehr gegen als für das G. G. sprechen«, so gründet sie sich im Wesentlichen darauf, dass nach den, aus meinen »Elementen« entnommenen, in seiner Abhandlung S. 406—409 unter I—VII angeführten Resultaten von 6 Versuchsreihen, 2 zweihändigen und 4 einhändigen[1]), die vom Gesetz geforderte Constanz der h bei abgeändertem Q' und hiermit D oder die Proportionalität der $t = hD$ mit D sich keineswegs allgemein bestätige. Dies verhält sich in der That so; aber es gilt, näher zuzusehen.[2]) Die zweihändigen Reihen I und III und die unter III mitgezählte einhändige stimmen so gut zum Gesetze, als man mit Rücksicht auf die nie ganz compensirbaren Zufälligkeiten nur wünschen kann, die 2 einhändigen II und VII stimmen schlecht, die unter IV, V, VI vom Verf. angeführte und discutirte einhändige Reihe stimmt theils gut, theils schlecht, im Ganzen doch mehr gut als schlecht, wie am vollständigsten aus V zu beurtheilen. Nach der Forderung des Gesetzes nämlich sollen die den verschiedenen D entsprechenden Werthe $h = \frac{U}{D}, \frac{u}{D}, \frac{z}{D}$ (wofür in den Columnentiteln der Tab. V fälschlich

1) Um zu erklären, dass unter I bis VII bloß 6 Reihen begriffen sind, ist zu bemerken, dass IV, V, VI sich auf dieselbe einhändige Reihe beziehen, wogegen vom Verf. unter derselben Nummer III eine einhändige und eine zweihändige Reihe nach einander betrachtet sind.

2) Dabei ist Folgendes in Rücksicht zu nehmen. Abgesehen von der, unter IV, V, VI betrachteten einhändigen Reihe, sind in den übrigen 5 Reihen die Werthe $t = hD$ für je 2 D's (= 0,04 P und 0,08 P) bestimmt, welche im Verhältniss von 1 : 2 stehen, und jene t's sollten demgemäß ihrerseits im Verhältniss 1 : 2 stehen, um der Proportionalität von t mit D nach G. G. zu entsprechen. In der letzten Längsspalte jeder der betreffenden Tabellen nun ist das, statt dessen empirisch gefundene, Verhältniss angegeben, und je näher dies mit 2 übereinstimmt, um so mehr stimmt es zum G. G., indess eine volle Zustimmung nicht nur wegen unausgeglichener Zufälligkeiten, deren ich oben Kürze halber meist allein in dieser Hinsicht gedenke, sondern auch, weil das G. G. streng genommen nur ein Annäherungsgesetz ist, was um so genauer zutrifft, je kleiner D im Verhältniss zu den Reizen ist, überhaupt nicht erwartet werden kann. In der einhändigen Reihe unter V, VI aber ist nach der Einrichtung der Tabellen das Zutreffen vielmehr nach der Constanz der $h = \frac{U}{D}, \frac{u}{D}, \frac{z}{D}$ als nach der Proportionalität von t mit D zu beurtheilen.

U, *u*, *z* steht) sowohl links als rechts so nahe unter einander stimmen, als es unausgeglichene Zufälligkeiten gestatten, was in der That für die Mehrzahl der Werthe in den 6 Columnen von V der Fall ist, indess die übrigen unregelmäßig davon abweichen.

Nun aber ist im Allgemeinen geltend zu machen, dass die zum Gesetz stimmenden Resultate an sich größeres Gewicht haben, als die nicht stimmenden, weil das Stimmen, und zwar Zusammenstimmen dreier von einander unabhängiger, unter verschiedenen Umständen angestellter, Reihen zum Gesetze sich nicht ebenso durch unausgeglichene Zufälligkeiten und Fehler der Vergleichbarkeit erklären lässt, als das Nichtstimmen der übrigen Reihen. Dass man aber wirklich berechtigt ist, den Grund des Nichtstimmens in ungünstigen Umständen der betreffenden Reihen überhaupt zu suchen, wird durch folgende Punkte bewiesen:

Erstens, die nicht stimmenden Reihen II, VII sammt der unvollkommen stimmenden IV sind sämmtlich einhändige, in welchen die Zufälligkeiten überhaupt größeren Spielraum haben, als in den zweihändigen. Nicht nur die 2 zweihändigen I, III aber stimmen beide, sondern dazu noch eine einhändige. — Zweitens, in den, nach den Schlussergebnissen der Tabellen im Ganzen zu dem Gesetze stimmenden, Reihen stimmen auch die einzelnen Abtheilungen verhältnissmäßig gut, in den nicht stimmenden schlecht unter einander, was direct für eine größere Sicherheit der stimmenden als nicht stimmenden Reihen, und mithin für ein größeres Gewicht der ersteren spricht.[1] — Drittens. Am instructivsten ist es, die beiden sehr

1) So weichen in der, nach dem Schlussergebnisse 1,975 (dessen Abweichung vom strengen 2 natürlich auf unausgeglichene Zufälligkeiten geschrieben werden kann) im Ganzen sehr gut stimmenden zweihändigen Reihe I die extremen *hD* der 6 einzelnen Abtheilungen nur im Verhältniss 1,883 : 2,130, d. i. 1 : 1,13 von einander ab, in der analogen, nach dem Schlussergebnisse 1,521 (statt des strengen 2 schlecht stimmenden Reihe II hingegen im Verhältniss 1,221 : 1,673, d. i. 1 : 1,37. Auch in den, nach den Schlussergebnissen gut stimmenden, zwei Reihen, welche unter III angeführt sind, stimmen die darin enthaltenen zwei Abtheilungswerthe sehr nahe unter einander, indess in der schlecht stimmenden VII die extremen Abtheilungswerthe im Verhältniss 1,006 : 3,131 stehen, was eine gänzliche Unsicherheit dieser Reihe beweist, und derselben so gut als gar kein Gewicht beilegen lässt, eine Unsicherheit, die wenigstens zum Theil davon abhängen mag, dass diese Reihe überhaupt kleinere Beobachtungszahlen für die respectiven Abtheilungen enthält als jede andere.

großen, analog ausgeführten Reihen, die gut stimmende zweihändige I und die schlecht stimmende einhändige II zu vergleichen, jede für dieselben (vom Einfachen aufs Zehnfache steigenden) Hauptgewichte *P* mit 12288 Doppelhebungen in 32 Tagen ausgeführt; aber darin unterschieden, dass bei I nach je 2 Tagen, bei II nur nach je 11 Tagen[1]) vom einen *D* zum anderen (unter Gleichhaltung der übrigen Umstände) übergegangen wurde. Da nun aber nachweislich die Empfindlichkeit und hiermit *h* mit der Zeit unberechenbaren Aenderungen unterliegt, so ist bei größeren, durch eine längere Zeit fortgesetzten Reihen, zur Vergleichbarkeit der mit verschiedenen *D*'s nach einander erhaltenen *h* nöthig, dass mit den *D*'s wiederholt in kurzen Perioden abgewechselt wird, nicht aber in wenigen langen Perioden, ein Erforderniss, was bei I sehr gut, bei II sehr schlecht erfüllt war; und da außerdem I zweihändig, II nur einhändig war, so ist der große Nachtheil von II gegen I wohl verständlich, und das größere Gewicht, was der Reihe I gegen II beizulegen ist, entschieden.[2])

