Ueber die hauptsächlichsten Versuche einer mathematischen Formulirung des psychophysischen Gesetzes von Weber.

Von

Alfred Köhler.

Mit 2 Holzschnitten.

Das wissenschaftliche Gebäude der Psychophysik, wie es durch die sinnes-physiologischen Arbeiten E. H. Weber's begründet und durch die werthvollen Untersuchungen G. Th. Fechner's einer gewissen Vollendung entgegengeführt dasteht, beschäftigt seitdem vielfach die Psychologen und Physiologen. Von den verschiedensten Autoritäten auf dem genannten Gebiete ist das summarische Resultat jener Arbeiten, nämlich das psychophysische Gesetz, welches Fechner auf Grund des Weber'schen Gesetzes als Beziehung zwischen Reiz und Empfindung aufgestellt hat, der Discussion unterworfen und sind gegen dasselbe nicht zu unterschätzende Einwände erhoben worden; sei es nun, dass man überhaupt die Uebereinstimmung des Gesetzes mit den empirischen Thatsachen bestritt; sei es, dass man von rein theoretischen, apriorischen Gesichtspunkten aus dem Gesetz keine Geltung zugestehen wollte. Aus diesen oder jenen Gründen hat man daher geglaubt, an der mathematischen Formulirung des Gesetzes Modificationen anbringen zu müssen, oder man hat wenigstens das Fechner'sche Gesetz insofern verändert, als man ihm eine von der Fechner'schen wesentlich verschiedene Deutung beilegte. So kommt es, dass für die Beziehung zwischen Reiz und Empfindung eine ganze Reihe mathematischer Formulirungen aufgestellt worden sind, die um den Vorzug wetteifern. Diesen festzustellen, wird nur zum geringeren Theil durch rein theoretische Erörterungen möglich sein; vielmehr wird die größere oder geringere Wahrscheinlichkeit dieser Gesetze in erster Linie auf experimentellen Resultaten zu basiren haben. Andererseits kann man indess auch die theoretische Discussion nicht als nutzlos zurückweisen; wenn man einmal die auf empirischem Wege gefundenen Resultate in eine exacte Formel kleidet, so ist es dann nicht ohne Werth, umgekehrt zu erwägen, inwieweit solche mathematische Formulirungen die empirischen Thatsachen darstellen.

So hat besonders Delboeuf neuerdings wiederholt rein mathematische Kritiken der Fechner'schen Formulirung des psychophysischen Weber'schen Gesetzes gegeben und in der That Einwände erhoben, die jedenfalls nicht ohne Weiteres zurückzuweisen sind. Es dürfte daher die Aufgabe, die wichtigsten der bis jetzt vorliegenden mathematischen Formulirungen des Weber'schen Gesetzes einer ähnlichen Betrachtung zu unterwerfen, nicht ohne Interesse und Werth sein.

Ehe ich jedoch an diese meine eigentliche Aufgabe herantrete, scheint es mir nicht unwichtig, eine Erörterung voranzuschicken, welche derselben in gewisser Beziehung als Fundament dient. Diese Erörterung erstreckt sich auf die Messbarkeit der Empfindung. Da nämlich die Aufstellung einer Beziehung zwischen Reiz und Empfindung aus dem Bedürfniss hervorgegangen ist, die Empfindung zu messen, so ist die Frage nach der Messbarkeit der Empfindung eine Grundfrage, mit deren Beantwortung in verneinendem Sinn zugleich meine Aufgabe fallen würde.

Ueber die Messbarkeit der Empfindung.

Dass die Empfindungen an Intensität verschieden sind, ist eine Thatsache, über die kein Zweifel besteht. Anders dagegen verhält es sich mit der Frage, ob diese verschiedenen Intensitäten einer exacten Vergleichung, der Messung zugänglich sind.

Die Art, wie das Messen von Raumgrößen geschieht, ist sehr einfach; sie ist durch die reine Anschauung geboten. Das Messen von Raumgrößen geschieht nämlich durch Anlegen einer als Einheit zu Grunde gelegten Größe an die zu messende Größe, und da eben diese Art zu messen lediglich auf unsrer Anschauung beruht, so ist vollständig klar, was es heißt, wenn man sagt, diese Größe ist z. B. 3mal so groß als eine andere.

Wie verhält es sich nun mit der Messung von Empfindungsintensitäten? Offenbar ist auch hier vor allen Dingen nöthig, für die Empfindungsintensitäten einen Maßstab, eine Maßeinheit festzusetzen. Man hat nun aber bezweifelt, ob die Festsetzung einer solchen Maßeinheit möglich sei. Joh. v. Kries sagt,[1]) man könne sich gar nicht vorstellen, was es heißen solle, eine Empfindung sei z. B. 3mal so groß als eine andere, während für die Raumgrößen die entsprechende Behauptung einen klaren Sinn habe. Den Grund hierfür sucht er darin, dass die Gleichartigkeit, welche unsere Raumvorstellungen auszeichnet, den intensiven Empfindungsreihen fehlt, und kommt so zu dem Schluss, dass die Empfindung überhaupt nicht messbar sei. Auch Andere sind von anderer Seite her zu demselben Schluss gekommen.

Merkwürdiger Weise ist, wenigstens so viel mir bekannt, dieser Punkt betreffs der Messbarkeit der Empfindung erst zu einem solchen des Zweifels und der Erörterung geworden, nachdem Fechner schon sein Gesetz aufgestellt hatte, während er doch die Grundlage eines solchen zu bilden hat. Fechner hat allerdings sein Maßprincip auseinandergesetzt; entweder aber tritt bei ihm nicht klar hervor, worauf es ankommt, oder er glaubt der eigentlichen Frage durch sein Maßprincip entgangen zu sein. Er sagt nämlich »In Sachen der Psychophysik« S. 1: »Wenn schon es unmöglich ist, ein psychisches Maß durch innere Superposition von Empfindungen auf ähnliche Weise zu gewinnen, als man äußerlich die Länge eines Stückes Zeug durch die Elle misst, so kann doch ein solches auf das Abhängigkeitsverhältniss der Stärke der Empfindung von der Stärke des Reizes, der die Empfindung auslöst, gegründet und solchergestalt die innere Empfindung durch eine äußere Elle gemessen werden.«

Hiermit scheint mir Fechner zuzugeben, dass die Empfindung nicht an sich selbst, sondern nur an einem äußeren Maßstabe ge-

1) J. v. Kries, Ueber die Messung intensiver Größen und über das sogenannte psycho-physische Gesetz. Vierteljahrschr. für wissenschaftl. Philosophie. VI, S. 258.

messen werden könne. Er stellt demgemäß erst seine Beziehung zwischen Reiz und Empfindung auf und misst dann vermöge dieser Beziehung die Empfindung am Reiz. Auf diese Weise ist aber Fechner der obigen Frage nur scheinbar entgangen; denn um eine Beziehung zwischen Reiz und Empfindung aufstellen zu können, ist eben schon nöthig, dass man die Empfindung an sich selbst messen könne. Dies hat neuerdings Delboeuf recht klar auseinandergesetzt in seiner Abhandlung »Examen critique de la loi psychophysique, sa base et sa signification«. Paris 1883. S. 119. Er beruft sich darin wohl ganz mit Recht auf die Art und Weise, wie man in der Physik eine Größe an einer anderen misst, so z. B. die Wärme an der Ausdehnung des Quecksilbers durch das Thermometer. Wie hat man denn das Thermometer erhalten? Hat man etwa von vorn herein das Intervall zwischen Gefrier- und Siedepunkt in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile getheilt und festgesetzt, diejenige Wärmemenge, welche nöthig ist, um eine Ausdehnung des Quecksilbers um einen jener Theile hervorzubringen, soll unsere Wärmeeinheit sein? — Gewiss nicht; ein solches Verfahren würde im Allgemeinen falsch und nur dann zufällig richtig sein, wenn die an einander zu messenden Größen im Verhältniss der Proportionalität zu einander stehen. Die Construction des Thermometers hat man sich vielmehr auf folgende Weise zu denken:

Man messe einerseits die Wärme an einer Einheit ihrer Art, also an einer Wärmeeinheit; desgleichen das Volumen des Quecksilbers an der Volumeneinheit. Ferner construire man neben einander zwei Scalen, auf deren eine man die Quantität der Wärme in ihrer Maßeinheit, auf deren andere man die zugehörige Größe des Volumens des Quecksilbers ebenfalls in seiner Maßeinheit ausgedrückt aufträgt. Nun suche man, ob sich eine constante Beziehung aufstellen lässt zwischen den Zahlen, welche die Wärmemenge angeben, und denen, welche das entsprechende Volumen des Quecksilbers angeben. In der That hat man auf diese Weise gefunden, dass zwischen der Wärmemenge und der entsprechenden Ausdehnung des Quecksilbers eine constante Beziehung besteht, nämlich die der Proportionalität, und nun wird klar, wie die Ausdehnung des Quecksilbers uns ein Maß abgibt für die Wärme.

Als ein weiteres Beispiel aus der Physik gebe ich diejenige Formel, vermöge deren man die Höhe am Barometerstand misst. Bekanntlich nimmt der Barometerstand mit wachsender Höhe ab. Verstehen wir deshalb unter b den der Höhe H, unter B den der Höhe h entsprechenden Barometerstand, so besteht die Beziehung:

$$H - h = k \,.\, \log \frac{B}{b} \,.$$

Auch bei Aufstellung dieser Beziehung, die nicht wie im vorigen Fall einfache Proportionalität ausdrückt, ist man offenbar so verfahren, dass man zuvor die entsprechenden Höhen und Barometerstände jede in Einheiten ihrer Art gemessen hat, worauf man dann zwischen den beiderseitigen entsprechenden Größenangaben die obige constante Beziehung entdeckte. Nachträglich dient uns nun obige Formel als ein bequemes Mittel zur Messung der Höhen. Von vorn herein aber müssen die Höhen an einem Maßstab ihrer Art messbar sein. — Man überzeugt sich leicht, dass alle physikalischen Gesetze in der angegebenen Weise hergeleitet sind.

Uebertragen wir dieses Resultat auf das psychophysische Gebiet, so wird sofort klar, dass Fechner sich in den S. 574 angeführten Worten zum Mindesten ungenau ausdrückt, selbst wenn man zugeben will, dass er das Richtige gemeint hat. Fechner sagt, man könne freilich kein psychisches Maß durch innere Superposition von Empfindungen erhalten; sondern man könne die Empfindung nur an dem sie auslösenden Reiz messen. Er stellt daher eine Beziehung zwischen Reiz und Empfindung auf, ohne die Empfindung vorher an einer Einheit ihrer Art zu messen. Nach Obigem dagegen meine ich, dass eine solche Beziehung überhaupt erst dann festgestellt werden kann, wenn jede der in Beziehung zu setzenden Größen, in diesem Fall also Reiz sowohl wie Empfindung, zuvor an einer Einheit ihrer Art gemessen werden kann. Demnach ist Fechner der Frage nach der Messbarkeit der Empfindung nicht entgangen, und wir kommen so von Neuem auf dieselbe zurück.

Es fragt sich demnach, gibt es eine Maßeinheit der Empfindung? — In der Praxis, bei den experimentellen Untersuchungen über die gesetzmäßige Beziehung zwischen Reiz und Empfindung hat man thatsächlich eine solche Maßeinheit benutzt, ohne dass man sich dessen wohl immer bewusst geworden ist; wenigstens wird es selten ausdrücklich hervorgehoben oder tritt es durch die Darstellung deutlich hervor, und das scheint mir theilweise der Grund zu sein, weshalb man Fechner in diesem Punkte angegriffen hat. Jene Maßeinheit ist nichts Anderes, als der eben merkliche Empfindungsunterschied bei der Methode der Minimaländerungen der Empfindung; oder der gleich merkliche Empfindungsunterschied bei der Methode der mittleren Abstufungen. Bei den anderen Maßmethoden legt man andere Maßeinheiten zu Grunde, so den übermerklichen, den untermerklichen Empfindungsunterschied etc.

Bei Aufstellung der Beziehung zwischen Reiz und Empfindung verfährt man nun thatsächlich so, wie es oben im Gebiet der Physik als erforderlich hingestellt wurde. Man construirt zwei Scalen, eine für die Empfindung, eine für den Reiz. Auf der Empfindungsscala geht man immer um einen eben merklichen Empfindungsunterschied, also die zu Grunde gelegte Maßeinheit weiter, und markirt auf der Reizscala den zugehörigen Reizwerth. Ist man also auf der Empfindungsscala 6mal um einen eben merklichen Empfindungsunterschied fortgeschritten, so hat man eben die Empfindung um 6 Einheiten vergrößert. Hat man auf diese Weise die Tabelle für die Empfindungswerthe und die zugehörigen Reizwerthe gefunden, beide ausgedrückt in Einheiten ihrer Art, so ist nun die Aufgabe die, aus den beiderseitigen entsprechenden Angaben eine gesetzmäßige Beziehung abzuleiten.

Bei dieser Art und Weise, wie man den eben merklichen Empfindungsunterschied als Maßeinheit der Empfindung benutzt, ist jedoch wesentliche Voraussetzung, dass die eben merklichen Empfindungsunterschiede auch gleich sind, d. h. dass eben merklichen Empfindungsunterschieden auch gleich merkliche Empfindungsunterschiede entsprechen, was vielfach bestritten wird. Es ist schwer, diesen Streit theoretisch zu entscheiden. Glücklicher Weise ist ja aber die Methode der eben merklichen Unterschiede nicht die einzige, die uns zur Verfügung steht; im Gegentheil haben wir deren noch mehrere, von denen die der mittleren Abstufungen deshalb hervorgehoben sei, weil wir bei ihr direct nach unserer Schätzung die verschiedenen Empfindungen in einer Reihe so abstufen, dass die Unterschiede zweier benachbarten Empfindungen als gleich erscheinen, so dass also dieser gleiche Unterschied als Maßeinheit zu betrachten ist. Da man nun bei der zuletzt genannten Methode so wie auch bei den übrigen Maßmethoden zu denselben Resultaten kommt, welche auch die oben genannte liefert, so scheint hierin doch ein Beweis dafür zu liegen, dass die eben merklichen Empfindungsunterschiede auch als gleich merklich zu betrachten sind und daher als Maßeinheit benutzt werden können.

Eine andere Frage, die ich hier noch kurz berühren will, ist die, ob den gleich merklichen Empfindungsunterschieden auch wirklich gleiche Empfindungsunterschiede entsprechen. In der That sind ja nicht die Empfindungen selbst, sondern nur die Merklichkeitsgrade derselben der Messung zugänglich. Unsere Empfindungen existiren für uns nur nach der Quantität und Qualität, wie wir sie auffassen; wie sie sich abgesehen von unserer Apperception verhalten, bleibt an sich völlig unbekannt. Daraus folgt, dass man zunächst nur eine Beziehung aufstellen kann zwischen Reiz und Empfindungsschätzung, nicht aber zwischen Reiz und Empfindung selbst. Auf eine Beziehung der letzteren Art kann man erst mittelst Hypothesen aus der ersteren schließen. Das Gesetz zwischen Reiz und Empfindungsschätzung bietet übrigens so viel Interesse und seine endgültige Feststellung nimmt die wissenschaftlichen Bemühungen noch so sehr in Anspruch, dass man zunächst von der näheren Betrachtung eines eigentlichen Empfindungsgesetzes ganz wohl absehen könnte; in den Vordergrund der Betrachtung sollte man vielmehr die Beziehung zwischen Reiz und Empfindungsschätzung stellen, welche Herr Prof. W. Wundt ganz treffend als ein Apperceptionsgesetz bezeichnet.

Die mathematischen Formulirungen des Weber'schen Gesetzes, welche ich im Folgenden in den Bereich der Erörterung zu ziehen gedenke, sind die von Fechner, Wundt, Bernstein, Delboeuf, Brentano, Plateau, Helmholtz, Langer, G. E. Müller aufgestellten. Da es sich um den Werth dieser Formeln in mathematisch-psychophysischer Hinsicht handelt, so scheint es mir angemessen, diesen Gesichtspunkt gleich von vorn herein zu wahren, indem ich nach ihm den zu behandelnden Stoff ordne. Demgemäß theile ich die genannten Formeln in zwei Gruppen, von denen die eine diejenigen

Formulirungen in sich begreift, welchen ich fundamentale Bedeutund beimesse, während die andere diejenigen Formulirungen enthält, welchen ich bloß eine experimentale Bedeutung beilege.

Als fundamentale Formeln bezeichne ich diejenigen, deren Urheber davon ausgegangen sind, aus den empirischen Daten eine möglichst einfache Beziehung zwischen Reiz und Empfindung abzuleiten, von dem Gesichtspunkte ausgehend, dass zwischen Leib und Seele, die doch in so inniger Wechselwirkung stehen, auch eine einfache Abhängigkeit bestehen müsse. Diese Urheber sehen also ab von thatsächlichen Schwankungen und Abweichungen von ihrer mathematischen Formulirung und schreiben dieselben vielmehr störenden Einflüssen zu. Die Urheber derjenigen Formeln dagegen, welche ich als experimentale den ersteren gegenübergestellt habe, nehmen keine störenden Einflüsse an, oder sie berücksichtigen dieselben nicht als solche; sie sind vielmehr bestrebt, exacte Beziehungen aufzustellen, welche in möglichster Uebereinstimmung mit den empirischen Daten stehen. Daneben werden sie freilich zum Theil auch von anderen Erwägungen geleitet.