Hiernach kann man folgenden disjunctiven Schluss aufstellen: Entweder besteht das G. G. für meine Versuche, oder es besteht statt dessen ein anderes Gesetz, oder es besteht statt dessen kein Gesetz. Das Letztere widerspräche der, in der Natur überall anzuerkennenden Gesetzlichkeit; es können nur Zufälligkeiten und Versuchsmängel die Gesetzlichkeit verdecken, und hieraus die zum Gesetz nicht stimmenden Fälle erklärt werden. Für das Zweite spricht keine einzige der Reihen, also bleibt bloß das Erste übrig, wofür alle in sich und unter einander stimmenden Reihen sprechen.

Ich glaube doch, dass dieser Schluss aus meinen Beobachtungen für etwas gründlicher, als der Lorenz'sche gegen ist. Ganz unstatthaft aber muss ich es finden, wenn der Verf. S. 411, 412 eine unter

1) Wenn in »Elem.« I. p. 184 und »Revision« p. 361 statt dessen gesagt ist, »nach je 8 Tagen« oder von »Woche zu Woche«, so hebt sich dieser scheinbare Widerspruch dadurch, dass nach 8tägiger Fortsetzung der Versuche mit dem einen *D* immer erst 3tägige Versuche ohne *D* (welche unter den 32 Versuchstagen nicht mitgezählt sind) eingeschaltet wurden, ehe zum anderen *D* übergegangen wurde.

2) Dabei ist wohl zu merken, dass Reihen, wie II, die nach ihrer Einrichtung nicht hinreichend vergleichbar in sich bezüglich Prüfung des Gauß'schen Gesetzes waren, weil es auf dessen Prüfung nicht abgesehen war, doch vergleichbar in sich bezüglich Prüfung des Weber'schen Gesetzes oder Parallelgesetzes blieben, sofern es eben deren Prüfung galt, und die Einrichtung der Versuche darnach getroffen wurde, was specieller auseinanderzusetzen hier zu weit führen würde.

Berücksichtigung des Armgewichts nothwendige, ja von ihm selbst im Allgemeinen als nothwendig anerkannte, Abweichung vom Weber-schen Gesetze, wie sich solche in Tab. VIII S. 410 kund gibt, gegen das zur Rechnung gebrauchte Gauß'sche Gesetz geltend macht, indem er sagt, dass sie zu »gerechten Zweifeln« gegen dessen Anwendbarkeit Anlass gebe; und warum? weil sich doch nicht behaupten lasse, dass die unter Zuziehung des G. G. auf das Armgewicht gegründete Correction »gerade« hinreiche, die Abweichung vom Weber-schen Gesetze zu decken. Das lässt sich allerdings nicht behaupten, weil der Einfluss des Armgewichts überhaupt bisher bloß nach seiner Richtung, nicht nach seiner Größe anzugeben ist. Aber da die Richtung der Abweichung eben so nach dem Weber'schen Gesetze vorauszusehen ist, als der Umstand damit stimmt, dass nach Maßgabe als das Armgewicht gegen das wachsende Hauptgewicht verschwindet, auch die Abweichung vom Weber'schen Gesetze schwindet, so sind dies Umstände, die, indem sie für das Weber'sche Gesetz sprechen, zugleich für das, der Berechnung zu Grunde gelegte, Gauß'sche Gesetz sprechen, will man überhaupt auf gesetzliche Verhältnisse in diesem Gebiete kommen. Also gerade der umgekehrte Schluss, als den wir vom Verf. gezogen finden.

Nach all' dem behaupte ich, dass, nachdem nicht nur gegen die theoretische Begründung des G. G. kein Einwand vorliegt, sondern auch die einwurfsfreisten meiner Gewichtsversuche zur Bestätigung desselben zusammentreffen; dass, sage ich, gar kein Grund ist, dasselbe zu bestreiten, so lange es sich eben um meine Gewichtsversuche handelt. Aber allerdings ließ sich fragen, ob es auch für die Schallversuche gültig bleibt, nachdem diese in mehr als einer Hinsicht sehr andern Bedingungen unterliegen, als die Gewichtsversuche; und so gilt es jetzt, die Frage auf dem eignen Versuchsgebiete des Verf. zu untersuchen. Hierauf folgends eingehend bringe ich den Nachweis, dass der Verf. auch hierin fehl geht, auf folgende 4 Punkte, von welchen der 4. der durchschlagendste ist; denn nach den anderen würde es bloß darauf ankommen, den an sich unzureichenden Lorenz-schen Nachweis zurecht zu rücken, so würde immer noch gegen das G. G. bewiesen sein, wenn nicht der 4. Punkt den, nach all dem noch bestehenden, Grundfehler des Lorenz'schen Nachweises aufdeckte.

Erster Punkt.

Die Angriffe des Verf. gegen das G. G. beruhen nach schon gemachter Bemerkung wesentlich auf den 4 Tabellen XI—XIV p. 448 ff., den sog. Haupttabellen,[1]) über deren Entstehung und Einrichtung die letzte Auskunft in der Abh. des Verf. selbst zu suchen ist; indess mag zur leichteren Orientirung folgendes bemerkt werden. Jede der 4 Tabellen ist nach den Versuchslagen I ↓, I ↑, II ↓, II ↑, worüber S. 425 Auskunft gibt, in 4 Abtheilungen, sog. Hauptfälle, getheilt. Die Columne H gibt die von oben nach unten abnehmende Fallhöhe der kleinen Kugel p, woraus nach dem, unter Abschnitt E p. 446 ff. erörterten, Oberbeck'schen Rechnungsprincip, die zu H zugehörigen Werthe des veränderlichen Schallreizes Q' im Mittel für alle 4 Hauptfälle abgeleitet und in der Columne pH^{ε} aufgeführt sind, während der für alle H und Hauptfälle derselben Haupttabelle constant bleibende Schallreiz $Q = Ph^{\varepsilon}$ aus Tab. X. p. 446 für jede Haupttabelle insbesondere entnommen werden kann. D ist der, für jede der 4 Versuchslagen oder Hauptfälle insbesondere nach einer, S. 447 angegebenen, später hier wiederzugebenden, Regel berechnete und hiernach für die 4 Lagen verschiedene Unterschied beider Schallreize. Die den verschiedenen H und somit verschiedenen Q' und D zugehörigen Werthe $\frac{r'}{n}$ und t sind so, wie oben (S. 13) angegeben ist, zu verstehen und $h = \frac{t}{D}$ als Quotient von t und D bestimmt.

Nun postulirt Lorenz für die Gültigkeit des G. G., dass das so bestimmte h sich für alle H's, mithin Q''s, mithin D's jeder Abtheilung einer Haupttabelle constant erweise, was nach schon oben gemachter Bemerkung offenbar nicht der Fall ist, da vielmehr beim Verfolgen der Werthe von oben nach unten, während die H's und mithin Q''s $= pH^{\varepsilon}$'s continuirlich abnehmen, die h's unregelmäßig steigen und fallen, eine Unregelmäßigkeit, die am auffälligsten in der Gegend der kleinsten D's ist, wo sogar große Sprünge vorkommen. Hierin nun sieht Lorenz p. 452 gleich von vorn herein Beweise gegen das G. G.

---

1) Auf den, vom Verf. S. 456 erhobenen und besprochenen, Angriff gegen das Gesetz mit Beziehung auf Tab. XV p. 457 braucht hier nicht besonders eingegangen zu werden, da er mit den auf Tab. XI—XIV beruhenden zusammenhängt und mit ihnen steht und fällt.

Allgemein aber ist zu bemerken, dass unregelmäßige Abweichungen von den Forderungen eines Gesetzes, so weit es eben nur Unregelmäßigkeiten sind, überhaupt nicht gegen die Richtigkeit des Gesetzes, sondern nur gegen die Sicherheit der Versuche geltend gemacht werden können, um so mehr, je größer die zufälligen Schwankungen sind, es wäre denn, dass durch besondere Versuche über die Sicherheitsverhältnisse nachgewiesen wäre, dass die Unsicherheit unter den Umständen der Versuche nicht so weit gehen könne, um die Unregelmäßigkeiten zu decken, solche aber liegen beim Verf. nicht vor; oder dass die Abweichungen vom Gesetze durch alle Unregelmäßigkeiten im Durchschnitt oder Ganzen eine constante Richtung oder selbst einen gesetzlichen Gang verrathen. Und in letzter Beziehung ist allerdings zu bemerken, dass es doch nicht die, zuerst allein hervorgehobene, Größe und Unregelmäßigkeit der Abweichungen allein ist, auf die sich der Verf. gegen das Gesetz stützt, indem er vielmehr weiterhin auch die Curven, in denen er seine Beobachtungswerthe verzeichnet, so wie die unter G. p. 452 ff. geführten Rechnungsresultate als beweisend für eine mehr als bloß gesetzlose Abweichung der Beobachtungswerthe von den Forderungen des G. G. geltend macht. Und in der That kann man, auch ohne hierauf einzugehen, eine solche sehr einfach in dem Umstande finden, dass schon nach oberflächlicher Ansicht, um so sichtlicher bei gruppenweisem Zusammennehmen mehrer successiver h (unter Ausschluss der zu unsicheren in der Nähe von $D = 0$) im Durchschnitt oder Ganzen ein Wachsthum der h von oben nach unten, also mit abnehmendem H, sichtbar ist; ja dass dies sich in allen 4 Haupttabellen und allen 4 Hauptfällen derselben so findet, was in der That entschieden gegen die vom Gesetz geforderte Constanz der h liefe, wenn nicht die Betrachtungen unter folgenden Punkten den daraus zu ziehenden Schluss wieder ungültig machten.

Zweiter Punkt.

Das G. G. ist ausdrücklich für ein von constanten Fehlern freies, die Verschiedenheit der verschiedenen Hauptfälle nicht theilendes, D und t aufgestellt; und so habe ich selbst das Gesetz in meinen Gewichtsversuchen nur für Werthe von D und t, die in diesem Sinne bestimmt sind, in Anspruch genommen und angewandt. In der That, das D ist dabei direct gemessen, hiernach für die 4 Hauptfälle, unabhängig von deren Verschiedenheit, mit sich identisch gegeben, und das t, als Mittel aus den 4 Hauptfällen h $(D \pm c \pm c')$ nicht minder für alle 4 Hauptfälle identisch als hD bestimmt. Wie kommt der Verf. dazu, das Gesetz für die verschiedenen D und t und mithin h der 4 Hauptfälle besonders bestätigt finden zu wollen? Dazu liegt gar kein rationeller Grund vor, und der Verf. selbst hat sich erspart, einen solchen dafür anzugeben.

Inzwischen lässt sich auch hier dem Einwande des Verf. gegen das Gesetz bis zu gewissen Grenzen nachhelfen, indem wir erstens bemerken, dass, da in allen 4 Hauptfällen h durchschnittlich mit abnehmendem H wächst, dasselbe auch vom Mittel der 4 Hauptfälle, wo sich deren constante Fehler eliminiren, gelten muss, zweitens, indem wir die, vom Verf. versäumte, Mittelziehung selbst vornehmen, nämlich einerseits das Mittel der t, andrerseits das Mittel der D nehmen, die demselben H zugehören, mögen sie respective t_m und D_m heißen, und hieraus die $h = \frac{t_m}{D_m}$ bilden. In der That habe ich mich selbst überzeugt, dass auch die so bestimmten h's in allen 4 Haupttabellen durchschnittlich mit abnehmendem H wachsen. Aber wir sind noch nicht zu Ende.

Dritter Punkt.

Näher zugesehen zeigt sich, dass die D's der Tabellen XI—XIV nach einem ganz anderen Princip bestimmt und hiermit selbst wesentlich andere sind, als die D's, auf die das G. G. in dem von mir vertretenen Sinne beziehbar ist, wonach es gar nicht dadurch getroffen wird, dass es nicht zu den, nach einer andern Weise bestimmten D's und hieraus folgenden h's jener Tabellen stimmt; der Verf. müsste denn zeigen können, dass die Bestimmungsweise der D's, auf der ich fuße, an sich selbst falsch ist, und dadurch zur Unterlage eines falschen Gesetzes wird. Aber da das D als Unterschied beider in Betracht kommenden Reize von mir nicht indirect erschlossen, sondern durch directe Messung bestimmt ist, fällt jeder Einwand in dieser Hinsicht von selbst weg.

In dieser Bestimmungsweise des D aber liegt von selbst eingeschlossen, dass es einheitlich für alle 4 Hauptfälle, unabhängig von den $\frac{r'}{n}$ derselben, bestimmt ist, und von den constanten Fehlern der, nach der Fundamentaltabelle aus den $\frac{r'}{n}$ abgeleiteten t's $= h(D \pm c \pm c')$ nicht getroffen wird, wie ich schon oben erinnerte. Nur eben die t's, nicht das objectiv gemessene D, sind nach den 4 Hauptfällen verschieden und mit constanten Fehlern behaftet, von denen sie in bekannter Weise durch Mittelziehung zu befreien sind, um ein von Fehlern freies $h = \frac{t}{D}$ zu erhalten, worauf das G. G. in dem von mir vertretenen Sinne bezogen werden kann.