Zur Klarstellung der Sachlage bemerke ich noch, dass die eben gegebene Eintheilung nicht zu verwechseln ist mit der wesentlich verschiedenen Fechner'schen Eintheilung der Formeln in fundamentale und experimentale[1]; Fechner versteht nämlich unter letzteren allgemein die im Gebiet der äußeren Psychophysik bewährbaren Formeln, während er die ersteren lediglich auf die innere Psychophysik bezieht. Die experimentalen Formulirungen decken sich hiernach bei ihm mit den Apperceptionsgesetzen, die fundamentalen mit den eigentlichen Empfindungsgesetzen. Meine oben gegebene Eintheilung bezieht sich dagegen überhaupt nur auf die Apperceptionsgesetze, die ich ja in den Vordergrund der Betrachtung zu stellen gedenke. Unter denselben halte ich nur die fundamentalen Formulirungen für geeignet, entweder direct in die innere Psychophysik übertragen zu werden, oder als Basis zur Gewinnung eines eigentlichen Empfindungsgesetzes zu dienen.

Da meist nicht streng zwischen Apperceptions- und Empfindungsgesetz unterschieden wird, dergestalt dass man nicht immer weiß, ob

---

1) Vgl. Fechner, In Sachen der Psychophysik S. 13.

ein Autor von einer Beziehung zwischen Reiz und Empfindungsschätzung oder von einer solchen zwischen Reiz und Empfindung redet, so hebe ich ausdrücklich für das Folgende hervor, dass ich der Kürze halber in der Regel den Ausdruck »Empfindung« statt »Empfindungsschätzung« gebrauchen werde, ausgenommen da natürlich, wo diese Ausdrücke als Gegensätze vorkommen.

I. Die fundamentalen psychophysischen Gesetze.

Hierher rechne ich die Formulirungen von Fechner, Wundt, Delboeuf, Bernstein, Brentano und Plateau. Ehe ich zu den einzelnen Gesetzen übergehe, wird es zweckmäßig sein, die gemeinschaftliche Grundlage derselben einer summarischen Betrachtung zu unterwerfen, soweit dies im Allgemeinen möglich ist; wir werden dann bei den einzelnen Gesetzen mehr oder weniger darauf zurückzukommen haben.

In der genannten Hinsicht sind es besonders zwei Punkte, die eine Rolle spielen, einmal nämlich, wie es in der Natur meiner ganzen Aufgabe liegt, das Weber'sche Gesetz, und ferner das sogenannte Gesetz der Schwelle.

Wenden wir uns zunächst zu dem Weber'schen Gesetz. Dasselbe lässt sich in folgender Form aussprechen:

Der Unterschied zweier Reize muss proportional den Reizgrößen wachsen, wenn gleich merkliche Unterschiede der Empfindung entstehen sollen. Bezeichnet man die Größe des Reizes, welcher eine Empfindung von der Stärke s auslöst, durch r; den Zuwachs zum Reiz, der nöthig ist, um eine eben merkbare oder überhaupt eine gleich merkliche Aenderung Δs der Empfindung hervorzurufen, durch Δr, so drückt sich das Weber'sche Gesetz mathematisch so aus:

$$\frac{\Delta r}{r} = \text{Const.}, \quad \Delta s = \text{const.},$$

wo natürlich Const. und const. von einander verschiedene Constanten bedeuten.

Inwieweit das Gesetz mit den beobachteten Thatsachen im Einklang steht, ist Sache der Empirie. Die Autoren derjenigen psychophysischen Gesetze, welche ich als fundamentale bezeichnet habe, stützen sich auf das Weber'sche Gesetz in der vorstehenden mathematischen Form, sehen also von seinen thatsächlichen Abweichungen ab; die experimentalen Gesetze beruhen auf Modificationen des obigen Gesetzes.

Gestehen wir nun der obigen mathematischen Formulirung des Weber'schen Gesetzes fundamentale Gültigkeit in dem früher angegebenen Sinne zu, so fragt sich, ob dieselbe in mathematischer Beziehung vollkommen vorwurfsfrei ist. In der That hat Langer[1]) einen Einwand erhoben.

Aus der Formel $\frac{\Delta r}{r} = \text{Const.}$ oder $\Delta r = r \,.\, \text{Const.}$ ergibt sich für jeden Werth von r der zugehörige Zuwachs Δr, dem eine constante Zunahme Δs von s entspricht. Für $r = 0$ ergibt sich nun aber $\Delta r = 0$, und das würde heißen: zum Reiz $r = 0$ muss der Zuwachs $\Delta r = 0$ hinzukommen, damit die Empfindung um die constante Zunahme Δs wachse, was natürlich sinnlos ist. Man kann es nun einmal als einen Mangel des Gesetzes betrachten, dass es für $r = 0$ nicht mehr zu gelten scheint; und man kann ferner in Bezug auf die Thatsachen einen anderen Verlauf des Gesetzes fordern; namentlich das letztere hat Langer betont.

Was die erstgenannte Inconsequenz betrifft, so überzeugt man sich leicht, dass sie nicht etwa auf einem Widerspruch mathematischer Folgerungen mit Thatsachen beruht, und dass sie überhaupt nur eine scheinbare ist. Die Logarithmen der natürlichen Zahlen wachsen bekanntlich in arithmetischer Progression, während diese selbst in geometrischer Progression zunehmen. Bezeichnen wir also den zur Zahl z gehörigen Logarithmus durch l, die beiderseitigen entsprechenden Zuwüchse durch Δz und Δl, so besteht hier das dem Weber'schen Gesetz ganz analoge Gesetz:

$$\frac{\Delta z}{z} = \text{Const.}, \quad \Delta l = \text{const.},$$

und es ist sofort klar, dass wir es hier im Gebiet der reinen Mathematik mit derselben Inconsequenz zu thun haben; sie kann also nur eine scheinbare sein. Sie lässt sich in der That sehr einfach dadurch erklären, dass der Nullwerth von z absolut gefasst worden ist, während man ihn mathematisch nur relativ, also als etwas unendlich

1) Langer, Die Grundlagen der Psychophysik. Jena 1876, S. 56 u. 58.

Kleines aufzufassen hat. Nach dieser letzten Auffassung wird für $z = 0$ Δz unendlich klein, nicht aber absolut Null. Hiernach dürfte die genannte Inconsequenz als eine nur scheinbare als beseitigt anzusehen sein.

Nicht so einfach dürfte es sein, den Einwand Langer's zurückzuweisen. Langer fordert nämlich, dass für $r = 0$ Δr sich auf den Schwellenwerth reducire. Hierdurch werden wir zu dem Gesetz der Schwelle geführt; mit diesem müssen wir uns daher zunächst näher beschäftigen.

Das Schwellengesetz sagt aus, dass eine Empfindung, sowie ein Unterschied zwischen Empfindungen, nicht erst unmerklich für das Bewusstsein wird, wenn der Reiz oder Reizunterschied, von dem sie abhängen, auf einen Nullwerth der Einwirkung herabgekommen ist, sondern schon bei einem endlichen Werth desselben für das Bewusstsein schwindet; diesen endlichen Werth des Reizes resp. des Reizunterschiedes, welcher überstiegen werden muss, damit eine Empfindung resp. Unterscheidung von Empfindungen stattfindet, nennt man die Reizschwelle resp. Unterschiedsschwelle.

Man hat darüber gestritten und man streitet jetzt noch darüber, ob es sich wirklich so verhält, wie es das Schwellengesetz behauptet; man hat es auf mehrfache Weise zu entkräften versucht, so z. B. durch die Beobachtung, dass ein schwacher Schall in seiner Fortleitung durch die Luft so geschwächt wird, dass er gar nicht bis zum Ohr gelangt, so dass also für das Ohr gar kein physikalischer Reiz existirt. Nun lässt sich aber nicht das Gesetz der Unterschiedsschwelle leugnen; denn es ist eine bekannte Thatsache, dass zwei objectiv verschiedene Reize, die stark genug sind, um einzeln wirkend deutliche Empfindungen auszulösen, nur dann als verschieden erkannt werden, wenn sie um eine gewisse endliche Größe von einander verschieden sind. Da nun eine gewisse Analogie zwischen Unterschieds- und einfacher Reizschwelle besteht, so liegt es nahe vom Bestehen der ersteren auf das der letzteren zu schließen. Dass dieser Schluss in der That viel für sich hat, geht noch klarer aus einer strengen Unterscheidung zwischen der Empfindung selbst und dem Merklichkeitsgrad derselben und aus einer Gegenüberstellung des wechselseitigen Verhaltens beider hervor.

Man stimmt allgemein überein in der Auffassung, dass jedem bestimmten Reiz eine bestimmte Empfindung entspricht; auch wenn zwei Reize sich um weniger als die Unterschiedsschwelle unterscheischeiden, sagt man, dass sie Empfindungen von verschiedener Intensität auslösen; der Reihe unendlich vieler Reizintensitäten zwischen den Reizen r und $r + \varDelta r$ theilt man eine eben solche Reihe unendlich vieler Empfindungsintensitäten zu, die ihnen entsprechen. Mit anderen Worten: man sagt, die Empfindung wachse stetig mit dem Reiz. Nicht ebenso ist es mit dem Merklichkeitsgrad der Empfindung. So lange sich zwei Reize um weniger als die Unterschiedsschwelle von einander unterscheiden, lösen sie Empfindungen aus, die für unser Bewusstsein dieselbe Merklichkeit besitzen; daher unterscheiden wir sie nicht von einander. Entspricht einem Reiz r der Merklichkeitsgrad m, so bleibt dieser für die ganze Reihe der Reizintensitäten zwischen r und $r + \varDelta r$ derselbe, für den Reiz $r + \varDelta r$ springt derselbe plötzlich von m auf $m + \varDelta m$. Man kann also von der Merklichkeit der Empfindung nicht ein eben solches stetiges Zunehmen mit wachsendem Reiz behaupten, wie wir es für die Empfindung selbst annehmen. Will man sich ein geometrisches Bild von der Abhängigkeit der Empfindung resp. der Merklichkeit derselben vom Reiz machen, so trage man auf einer Abscissenaxe von einem bestimmten Anfangspunkt aus die Reizintensitäten ab und stelle die zugehörigen Empfindungen resp. deren Merklichkeitsgrade durch die entsprechenden Ordinaten dar. Die Endpunkte dieser Ordinaten bilden dann im ersten Fall eine stetige Curve, im zweiten dagegen eine treppenförmige Figur, also eine unstetige Curve.

Macht man sich von dem gegenseitigen Verhalten von Empfindung und Merklichkeit derselben ein derartiges Bild, so bietet sich von selbst als einfachste und natürlichste Annahme die, dass die Empfindung gleichzeitig mit dem Reiz gegen Null abnimmt, dass dagegen die Empfindung erst eine gewisse Größe, die Empfindungsschwelle übersteigen muss, bevor sie für unser Bewusstsein merkbar wird. Hiernach würde für die Empfindung selbst keine Reizschwelle anzunehmen sein, wohl aber für die Apperception der Empfindung. Mit dieser Ansicht würde freilich das Fechner'sche Gesetz als Empfindungsgesetz nicht vereinbar sein, worauf ich gelegentlich zurückkommen werde.

Wir wenden uns nun wieder zum obigen Einwand Langer's.

Nimmt man keine Reizschwelle an, ein Fall, der sich wie bemerkt nur auf die Empfindung selbst beziehen lässt, so fällt offenbar der erwähnte Einwand von selbst. Wie nun, wenn man eine Reizschwelle annimmt, ein Fall, der sich wahrscheinlich nur auf die Apperception der Empfindung bezieht? — Nehmen wir an, dass die Reizschwelle dem Reizwerthe $r = \varrho$ entspreche, so schwindet also für $r = \varrho$ die Merklichkeit der Empfindung; für Reizwerthe $r < \varrho$ besteht dann für unser Bewusstsein keine Empfindung mehr. Denken wir uns nun einen Reiz $r' < \varrho$ von der Art, dass, wenn man ihn vergrößert um den aus dem Weber'schen Gesetz folgenden Zuwachs $\varDelta r' = r' \,.\, \text{Const.}$, auch $r' + \varDelta r'$ noch kleiner als die Reizschwelle ϱ bleibt, so wird der Reiz $r' + \varDelta r'$ ebenso wie r' keine für unser Bewusstsein merkbare Empfindung auslösen, während nach dem Weber'schen Gesetz ein Zuwachs in der Merklichkeit der Empfindung eintreten sollte. Die Forderung Langer's, dass das Weber'sche Gesetz eine solche Form haben müsse, dass für $r = 0$ $\varDelta r$ sich auf die Reizschwelle ϱ reducirt, scheint demnach nicht ganz unbegründet.

Fechner entgegnet »In Sachen der Psychophysik« S. 39 Langer mit folgenden Worten: »Die Forderung Langer's, dass für $r = 0$ der Werth $\varDelta r$ gleich der Reizschwelle werde, hängt damit zusammen, dass er einen Nullwerth der Empfindung nicht, wie von uns geschieht, bei einem endlichen Werthe von r, sondern beim Nullwerth von r annimmt« etc. In diesen Worten an und für sich kann man indess kaum eine Widerlegung der Langer'schen Forderung finden; denn gerade in dem Falle, dass man annimmt, Reiz und Empfindung werden gleichzeitig Null, fällt der Langer'sche Einwand, wie oben bemerkt wurde. Im anderen Falle dagegen, wo man den Nullwerth der Empfindung resp. deren Merklichkeit einem endlichen Reizwerth entsprechen lässt, gilt offenbar das Weber'sche Gesetz an und für sich nicht, weil eben für $r < \varrho$ $s = 0$ ist. Nun nehmen aber Fechner und Andere für $r < \varrho$ nicht Nullwerthe der Empfindung, sondern negative Empfindungen an. Hiermit ist die besprochene Schwierigkeit auf die negativen Empfindungswerthe übertragen; hierauf kann ich jedoch erst später näher eingehen, weil ihr ganzes Wesen sich viel besser in Verbindung mit der Fechner'schen Formel besprechen lässt.

1. Das Fechner'sche Gesetz.[1])

Das Fechner'sche psychophysische Gesetz ist bekanntlich das früheste dieser Art; es dient der Psychophysik auch jetzt noch als ein Grundstein, auf den man sich bei weiteren Untersuchungen stützt. Wenn man es auch immer wieder angegriffen hat, so ist man doch andererseits immer auf dasselbe zurückgegangen, um von ihm aus wenn möglich ein besseres Gesetz zu gewinnen. Schon der Umstand, dass es mehr als andere der aufgestellten Gesetze einer eingehenden Untersuchung für werth erachtet wird, ist ein Kennzeichen für seine Bedeutung. Wir haben daher Grund genug, es den anderen Gesetzen dieser Art voranzustellen. — Ich gehe zunächst zur Ableitung des Gesetzes über.

Das Weber'sche Gesetz lautete:

$$\frac{\varDelta r}{r} = \text{Const.}, \quad \varDelta s = \text{const.}$$

Aus diesen Beziehungen folgt, wenn man die erste derselben mit einer neuen Constanten k von der Art multiplicirt, dass

$$k \,.\, \text{Const.} = \text{const.}$$

wird, unmittelbar die Beziehung:

$$1) \qquad \varDelta s = k \,.\, \frac{\varDelta r}{r}.$$

Es ist sofort klar, dass die Constante k die Bedeutung einer Empfindung haben muss.

Um von der Formel 1) zu einer Beziehung zwischen r und s zu gelangen, führt Fechner 1) zunächst über in die Differentialformel:

$$2) \qquad ds = k \,.\, \frac{dr}{r}.$$

Gegen diese Ueberführung dürfte kaum etwas einzuwenden sein; sie setzt ja bloß eine stetige Abhängigkeit von s und r voraus, und da Fechner sein Gesetz als Empfindungsgesetz auffasst, so ist diese Bedingung erfüllt, wie früher bemerkt wurde.

---

1) Das Fechner'sche System der Psychophysik ist niedergelegt in den drei Werken: »Elemente der Psychophysik«. Leipzig, 1860. »In Sachen der Psychophysik«. Leipzig, 1877. »Revision der Hauptpunkte der Psychophysik«. Leipzig, 1882.

Aus 2) ergibt sich nun durch Integration unmittelbar die endliche Beziehung:

3) $$s = k \, . \log r + \text{const.}$$

Um den Werth der Constanten zu bestimmen, ist es nöthig, dass man für einen bestimmten Reizwerth den Werth der zugehörigen Empfindung kenne. Nach dem Schwellengesetz, wie es oben ausgesprochen wurde, ist nun für $r = \varrho$ $s = 0$, so dass aus 3) folgt:

$$0 = k \, . \log \varrho + \text{const.},$$

also $$\text{const.} = - k \, . \log \varrho,$$

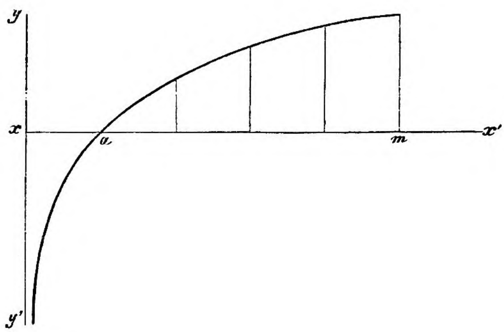
und hierdurch geht nun schließlich die Gleichung 3) über in:

$$s = k \, . \log r - k \, . \log \varrho$$

oder 4) $$s = k \, . \log \frac{r}{\varrho} .$$

Dies ist die von Fechner aufgestellte mathematische Formulirung des psychophysischen Gesetzes.