Nun lässt sich freilich bemerktermaßen nach der Natur der Schallversuche das D derselben nicht durch ein eben so directes Maß bestimmen, als das der Gewichtsversuche, wo man nur sei es beide Gewichte oder, was auf dasselbe herauskommt, das Zusatzgewicht zum kleineren zu wiegen braucht, um im Unterschiede beider Gewichte das von mir vertretene D zu haben. Aber es gibt einen schon erwähnten Weg, diesen Weg bei den Schallversuchen zu vertreten. Und zwar sind die D's der Tabelle X[1]) S. 446 auf solchem Wege gewonnen, nur dass der Verf. nicht den davon zu machenden Gebrauch wirklich gemacht hat. Sie sind nämlich, unabhängig von den $\frac{r'}{n}$ der Versuche, nach dem bekannten Oberbeck'schen Princip als Differenzen der Schallreize Q' und Q (d. i. pH^{ε} und Ph^{ε}) erhalten, und zwar liegen ihrer Berechnung (nach Tab. VIII und IX, p. 444, 445), Werthe ε, bezüglich auf mittlere H's der 4 Hauptfälle (bei gegebenen P, p, h) unter, woraus einheitlich bestimmte D's hervorgehen, in denen die constanten Fehler der 4 Hauptfälle als eliminirt gelten können[2]), wo-

1) Um eine leicht mögliche Verwirrung zu vermeiden, welche daraus entstehen kann, dass (unstreitig nicht zweckmäßig) die Reihen der Tab. X in anderer Folge stehen als die Reihen XI—XIV, welche ihnen entsprechen, ist folgendes zu bemerken. Die Tab. X enthält unter der Ueberschrift $P/p = 50/25$ zwei Columnen resp. für D bei $h = 20$ und D bei $h = 30$, welche resp. den D's der Tab. XIII und XIV entsprechen, hiernach unter der Ueberschrift $P/p = 25/12{,}5$ zwei Columnen resp. für D bei $h = 20$ und D bei $h = 30$, welche den D's der Tab. XI und XII entsprechen. Die D's der Tab. X unterscheiden sich aber von den entsprechenden der Tab. XI—XIV dadurch, dass erstere als Mittel aus den 4 Hauptfällen (d. h. nach mittleren H derselben), letztere für die 4 Hauptfälle besonders bestimmt sind, daher jedem D einer Reihe der Tab. X 4 D's bei der entsprechenden Reihe unter den Tabellen XI—XIV entsprechen.

2) Allerdings könnte die Elimination auch so geschehen, dass man, statt wie

durch sie nun eben geeignet werden, die D's der Gewichtsversuche zu vertreten, die nach directer Messung von vorn herein frei von constanten Fehlern sind.

Ganz anders die D's der Tabellen XI—XIV, auf welchen der Verf. fußt. Sie sind nicht einheitlich für die 4 Hauptfälle und nicht unabhängig von den Werthen $\frac{r'}{n}$, vielmehr nach folgender Regel bestimmt.[1])

Der Werth D, welcher einem gegebenen H zugehört, wird für jeden Hauptfall insbesondere als Differenz zweier Werthe innerhalb der, den 4 Hauptfällen gemeinsam zugehörigen, Columne hP^{ε} (d. i. der mittleren Q''s) erhalten, von welchen der eine dem betreffenden H, der andere demjenigen H zugehört, bei welchem das D des betreffenden Hauptfalles null ist. Für die Bestimmung des Nullwerthes von D aber wird der Werth $\frac{r'}{n} = 0{,}50$ bei dem betreffenden Hauptfall benutzt. Der erste Werth bleibt also für alle 4 Hauptfälle derselbe, der andere verschiebt sich nach der Verschiedenheit der 4 Hauptfälle, indess beide in derselben Scala mittlerer Q''s inbegriffen bleiben.

Nun sollte man eine Begründung dieser Regel, die damit, dass sie aufgestellt ist, doch nicht als statthaft erwiesen ist, in den Vorerörterungen zu Tab. XI—XIV, d. i. p. 447 suchen; aber, wenn sie hier zu finden ist, und wo sie sonst suchen? so gestehe ich, die hier vorfindliche kurze Erklärung darüber nicht zu verstehen, und besorge, dass es andern auch so gehen wird. Nur die Regel selbst lässt sich (nach Berichtigung des Erläuterungsbeispieles) in dem so eben ange-

---

oben zur Berechnung des einheitlichen mittleren D ein auf das mittlere H der 4 Hauptfälle bezügliches ε zu verwenden, vielmehr die D's der 4 Hauptfälle nach den specialen ε's der H dieser Hauptfälle besonders berechnete und hieraus das Mittel zöge. Unstreitig werden sich die auf beiden Wegen erhaltenen mittleren D's der 4 Hauptfälle ein wenig unterscheiden, und es möchte einer peniblen theoretischen oder experimentalen Untersuchung bedürfen, auf welchem Wege die Compensation der constanten Fehler am vollständigsten erfolgt. Aber da für den zweiten Weg keine Tabellen der specialen ε's vorliegen und der Verf. selbst den ersten eingeschlagen hat, kann meines Erachtens nichts hindern, denselben, da er zu keinen erheblich anderen Mitteln als der frühere führen kann, beizubehalten.

1) Sie ist p. 447 angegeben, und freilich nach dieser Angabe nur zu verstehen, wenn in dem beigefügten Erläuterungsbeispiel ein Schreib- oder Druckfehler berichtigt wird, sofern Z. 10 v. o. statt $H = 45$ zu setzen ist $H = 50$, eine Berichtigung, die sich übrigens vom Verf. selbst S. 657 nachgetragen findet.

gebenen Sinne verstehen; aber damit nicht der Grund, sie aufzustellen.

Nun könnte es ja sein, dass der Fehler des mangelnden Verständnisses an mir läge, und ich selbst habe ihn anfangs vielmehr hierin als in einer Fehlerhaftigkeit der Regel gesucht, bis theils die mir völlig klar gewordene Forderung der Aufgabe, theils die Unmöglichkeit, den nach der Lorenz'schen Regel bestimmten *D*'s eine widerspruchslose Bedeutung abzugewinnen, mir die Ueberzeugung von der Untriftigkeit der Regel selbst aufgedrängt hat.

In der That reine, objective, von constanten Fehlern freie *D*'s, auf welche sich das G. G. zu beziehen hat, können es nicht sein, dazu müssten sie für alle 4 Hauptfälle eben so gut als bei den Gewichtsversuchen dieselben sein. Mit den constanten Fehlern der 4 Hauptfälle insbesondere behaftete *D*'s aber können es auch nicht sein; weil ihre Bestimmungsweise gar nicht dazu stimmt; und nur Kürze halber gehe ich nicht näher auf die leicht nachweisbare Unverträglichkeit hiermit ein.

Wenn aber hiernach die nach der Regel des Verf. erhaltenen *D*'s der Tabellen XI—XIV weder reine objective *D*'s, auf welche das G. G. zu beziehen ist, noch mit den constanten Fehlern der Hauptfälle behaftete *D*'s bedeuten, was bedeuten sie denn? nur so viel ist klar, dass sie etwas ganz Unklares bedeuten, und jedenfalls nicht das bedeuten, was sie bedeuten sollen, um das G. G. darauf anzuwenden.

Während ich mich solchergestalt in keiner Weise mit der Bestimmungsweise der *D*'s in Tab. XI—XIV und deren Anwendung in unserer Prüfungsfrage vertragen kann, wüsste ich keinen Einwand gegen die *D*'s der Tab. X zu erheben, und es entsteht um so mehr die Frage, weshalb sich der Verf. nicht an diese, statt an die der Tab. XI—XIV, gehalten hat, als er selbst vorgängig vor der Tab. X p. 446 sagt: »In Tabelle X sind die Werthe von pH^{ε}, Ph^{ε}, wie daraus folgend von D, für unsere Versuche nach der Methode der r. u. f. F. zusammengestellt«. Wonach ich gestehe, mich ganz verwirrt dadurch zu finden, dass sie nach dem Verf. doch nicht für den Zweck dieser Versuche gebraucht werden sollen, sondern andere, deren Unanwendbarkeit mir für diesen Zweck evident zu sein scheint.

Zur Lösung dieser Verwirrung habe ich mich wiederholt an den Verf. selbst gewendet, ohne einen anderen Erfolg, als dass der Verf. auf seiner Verwerfung der

Tab. X und Bevorzugung der Tab. XI—XIV für den Zweck der Prüfung des G. G. bestehen bleibt, ohne dass ich seiner Motivirung davon Klarheit und Evidenz abzugewinnen vermochte. Da ich ihn selbst darüber zu Worte kommen lassen möchte, seine Ausführungen darüber aber nicht in extenso wiedergeben kann, muss ich mich begnügen, einige Stellen aus der mit ihm geführten schriftlichen Verhandlung, die mir am bezeichnendsten für seine Ansicht scheinen, wörtlich wiederzugeben; die eine dieser Stellen lautet:

»In Bezug auf die Tabelle X, betreffs deren Sie eine Erklärung wünschen, füge ich hinzu, dass man ganz von derselben absehen muss. Sie ist, wie ich früher schon bemerkt habe, das Rudiment[1]) einer anderen Ausführung [als die Tab. XI—XIV bieten] und nur darum beibehalten worden, um die Art und Weise zu zeigen, wie durch Differenzbildung die D's gewonnen worden sind. Die Werthe pH^{ε} kommen für das Folgende nicht in Betracht[2]). Denn dieselben sind durch eine Mittelziehung gewonnen worden, über die ich zweifelhaft war, und derentwegen ich auch die daran sich anschließenden Ausführungen unterließ.«

In dieser Erklärung des Verf. liegt natürlich noch kein Aufschluss über den Grund des Zweifels, von dem er spricht; diesen aber vermag ich nur in einer anderen Stelle zu finden, welche zeigt, dass ihm die Bestimmung der D nach obiger Regel später mehr eingeleuchtet hat, indem er sagt (und nachher nochmals betont): Das Wichtigste bei Bildung der D-Werthe ist der Ausgangspunkt derjenigen Schallstärken pH^{ε}, bei welchen $D = 0$ zu setzen ist«. Und factisch ist, dass die Werthe der Tab. XI—XIV, aber nicht die der Tab. X, hiernach abgeleitet sind; nur bleibt unklar, und hierüber fehlt sogar jede Erörterung seitens des Verf., weshalb jenes das Wichtigste sein soll, indess ich nicht nur keine Nothwendigkeit davon finde, sondern die Weise, wie der Verf. danach zu Werke geht, durch ihren Erfolg selbst verurtheilt finde, sofern man nicht einmal zu einem einheitlichen D für die 4 Hauptfälle dadurch kommt. Um die Differenz zweier Linien zu bestimmen, brauche ich nicht von einem Punkte auszugehen, wo die Differenz derselben null ist, sondern ich messe beide Linien, und daraus folgt einfach die Differenz derselben. Entsprechend mit den beiden Schallwerthen und deren Differenz in Tab. X.

Offenbar vermischt und damit verwirrt der Verf. zwei Aufgaben. Einmal gilt es, das D nach seinem wirklichen physischen Werthe möglichst genau zu bestimmen, und zweitens gilt es, dessen Leistung für die Empfindung zu bestimmen. Ersteres hat durch objective Messung vor den Versuchen damit zu geschehen; denn nicht aus diesen soll man erst lernen, mit welchem D man zu thun hat; letzteres hat durch Bestimmung des $\frac{r'}{n}$ und mithin t bei schon bekanntem D zu geschehen. Durch die Gauß'sche Formel wird dann eine psychophysische Beziehung zwischen diesem D und $\frac{r'}{n}$ vermittelt. Der Verf. aber vermischt beides, indem er jwar Q', d. i. pH^{ε}, aber nicht Q, d. i. Ph^{ε} nach objectivem Maße zur Bestimmung von $D = Q' - Q$

---

1) Rudiment insofern, als die $\frac{r'}{n}$, t und h der Tab. XI—XIV nicht mit eingehen.

2) Doch finde ich sie in den, nach Tab. X folgenden, vom Verf. selbst gebrauchten Tabellen XI—XIV unverändert aufgenommen und vom Verf. benutzt.

zuzieht, vielmehr letzteres durch Zuziehung seines Nullwerthes bei $\frac{r'}{n} = 0{,}50$ bestimmt haben will, damit aber in Versuche eingreift, von denen die Bestimmung des D unabhängig sein muss.

Nach Allem gebe ich bereitwilligst zu, dass das G. G. zur Bestimmungsweise der D und mithin $h = \frac{t}{D}$ in den, vom Verf. gegen dasselbe gewendeten, Tabellen XI—XIV nicht passt, indem ich aber gegenseits behaupte, dass diese Bestimmungsweise nicht zum G. G. passt. Kann aber durch die Bezugnahme auf die D's und h's der Tabellen XI—XIV nichts gegen das Gesetz bewiesen werden, so fragt sich noch, ob dasselbe besser fährt, wenn man statt dessen auf den, von mir selbst als anwendbar erklärten, D's und daraus zu folgernden h's der Tab. X fußt, wobei doch die $\frac{r'}{n}$ und t's der Tabellen XI—XIV gültig bleiben; und richten wir jetzt die Untersuchung auf diese Frage.