Will man sich ein geometrisches Bild machen von der Abhängigkeit zwischen s und r, die durch 4) dargestellt wird, so deute man s und r als Coordinaten in einem rechtwinkeligen Axensystem und zwar die Reizwerthe r als Abscissen $x \; x'$, die Empfindungswerthe s als Ordinaten $y \; y'$, wie es die nachfolgende Figur zeigt:



Die Curve, welche durch die Gleichung 4) dargestellt wird, ist eine logarithmische Linie. Wie wir schon wissen, verschwindet s für $r = a$, wenn a den Schwellenwerth bezeichnet; für Reizwerthe $r > a$ ist auch

$s > 0$; für $r < a$ dagegen nimmt s negative Werthe an. Aus dem Werthe des Differentialquotienten von s nach r:

$$\frac{ds}{dr} = \frac{k}{r},$$

der für positive Werthe von r stets positiv bleibt, folgt, dass die Empfindung s mit wachsendem r beständig zunimmt. Da für $r = 0$ $\frac{ds}{dr} = \infty$ wird, so nähert sich die Curve mit wachsendem r dem Parallelismus mit der r-Axe. Für große Reizwerthe wächst also die Empfindung verhältnissmäßig langsam. Das Maximum der Empfindung tritt nach der Formel 4) ein für $r = \infty$, das Minimum derselben für $r = 0$.

Nach dieser kurzen Orientirung über den Charakter der Curve komme ich zur Kritik der Fechner'schen Formel 4) in mathematisch-psychophysischer Hinsicht. Bezüglich der Ableitung von 4) ist schon bemerkt worden, dass sich gegen dieselbe im Allgemeinen nichts einwenden lässt; nur bezüglich der Bestimmung der Integrationsconstanten sei noch hinzugefügt, dass dieselbe in der gegebenen Weise nur unter der Voraussetzung des Schwellengesetzes möglich ist. Das Schwellengesetz in der Fechner'schen Auffassung ist aber nach meiner früheren Darstellung etwas problematisch; als wahrscheinlicher erscheint es, dass für die Empfindung selbst keine Schwelle besteht, wohl aber hinsichtlich der Apperception der Empfindung; als wahrscheinlicher bietet sich mit anderen Worten die Annahme, dass die Empfindung selbst gleichzeitig mit dem Reiz Null wird. Hiernach würde die obige Constantenbestimmung nicht mehr möglich sein, da sich für Const. der Werth unendlich ergeben würde. Auch eine andere brauchbare Art der Constantenbestimmung bietet sich nicht, und man kommt so zu dem schon früher angedeuteten Resultat, dass das Fechner'sche Empfindungsgesetz mit der oben als sehr wahrscheinlich hingestellten Ansicht über das Schwellengesetz unverträglich ist, so dass entweder das erstere nicht bestehen kann, oder die letztere nicht richtig ist.

In der Formel nun, wie sie nach der Fechner'schen Ableitung uns vorliegt, findet sich ein Punkt, in welchem sie immer wieder angegriffen worden ist; derselbe besteht darin, dass 4) für Reizwerthe r, welche unter dem Schwellenwerthe ϱ liegen, negative Empfindungswerthe, ja für $r = 0$ sogar $s = -\infty$ liefert. Diese Folgerungen hängen damit zusammen, dass nach dem Fechner'schen Schwellengesetz die Empfindung für einen endlichen Werth ϱ des Reizes Null wird. Die genannten Folgerungen kann man nicht ohne Weiteres als in inniger Uebereinstimmung mit den Thatsachen bezeichnen, und ist daher Grund vorhanden, sie zu einem Angriffspunkt zu machen. Dass überhaupt ein solcher Punkt hier vorliegt, in dem die Formel nicht ganz befriedigt, kann uns nicht wundern; denn das Fechner'sche Gesetz basirt ja auf dem Weber'schen und dem Schwellengesetz. Die Mängel, die ich an diesen schon früher besprochen habe, müssen demnach in das Fechner'sche Gesetz herübergekommen sein; auch hatte ich schon früher darauf hingedeutet, dass sich jene Mängel in den negativen Empfindungswerthen wiederfinden würden.

Das Auftreten negativer Empfindungswerthe in der Fechner-schen Formel bietet offenbar ursprünglich etwas Unbefriedigendes; von vorn herein, d. h. ohne durch die Formel auf negative Werthe von s geführt zu sein, würde offenbar Niemand daran denken, von negativen Empfindungen und einer Bedeutung derselben zu reden, und so ist denn auch erst nachträglich, nachdem man rein mathematisch auf negative Empfindungen geführt worden war, von Fechner und Anderen versucht worden, dieselben zu deuten. Die Bedeutung dieser negativen Empfindungen soll nun darin bestehen, dass man in ihnen ein Maß für das zu sehen habe, was noch zum Zustandekommen der Empfindung fehle.

So befriedigend diese Deutung auf den ersten Anschein ist, so gibt sie doch zu Bedenken Anlaß, namentlich für den Specialfall $r = 0$, in welchem nach der Formel $s = -\infty$ wird. Die obige Deutung, auf diesen Specialfall angewandt, würde nämlich lauten: es fehlt unendlich viel, ehe eine Empfindung zu Stande kommt. Nach unsrer Anschauung scheint es aber richtiger, dass zum Zustandekommen einer kleinen Empfindung nicht unendlich viel, sondern nur wenig fehlt.

Außer diesem Bedenken, welches vielfach erhoben worden ist, haben sich in besonderer Weise namentlich Langer und Delboeuf gegen die negativen Empfindungswerthe gewandt. Langer[1]) begründet seine Ansicht auf folgende Weise: »Die negativen Empfin-

1) Langer, a. a. O. S. 51.

dungswerthe müssen unter allen Umständen solche sein, die mit gleich großen positiven verknüpft den Werth Null geben; dies allein entspricht dem Gegensatz des Positiven und Negativen. Dächte man sich einen endlichen Reiz, der die Empfindung s hervoriefe, und einen anderen Reiz, kleiner als der Schwellenwerth, der die Empfindung $-s$ hervorriefe, so müsste das gleichzeitige Wirken beider Reize die Empfindung Null hervorrufen, wenn die Beziehung bestehen sollte. Bei allem und jedem Gegensatz kommt diese Betrachtungsweise zur Geltung, weil sie die Definition des Gegensatzes der positiven und negativen Größen ausmacht.«

Diese Kritik Langer's würde für die negativen Empfindungswerthe eine vernichtende sein, wenn sie richtig wäre. Es ist indessen in derselben nur der erste Satz betreffend die Definition der negativen Empfindungen richtig. Diese Definition ist in der That von der Art, wie man sie für die negativen Größen in der Mathematik überhaupt gibt. Aus derselben folgt aber umgekehrt ganz von selbst, dass die negative Empfindung mit der gleich großen positiven Empfindung verknüpft Null gibt; es folgt das ganz ohne Rücksicht darauf, was die negative Empfindung an sich ist; diese Folgerung ist eine rein logische, mathematische, auf die gegebene Definition gegründete. Ein Analogon hierzu ist folgendes: Man definirt gewöhnlich die Division als diejenige Operation, bei welcher diejenige Zahl (Quotient) gesucht wird, welche mit dem Divisor multiplicirt den Dividendus gibt. Aus dieser Definition folgt aber rein formal, ohne Rücksicht auf das, was die in Rechnung gezogenen Größen bedeuten, dass das Product aus dem Quotienten in den Divisor gleich dem Dividendus ist.

Langer verwendet seine Definition das Negativen anders, als es nach dem Gesagten zu geschehen hat, wodurch er freilich die negativen Empfindungswerthe scheinbar sehr schlagend, aber eben fälschlicher Weise beseitigt. Er verlangt nämlich dem oben angeführten Wortlaut gemäß, dass das Zusammenwirken der beiden Reize, welche einzeln wirkend gleiche, aber entgegengesetzte Empfindungen auslösen, die Empfindung Null hervorrufe. Das ist aber etwas ganz anderes, als wenn eine positive mit der gleich großen negativen Empfindung verknüpft Null geben soll. Beide Auffassungen würden sich nur dann decken, wenn Reiz und Empfindung im Verhältniss der Proportionalität zu einander ständen. Dies wird noch klarer hervortreten, wenn wir ein analoges Beispiel aus der Physik betrachten. Hierzu eignet sich besonders das schon früher angeführte Beispiel der Proportionalität zwischen den Höhendifferenzen und den Logarithmen der Verhältnisse der entsprechenden Barometerstände:

$$H - h = k \,.\, \log \frac{B}{b},$$

eine Formel, welche der Fechner'schen in ihrer äußeren Form vollständig entspricht. Rechnen wir die Höhe von einem Punkte an, welchem der Barometerstand B zugehört, so haben wir $h = 0$ zu setzen, und wir bekommen dann die auf diesen Nullpunkt bezogene absolute Formel:

$$H = k \,.\, \log \frac{B}{b}$$

Für $b = B$ wird hiernach $H = 0$; für einen gewissen Werth $b = b' > B$ wird H einen bestimmten positiven Werth annehmen, $H = H'$. Diesem entsprechend wird es weiter einen Werth $b = b'' < B$ geben, für welchen $H = -H'$ wird. Es müssen also einzeln die Beziehungen bestehen:

$$H' = k \,.\, \log \frac{B}{b'} = k \,.\, \log B - k \,.\, \log b'$$

$$-H' = k \,.\, \log \frac{B}{b''} = k \,.\, \log B - k \,.\, \log b'' \,.$$

Durch Addition folgt:

$$2\, k \,.\, \log B = k \,.\, \log b' \,.\, b'',$$

und hiernach muss die Beziehung

$$B^2 = b' \,.\, b''$$

bestehen, wenn die den Barometerständen b' und b'' zugehörigen Höhen gleich, aber entgegengesetzt sind. Nach Langer's Auffassung dagegen müsste sein:

$$0 = H' - H' = k \,.\, \log \frac{B}{b' + b''} \,.$$

Das ist nur möglich, wenn $B = b' + b''$ ist, d. h. wenn ebenso, wie Null das arithmetische Mittel zwischen H' und $-H'$ ist, B das doppelte arithmetische Mittel zwischen b' und b'' wäre, was eben nicht der Fall ist; es würde dies nur dann zutreffen, wenn Proportionalität bestände zwischen den Höhen und den entsprechenden Barometerständen. Nur für eine solche specielle Abhängigkeit würde Langer's Auffassung sich mit der richtigen Auffassung decken; im Allgemeinen aber ist dieselbe falsch, und damit dürfte der besprochene Einwand als beseitigt anzusehen sein.

Delboeuf schließt sich einerseits der Ansicht Langer's an, dass die Einführung negativer Empfindungen dem berechtigten Gebrauch positiver und negativer Zahlen überhaupt nicht entspreche; in dieser Hinsicht trifft die eben gegebene Widerlegung auch ihn. Andrerseits aber wendet Delboeuf ein: »Wir können negative Empfindungen a priori verwerfen, weil die Empfindungen nothwendig etwas sind und weil der Ausdruck »»negative Empfindung«« ein Unsinn ist.« Hiergegen verwahrt sich Fechner, indem er sagt, die negativen Empfindungen seien freilich ein Unsinn, wenn man einen solchen darunter verstehen wolle; sie haben aber eine Bedeutung, wenn man sie nur richtig auslege.

Es fragt sich nun, ob es eine brauchbare Auslegung der negativen Empfindungen gibt und ob die Fechner'sche die richtige ist.

Um diese in der Psychophysik eine so wichtige Rolle spielende Frage von einem allgemeineren Gesichtspunkt zu beleuchten, lege ich eine Auseinandersetzung zu Grunde, die sich in Hankel, »Complexe Zahlen« pag. 6 findet. Es heißt dort: »Will man die häufig gestellte Frage beantworten, ob eine gewisse Zahl möglich oder unmöglich sei, so muss man sich zunächst über den eigentlichen Sinn dieser Frage klar werden etc. Als unmöglich gilt dem Mathematiker streng genommen nur das, was logisch unmöglich ist, d. h. sich selbst widerspricht. Dass in diesem Sinn unmögliche Zahlen nicht zugelassen werden können, bedarf keines Beweises. Sind aber die betreffenden Zahlen logisch möglich, ihr Begriff klar und bestimmt definirt und ohne Widerspruch, so kann jene Frage nur darauf hinauskommen, ob es im Gebiet des Realen oder des in der Anschauung Wirklichen, des Actuellen ein Substrat derselben, ob es ein Object gebe, an welchem die Zahl, also die intellectuelle Beziehung der bestimmten Art zur Erscheinung komme. In diesem Sinne konnte man die aus $\sqrt{-1}$ zusammengesetzten Zahlen so lange unmöglich nennen, als man keinerlei anschauliche Darstellung derselben kannte. Nachdem aber die Zahlen $a + b\sqrt{-1}$ eine geometrische Darstellung gefunden haben, und ihre Operationen geometrisch gedeutet worden sind, kann man in keiner Weise dieselben als unmöglich bezeichnen.«

In diesen Worten ist klar ausgedrückt, worauf es ankommt; es handelt sich nämlich um die rein formale, logische Gültigkeit einer Größe, einer Zahl einerseits, und um ihre reale Existenz andrerseits. Rein logisch, rein mathematisch betrachtet ist nun offenbar das Negative, die negative Größe nicht unmöglich, also auch nicht die negative Empfindung, und hiernach fällt sehr einfach der früher erwähnte, rein theoretische Einwand Langer's, dessen Unhaltbarkeit ich schon auf anderem Wege dargelegt habe. Es fragt sich nun aber, ob der negativen Empfindung in diesem rein logischen Sinn ein Substrat im Gebiet des Realen oder des in der Anschauung Wirklichen entspricht. Fechner würde mit »ja« antworten; denn er hat ja seinen negativen Empfindungen eine Bedeutung untergelegt. Ich finde indess eine so unbedingt bejahende Antwort bedenklich; denn die von Fechner den negativen Empfindungen beigelegte Bedeutung ist eben nur eine Auslegung im wahren Sinn des Wortes; ihr selbst entspricht nichts Reales, weil, wie Delboeuf ganz richtig bemerkt, die negative Empfindung a priori nichts Reales ist.

Hören wir noch, was Harnack im seiner »Differential- und Integralrechnung« (Leipzig, 1881) S. 4. über diesen Gegenstand sagt: »In der Natur existiren für sich betrachtet weder positive noch negative Zahlen; es existiren nur zählbare Dinge. Die Unterscheidung von positiven und negativen Zahlen — Bezeichnungen, die nur im Gegensatz zu einander verstanden werden können — hat auch nur für die Operationen des Addirens und damit für alle anderen Rechnungsoperationen eine Bedeutung. Bei Anwendung der Rechnung auf physikalische Probleme ist es aber häufig sehr zweckmäßig, Größen, mit denen gerechnet wird, im Sinne der positiven und negativen Einheit zu unterscheiden.« Daraus geht hervor, dass das Negative sowohl wie das Positive wirkliche Größen bezeichnen, die sich in ihrer Art durchaus nicht unterscheiden, die vielmehr nur durch einen der Zweckmäßigkeit entsprechenden Punkt getrennt sind. Die positive Linie ist eine Linie, und die negative Linie ist ebenfalls eine Linie, ohne dass ihr erst diese Bedeutung beigelegt wird. Nicht ebenso ist die negative Empfindung mit der positiven etwas Gleichartiges.

Da nach Obigem das Positive und Negative immer nur einen

Gegensatz ausdrückt, den man, wie Harnack bemerkt, nur der Zweckmäßigkeit halber in die Mathematik einführt, während er in der Natur eigentlich gar nicht existirt, so muss stets eine Verschiebung des Punktes, von welchem aus der Gegensatz gerechnet wird, also des sogenannten Anfangspunktes möglich sein. Eine solche Verschiebung ist in der Geometrie thatsächlich möglich, und sie wird sogar vielfach verwandt. Die Folge ist, dass eine Linie, die in Bezug auf einen ihrer Endpunkte als Anfangspunkt als positiv aufzufassen ist, negativ genommen werden muss, wenn man den Anfangspunkt nach dem anderen Endpunkt der Linie verschiebt. Verlegte man entsprechend den Nullpunkt der Empfindungen, welcher der Reizschwelle entspricht, um die Größe $-s$, so würde die vorher negative Empfindung von der Größe s nun als positiv aufzufassen sein; das ist aber ganz unverträglich mit der Ungleichartigkeit dieser letzteren Art positiver (d. h. der unsprünglich negativen) Empfindungen und der eigentlich positiven Empfindungen. Eine Verschiebung des Nullpunktes der Empfindungen hat nur dann eine Berechtigung, wenn man denselben nach einem Punkte innerhalb der Empfindungsscala oberhalb der Reizschwelle verlegt; die Empfindungen unterhalb eines solchen Nullpunktes würden dann als negative zu bezeichnen sein. So z. B. stehen die Wärme- und Kälteempfindungen in einem natürlichen Gegensatz; zwischen ihnen gibt es einen gewissen Indifferenzzustand. Setzt man diesen als Nullpunkt fest, so sind dann in der That positive und negative Empfindungen zu unterscheiden; beide sind hier etwas Reales, wirkliche Empfindungen.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, dass in der Fechnerschen Deutung der negativen Empfindung schon die Voraussetzung enthalten ist, dass die negative Empfindung nicht eigentlich etwas Reales sei. Jene Deutung bestand darin, dass man in der negativen Empfindung ein Maß für das sehe, was noch zum Zustandekommen der Empfindung fehle. Hier ist der Ausdruck »das, was« zu allgemein gehalten; man könnte zweifeln, ob das hinweisende »das« eine Empfindung oder etwas Anderes bezeichnen soll; jedenfalls ist das erstere anzunehmen, und jene Deutung würde dann etwas präciser so lauten, dass die negative Empfindung ein Ausdruck für die Empfindung sei, die an dem Zustandekommen der eigentlichen Empfindung noch fehle. Hierin liegt aber eben, dass die negative Empfindung nur eine imaginäre Fortsetzung der Empfindungsscala unterhalb des Nullpunktes bezeichnet, dass sie aber nicht selbst etwas Reales ist, und man wird immer wieder zu demselben Resultat gelangen, wie man auch die Fechner'sche Deutung drehen und wenden möge.