Sofern die D's der Tab. X im früher angegebenen Sinne mittlere der 4 Hauptfälle sind, bezeichnen wir sie zur Unterscheidung von den D's der 4 Hauptfälle in Tabelle XI—XIV mit D_m. Bezeichnen wir ferner die Mittelwerthe der (zu denselben H's in denselben Hauptreihen zugehörigen) 4 t's in Tab. XI—XIV mit t_m, so wird man zur Prüfung des G. G. in Bezug auf Werthe, die von constanten Fehlern frei sind, nur nöthig haben, die Werthe $\frac{t_m}{D_m} = h$ zu bilden, und zu sehen, ob diese h's die vom Gesetz geforderte Constanz bei veränderlichem H und mithin $Q' = p\,H^{\varepsilon}$ haben. Ich habe diese Rechnung für alle 4 Hauptreihen vorgenommen (die gar zu unsicheren Werthe um $D = 0$ herum bei Seite lassend); und, ohne Kürze halber die Rechnung reproduciren zu wollen, wiederum gefunden, dass die h's im Durchschnitt wachsen, während die H's abnehmen, so dass also auch nach dieser Berichtigung der Lorenz'schen Rechnungsweise der alte Einwurf gegen das Gesetz wiederkehrt. Aber kommen wir nun zum 4. Punkt.

Vierter Punkt.

Setzen wir, die zufälligen und constanten Fehler seien in den Werthen D und t, aus denen sich $h = \frac{t}{D}$ zusammensetzt, so weit als möglich compensirt, so wird zur Constanz der h noch die Erfüllung einer Bedingung gehören, deren der Verf. selbst p. 447 obenhin gedenkt, indess er nachher gar nicht darauf Rücksicht nimmt, dass sie in seinen Versuchen nichts weniger als erfüllt ist, d. i. die Bedingung, dass der Unterschied der Reize D ein sehr kleines Verhältniss zu den Reizen, zwischen denen er besteht (sei es dem größeren oder kleineren), behalte.

Sieht man nun beispielsweise Tab. XI an, deren constantes Q ($= Ph^{\varepsilon}$) nach p. 445 gleich 219 ist, so sind z. B. im Hauptfalle I ↓ die zwei ersten D gleich 135 und 114, die zwei letzten gleich 116 und 137, also alle 4 über die Hälfte von Q betragend, in den anderen Hauptfällen kommen noch stärkere Verhältnisse vor; und was von den D's der einzelnen Hauptfälle gilt, gilt dann auch natürlich von den Mitteln derselben. So in allen 4 Hauptfällen aller 4 Haupttabellen.

Hierbei bezog ich mich, um mich von vorn herein dem Verf. zu accommodiren, auf dessen eigene D-Bestimmungen in Tab. XI—XIV, die ich doch nach den Erörterungen unter Punkt 3 für fehlerhaft und für unsere Prüfung unanwendbar halte; aber es verhält sich ganz entsprechend mit den, nach meinem Dafürhalten triftiger anwendbaren, mittleren D's der Tab. X. So ist in der zuerst gestellten Reihe mit $P/p = \frac{50}{25}$ und $h = 20$, welche der Reihe XIII entspricht, das erste $D = 675$, das letzte (abgesehen von dem für den Zweck der Prüfung gleichgültigen Vorzeichen) $= 347$, während beidesfalls $Q = 475$; Q' ($= pH^{\varepsilon}$) aber erstenfalls $= 115$, zweitenfalls $= 138$ ist, also D zweitenfalls $2^1/_2$ mal so groß als Q', statt sehr klein dagegen zu sein. Noch stärkere Verhältnisse kommen anderwärts vor.

Nun kann der Verf. allerdings bemerken, dass die Natur der Schallversuche nöthigte, verhältnissmäßig so große D's in Anwendung zu bringen, da die Schallstärkenunterschiede überhaupt verhältnissmäßig viel größer sein müssen, als Licht- und Gewichtsunterschiede, um noch erkannt oder gar messbar bestimmt zu werden. Das höchste D, was ich bei meinen Gewichtsversuchen anwendete, betrug 0,08 oder $\frac{1}{12,5}$ des Hauptgewichts Q,[1]) noch etwas weniger natürlich im Verhältniss zu Q'. Mit verhältnissmäßig so kleinen Unterschieden können

1) Höher hinaufzugehen wurde schon dadurch verhindert, dass dann die Versuche mehrfach Werthe $r' = n$ gegeben hätten, welche sich principiell der rechnenden Verwerthung entziehen.

die Schallversuche nicht auskommen; und es kommen freilich in den Tabellen des Verf. noch verhältnissmäßig viel kleinere bis zu Null herab vor, aber von solcher Unsicherheit, dass nichts darauf zu geben. Indem nun aber der Verf. genöthigt ist, eine wesentliche Bedingung der Gültigkeit des G. G. bei seinen Schallversuchen Preis zu geben, werden diese überhaupt unbrauchbar zur Prüfung dieser Gültigkeit, er müsste denn zeigen können, dass nichts Erhebliches auf Einhaltung dieser Bedingung ankommt, was er aber nicht nur nicht gezeigt hat, sonden wovon sich das Gegentheil in den Grenzen seiner Versuche zeigen lässt. Dazu gilt es aber, auf den Grund der betreffenden Bedingung einzugehen, welches dieser ist.

Wir haben nach dem G. G. unter Einführung von Werthen t und D, welche von constanten Fehlern frei sind,

$$t = hD = h\,(Q' - Q),$$

worin Q als sog. Hauptwerth constant, Q' aber variabel ist. Nach dem Weber'schen Gesetze, dessen Gültigkeit endlich als erwiesen für das Schallgebiet gelten kann (schon eine annähernde Gültigkeit aber würde für die folgenden Betrachtungen genügen), steht der Werth h im umgekehrten Verhältniss des Reizes, auf den er beziehbar ist oder von dem er abhängt. Nun kann h in der Formel $t = h\,(Q' - Q)$ zunächst eben so gut von Q' als Q abhängig gedacht werden; wenn jedoch, und das ist die Voraussetzung des G. G., Q' sehr nahe $= Q$, d. i. D sehr klein gegen Q' und Q ist, kann der Unterschied vernachlässigt werden, und kann, wenn C eine Constante ist, h nach seiner Abhängigkeit von den Reizgrößen sowohl $= \frac{C}{Q}$ als $= \frac{C}{Q'}$ gesetzt werden, ohne dass sich beide Werthe merklich unterscheiden, sofern sich Q und Q' selbst nicht merklich unterscheiden. Man kommt also mit einem einfachen, auf beide Reize gemeinsam bezüglichen h aus. Wenn aber der Verhältnissunterschied zwischen Q' und Q größer wird, ist dies nicht mehr der Fall, hat man vielmehr

$$h = \frac{C}{Q} \text{ und } = \frac{C}{Q'}$$

in demselben Verhältniss unterschieden, als sich Q' und Q unterscheiden, und findet das G. G. keine zulängliche Anwendung mehr. Principiell ist es überhaupt nur ein Annäherungsgesetz, welches um so genauer zutrifft, je näher sich Q und Q' kommen. Natürlich nun kann die Abweichung vom G. G., welche sich auch nach den berichtigten und mittleren Werthen von D und t unter Punkt 3 noch zeigt, nicht gegen das G. G. gewandt werden, wenn sie sich unter Bedingungen zeigt, für welche das G. G. principiell nicht anwendbar ist. Und so bleibt zuletzt überhaupt nichts übrig, was mit Fug gegen dasselbe einzuwenden wäre, und halte ich den Beweis, dass, so wie dasselbe theoretisch als wohl begründet angesehen werden kann, auch weder aus meinen eigenen Gewichtsversuchen noch den Lorenz'schen Schallversuchen ein haltbarer Einwand dagegen besteht, erforderlich durchgeführt.

Inzwischen habe ich nachträglich noch versucht, was mir von einigem Interesse schien, ob sich nicht eine, in einem einfachen Ausdruck darstellbare, Verallgemeinerung des G. G. finden ließe, wodurch dasselbe auch für verhältnissmäßig größere D's anwendbar würde, indem ich folgende Betrachtung anstellte.

Da die Alternative besteht, h von Q oder Q' abhängig zu machen, machen wir zur Hebung dieser Zweideutigkeit und Gewinnung eines gemeinsamen Bezuges auf Q und Q', den Werth h vom Verhältnissmittel beider abhängig, indem wir statt $h = \frac{C}{Q}$ oder $\frac{C}{Q'}$ vielmehr setzen

$$h = \frac{C}{\sqrt{QQ'}} \qquad (1)$$

Dies gibt durch Substitution von h in die Formel $h = \frac{t}{D}$

$$t = \frac{CD}{\sqrt{QQ'}} \qquad (2)$$

mithin

$$C = \frac{t}{D}\sqrt{QQ'} \qquad (3)$$

wonach, da C constant ist, zur empirischen Gültigkeit der Formel (3) zu fordern, dass statt $\frac{t}{D}$ (nach dem einfachen G. G.) vielmehr $\frac{t}{D}\sqrt{QQ'}$ sich constant erweise. Da aber Q selbst constant ist, so können wir den, für das verallgemeinerte Gesetz als constant zu fordernden Werth noch dadurch vereinfachen, dass wir $\sqrt{Q}$ mit C zu einer neuen Constante $C' = \frac{C}{\sqrt{Q}}$ vereinigen, und sonach setzen

$$C' = \frac{t}{D}\sqrt{Q'} \qquad (4)$$

wonach also das, nach dem einfachen G. G. bestimmte $h = \frac{t}{D}$ nur noch mit $\sqrt{Q'}$ zu multipliciren, oder sagen wir, dadurch zu corrigiren wäre, um die bei $h = \frac{t}{D}$ noch vermisste Constanz für verschiedenes H und mithin Q' zu erhalten.

Inzwischen ist durchaus nicht a priori zu behaupten, dass gerade der Verhältnissmittelwerth, oder überhaupt ein, nach einfacher Regel bestimmbarer, Werth zwischen den beiden h's für alle H und mithin Q' genügen könne, die verlangte Constanz herbeizuführen, sondern nur, dass, da $h = \frac{t}{D}$ mit abnehmendem Q' zunimmt, durch Multiplication dieses wachsenden h mit dem abnehmenden $\sqrt{Q'}$ eine Compensation der Zunahme stattfinden müsse, die aber statt einer genauen auch eine nicht zureichende oder übermäßige sein könnte. Hierüber ließ sich in Ermangelung einer sicheren theoretischen Entscheidung nur durch eine empirische Untersuchung entscheiden, die ich wirklich an allen 4 Hauptreihen vorgenommen habe, mit dem Resultate, dass in der ersten und dritten Hauptreihe (diese nach Ordnung der Tab. X gezählt, beide mit $h = 20$) die Compensation als genügend gelten konnte, wogegen in der zweiten und dritten Hauptreihe (mit $h = 30$) eine entschiedene Uebercompensation, d. h. eine Abnahme der corrigirten h mit Abnahme der H und mithin der Q' stattfand. Da die Untersuchung über eine etwaige Verallgemeinerung des G. G. für verhältnissmäßig größere D's mit Vorigem noch nicht abgeschlossen sein dürfte, so gebe ich zur genaueren Einsicht in die Sachlage und Anknüpfung einer etwaigen Wiederaufnahme der Untersuchung folgends die bestimmten Data der bisherigen Versuche.

Als Werthe D dienten dabei die, von Lorenz selbst freilich nicht zugelassenen, mittleren D's der Tab. X, als t's die Mittel aus den t's der Tab. XI—XIV, beide unter Punkt 3 respective mit D_m und t_m bezeichnet, als Q' die der Tab. X mit XI—XIV gemeinsamen pH^{ε}; denn andere Unterlagen standen überhaupt nicht für die Untersuchung zu Gebote. Da die Bestimmungen um die Mitte der H-Scala herum, wo die kleinsten D liegen, ganz unzuverlässig sind, und die Prüfung des verallgemeinerten Gesetzes sich darauf zurückführen lässt, ob die corrigirten h's für die größten und kleinsten H und mithin Q' noch so nahe unter einander stimmen, um in den Abweichungen bloß noch unregelmäßige Zufälligkeiten erblicken zu können, so sind sowoh von den uncorrigirten (rohen) als den durch $\sqrt{Q'}$ corrigirten h's blol die für die 4 größten und die für die 4 kleinsten H, so weit solche dei Mittelziehung aus den t's noch zugänglich waren [1]), bestimmt und nach ihren Constanzverhältnissen in Betracht gezogen worden. Verstehen wir nun unter rohen und corrigirten h's (unter Weglassung der allen gemeinsamen Nullen vor ihrem Werthe) respective $\frac{t}{D}$ und $\frac{t}{D}\sqrt{Q'}$ im angegebenen Sinne, so erhalten wir folgende Zusammenstellung der Resultate, wobei es insbesondere gilt, das Mittel der 4 ersten mit dem Mittel der 4 letzten h zu vergleichen. Bei den rohen h's überwiegt das zweite Mittel überall über das erste; bei den corrigirten h's der 1. und 3. Reihe stimmen beide Mittel fast überein, indess bei der 2. und 4. Reihe das erste Mittel nicht unwesentlich überwiegt.

H	Erste Reihe h		H	Zweite Reihe h	
	roh	corrig.		roh	corrig.
85	2653	8465	110	2347	7515
80	2795	8038	105	2376	7383
75	2805	7357	100	2304	6958
70	2884	7320	95	2193	6426
Mittel	2784	7795	Mittel	2305	7071
40	4084	8034	55	2179	4945
35	3709	6898	50	2392	5208
30	4337	7562	45	2696	5584
25	4968	8057	40	3203	6301
Mittel	4275	7638	Mittel	2618	5510

1) Bei dem allerkleinsten H sind nämlich in den Tab. XI—XIV nicht für alle 4 Hauptfälle t's vorhanden, also keine vollständigen Mittel daraus zu ziehen.