Man hat zur Vertheidigung der negativen Empfindung angeführt, dass auch die Schuld dem Vermögen gegenüber als negativ in Rechnung gezogen wird, und doch bezeichne die Schuld den Werth einer Summe Geldes, die der Schuldner nicht hat; sie sei also für ihn nichts Reales. Die Sache liegt aber doch anders. Es kann sich nicht darum handeln, ob die Schuld nur für den Schuldner etwas Reales ist; es kommt vielmehr in Betracht, dass sie überhaupt etwas Reales, nämlich einen Geldwerth bezeichnet; sonst könnte auch das Vermögen nicht als positiv in die Rechnung eingeführt werden, da es für den, der kein Vermögen hat, ebenfalls nichts Reales ist.

Nach allem diesem scheint es doch, dass man, so lange man das Fechner'sche Gesetz als ein Empfindungsgesetz betrachtet, mit den negativen Empfindungen keine exacte Deutung verbinden kann, welche mit den sonstigen logischen Anwendungen des Gegensatzes positiver und negativer Größen im Einklange ist.

Es fragt sich nun, wie sich die Sache gestaltet, wenn man das Fechner'sche Gesetz nicht als Empfindungsgesetz, sondern als Apperceptionsgesetz betrachtet, eine Auffassung, die besonders von Herrn Prof. Wundt vertreten wird [1]. Diese Auffassung besteht darin, dass das Gesetz nicht die Beziehung zwischen Reiz und Empfindung selbst, sondern zwischen Reiz und Apperception der Empfindung darstellen soll. Wesentlich ist, dass hier auch das Schwellengesetz anders aufgefasst wird. Während Fechner annimmt, dass die Empfindung selbst mit dem Schwellenwerth ϱ schwindet, nimmt Wundt an, dass die Empfindung gleichzeitig mit dem Reiz Null wird, dass dagegen die Empfindungen, welche Reizen $r < \varrho$ entsprechen, nicht appercipirt werden. Hiernach also entsprechen den aus der Fechner'schen Formel folgenden negativen Empfindungen ebensowohl wirkliche, reale Empfindungen wie den positiven; der Unterschied ist nur der, dass letztere appercipirt, erstere nicht appercipirt werden. Dem theoretischen Gegensatz zwischen positiven und nega-

1) Philos. Stud. II, S. 1 ff.

tiven Empfindungen entspricht demnach der sachliche Gegensatz zwischen appercipirten und nicht appercipirten Empfindungen, und dieser Gegensatz ist als ein realer zu betrachten.

Man beachte ferner Folgendes: Die Stärke der Apperception hängt von der Größe der Empfindung ab; eine stärkere Empfindung wird mehr appercipirt. Ebenso werden auch bei den negativen Empfindungen, obgleich sie alle nicht appercipirt sind, verschiedene Grade der Nichtapperception zu unterscheiden sein, ebenso wie die Werthe 0 und ∞ keine absoluten, sondern je nach Umständen als sehr verschiedenwerthig aufzufassen sind. Hiernach können wir sagen, dass die jeweiligen Werthe $-s$ die Grade der Nichtapperception darstellen; dem Werthe $s = -\infty$ für $r = 0$ würde dann die absolute Nichtapperception beizumessen sein, was sich mit den Thatsachen sehr wohl verträgt. Denn wo kein Reiz ist, kann keine Empfindung und also durchaus keine Apperception derselben eintreten.

Ohne den Anspruch zu erheben, dass diese hier vorgeführte Auffassung die allein richtige, dass sie unantastbar und dass das Problem eines psychologischen Gesetzes nun gelöst sei, wird man doch zugeben müssen, dass dieselbe im Allgemeinen befriedigt, dass sie jedenfalls bei weitem den Vorzug vor der Fechner'schen Deutung verdient.

2. Das Wundt'sche Gesetz.

Herr Prof. Wundt steht in seinen Ansichten zum großen Theil auf Seiten Fechner's, trennt sich aber in einem Hauptpunkte, nämlich in der Auffassung der Bedeutung des Gesetzes von ihm. Auch seine Ableitung des Gesetzes ist eine von der Fechner'schen wesentlich verschiedene, die wegen besonderer Vorzüge beachtenswerth ist.

Wundt [1]) denkt sich die Empfindung, oder besser den Merklichkeitsgrad einer Empfindung s aus einer Reihe von Merklichkeitszuwüchsen Δs bestehend und setzt dem entsprechend die Beziehung $s = n \cdot \Delta s$ an, wo Δs den gleich merklichen Empfindungsunterschied und n die

1) Wundt, Grundzüge der physiolog. Psychologie. 2. Aufl. Leipzig, 1880 Bd. I. S. 355.

Anzahl derselben bedeutet, welche man successive an einander zu reihen hätte, damit die Empfindung von der Merklichkeit s entstehe. Bezeichnen wir wie früher die Reizschwelle durch ϱ, ferner durch $r_1\, r_2 \ldots r_n$ die Reize, welchen successive die Merklichkeitsgrade Δs, $2\,\Delta s$, ... $n\,.\,\Delta s$ entsprechen, so ist nach dem Weber-schen Gesetz:

$$r_2 = \frac{r_1^2}{\varrho},\; r_3 = \frac{r_1^3}{\varrho^2}, \ldots\ldots r_n = \frac{r_1^n}{\varrho^{\,n-1}}.$$

Hier setzen wir nun für r_n allgemein r und $n\,.\,\Delta s = s$, so dass dem Reiz r die Empfindung $s = n\,.\,\Delta s$ zugehört. Setzen wir dann aus $s = n\,.\,\Delta s$ den Werth $n = \frac{s}{\Delta s}$ in die Gleichung:

$$r^n \equiv r = \frac{r_1^n}{\varrho^{n-1}} \equiv \varrho\left(\frac{r_1}{\varrho}\right)^n,$$

so folgt:

$$r = \varrho\left(\frac{r_1}{\varrho}\right)^{\frac{s}{\Delta s}}$$

oder:

$$\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{\Delta s} = \left(\frac{r_1}{\varrho}\right)^s.$$

Hieraus erhält man weiter:

$$\Delta s\,.\,\log\frac{r}{\varrho} = s\,.\,\log\frac{r_1}{\varrho},$$

also

$$s = \frac{\Delta s}{\log\frac{r_1}{\varrho}}\,.\,\log\frac{r}{\varrho}$$

Δs bedeutet den constanten Merklichkeitszuwuchs; r_1 und ϱ sind ebenfalls Constanten; man kann also den Factor $\frac{\Delta s}{\log\frac{r_1}{\varrho}}$ in eine Constante k zusamenfassen und hat dann als Beziehung zwischen Reiz und Empfindung

$$s = k\,.\log\frac{r}{\varrho},$$

welche mit der Fechner'schen Beziehung formal ganz übereinstimmt.

Ueber den Verlauf der durch die vorstehende Gleichung dargestellten Curve gilt ganz dasselbe, wie beim Fechner'schen Gesetz.

Die eben vorgeführte Ableitung der Wundt'schen Formel weist ganz entschiedene Vorzüge anderen Ableitungen gegenüber auf. In dieser Beziehung sei an erster Stelle erwähnt, dass einer im Eingang über die Messbarkeit der Empfindung betonten Forderung in klarer Weise entsprochen ist. Ich bemerkte dort, dass es möglich sein muss, die Empfindung durch eine Einheit ihrer Art zu messen, bevor man überhaupt eine Beziehung zwischen Reiz und Empfindung aufstellen könne, und dass man thatsächlich in der Praxis eine Maßeinheit der Empfindung zu Grunde lege, ohne dass man sich dessen immer bewusst sei. Hier bei der Wundt'schen Ableitung tritt dies klar zu Tage; es wird ausdrücklich die Empfindung s aus n gleichen Merklichkeitsstufen $\varDelta s$ zusammengesetzt gedacht, so dass also $\varDelta s$ die Einheit ist, in welcher die Empfindung s gemessen wird.

Neben diesem Vorzug der Wundt'schen Ableitung, der viel zur Klarheit der ganzen Sachlage beiträgt, ist noch ein anderer bemerkenswerth. In die Fechner'sche Formel ist die Constante k eingeführt worden, ohne dass man von vorn herein ihre Bedeutung kennt; man weiß nur, dass sie ein sogenannter Proportionalitätsfactor ist, und man erkennt dann aus der Beziehung, in welcher sie vorkommt, dass sie eine gewisse Empfindung ausdrücken muss; welche, bleibt zunächst noch unbekannt. Es ist dies nicht gerade als ein Mangel der Fechner'schen Ableitung zu betrachten und ist daher auch gelegentlich der Kritik des Fechner'schen Gesetzes hierauf gar nicht eingegangen worden. Auch in der Physik führt man ja Proportionalitätsfactoren ein, deren Bedeutung man erst nachträglich erklärt. So sagt man bei der gleichförmigen Bewegung eines Punktes, der Weg sei proportional der Zeit, in welcher der Weg zurückgelegt wird, also

$$s = \text{const} \, . \, t = c \, . \, t$$

und nachträglich folgert man hieraus, da für $t = 1$ $s = c$ hervorgeht: c ist der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg.

Ganz ebenso folgert man aus der Fechner'schen Formel

$$s = k \, . \log \frac{r}{\varrho},$$

dass k diejenige Intensität der Empfindung bedeutet, für welche $\log \frac{r}{\varrho} = 1$, also $\frac{r}{\varrho} = e$ ist, welche also durch einen Reiz $r = \varrho \, . \, e$ ausgelöst wird. Diese Erklärung der Constanten k ist vollkommen correct. Während man aber im Gebiet der Physik sich ein klares Bild von dem rein theoretisch gefolgerten Werth des Proportionalitätsfactors machen kann, während man also im obigen Beispiel ein auschauliches Bild des Werthes von c hat, ist man hier im Gebiet der Psychophysik nicht ebenso im Stande, sich eine anschauliche Vorstellung zu bilden über die Intensität der Empfindung, welche durch die Fechner'sche Constante k dargestellt wird. Mit der Wundt'schen Constanten $k = \frac{\Delta s}{\log \frac{r_1}{\varrho}}$ liegt die Sache wesentlich anders. In dem Werthe von k hat jede Größe von vorn herein eine bestimmte Bedeutung; man erkennt klar die Entstehung des Werthes k und kann sich schließlich auch ein anschauliches Bild von demselben machen. Denn aus

$$k = \frac{\Delta s}{\log \frac{r_1}{\varrho}} = \frac{1}{\log \frac{r_1}{\varrho}} \cdot \Delta s$$

erkennt man unmittelbar, dass die Empfindung k ein bestimmtes Vielfaches der Empfindung Δs ist. Von Δs, der ursprünglichen in der Praxis angewandten Maßeinheit, hat man eine klare Vorstellung. Der Werth des Factors $\frac{1}{\log \frac{r_1}{\varrho}}$ hängt von der Größe des Schwellenwerthes ϱ und des darauf folgenden Werthes r ab; er lässt sich also in jedem einzelnen Fall berechnen; und nun weiß man und kann sich eine klare Vorstellung davon machen, wieviel gleichmerkliche Empfindungszuwüchse Δs man aneinander zu reihen hat, um den Merklichkeitsgrad der Empfindung zu bekommen, welcher durch k dargestellt wird.

Die Anschaulichkeit in solchen Einzelheiten trägt offenbar zur allgemeinen Klarheit wesentlich bei, und es ist daher in dem erwähnten Umstand ein nicht zu unterschätzender Vorzug der Wundt'schen Formel zu erblicken. Bedenken wir zum Schluss, dass nach der Wundt'schen Auffassung des psychophysischen Gesetzes als eines Apperceptionsgesetzes die negativen Empfindungswerthe, die aus der Formel resultiren, einer exacteren und befriedigenderen Erklärung fähig sind, als dies nach der Fechner'schen Auffassung möglich, so ist unzweifelhaft, dass diese Wundt'sche Formel und Auffassung der Fechner'schen vorzuziehen ist.

3. Bernstein's Gesetz.[1])

Das Bernstein'sche Gesetz schließen wir den beiden vorigen hier am besten an, weil es mit denselben formal noch ganz übereinstimmt, im Gegensatz zu jenen aber am ausgeprägtesten die dritte der überhaupt aufgetretenen Auffassungen des Weber'schen Gesetzes repräsentirt. Bei Fechner war das Gesetz ein psychophysisches, ein Empfindungsgesetz; er bezog es auf die Abhängigkeit zwischen der Empfindung und dem Reiz, und zwar dem inneren Reiz. Wundt betrachtet das Gesetz, wie wir gesehen haben, als ein reines Apperceptionsgesetz, als ein psychologisches Gesetz, welches ein exacter Ausdruck für unsre Auffassung der Außenwelt ist. Bei Bernstein nun ist das Gesetz ein physiologisches, wie sich im Verlauf der Ableitung desselben deutlich zeigen wird; es stellt dar das Verhältniss der Schwächung des äußeren Reizes in der Fortleitung zum Sensorium.

Der allgemeine Gang der Ableitung des Bernstein'schen Gesetzes ist folgender:

Von der empfindenden peripherischen Oberfläche werden die Erregungen der äußeren Reize durch isolirte Bahnen nach dem Centrum fortgeleitet. Die Erregung in einer Ganglienzelle des Centrums breitet sich auf die umliegenden Ganglienzellen aus. Bei dieser Ausbreitung hat die Erregung einen Widerstand zu überwinden und erleidet dadurch einen Verlust an Intensität, so dass die Ausbreitung der Erregung im Centrum eine Grenze erreichen wird. Den Umfang, bis zu dem sich diese Ausbreitung erstreckt, bezeichnet Bernstein als Irradiationskreis; da aber jene Ausbreitung jedenfalls nach drei Dimensionen stattfindet, bezeichnen wir diesen räumlichen Umfang mit Fechner als »Irradiationsraum«. Bernstein nimmt nun an, dass die Empfindung der Größe dieses Irradiationsraumes proportional sei. Ferner soll die Größe des Verlustes, den die Erregung bei ihrer Ausbreitung erleidet, proportional der Intensität der Erregung sein. Als Schwellenwerth schließlich betrachtet Bernstein diejenige Intensität der Erregung,

---

1) Bernstein, Untersuchungen über den Erregungsvorgang im Nerven- und Muskelsystem. 1871. S. 178.

die nicht mehr im Stande ist, sich in der Centralmasse weiter fortzupflanzen.

Bezeichnen wir nun die Intensität der Empfindung durch s, die Größe des Irradiationsraumes durch S und denken uns denselben ausgefüllt mit sehr nahe liegenden Centralelementen, so ist nach der Annahme der Proportionalität zwischen der Intensität der Empfindung und der Größe des Irradiationsraumes:

$$s = \alpha \,.\, S,$$

wo α die Dichtigkeit der Centralmasse, d. h. die Anzahl der Centralelemente in der Einheit des Centralraumes bedeutet. Versteht man weiter unter y die variable Intensität der Erregung in jedem Punkt innerhalb des Irradiationsraumes und unter x die Entfernung jenes Punktes vom Mittelpunkt der Erregung, so wird die Gesammtintensität an der Kugeloberfläche vom Radius x $y \,.\, O$, wenn O die Größe dieser Kugeloberfläche bedeutet. Der Verlust an Intensität innerhalb einer Kugelschale von der Dicke dx ist also $O \,.\, dy$. Derselbe soll proportional sein der Intensität der Erregung $O \,.\, y$ und der Masse der durchströmten Centralelemente $\alpha \,.\, dS$. Verstehen wir also unter k eine Constante, so erhalten wir, wenn wir berücksichtigen, dass der Verlust mathematisch durch das Minus-Zeichen zum Ausdruck kommt:

$$O \,.\, dy = -k \,.\, yO \,.\, \alpha \,.\, dS$$

oder

$$\frac{dy}{y} = -k\,\alpha\,dS$$

Die Constante k bedeutet hier offenbar den specifischen Widerstand, den die Centralelemente der Erregung entgegensetzen; sie ist gleich dem Verlust an Intensität, den die Einheit der Erregung in der Einheit des Raumes erleidet.

Um diese Differentialformel zu integriren, müssen wir für die veränderlichen Größen die entsprechenden Grenzen einführen. Setzen wir den Anfangswerth der Erregung r, den Schwellenwerth ϱ, so ist $y = r\,S = 0$, $y = \varrho\,S = S$. Also haben wir:

$$\int_{\varrho}^{r} \frac{dy}{y} = -k\alpha \int_{S}^{0} dS$$

oder integrirt:

$$\log \frac{r}{\varrho} = k \,.\, \alpha S,$$

und wenn wir noch $\alpha S = s$ einführen und $\frac{1}{k}$ einer neuen Constanten k' gleich setzen:

$$s = \frac{1}{k} \,.\, \log \frac{r}{\varrho} = k' \,.\, \log \frac{r}{\varrho},$$

eine Formel, die mit der Fechner'schen und Wundt'schen formal vollständig übereinstimmt.

Man kann nicht verkennen, dass die gegebene Ableitung eine sehr eigenartige und sinnreiche ist; aber sie basirt auf mehreren Hypothesen, deren Richtigkeit in Frage gestellt werden muss. Während alle anderen mathematischen Formulirungen des Weber'schen Gesetzes sich mehr oder weniger auf dieses stützen, von diesem ausgehen, also auch mehr den Thatsachen gemäß sind, geschieht die Bernstein'sche Ableitung auf rein speculativem Wege, wobei Hypothesen überhaupt kaum zu vermeiden sind. Zur Aufstellung einiger seiner Hypothesen ist Bernstein durch physiologische Untersuchungen geführt worden; er sagt aber selbst, dass dieselben ihm erst durch den Umstand größere Wahrscheinlichkeit erlangt haben, dass auf Grund derselben das Fechner'sche Gesetz sich ableiten lässt, so dass man wohl annehmen kann, jene Hypothesen verdankten ihre Aufstellung zum Theil dem Bestreben, mittelst derselben zum Fechner'schen Gesetz zu gelangen. In der That drückt sich Bernstein gelegentlich einmal so aus: »Diese Vorstellung, an sich nicht unwahrscheinlich, rechtfertigt sich durch das Resultat, zu dem sie führt«. Hiernach aber tragen sich bei Bernstein das psychophysische Gesetz und die Hypothesen, auf denen seine Ableitung basirt, gegenseitig, während man doch darauf ausgehen muss, durch Zuhülfenahme von Thatsachen oder überhaupt unbestreitbarer Momente zu einer endgültigen Beziehung zwischen Reiz und Empfindung zu gelangen.