H	Dritte Reihe h roh	Dritte Reihe h corrig.	H	Vierte Reihe h roh	Vierte Reihe h corrig.
85	6533	1,196	100	6415	1,313
80	6826	1,209	95	5127	1,098
75	6587	1,133	90	6100	1,181
70	6182	1,032	85	7330	1,379
Mittel	6532	1,143	Mittel	6243	1,243
45	6441	1,355	55	7255	1,076
40	9539	1,273	50	6966	1,012
35	9720	1,228	45	6842	956
30	9793	1,167	40	6916	931
Mittel	8873	1,256	Mittel	6995	9938

Kann nun auch hiernach der Versuch einer Verallgemeinerung des G. G. für verhältnissmäßig größere D's in vorigem Wege noch nicht als gelungen gelten, so beweist dies doch nichts gegen das G. G. in den Grenzen der verhältnissmäßigen Kleinheit des D, für die es aufgestellt ist, und lässt selbst noch die Möglichkeit einer Verallgemeinerung desselben auf anderem, als dem hier eingeschlagenen, dann aber wahrscheinlich complicirteren Wege bestehen.

Nachdem ich mich im Vorigen mit der Verwerfung des G. G. seitens des Verf. nicht habe einzuverstehen vermocht, kann ich mich auch nicht mit dem von ihm auf Grund dieser Verwerfung S. 463 gemachten »Vorschlage zu einer abgeänderten Verwendungsweise der Methode d. r. u. f. F.« einverstehen, sondern halte die, in meinen »Elementen« sowie in meiner »Revision« auf Grund des Gesetzes aufgestellte Verwendungsweise vollständig dagegen aufrecht; und zwar nicht nur aus dem formellen Grunde, weil ich das vom Verf. vorgeschlagene complicirter finde, sondern auch aus dem sachlichen, weil ich es von geringerer Tragweite finde und nicht einsehe, wie es mit Genauigkeit durchgeführt werden kann, ohne auf das G. G. zurückzukommen. Um das Wesentliche des Verfahrens zu resumiren, so empfiehlt der Verf., in Rücksicht, dass die Unterschiedsempfindlichkeit dem Reizunterschiede reciprok zu setzen ist, welcher ein gegebenes $\frac{r'}{n}$ liefert, dazu vorzugsweise den Unterschied zu wählen, welcher gerade $\frac{r'}{n} = 0{,}50$ liefert, d. i. den Unterschiedsschwellenwerth, und diesen erst annähernd nach der Methode der eben merklichen Unterschiede zu bestimmen, hiernach weiter mit der Methode d. r. u. f. F. wie folgt vorzugehen. Zuerst führe man nach dieser Methode Versuche mit einem D aus, was dem so angenäherten Werthe der Unterschiedsschwelle entspricht, dann solche mit dem Reizunterschiede

$\frac{m-1}{m} D$, $\frac{m-2}{m} D$ . . . $\frac{m+1}{m} D$, $\frac{m+2}{m} D$ . . . (m eine ganze Zahl).

Dies wird Verhältnisse $\frac{r'}{n}$ unter- und oberhalb $0{,}50$ liefern, woraus man durch rechnende oder graphische Interpolation dasjenige D wird gewinnen können, welches $\frac{r'}{n} = 0{,}50$ merklich genau entspricht. »Durch dies Verfahren — sagt der Verf. — was wir als combinirte Methode bezeichnen wollen, entledigt man sich aller Voraussetzungen, welche zu den betrachteten [Gauß'schen] Formeln nöthig, und gewinnt Resultate, die keinem Zweifel unterworfen sind«.

Das klingt ganz gut, aber da die verschiedenen Hauptfälle, unter denen die Reizunterschiede D, $\frac{m-1}{m} D$ u. s. w., sagen wir kurz Unterschiedsabstufungen, geprüft werden, ein mehrfaches $\frac{r'}{n}$ liefern, deren jedes mit constanten Fehlern behaftet ist, so müssen diese so gut, als bei meinem Verfahren eliminirt werden, um damit auf einen einheitlichen reinen Maßwerth zu kommen, und es bleibt unklar, wie dies anders als dadurch mit Strenge geschehen soll, dass man auf Grund der Formel $t = h(D \pm c \pm c')$ das Mittel aus den t's der verschiedenen Hauptfälle sucht; diese Formel aber ist im Sinne des G. G. Freilich kann man die Mittelziehung aus den t's durch Mittelziehung aus den $\frac{r'}{n}$'s der verschiedenen Hauptfälle ersetzen wollen; aber dies entspricht dem Princip der Elimination nicht, weil die constanten Fehler wohl als sich compensirende positive und negative Zuwüchse zu den D, womit die $t = hD$ proportional gehen, nicht zu den $\frac{r'}{n}$ fassbar sind; die t und $\frac{r'}{n}$ aber befolgen allgemein gesprochen einen verschiedenen Gang. Indessen, da doch in der Nähe von $\frac{r'}{n} = 0{,}50$ beide einander sehr nahe proportional gehen, gebe ich zu, dass, wenn man sich mit den $\frac{r'}{n}$ in dieser Nähe hält, man auch durch Mittelziehung aus den $\frac{r'}{n}$ der verschiedenen Hauptfälle zu nahe eben so reinen Resultaten wird gelangen können, als durch Mittelziehung aus den t. Was man aber für Vortheile dadurch vor meinem Verfahren erhält, leuchtet mir nicht ein. Nach meinem Verfahren kann man den strengen Weg der Elimination einschlagen, man erspart sich die Interpolation, und die Resultate, die man mit abgestuften Unterschieden erhält, sind nicht bloß nütze, durch Interpolation zu dem einzigen, als maßgebend angesehenen, D für $\frac{r'}{n} = 0{,}50$ zu kommen, sondern so gut als dies einzige D zu Maßvergleichen geeignet, was gestattet, dieselben zu verallgemeinern und zu erweitern. Es kommt ja bei allgemeinen Untersuchungen über die Unterschiedsempfindlichkeit nicht bloß darauf an, sie bei dem einzigen Schwellenunterschiede zu bestimmen; hierzu hat man die Methode der eben merklichen Unterschiede; und man gibt einen Hauptvortheil der Methode d. r. u. f. F., den der Ergänzung zur Methode d. e. m. U. verloren, wenn man sie auf denselben Maßwerth als diese beschränkt. Freilich auch nach dem Lorenz'schen Verfahren geht man auf verschiedene Unterschiedsabstufungen ein, aber sofern sie nicht auf ein gegebenes $\frac{r'}{n}$ führen, sind sie nach Lorenz nicht selbst zum Maßvergleich brauchbar, sondern eben nur, sofern sie durch Interpolation zu einem dazu brauchbaren Werthe führen. Um selbst dazu brauchbar zu sein, müssen sie mittelst der Gauß'schen Formel verwerthet werden, wie es von mir geschieht, aber von Lorenz verworfen wird.

Schließlich nur noch die Bemerkung, dass ich das Verdienst der Lorenz'schen Untersuchungen nach anderen Beziehungen als den von mir hier in's Auge gefassten um so weniger bestreiten kann, als ich seine Abhandlung mit der zu einem Urtheile darüber berechtigenden Aufmerksamkeit bisher eben nur nach diesen, das G. G. betreffenden, Beziehungen verfolgt habe.