Neben der allgemeinen hypothetischen Vorstellung über die Art und Weise, wie die Empfindung zu Stande kommen und wie ihre Intensität vom Reize abhängen soll, bedient sich Bernstein folgender vier besonderen Hypothesen:

1) Der Verlust an Intensität bei der Ausbreitung der Erregung in den Ganglienzellen soll proportional der Intensität der Erregung sein.

2) Die Anzahl der Ganglienzellen, die von der Erregung ergriffen werden, soll dieser proportional sein.

3) Wenn die Erregung auf eine gewisse Intensität, die Schwelle, herabgesunken ist, soll sie sich nicht weiter ausbreiten können.

4) Die Empfindung soll proportional sein der Größe des Irradiationsraumes.

Inwieweit man diesen Hypothesen Berechtigung zugestehen kann, dies zu entscheiden ist Sache der Physiologie. Nur in zwei Punkten seien in mathematischer Hinsicht folgende Bemerkungen gemacht. Die Proportionalität der Empfindung mit dem Irradiationsraum begründet Bernstein in folgenden Worten:[1] »Dasjenige Maß, mit dem wir die Intensität irgend einer Kraft messen, ist der Raum. Die Anziehungskraft messen wir durch den Fallraum in einer Secunde« etc. In dem Wortlaut des eben angeführten Beispiels liegt aber schon, dass wir die Kraft nicht allein nach dem Weg bemessen, den ein Körper durchläuft unter Einwirkung der Kraft, sondern auch nach der zum Durchlaufen des Weges verwandten Zeit. Fechner weist daher ganz mit Recht darauf hin, dass hier Bernstein eine Unrichtigkeit, eine Inconsequenz begeht; wenn man einmal auf die Analogie in der Physik sich stützen will, so ist doch im vorliegenden Fall kein Grund vorhanden, diese Analogie nur halb anzuwenden, indem auf die Zeit keine Rücksicht genommen wird. Im Gegentheil: wenn man annimmt, dass die Empfindung in der von Bernstein vorgeführten Weise vom Reiz abhänge, so ist sehr wahrscheinlich, dass auch die Zeit in Betracht kommt, in welcher die Erregung sich über den Irradiationsraum verbreitet. Wahrscheinlich ist nun, dass eine starke Erregung sich schneller fortpflanzt als eine schwache, und dann wäre es wohl möglich, dass eine starke Erregung zur Ausbreitung über den ihr entsprechenden Irradiationsraum eben dieselbe Zeit braucht, wie eine schwache Erregung zur Verbreitung über den ihr entsprechenden Irradiationsraum; in diesem Sinne würde es dann nicht ungerechtfertigt erscheinen, dass man die Zeit nicht in Betracht zieht.

Einen Hauptangriffspunkt des Bernstein'schen Gesetzes erblickt nun Fechner darin, dass die dritte der oben angeführten Hy-

---

1) Vgl. Reichert-Dubois'sches Archiv 1868, S. 391.

pothesen der zweiten widerspricht. Nach jener zweiten Hypothese sollte der Process der Ausbreitung der Erregung in den Ganglienzellen bis in's Unendliche fortschreiten, und um dem zu begegnen, stellt eben Bernstein eine neue Hypothese über die Schwelle auf, indem er sich dabei auf die Erfahrungsthatsache der Schwelle stützt. Ich lasse es dahingestellt, ob die Beschränkung der zweiten obigen Hypothese durch die dritte als ein so einschneidender Widerspruch aufzufassen ist, wie es Fechner thut. Soviel ist gewiss, dass Bernstein ebenso wie Fechner das Schwellengesetz nicht entbehren kann, um eine brauchbare Formel aufstellen zu können; und das Bernstein'sche Schwellengesetz hat eben dieselben Unzuträglichkeiten zur Folge, wie das Fechner'sche. Bei Fechner war das Schwellengesetz entsprechend seiner ganzen Auffassung der psychophysischen Beziehung ein psychophysisches; nach ihm muss der Reiz eine gewisse Minimalgröße haben, um eine Empfindung auslösen zu können. Die Reize kleiner als ϱ lösen überhaupt keine Empfindung aus. Nach der Auffassung Wundt's löst jeder Reiz, sofern er überhaupt das Sensorium erreicht, eine Empfindung aus; diese letztere muss aber erst eine gewisse Minimalgröße übersteigen, bevor sie appercipirt werden kann. Man könnte die Schwelle hier entsprechend der Auffassung des Gesetzes als eine psychologische bezeichnen. Der physiologischen Deutung des Gesetzes bei Bernstein entsprechend ist nun auch die Schwelle von ihm physiologisch aufgefasst. Nach Bernstein muss der Reiz, die Erregung eine gewisse Größe erreichen, um sich weiter auszubreiten, resp. überhaupt ausbreiten zu können. Einem inneren Reiz kleiner als ϱ entspricht also nicht mehr der letzte physiologische Vorgang, von dem die Empfindung direct abhängt, also entspricht ihm noch weniger eine Empfindung selbst. Hiernach sind die sich auch aus der Bernstein'schen Formel ergebenden negativen Empfindungen ebenso wenig einer exacten Erklärung fähig, wie es beim Fechner'schen Gesetz der Fall war. Man kann sagen, diese negativen Empfindungen correspondiren den physiologisch verloren gegangenen Reizen, welche kleiner als ϱ sind; aber sie sind nicht selbst wirkliche Empfindungen, und es gilt daher dasselbe wie früher.

4. Delboeuf's Gesetz.

Delboeuf hat nicht bloß eine mathematische Formulirung des Weber'schen Gesetzes gegeben; er verbindet vielmehr mit dem Gesetz eine so eigenartige Auffassung, dass man sagen kann, er hat eine selbständige Theorie der Psychophysik entwickelt. Dabei haben sich im Laufe der Zeit die Ansichten Delboeuf's zum Theil geändert; seine Lehre hat einige Modificationen erfahren und an Stelle der ursprünglichen mathematischen Formulirung des Gesetzes ist neuerdings eine etwas andere getreten. Es wird daher gut sein, den Entwickelungsgang der Theorie zu verfolgen. Die in Betracht kommenden Werke Delboeuf's sind besonders folgende:

1) Étude psychophysique. Bruxelles, 1873.

2) Théorie générale de la sensibilité. Bruxelles, 1876.

3) Examen critique de la loi psychophysique. Paris, 1883.

Diese Werke mögen im Folgenden der Kürze halber einfach durch die vorstehenden Nummern bezeichnet werden.

Delboeuf beginnt in (1) damit, das Weber'sche und Fechner'sche Gesetz einer Kritik zu unterziehen; er bespricht dabei die Mängel und Schwierigkeiten, die das Gesetz namentlich bezüglich der Schwelle und der damit zusammenhängenden negativen Empfindungen aufweist. Die Vermeidung dieser Schwierigkeiten bildet für Delboeuf bei der Aufstellung seiner Formulirung des Gesetzes einen maßgebenden Gesichtspunkt. Als Ausgangspunkt für sein Gesetz dienen ihm folgende beiden Hauptbemerkungen (1. S. 27):

1) Die Intensität der Empfindung hängt nicht allein ab von der Intensität des Reizes, sondern auch von der Menge (masse) der Empfindlichkeit (sensibilité) oder der Kraft (force), welche die bezüglichen Organe in dem Augenblick besitzen; der Vorrath an Empfindungsvermögen wird durch die Einwirkung eines Reizes erschöpft, so dass für einen nachfolgenden Reiz das empfindliche Wesen eigentlich sich in anderen Bedingungen befindet. So ist z. B. die Empfindung der Kälte oder Wärme beim Beginn der Einwirkung des Reizes viel lebhafter als nach einiger Zeit.

2) Es existirt eine gewisse Quantität Kraft oder Empfindlichkeit, welche nicht verbraucht werden darf, weil sie von vorn herein nöthig

ist für das Leben und die Empfindlichkeit des Individuums; man kann z. B. marschiren so lange, bis man unfähig ist einen weiteren Schritt zu thun; dennoch bleibt aber Leben und Empfindlichkeit. Die disponible Empfindlichkeit ist gleich der absolut vorhandenen, vermindert um diese unerlässliche Empfindlichkeit. Sei die absolute Empfindlichkeit M, die für das Leben unerlässliche Empfindlichkeit v, und die für die Empfindung unerlässliche Empfindlichkeit c, so ist die in Wirklichkeit disponible Empfindlichkeit $M - v - c$.

Bezüglich der Größe c wird weiter ausgeführt, dass die Organe sich nicht in absoluter Ruhe befinden, dass vielmehr in denselben eine Reizursache besteht, welche das Leben und die Empfindlichkeit unterhält. In Verbindung mit diesem subjectiven Reiz bringt ein äußerer Reiz eine Empfindung hervor. So verbindet sich die äußere auf uns einwirkende Wärme mit unserer eigenen Wärme.

Dieser subjective Reiz, sagt Delboeuf weiter, soll durch c dargestellt werden; ihm selbst soll keine Empfindung entsprechen; diese beginnt erst mit dem Einwirken eines äußeren Reizes.

In dieser Darstellung, welche im Wesentlichen nur eine Wiedergabe der französischen Darstellung Delboeuf's ist, kommen Ungenauigkeiten vor, über die man sich, namentlich auch für das Folgende, zuvor klar werden muss. Was soll nach der gegebenen Darstellung die Größe c bedeuten? Oben wird gesagt, c solle die für die Empfindung unerlässliche Empfindlichkeit bedeuten; und dann wird auseinandergesetzt, dass c den subjectiven Reiz darstellen solle. Andererseits scheint Delboeuf die Worte Kraft und Empfindlichkeit zu identificiren.

Wenn ich Delboeuf recht verstehe, so ist seine Auffassung kurz folgende:

In den Organen existirt eine gewisse Quantität Kraft; von der Größe dieser Kraft hängt die Empfindlichkeit ab; ist die Kraft erschöpft, so schwindet die Empfindlichkeit. Wirkt ein äußerer Reiz auf das Organ, so sucht dieses sich demselben zu accommodiren; hierzu ist eine Ausgabe an Kraft aus dem Kraftvorrath erforderlich; je größer der äußere Reiz ist, um so größer muss auch diese Kraftausgabe sein. Delboeuf bemerkt gelegentlich, dass die Ausgabe an Kraft jedenfalls proportional sei dem äußeren Reiz. Dem oben erwähnten subjectiven Reiz entspricht nun ebenfalls eine Ausgabe an

Kraft, und diese für Leben und Empfindlichkeit unerlässliche Kraft ist es wohl, welche mit c bezeichnet werden soll.

Wie schon angedeutet, hat Delboeuf die Vorstellung, dass, wenn auf ein Organ ein Reiz wirkt, das Organ sich dem Reiz zu accommodiren strebt; es sucht sich mit dem Reiz in eine Art Gleichgewicht zu setzen. So z. B. accommodirt sich die Haut der sie umgebenden Temperatur. Gleichzeitig erschöpft sich hierdurch die Kraft des betreffenden Organes. Dem entsprechend stellt Delboeuf zwei Gesetze nebeneinander auf: 1) das Gesetz der Erschöpfung (la loi de l'épuisement), 2) das Gesetz der Empfindung (la loi de la sensation).

1) Das Gesetz der Erschöpfung.

Es sei M der Kraftvorrath des Individuums, v die für das Leben unentbehrliche Menge derselben; dann stellt $M - v = m$ nach Delboeuf's Darstellung die Kraftmasse dar, welche disponibel ist für die Arbeit. Ferner sei δ eine Ausgabe an Kraft, welche proportional sein soll der bewirkten Arbeit oder dem äußeren Reiz, und f stelle dar das Gefühl der Erschöpfung oder der ihr entsprechenden Ermüdung. Delboeuf meint nun: es sei eine Sache der Erfahrung und täglicher Beobachtung, dass das Gefühl der Erschöpfung oder Ermüdung um so größer, je größer die bewirkte Arbeit und je kleiner die verbleibende Kraft ist, und setzt daher hypothetisch den Zuwachs an Ermüdung proportional dem Zuwachs an Kraftaufwand und umgekehrt proportional der Menge der Kraft $M - v - \delta$; so bekommt er die Differentialformel:

$$df = k \frac{d\delta}{m - \delta},$$

woraus folgt:

$$f = -k \cdot \log (m - \delta) + \text{const.}$$

Die Ermüdung ist gleich Null, wenn noch kein Kraftverbrauch δ stattgefunden hat; daher folgt:

$$\text{const} = k \cdot \log m$$

und somit wird:

a) $$f = k \cdot \log \frac{m}{m - \delta}.$$

2) Das Gesetz der Empfindung.

Bedeute s die Empfindung, welche mit dem Kraftaufwand δ verbunden ist. Nach Delboeuf's Ansicht ist es höchst natürlich, dass die Empfindung um so größer, je größer δ und je kleiner $c+\delta$ ist, und so setzt er hypothetisch den Zuwachs an Empfindung proportional dem Zuwachs an Reiz und umgekehrt proportional dem Reiz (richtiger Ausgabe an Kraft) $c+\delta$. Die hieraus folgende Differentialformel lautet:

$$ds = k' \frac{d\delta}{c+\delta}.$$

Indem man integrirt und die Integrationsconstante dadurch bestimmt, dass man $s=0$ setzt, bekommt man:

b) $$s = k' \,.\, \log \frac{c+\delta}{c}.$$

Aus den Formeln a) und b) zieht Delboeuf folgende Schlüsse:

In a) hat δ den Werth $m = M - v$ als Maximum, weil für $\delta > m$ f imaginär wird; die Erschöpfung f wird für $\delta = m$ unendlich, und man verliert jegliche Empfindlichkeit, da die für die Empfindlichkeit unerlässliche Kraft c verausgabt wird; in b) hat δ den Werth $\delta = M - c$ als Maximum; die Empfindung bleibt endlich, aber man verliert das Leben des Organes, da die für dieses unerlässliche Kraft v verausgabt ist. Da nun v und c für Leben und Empfindlichkeit unentbehrliche Kraftmengen sind, so folgert Delboeuf, dass δ den Werth $M - v - c$ nicht übersteigen darf.

Angenommen nun, dass die ganze Delboeuf'sche Auffassung aufrechtzuerhalten sei, insbesondere dass es gerechtfertigt sei, für Leben und Empfindlichkeit einzeln Kraftvorräthe v und c als unerlässlich aufzustellen, so erscheint die aus b) hervorgehende Folgerung, dass für $\delta = M - c$ die Empfindung endlich bleibt, das Organ aber das Leben verliert, absurd; wie kann man sich vorstellen, dass ein Organ zerstört sei und doch noch eine Empfindung haben könne! Diese den Thatsachen widersprechende Folgerung würde vermieden werden, wenn an Stelle von c in b) $c+v$ stände; mit andern Worten, man sollte nicht Leben und Empfindlichkeit trennen, sondern als zusammengehörig betrachten und für sie gemeinsam einen einzigen Kraftvorrath c als unerlässlich aufstellen. Zu diesem Schluss führen noch andre Ueberlegungen; so sieht man gar nicht ein, weshalb die disponible Kraftmenge für das Gesetz der Erschöpfung $M - v$, für das Gesetz der Empfindung dagegen $M - c$ sein soll. Im Gegentheil, es ist S. 605 bemerkt worden, dass die in Wirklichkeit disponible Kraftmenge $M - v - c$ ist, und das muss für das eine wie für das andre Gesetz gelten. Daraus folgt aber wieder, dass nur $v + c$, nicht aber einzeln v und c in Betracht kommen.

Die Ableitungen der Gesetze a) und b) sind, wie man leicht bemerkt, ganz analog; es wird daher genügen, wenn ich im Folgenden hauptsächlich die Ableitung des Gesetzes der Empfindung in's Auge fasse. Es muss darauf hingewiesen werden, dass sich Delboeuf auch hier sehr uncorrect ausdrückt. Nach den Worten (vergl. 1. S. 34): Es ist höchst natürlich, dass die Empfindung um so größer ist, je größer δ und je kleiner $c + \delta$ ist etc., würde man erwarten, dass als Beziehung aufgestellt wird:

$$s = k \cdot \frac{\delta}{c + \delta}$$

Der Sinn obiger Ausdrucksweise soll dagegen folgender sein: Man denke sich, dass ein Reiz δ gewirkt hat; ihm entspricht eine Empfindung s; wirkt nun ein neuer Reiz $d\delta$, so wird der ihm entsprechende Zuwachs an Empfindung ds um so größer sein, je größer $d\delta$ und je kleiner $c + \delta$ ist. Das Erstere ist offenbar richtig; auch das Zweite kann man wohl zugeben. Dagegen ist die als einfachste Abhängigkeit angenommene Beziehung der Proportionalität resp. umgekehrten Proportionalität eine Hypothese. Mittelst derselben gelangt man zu Resultaten, die mit dem Weber'schen Gesetz in Einklang stehen, und es liegt daher die Vermuthung nahe, dass jene Hypothesen erst aus dem Weber'schen Gesetz abgeleitet sind; sollte dies aber nicht der Fall sein, so würde die Ableitung eines psychophysischen Gesetzes aus dem Weber'schen als einem auf Thatsachen beruhenden Gesetze vorzuziehen sein einer so hypothetischen Ableitung. Jene Hypothesen sind nur als eine vielleicht ganz angemessene Erklärung für die Thatsachen aufzufassen, welche das Weber'sche Gesetz darstellt.

Es ist nicht zu verkennen, dass sich in rein mathematischer Hinsicht kaum ein erheblicher Mangel an den Delboeuf'schen Formeln findet. Durch Vermeidung des Schwellengesetzes und durch Einführung der Größe c ist der in der Fechner'schen Formel so schwierige Punkt bezüglich der negativen Empfindungen beseitigt; denn nach b) wird s gleichzeitig mit δ gleich Null. Dagegen erscheint es sehr fraglich, ob die Rolle, welche die Größe c spielen soll, eine gerechtfertigte ist. Auch würde sich noch fragen, ob die Formel b) ebenso gut oder womöglich noch besser mit den Thatsachen übereinstimmt, als die Fechner'sche Formel.

Delboeuf sieht sich in dem zweiten der oben genannten Werke veranlasst, seine Theorie einigen Modificationen zu unterwerfen, infolge deren er die Formel b) in eine andre überführt. Der Grund für diese Modificationen ist folgender. Ursprünglich hatte Delboeuf die Größe c als constant betrachtet, zwar nicht als absolut constant, doch als zwischen gewissen Grenzen beschränkt, und jedenfalls als unabhängig vom äußeren Reiz. Die Erfahrung hat ihm indess gelehrt, dass c nicht zwischen engen Grenzen beschränkt, sondern mit dem äußeren Reiz in hohem Grade veränderlich ist; so z. B. soll für Temperaturempfindungen $c = 18^{\circ}$ C. sein, soll aber variiren können zwischen 10^{0} und 30^{0}. Darum modificirt Delboeuf seine Theorie in folgender Weise:

Sei p die Kraft des empfindlichen Wesens, p' die Intensität des äußeren Reizes. Bei Einwirkung des Reizes p' sucht sich der Zustand des Organes mit dem äußeren Reiz in eine Art Gleichgewicht zu setzen; das p strebt gleich dem p' zu werden. Sobald $p = p'$ geworden ist, sobald also das Organ sich dem Reiz accommodirt hat, findet keine Empfindung mehr statt. In 2. S. 17. sagt Delboeuf weiter: »L'être est impressionné du moment, qu'il y a inégalité entre p et p'. L'impression dure tant que cette inégalité subsiste. L'inégalité de p et p', voilà l'excitation, d'où dépend l'impression etc.«. Hiernach wandelt er seine Formel

b) $$s = k' \cdot \log \frac{c + \delta}{c}$$

dadurch um, dass er c durch p und δ durch $p' - p$ ersetzt, und so erhält er:

c) $$s = k' \cdot \log \frac{p'}{p} \cdot$$

Bezüglich dieses Resultates sagt Delboeuf in 2. S. 26: »Cette formule, qui me parait destinée à remplacer celle de **Weber**, constate que la sensation n'existe que pour autant qu'il y ait différence entre p et p' et qu'ainsi elle est due à un phénomène analogue à une rupture d'équilibre; ensuite que l'excitation ne doit plus être représentée par $p' - p$, mais par $\log \frac{p'}{p}$, ce qui fait que la sensation est proportionelle à la cause qui la provoque.«

Hierin widerspricht **Delboeuf** offenbar seinen oben angeführten Worten; oben sagt er, als Reiz sei anzusehen die Ungleichheit zwischen p und p', und zwar meint er mit der Ungleichheit die Differenz zwischen p und p'; denn er ersetzt in b) δ durch $p' - p$. Aus c) dagegen wird gefolgert, dass nicht mehr $p' - p$, sondern $\log \frac{p'}{p}$ als Reizgröße zu betrachten sei. Auf ganz analoge Weise könnte man aus der früher erwähnten Formel

$$H - h = k . \log \frac{B}{b}$$

folgern, dass die Höhe proportional dem Barometerstand sei; man müsste nur dazu bemerken, dass unter Höhe die Differenz $H - h$, und dass unter Barometerstand der Ausdruck $\log \frac{B}{b}$ zu verstehen ist.

Die Ueberführung der Formel b) in c) scheint mir überhaupt unmöglich zu sein, da die Bedeutung der beiden Formeln eine ganz verschiedene ist. Mit der letzten Formel ist die Auffassung verbunden, dass der innere Zustand des Organes sich dem äußeren Reiz accommodirt, dass also $p = p'$ zu werden strebt. Wenn $p = p'$ geworden ist, hört die Empfindung auf, und es tritt erst dann wieder eine Empfindung ein, wenn sich p' ändert; es wird also die Empfindung gemessen, die einer Reizänderung entspricht. Vermöge der ersten Formel wird dagegen die Empfindung gemessen, die überhaupt einem gewissen Reiz entspricht. Es ist möglich, dass **Delboeuf** seine erste Formel in demselben Sinn aufgefasst wissen will, wie die zweite; doch scheint mir das eben nicht richtig. Behufs Ableitung der Formel b) war zunächst die Differentialformel

$$ds = k^1 \frac{d\delta}{c + \delta}$$

aufgestellt worden auf Grund der Hypothese, dass der Zuwachs ds der Empfindung proportional sei dem Zuwachs $d\delta$ des Reizes und umgekehrt der Größe $c + \delta$. Man könnte hiernach glauben, dass auch hier nur die Veränderung der Empfindung von einem Reiz zum andern gemessen werde; das trifft aber nur für die Differentialformel zu: in der endlichen Formel b) sind alle diese Zuwachse der Empfindung von Null an summirt, so dass die Gesammtempfindung für einen Reiz δ gemessen wird, gerechnet vom Anfangspunkt $s = 0$ für $\delta = 0$.

In der That stehen die Formeln b) und c) in einem gewissen Widerspruch. Delboeuf verbindet mit der Formel c) die Auffassung, dass $p = p'$ zu werden strebe und dass wirklich $p = p'$ werde. Nun ist p in der Formel b) nichts Anderes als c, und p' nichts Anderes als $c + \delta$; es müsste also entsprechend c gleich $c + \delta$ werden, was nie möglich ist, wenn nicht zufällig $\delta = 0$ ist.

Hiernach kommt man zu dem Schluss, dass die neuere Formel und Auffassung nicht einfach als Umwandlung der alten Theorie aufzufassen ist. Die neue Formel ist hinsichtlich ihrer Bedeutung so verschieden von der alten, dass ihre Herleitung aus jener als nicht gerechtfertigt zu betrachten ist.

In dem dritten der oben genannten Werke S. 140 gibt Delboeuf eine andre Ableitung der Formel c), indem er von den Thatsachen ausgeht.

Wir verstehen unter s diejenige Empfindung, welche einem Reiz p entspricht. Damit diese Empfindung auf $s + u$ steige, muss der Reiz p auf $p\ (1 + d)$ erhöht werden, wo d im Allgemeinen ein Bruch sein wird, dessen Größe von u abhängt. Die Erfahrung zeigt nun, dass, wenn die Empfindung wachsen soll bis $s + 2\,u$, $s + 3\,u$ etc., der correspondirende Reiz erhöht werden muss auf

$$p\ (1 + d)\ (1 + d) = p\ (1 + d)^2,\ p\ (1 + d)^3 \text{ etc.,}$$

so dass zur Auslösung der Empfindung $s + n\,u$ der Reiz $p\ (1 + d)^n$ erforderlich ist. Setzen wir nun allgemein:

$$s + nu = S,\quad p\ (1 + d)^n = p',$$

so folgt durch Elimination von n:

$$p' = p\ (1 + d)^{\frac{S - s}{u}}$$

oder

$$\frac{p'}{p} = (1 + d)^{\frac{S - s}{u}},$$

also:

$$\log \frac{p'}{p} = \frac{S - s}{u} \,.\, \log (1 + d).$$

Nimmt man nun u als Einheit der Empfindung, so wird $S - s$ das Maß des Unterschiedes der Empfindungen S und s, die den Reizen p' und p entsprechen, ausgedrückt in u als Einheit. Setzt man weiter die Constante $\log (1 + d)$, deren Werth nach Obigem von u abhängt, gleich $\frac{1}{k}$, so geht die obige Beziehung über in die folgende:

$$S - s = k \, . \log \frac{p'}{p},$$

welche mit der Fechner'schen Unterschiedsformel der Form nach vollständig übereinstimmt.

Was diese Ableitung der Delboeuf'schen Formel betrifft, so bemerkt man leicht eine große Aehnlichkeit mit derjenigen, welche Wundt gegeben hat. Delboeuf hat insofern seine Ableitung allgemeiner gehalten, als er zunächst zwei beliebige Reize resp. von diesen ausgelöste Empfindungen innerhalb der Reiz- resp. Empfindungsscala vergleicht und so zunächst zu der allgemeineren Unterschiedsformel gelangt. Nachträglich könnte man nun aus derselben die frühere absolute Maßformel ableiten, indem man für p gleich der Reizschwelle $s = 0$ setzt. Doch trägt, wie wir schon gesehen haben, die Delboeuf-sche Formel überhaupt einen ganz anderen Charakter.

Der Aehnlichkeit zwischen der Wundt'schen und Delboeuf-schen Ableitung der Formel entsprechend finden wir hier auch dieselben Vorzüge wie dort. Sie ist einfach und klar wie jene. Wie dort, so tritt auch hier hervor, dass die Empfindung durch eine Einheit ihrer Art messbar sein muss; es wird thatsächlich eine solche Einheit, nämlich u benutzt. Delboeuf geht sogar noch weiter. Während Wundt seine Empfindungseinheit $\varDelta s$ schließlich nicht als solche beibehält, sondern dieselbe als Constante mit dem Factor $\frac{1}{\log \frac{r_1}{\varrho}}$ in die eine Constante k zusammenfasst, behält Delboeuf seine anfangs zu Grunde gelegte Empfindungseinheit u consequent bei. Bei ihm ist zweifellos $S - s$ eine Verhältnisszahl; sie gibt das Wieviel der Unterschiedsempfindungen u an und diese Auffassung ist entschieden mathematisch sehr richtig. — In der Fechner'schen wie in der Wundt-schen Formel bedeutet k eine gewisse Empfindung; von der Fechner'schen Constanten k konnten wir uns kein anschauliches Bild machen; bei der Wundt'schen Constanten k war uns dies möglich, weil wir deren Entstehung verfolgen konnten. Am klarsten und anschaulichsten scheint mir nun das Delboeuf'sche Verfahren, direct die ursprüngliche Empfindungseinheit u beizubehalten.

Der Factor k in der Delboeuf'schen Formel hat von vorn herein eine klare Bedeutung; es war ja $k = \frac{1}{\log(1+d)}$; d bedeutet den relativen Reizunterschied; er hängt, wie schon früher bemerkt, von der Größe des gleich merklichen Empfindungsunterschiedes u ab. Nehmen wir als solchen den eben merklichen Empfindungsunterschied, so bedeutet d den eben merklichen relativen Reizunterschied; er ist experimentell bestimmbar, und somit kennen wir auch den Werth von k. Beachtet man, dass die sogenannte Empfindlichkeit um so größer ist, je kleiner der eben merkliche Reizunterschied d ist, und dass mit abnehmendem d der Werth von k wächst, so sehen wir, dass k direct als ein Ausdruck für die Empfindlichkeit betrachtet werden kann.

Das Schwellengesetz erkennt Delboeuf, wie schon bemerkt wurde, nicht an, und so kann er auch nicht aus seiner Unterschiedsformel unsere frühere absolute Maßformel ableiten. Es ist schon darauf hingewiesen worden, dass Delboeuf die Aufgabe, die Empfindung in ihrer Abhängigkeit vom Reiz zu messen, überhaupt in ganz anderer Weise löst, als es von anderen Autoren geschieht; seiner Formel kommt eine ganz andere Bedeutung zu, als wir sie bis jetzt kennen gelernt haben, eine andere Bedeutung selbst, als der ersten Delboeuf-schen Formel.

Die als oscillatorischer Process vorgestellte Thätigkeit, in welcher die Sinnesnerven begriffen sind und deren Größe mit p bezeichnet worden ist, strebt sich nach Delboeuf's Ansicht mit der von außen anregenden Thätigkeit, dem Reiz p', ins Gleichgewicht zu setzen. Es soll nun Empfindung stattfinden, so lange dieses Gleichgewicht noch nicht erreicht ist, und zwar positive Empfindung, wie z. B. Wärme-empfindung, wenn $p' > p$, negative Empfindung, wie z. B. Kälte-empfindung, wenn $p' < p$ ist. In jedem Fall aber mindert sich nach Delboeuf's Ansicht die Empfindung durch die Wirkung jenes Strebens bei constant erhaltenem Reiz, bis das Gleichgewicht erreicht ist, worauf dann so lange keine Empfindung vorhanden ist, als der Reiz sich nicht ändert. Annehmend, dass das Gleichgewicht zwischen innerer und äußerer Thätigkeit nach einiger Zeit erreicht wird, setzt also Delboeuf $s = 0$ und gelangt so von seiner Unterschiedsformel

$$S - s = k \cdot \log \frac{p'}{p}$$

zu einer Art absoluter Maßformel

$$S = k \cdot \log \frac{p'}{p}.$$

Hierzu ist zunächst zu bemerken, dass diese letzte Formel im Grunde genommen dennoch keine absolute Maßformel der Empfindung ist; sie ist und bleibt eine Unterschiedsformel. Denn in beiden der vorstehenden Formeln wird die Veränderung von einer Empfindung, die dem Reiz p zugehört, zu einer Empfindung, die durch den Reiz p' ausgelöst wird, gemessen. Ursprünglich entspricht aber dem Reiz p die Empfindung s; erst nach einiger Zeit sinkt dieselbe, vorausgesetzt dass Delboeuf's Ansicht richtig ist, auf Null herunter. Hiermit wird aber gleichsam das Coordinatensystem hinsichtlich der Empfindungsachse um s verschoben; auch S wird um die Größe s vermindert. Es ist also mit der Formel

$$S - s = k \cdot \log \frac{p'}{p}$$

nur eine äußerliche Veränderung vorgenommen worden; die Bedeutung der neuen Formel

$$S = k \cdot \log \frac{p'}{p}$$

muss die der vorhergehenden geblieben sein, d. h. sie ist ebenfalls eine Unterschiedsformel; sie löst demnach nicht die eigentliche, absolute Aufgabe, die Empfindung in ihrer Abhängigkeit vom Reiz zu messen. Dies gilt, gleichgültig, ob die Ansicht Delboeuf's richtig ist, dass sich die innere Thätigkeit mit dem äußeren Reiz ins Gleichgewicht zu setzen strebe. Ist nun diese Ansicht richtig, so resultiren aus der Formel

$$S = k \cdot \log \frac{p'}{p}$$

negative Empfindungswerthe, aber solche anderer Art, als wir sie früher kennen gelernt haben. Für Reizwerthe $p' > p$ erhalten wir nämlich positive, für Reizwerthe $p' < p$ dagegen negative Empfindungen. Um zu beurtheilen, ob diese Art negativer Empfindungen zulässig sei oder nicht, gehen wir auf das zurück, was früher bezüglich der negativen Empfindungen gesagt wurde. Wir haben gesehen, dass rein logisch die negative Größe, also auch die negative Empfindung zulässig ist. Es fragt sich aber, ob derselben in Wirklichkeit ein Substrat entspricht. Delboeuf bezieht seine Behauptungen in erster Linie auf die Temperaturempfindungen, und in der That scheinen dieselben in dieser Beziehung nicht unbegründet zu sein. Es ist ja eine bekannte Thatsache, dass wir uns der jeweiligen Temperatur accommodiren, und dass der Uebergang von einer höheren Temperatur zu einer niederen uns eine Kälteempfindung verursacht, während der entgegengesetzte Uebergang für uns mit einer Wärmeempfindung verbunden ist. Insofern nun auch im gewöhnlichen Sprachgebrauch und in der Physik Kälte und Wärme im Gegensatz des Positiven und Negativen unterschieden werden, scheint die Delboeuf'sche Ansicht gerechtfertigt; es entsprechen sowohl den Reizen $p' > p$ wie $p' < p$ wirkliche Empfindungen und zwischen beiden besteht thatsächlich ein Gegensatz; er wird durch den Indifferenzzustand als Nullpunkt hergestellt.

Wie schon bemerkt, bezieht sich die Delboeuf'sche Formel in erster Linie auf die Temperaturempfindungen, dagegen scheint es sehr zweifelhaft, ob sich die ganze Vorstellungsweise auch auf die anderen Empfindungsgebiete anwenden lässt; im Gegentheil, es scheint dies recht unwahrscheinlich zu sein. Die ganze Delboeuf-sche neuere Auffassung und das neuere Gesetz sind interessant, vielleicht auch nicht ohne Werth; sie stehen überdies nicht in directem Widerspruch mit der Art und Weise, wie man sonst die psychophysische Aufgabe aufzufassen pflegt und zu lösen versucht hat. Aber sie lösen nicht die Aufgabe, die Empfindung in ihrer Abhängigkeit vom Reiz dem absoluten Werth nach zu messen; die Delboeuf'sche Formel ist, wie ich gezeigt habe, nur eine Unterschiedsformel, keine absolute Maßformel.

5. Das Gesetz von Plateau[1]) und Brentano.[2])

Es wurde früher bei der Erörterung über die Messbarkeit der Empfindung bemerkt, dass man nicht die Empfindung selbst, sondern nur den Grad der Merklichkeit derselben messen, und dass man daher ursprünglich nur eine Beziehung zwischen Reiz und Merklichkeitsgrad der Empfindung aufstellen könne. Will man von dem so aufgestellten Apperceptionsgesetz zu einer Beziehung zwischen Reiz und Empfindung selbst übergehen, so muss man wissen, in welcher Beziehung die Empfindung zu dem Merklichkeitsgrad derselben steht. In dieser Hinsicht lassen sich indess nur Hypothesen aufstellen. Fechner nimmt direct Proportionalität zwischen Empfindung und Merklichkeitsgrad derselben an, so dass sein ursprünglich nur für die äußere Psychophysik aufgestelltes Gesetz unmittelbar für die innere Psychophysik Geltung behält.

Auch Plateau und Brentano suchen vom Apperceptionsgesetz zum Empfindungsgesetz überzugehen. Während aber Fechner Proportionalität zwischen Empfindung und Merklichkeitsgrad derselben, oder was dasselbe ist, zwischen dem Unterschied zweier Empfindungen und dem gleich merklichen Unterschied derselben annimmt, behaupten Plateau und Brentano, dass die Größe des Unterschiedes der Empfindungen diesen letzteren proportional zunehmen müsse, wenn der Grad der Merklichkeit jener Unterschiede immer derselbe bleiben solle. Bezeichnen wir also zum Unterschied von der Empfindung selbst, welche durch s bezeichnet werde, den Grad der Merklichkeit derselben durch m, und den gleich merklichen Zuwachs derselben durch Δm, so hat man das Weber'sche Gesetz, da es ursprünglich nur ein Apperceptionsgesetz ist, in der Form

---

1) Vgl. 1) Bulletin de l'Academie de Belgique, T. XXXIII. 1872. 2) Poggendorf's Annalen, CL. St. 3. 1873. p. 465.

2) Brentano, Psychologie vom empirischen Standpunkt. Th. 1. 1874. p. 87 ff. — Brentano hat sein Gesetz nicht mathematisch formulirt; Fechner hat es an seiner Stelle gethan und sich durch Correspondenz mit ihm vergewissert, dass er damit den Sinn, in welchem Brentano sein Gesetz verstanden haben will, richtig getroffen hat. Das Brentano'sche Gesetz stimmt hiernach mit dem Plateau'schen überein.

$$\frac{\varDelta r}{r} = \text{const.}, \quad \varDelta m = \text{const.}$$

Fechner setzt nun

$$\varDelta s = \text{Const.}\ \varDelta m,$$

so dass sich das Weber'sche Gesetz formal nicht ändert, wenn man es in das Empfindungsgesetz:

$$\frac{\varDelta r}{r} = \text{const.}, \quad \varDelta s = \text{const.}$$

umwandelt. Plateau und Brentano setzen dagegen

$$\frac{\varDelta r}{r} = \text{const.}, \quad \varDelta m = \text{const.}, \quad \frac{\varDelta s}{s} = \text{const.}$$

Aus der ersten und dritten dieser Beziehungen resultirt:

$$\frac{\varDelta s}{s} = k\,\frac{\varDelta r}{r},$$

wo k eine Constante ist. Durch Umwandlung dieser Formel in die entsprechende Differentialformel:

$$\frac{ds}{s} = k\,\frac{dr}{r},$$

und nachfolgende Integration erhält man die Relation:

$$\log s = k\,.\,\log r + \log \text{Const.}$$

$$= k\,.\,\log \frac{r}{\text{Const.}} = \log \left(\frac{r}{\text{Const.}}\right)^k,$$

also:

$$s = \left(\frac{r}{\text{Const.}}\right)^k = c\,.\,r^k,$$

wenn man $\left(\frac{1}{\text{Const.}}\right)^k = c$ setzt.

Diese Formulirung des Weber'schen Gesetzes ist wesentlich verschieden von denjenigen, die wir bis jetzt kennen gelernt haben. Nach derselben wird die Empfindung gleichzeitig mit dem Reiz gleich Null, was dem früher von mir vertretenen Standpunkt entspricht. Negative Empfindungswerthe treten hier nicht auf, und auch das Schwellengesetz kommt gar nicht in Betracht, so dass diejenigen Punkte hier ganz wegfallen, welche in der Psychophysik mit so großen Schwierigkeiten verbunden sind.

Die Constante c in der Formel $s = c r^k$ bestimmt sich einfach als diejenige Empfindung, welche durch die Reizeinheit hervorgerufen wird, wobei zu bemerken ist, dass man wie bei der Fechner'schen Formel auch hier sich kein anschauliches Bild über die Größe der Empfindung c machen kann. Die Constante k ist von Plateau und Brentano nicht näher bestimmt worden. Plateau sagt nur, dass k wahrscheinlich kleiner als 1 angenommen werden müsse, wenn erklärt werden solle, dass die Empfindung in langsamerem Verhältniss ansteigt, als der Reiz. Ueber die eigentliche Bedeutung von k wird indess gar nichts gesagt, und das ist ein Mangel. Denn so lange in einer mathematischen Formel nicht jede der auftretenden Größen eine bestimmte Bedeutung hat, verliert die Formel an concretem Werth; sie bleibt eine abstracte und zugleich hypothetische Formel.

Es fragt sich nun noch, inwieweit die Formel mit den Thatsachen in Einklang steht. Plateau und Brentano begründen ihre Auffassung auf verschiedene Weise. Plateau sagt im zweiten der oben genannten Aufsätze S. 471: »Fechner's Formel führt zu der Folgerung, dass, wenn die gemeinschaftliche Beleuchtung variirt, die Differenzen der Empfindung constant bleiben. Es hat mir zur Erklärung der Constanz des allgemeinen Ausdrucks eines Kupferstiches natürlicher geschienen, a priori die Constanz dieser Verhältnisse und nicht der Differenzen zwischen den Empfindungen anzunehmen.« Helmholtz hat im Gegensatz hierzu die Thatsache des ziemlich gleich bleibenden Eindruckes eines Kupferstiches bei verschiedenen Beleuchtungsgraden vielmehr in dem Sinne gedeutet, dass man die Constanz der Differenzen zwischen den Empfindungen anzunehmen habe. — Um zwischen diesen Ansichten zu entscheiden, zieht Fechner die von Plateau selbst vorgeschlagene Methode der mittleren Abstufungen zu Hülfe, meinend, dass in derselben ein objectives Mittel für die Entscheidung zu erblicken sei. Nach dieser Methode werden drei oder mehr Reize, z. B. drei an einander grenzende Lichtflächen, in ihrer physikalischen Helligkeit so gegen einander abgestuft, dass nach unserem Urtheil der Helligkeitsunterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Reizen derselbe ist. Die Unterschiede zwischen zwei aufeinanderfolgenden Empfindungen erscheinen uns also dann gleich merklich und es fragt sich nun wieder, ob diesen gleich merklichen Unterschieden auch gleiche Empfindungsunterschiede entsprechen;

diese Frage lässt sich aber doch wohl nur hypothetisch beantworten; denn wir können nur die Intensitätsschätzung der Empfindung einer Messung unterziehen, nicht aber die Empfindung selbst.

Soll also das Gesetz von Plateau und Brentano als Empfindungsgesetz betrachtet werden, so ist es eben so hypothetisch, wie das Fechner'sche Gesetz als Empfindungsgesetz. Als Apperceptionsgesetz aber kann das Gesetz keine Gültigkeit beanspruchen; Plateau selbst räumt ja ein, dass es nicht in Uebereinstimmung steht mit den nach der Methode der mittleren Abstufungen gemachten Versuchen.

II. Die experimentalen psychophysischen Gesetze.

Im Gegensatz zu den Gesetzen von fundamentalem Charakter, bei denen von geringen Abweichungen abgesehen ist, und diese äußeren störenden Einflüssen zugeschrieben werden, besteht das Wesen der experimentalen Gesetze darin, dass man sich bei ihrer Aufstellung möglichst an die beobachteten Daten gehalten und diese möglichst genau durch eine exacte Formel darzustellen gesucht hat, wobei immerhin auch theoretische Erwägungen von Einfluss gewesen sind. Aus dem so gekennzeichneten Wesen dieser experimentalen Gesetze erklärt sich von vorn herein, dass dieselben viel mehr auseinandergehen müssen, als dies bei den fundamentalen Gesetzen der Fall war. Während alle Formeln der letzten Art mit einer einzigen Ausnahme in der Form ganz oder fast ganz übereinstimmten, ohne ihrem Wesen nach dieselben zu sein, kann man hier beinahe die umgekehrte Bemerkung machen; die hier zu betrachtenden Formulirungen des Weber-schen Gesetzes gehen hauptsächlich in der äußeren Form auseinander; es findet sich wenig Gemeinsames in ihnen, und es dürfte sich daher kaum lohnen, dieselben zuvor unter gemeinsamen Gesichtspunkten zu betrachten. Ich gehe daher sogleich zu den einzelnen Gesetzen über. Die hauptsächlichsten derselben sind die von Helmholtz, Langer und G. E. Müller.

1. Das Helmholtz'sche Gesetz.[1])

Helmholtz, dessen Versuche sich vor Allem auf das Gebiet des Lichtsinnes erstrecken, kommt hier zu dem allgemeinen Resultat, dass

1) Vgl. Helmholtz, Handbuch der physiol. Optik. 1. Aufl. S. 313.

der Fechner'schen Formel eine approximative Gültigkeit zukommt; dagegen hat er beobachtet, — und man bestätigt es allgemein — dass sich bei geringen Helligkeiten der Einfluss des subjectiven Eigenlichtes des Auges geltend macht, und dass hierdurch eben die Abweichung vom Weber'schen Gesetz an der unteren Grenze herbeigeführt wird. Will man also eine Formel haben, die längs der ganzen Scala der Reizwerthe gültig ist, so muss man jenes Eigenlicht des Auges in Rechnung ziehen. Das kann in der Weise geschehen, dass man die Reizung durch innere Einflüsse hinsichtlich ihrer quantitativen Größe gleichsetzt der Reizung durch ein Licht von der entsprechenden Helligkeit. Bezeichnen wir die Größe dieses Reizes durch r_0, so hat man an Stelle der Fechner'schen Differentialformel;

$$ds = k \frac{dr}{r}$$

zu setzen:

$$ds = k \frac{dr}{r_0 + r}.$$

Helmholtz bemerkt weiter, dass, welches auch die Einflüsse seien, welche sich an der oberen und unteren Grenze geltend machen, dieselben jedenfalls auch in den mittleren Graden der Helligkeit hervortreten. In der That beobachtet man, dass die Unterschiedsempfindlichkeit nur innerhalb mittlerer Reizstärken nahezu constant ist, während sich nach den beiden Grenzen hin eine Abnahme bemerklich macht. Da nun die Unterschiedsempfindlichkeit gemessen wird durch das Verhältniss:

$$\frac{ds}{\frac{dr}{r}} = \frac{r \,.\, ds}{dr},$$

so würde dieselbe beim ursprünglichen Weber'schen Gesetz als constant angenommen sein, da ja aus der Beziehung

$$ds = k \frac{dr}{r}$$

folgt:

$$\frac{r \,.\, ds}{r} = k = \text{const.}$$

Auch die hinsichtlich der unteren Grenze modificirte Formel:

$$ds = k \frac{dr}{r_0 + r}$$

genügt der genannten Thatsache noch nicht, da nach ihr die Unterschiedsempfindlichkeit

$$\frac{r\,ds}{dr} = \frac{kr}{r_0 + r}$$

mit r beständig wachsen müsste. Man erkennt dies unmittelbar; man kann sich aber auch in der Weise davon überzeugen, dass man das Maximum resp. Minimum der Unterschiedsempfindlichkeit bestimmt. Zu dem Zweck bildet man bekanntlich den ersten Differentialquotienten von $\frac{kr}{r_0 + r}$ nach r, setzt ihn gleich Null und bestimmt aus dieser Gleichung r. Nun ist:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{kr}{r_0 + r}\right) = k\,\frac{r_0 + r - r}{(r_0 + r)^2} = \frac{k\,r_0}{(r_0 + r)^2}.$$

Der Gleichung:

$$\frac{k\,r_0}{(r_0 + r)^2} = 0$$

kann wegen $k \neq 0$ und $r_0 \neq 0$ nur genügt werden durch $r = \infty$. Für den Reiz $r = \infty$ hat man also die größte oder kleinste Unterschiedsempfindlichkeit, während dieselbe für mittlere Reize am größten sein und nach beiden Grenzen hin abnehmen soll.

Dieser Forderung genügt also die obige Formel noch nicht; es ist nöthig, die Unterschiedsempfindlichkeit als Function des Reizes anzunehmen und zwar in der Weise, dass die Function für mäßige Werthe von r nahezu constant bleibt, für $r = \infty$ dagegen gleich Null wird. Als einfachste Function, welche dieser Forderung genügt, setzt Helmholtz:

$$k = \frac{c}{R + r},$$

wo R sehr groß sein muss und c eine Constante ist. Hiernach bekommt nun Helmholtz als Differentialformel:

$$ds = \frac{c\,.\,dr}{(r_0 + r)\,(c + R)}.$$

Die Unterschiedsempfindlichkeit wird jetzt:

$$\frac{r\,.\,ds}{dr} = \frac{c\,.\,r}{(r_0 + r)\,(R + r)}.$$

Dann wird:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r\,.\,ds}{dr}\right) = c\,\frac{(r_0+r)\,(R+r) - r\,(r_0+r) - r\,(r+R)}{(r_0+r)^2\,(r+R)^2}$$

$$= c\,\frac{r_0\,R - r^2}{(r_0+r)^2\,(r+R)^2}.$$

Die Bedingung $\frac{d}{dr}\left(\frac{r\,ds}{dr}\right) = 0$ des Maximums resp. Minimums der Unterschiedsempfindlichkeit liefert hiernach für r die beiden Werthe:

$$r = \sqrt{r_0 R} \text{ und } r = \infty.$$

Da nun der Werth des 2. Differentialquotienten:

$$\frac{d^2\,\frac{r\,ds}{dr}}{d\,r^2} = c\,\frac{-(r_0+r)^2\,(r+R)^2\,2\,r - r^2\,(r+R)^2\,2\,r - r^2\,(r_0+r)^2\,.\,2\,r}{(r_0+r)^4\,(r+R)^4}$$

$$= -\,2\,c\,r\,\frac{(r_0+r)^2\,(r+R)^2 + r^2\,\{(r+R)^2 + (r_0+r)^2\}}{(r_0+r)^4\,(r+R)^4}$$

für jeden positiven Werth von r negativ wird, also auch für $r = \sqrt{r_0\,.\,R}$, so tritt unter Zugrundelegung der obigen Differentialformel für mittlere Reizwerthe die größte Unterschiedsempfindlichkeit ein; gegen die obere und untere Grenze dagegen nimmt sie ab. Diese Differentialformel genügt also im Allgemeinen den Thatsachen.

Aus

$$ds = \frac{c\,dr}{(r_0+r)\,(r+R)}$$

folgt durch Integration:

$$s = c\int\frac{dr}{(r+r)\,(r+R)} + \text{Const},$$

also, da

$$\frac{1}{(r_0+r)\,(r+R)} = \frac{1}{R-r_0}\left(\frac{1}{r_0+r} + \frac{1}{r+R}\right)$$

ist:

$$s - \frac{c}{R-r_0}\{\log\,(r+r) - \log\,(r+R)\} + \text{Const.}$$

$$= \frac{c}{R-r_0}\,.\,\log\frac{r_0+r}{r+R} + \text{Const.}$$

Es ist nun noch die Integrationsconstante zu bestimmen. Zu dem Zweck kann man einmal so verfahren, dass man den Reiz r sehr groß annimmt, so dass r_0 sowohl wie R gegen r verschwinden. Dann wird $\frac{r_0+r}{r+R}$ annähernd gleich 1, also $\log\frac{r_0+r}{r+R} = 0$. Bezeichnet man daher die einem solchen Reizwerth r entsprechende Empfindung durch S, so wird Const. $= S$, und S bedeutet hier offenbar das Maximum der Empfindung, welches der sogenannten Reizhöhe entspricht. Durch Substitution dieses Werthes von Const. wird die obige Formel:

$$S - s = \frac{c}{R - r_0} \cdot \log \frac{R + r}{r_0 + r}.$$

Noch auf andre Weise kann man die Integrationsconstante bestimmen. Bezeichnet man nämlich durch σ den Werth der Empfindung s, die ohne äußeren Reiz bloß vermöge der inneren Erregung r_0 stattfindet, so wird:

$$\text{Const.} = \sigma - \frac{c}{R - r_0} \cdot \log \frac{r_0}{R};$$

also:

$$s - \sigma = \frac{c}{R - r_0} \cdot \log \left(\frac{R}{r_0} \cdot \frac{r_0 + r}{R + r}\right).$$

Aus dieser und der obigen Beziehung

$$S - s = \frac{c}{R - r_0} \cdot \log \frac{R + r}{r_0 + r}$$

folgt als Ausdruck für den Unterschied zwischen dem Maximum und dem Minimum der Empfindung

$$S - \sigma = \frac{c}{R - r_0} \cdot \log \frac{R}{r_0}.$$

Die Curve, welche durch die Gleichung

$$S - s = \frac{c}{R - r_0} \cdot \log \frac{R + r}{r_0 + r}$$

dargestellt wird, ist im Allgemeinen der früher dargestellten logarithmischen Linie ähnlich. Für den Nullwerth des Reizes sinkt die Empfindung herab auf diejenige, welche nur durch die innere Erregung r_0 hervorgerufen wird. Da $\frac{ds}{dr} = \frac{c}{(r_0 + r)\,(r + R)}$ für jedes positive r positiv bleibt, so wächst die Empfindung beständig mit wachsendem r. Für große Werthe von r wird annähernd $\frac{ds}{dr} = 0$, die Curve nähert sich also dem Parallelismus mit der r-Achse, d. h. die Empfindung wächst nicht mehr, sie erhält sich constant auf einem Maximalwerthe.

Zu bemerken ist, dass die negativen Empfindungen und das Schwellengesetz, die in anderen Formulirungen so wesentlichen und schwierigen Punkte, ganz vermieden sind, so dass sich in dieser Beziehung gegen die Formel nichts einwenden lässt. Unser Augenmerk haben wir vielmehr auf die von Helmholtz eingeführten Modificationen zu richten. In der Einführung der subjectiven inneren Erregung, welche durch r_0 in der Formel zum Ausdruck kommt, berührt sich Helmholtz mit Delboeuf, der ja in seiner früheren Formel ebenfalls diese innere Erregung in Betracht zieht. Es scheint überhaupt mehrfach die Neigung zu bestehen, diese innere Erregung zu berücksichtigen, und es lässt sich dagegen auch nichts einwenden, insofern dieselbe wirklich vorhanden ist. Es fragt sich indess, ob man dieselbe nicht besser als bloß störenden Einfluss betrachtet, um die Einfachheit des psychophysischen Gesetzes durch Einführung derselben nicht zu beeinträchtigen.

Ganz ebenso verhält es sich mit der weiteren Modification, die Helmholtz anbringt, und die ihren Grund darin hat, dass die Empfindlichkeit nicht längs der ganzen Empfindungsscala dieselbe ist. Auch gegen diese Modification lässt sich an und für sich nichts einwenden, wenn das Gesetz in möglichste Uebereinstimmung mit den Thatsachen gebracht werden soll. Dagegen ist zu bemerken, dass die Setzung $k = \frac{c}{R + r}$ nur insofern begründet ist, als den gestellten Forderungen dadurch im Allgemeinen genügt wird; an und für sich ist dieselbe dagegen willkürlich. Es kommt hinzu, dass über die Größe R nichts weiter gesagt wird, als dass sie sehr groß sein muss. Was aber R bedeutet, welche Rolle diese lediglich der Zweckmäßigkeit halber eingeführte Größe in Wirklichkeit spielt, wird in keiner Weise angegeben. Man kann soviel schließen, dass R jedenfalls einen Reiz bedeutet, weil sonst der Nenner $R + r$ nicht homogen sein würde; das ist aber nur eine mathematische Forderung, durch welche die Art von R bestimmt wird; aber damit ist R selbst nicht bestimmt, und die Einführung dieser Constanten erscheint somit noch nicht gerechtfertigt.

Die Constante c hat die Bedeutung einer Empfindung; es ergibt sich das ganz in derselben Weise wie früher in Bezug auf die Constante k.

Eine Hauptfrage ist schließlich, ob denn thatsächlich die Correctionen, welche Helmholtz am ursprünglichen Weber'schen Gesetz angebracht hat, den Zweck erfüllen, aus dem sie entsprungen sind; mit anderen Worten: wird die modificirte Formel von Helmholtz den Thatsachen mehr gerecht, als die Fechner'sche Formel? In dieser Hinsicht ist man allgemein der Ansicht, dass die Helmholtz'sche Formel die oberen Abweichungen annähernd deckt. Im Allgemeinen zeigt sich indess keine zureichende Uebereinstimmung derselben mit den Beobachtungen, und namentlich wird geltend gemacht, dass man den unteren Abweichungen vom Weber'schen Gesetz durch bloße Bezugnahme auf die beständige subjective Erregung des Sehorganes keineswegs ganz gerecht wird, so dass es nach dem Ausspruch G. E. Müller's nach dieser Richtung hin wenigstens neuer Correctionen bedarf, um die Formel brauchbar zu machen. Durch solche weitere Correctionen würde sich die an und für sich schon nicht einfache Helmholtz'sche Formel noch complicirter gestalten und dadurch noch mehr an fundamentaler Gültigkeit verlieren.

Gesetzt nun, man könnte der Helmholtz'schen Formel annähernde Gültigkeit zugestehen, so darf man nicht vergessen, dass sich dieses Zugeständniss nur auf das Gebiet des Lichtsinnes bezieht; denn nur auf den Gesichtssinn beziehen sich die Helmholtz'schen Beobachtungen, und nur für ihn hat Helmholtz zunächst seine Formel aufgestellt; es ist sehr die Frage, ob sich dieselbe auch auf andre Sinnesgebiete anwenden lässt. Sollte die Formel fundamentale Gültigkeit beanspruchen, so müsste man verlangen, dass sie für alle Sinnesgebiete in gleicher Weise gelte, wie für den Gesichtssinn. Da indess diese Gültigkeit für alle Sinnesgebiete noch nicht erwiesen ist, sich auch wahrscheinlich nie erweisen wird, so haben wir keinen Grund, der Helmholtz'schen Formel allgemeine Gültigkeit, fundamentalen Charakter zuzuschreiben.

2. Langer's Formulirung des Weber'schen Gesetzes.[1])

Von demselben Gesichtsspunkt ausgehend wie Helmholtz, nämlich eine Formel aufzustellen, die in möglichster Uebereinstim-

1) Langer, Die Grundlagen der Psychophysik, S. 58.

mung mit den beobachteten Thatsachen steht, will Langer ebenso wie Helmholtz berücksichtigt wissen, dass die Unterschiedsempfindlichkeit nicht längs der ganzen Reizscala constant bleibt, sondern anfangs wächst bis zu einem Maximum und von da an wieder gegen Null abnimmt. Zu einer Modification des ursprünglichen Weber'schen Gesetzes wird Langer noch durch einen weiteren Grund bestimmt, den ich schon früher berührt habe. Nehmen wir nämlich einmal an, die Unterschiedsempfindlichkeit sei constant, so ist im Weber'schen Gesetz:

$$\frac{\Delta r}{r} = \text{Const.} = c, \ \Delta s = \text{const.}$$

c eine wirkliche Constante, die einen bestimmten Werth hat. Aus der Gleichung

$$\Delta r = c \,.\, r$$

bestimmt sich also für jeden Werth von r der Zuwachs Δr, der nöthig ist, um eine merkliche Aenderung oder eine gleichmerkliche Aenderung der Empfindung hervorzurufen. In dem besonderen Fall $r = 0$ folgt nun, dass $\Delta r = 0$ wird, d. h. zum Reiz $r = 0$ muss der Zuwachs $\Delta r = 0$ hinzukommen, damit aus der Empfindung Null eine eben merkliche Empfindung werde, was natürlich falsch ist. Man sollte vielmehr erwarten, meint Langer, dass das Weber'sche Gesetz für $r = 0$ $\Delta r = \varrho$ liefert, wenn man unter ϱ die Reizschwelle versteht; denn für $r = 0$ hat man keine Empfindung, für $r = \varrho$ tritt der erste Merklichkeitsgrad Δs der Empfindung ein; es ist also $\Delta r = \varrho$ der Zuwachs, der zu $r = 0$ hinzukommen muss, um eben eine Empfindung hervorzurufen.

Es ist schon früher ausgeführt worden, dass die Forderung Langer's nicht ganz unbegründet erscheint, und dass sie eigentlich nur durch Einführung der negativen Empfindungswerthe umgangen wird, deren Werth selbst abgesehen von der Wundt'schen Auffassung ein zum Mindesten zweifelhafter ist.

Um der Forderung zu genügen, dass für $r = 0$ Δr sich auf ϱ reducirt, und um die Veränderlichkeit der Unterschiedsempfindlichkeit zu berücksichtigen, ersetzt Langer das Weber'sche Gesetz

$$\frac{\Delta r}{r} = \text{Const.} = c$$

durch das folgende als das nächst einfachere:

$$\frac{\Delta r}{r} = kr + \frac{b}{r}$$

oder:

$$\Delta r = kr^2 + b.$$

Bei der Ableitung einer psychophysischen Beziehung aus dieser modificirten Formel verfolgt nun Langer einen Weg, den er auch benutzt hat, um das Fechner'sche Gesetz selbst abzuleiten.

Es sei $f(r)$ die zu suchende unbekannte Function der Empfindung in ihrer Abhängigkeit vom Reiz; dann ist

$$\frac{ds}{dr} = f'r$$

und, indem man wieder integrirt:

$$s_1 - s = \int_r^{r_1} f'r \,.\, dr.$$

Ist nun allgemein $F(x)$ eine innerhalb des Intervalls a bis b stetige Function von x, und ist ε ein positiver echter Bruch, so besteht nach einem bekannten Satze die Relation:

$$\int_a^b F(x)\,dx = (b - a)\; F\,[a + \varepsilon\,(b - a)].$$

Da die Empfindung stetig mit dem Reize wächst, so lässt sich dieser Satz nach Langer's Darstellung auf die Function $f'r$ anwenden, und es besteht daher nach ihm die Relation

$$s_1 - s = \int_r^{r_1} f'r = (r_1 - r)\,.f'[r + \varepsilon\,(r_1 - r)]$$

oder:

$$1) \qquad \Delta s = \Delta r\,.f'[r + \varepsilon\,(r_1 - r)].$$

Hier liegt offenbar ein Irrthum vor; da die Empfindung stetig mit dem Reize wächst, so ist $s = f(r)$ die Function, auf welche sich der genannte Satz anwenden lässt, nicht aber $f'r$. Daraus, dass $f(r)$ eine stetige Function von r ist, folgt ferner nicht, dass $f'r$ von derselben Art sei; wenn daher $\frac{ds}{dr} = f'r$ unstetig sein sollte, so lässt sich der genannte Satz überhaupt nicht anwenden, und somit wird die ganze Langer'sche Ableitung für diesen Fall hinfällig. Verfolgen wir dieselbe indess weiter.

Aus der Beziehung 1) schließt Langer, dass Δr und Δs nur Functionen sind von dem Ausdruck $r + \varepsilon (r_1 - r)$. Demgemäß wandelt er nun sein modificirtes Weber'sches Gesetz um in:

$$2) \qquad \Delta r = k_1 [r + \varepsilon (r_1 - r)]^2 + b_1.$$

Auch der letzte Schluss ist nicht richtig; denn aus 1) folgt zunächst nur, dass das Verhältniss $\frac{\Delta s}{\Delta r}$ eine Function des Ausdruckes $r + \varepsilon (r_1 - r)$ ist. Doch können wir hierüber hinwegsehen, da später nur dieses Verhältniss in Betracht kommt und so diese Unrichtigkeit ohne Einfluss bleibt.

Beiläufig bemerkt würde das ursprüngliche Weber'sche Gesetz dem Obigen entsprechend umzuwandeln sein in:

$$\Delta r = \varkappa [r + \varepsilon (r_1 - r)].$$

In 2) ist ausgedrückt, dass der eben merkliche Reizunterschied nicht von einem der beiden das Reizintervall bildenden Reize allein, sondern von beiden abhängt. Ganz ebenso verhält es sich mit dem entsprechenden Empfindungsunterschied.

Es ist nun weiter nöthig, Reiz und Empfindung in Beziehung zu setzen. Fechner machte, wie wir wissen, die Annahme, dass den eben merklichen Reizunterschieden gleiche Empfindungsunterschiede entsprechen. Diese Annahme weist Langer als unhaltbar zurück; ihm scheint es wahrscheinlicher, dass die Empfindungsunterschiede mit der Größe der Reize wachsen, und als einfachste Annahme macht er die des proportionalen Wachsthums. Es sei hervorgehoben, dass auch hier wieder eine Ungenauigkeit in der Langer'schen Darstellung besteht; nach derselben soll der Empfindungsunterschied proportional den beiden das entsprechende Reizintervall einschließenden Reizen gesetzt werden. Dies in eine Formel übersetzt würde lauten:

$$\Delta s = \text{const.}\ r \,.\, r_1 .$$

Langer aber meint, dass Δs in der oben angegebenen Weise vom Ausdruck $r + \varepsilon (r_1 - r)$ abhängen soll, und setzt also:

$$3) \qquad \Delta s = \varkappa_1 [r + \varepsilon (r_1 - r)].$$

Substituirt man die Werthe 2) und 3) von Δr und Δs in die obige Beziehung 1), so folgt:

$$f'[r + \varepsilon (r_1 - r)] = \frac{\varkappa_1 [r + \varepsilon (r_1 - r)]}{k_1 [r + \varepsilon (r_1 - r)]^2 + b_1},$$

oder wenn man zur Abkürzung

$$r + \varepsilon (r_1 - r) = R \text{ und } f(R) = s$$

setzt:

$$f'R \equiv \frac{df(R)}{dR} = \frac{\varkappa_1 R}{k_1 R_2 + b_1}.$$

Aus dieser Differentialgleichung erhält man durch Integration:

4) $$f(R) = s = \frac{\varkappa_1}{2k_1} \cdot \log (k_1 R^2 + b_1) + \text{Const.}$$

Je nach der Annahme oder Nichtannahme resp. je nach der verschiedenen Auffassung des Schwellengesetzes leitet Langer aus 4) zwei verschiedene Beziehungen her. Er setzt einmal voraus, dass die Empfindung selbst gleichzeitig mit dem Reiz auf Null herabsinkt; in diesem Fall nimmt er eine sogenannte Empfindungsschwelle an, d. h. er meint, die Empfindung müsse erst eine gewisse Intensität erreicht haben, ehe sie appercipirt werden könne. Zur Bestimmung der Constanten hat man jetzt für $s = 0$ $r = 0$ zu setzen und bekommt so:

$$0 = \frac{\varkappa_1}{2k_1} \cdot \log b_1 + \text{Const.}$$

$$\text{Const.} = -\frac{\varkappa_1}{2k_1} \cdot \log b_1,$$

also:

a) $$s = \frac{\varkappa_1}{2k_1} \cdot \log \frac{k_1 R^2 + b_1}{b_1}.$$

Die Frage der Schwelle unentschieden lassend, leitet Langer noch ein anderes Gesetz her, indem er die Annahme macht, dass eine Reizschwelle bestehe, dass also die Empfindung bei einem endlichen Werth b_1 Null werde. In diesem Fall hat man zur Bestimmung der Integrationsconstanten in obiger Gleichung für $r = b_1$ $s = 0$ zu setzen und erhält so:

$$\text{Const.} = -\frac{\varkappa_1}{2k_1} \cdot \log (k_1 b_1{}^2 + b_1).$$

Man bekommt also jetzt als Beziehung zwischen Reiz und Empfindung:

b) $$s = \frac{\varkappa_1}{2k_1} \cdot \log \frac{k_1 R^2 + b_1}{k_1 b_1{}^2 + b_1}.$$

Setzen wir schließlich noch r für R, b statt b_1, k statt k_1 und fassen überdies $\frac{k_1}{2k_1}$ in eine einzige Constante K zusammen, so hat man für die Annahme einer Empfindungsschwelle, aber keiner Reizschwelle das Gesetz:

$$\text{a)} \qquad s = K \,.\, \log \frac{kr^2 + b}{b},$$

und im Falle einer Reizschwelle hat man das Gesetz:

$$\text{b)} \qquad s = K \,.\, \log \frac{kr^2 + b}{kb^2 + b}.$$

Im Gegensatz zu manchen der früheren Ableitungen ist die Herleitung der Formel 4) durchaus nicht einfach und klar; man hat vielmehr Mühe, den allgemeinen Gang und die Gründe dieses Ganges zu verfolgen. Ich werde daher nochmals den allgemeinen Weg geben und es wird sich dann zeigen, dass die ganze Herleitung auch abgesehen von den schon oben bemerkten Versehen nicht richtig sein kann.

Langer modificirt zunächst das Weber'sche Gesetz in folgendes:

$$\Delta r = kr^2 + b$$

$$\Delta s = \varkappa r,$$

woraus folgen würde:

$$\text{5)} \qquad \frac{\Delta s}{\Delta r} = \frac{\varkappa r}{kr^2 + b}.$$

Es handelt sich nun darum, aus dieser Formel eine Differentialformel zu gewinnen. Das Einfachste würde sein, 5) unmittelbar in die Differentialformel

$$\text{6)} \qquad \frac{ds}{dr} = \frac{\varkappa r}{kr^2 + b}$$

umzuwandeln; dann würde sich abgesehen von der Bezeichnung unmittelbar die Beziehung 4) ergeben haben.

Eine solche Umwandlung von 5) in 6) war im entsprechenden Fall der Fechner'schen Ableitung zulässig, nicht aber hier, wie man leicht einsieht. Dies ist wohl der Grund zu der eigenthümlichen Art und Weise, wie Langer seine Differentialformel herleitet. Das Eigenthümliche ist nun aber, dass er auf dem Umweg schließlich zu der

Formel 4) gelangt, die er einfacher, aber freilich falsch ableiten konnte. Daraus folgt schon, dass der Langer'sche Weg nicht richtig sein kann.

Die Ueberführung der Formel 5) in eine Differentialformel bewirkt nun Langer in der Weise, dass er zunächst die Beziehung

$$1) \qquad \frac{\Delta s}{\Delta r} = f'[r + \varepsilon(r_1 - r)]$$

nachweist. Der Nachweis dieser Beziehung basirt allerdings, wie wir gesehen haben, auf einem Versehen; doch ist immerhin möglich, dass die Richtigkeit von 1) gerechtfertigt werden kann. Aus 1) folgert Langer, dass Δs und Δr bloße Functionen des Ausdruckes $r + \varepsilon(r_1 - r)$ sein müssen, setzt diese Functionen ein und erhält dann durch Integration seine Formel 4), nachdem er zur Abkürzung $r + \varepsilon(r_1 - r) = R$ gesetzt hat. — Dies ist in Kurzem der Gang der Langer'schen Ableitung.

Es ist nun früher schon erwähnt worden, dass der Schluss, Δr und Δs müssten bloße Functionen von R sein, falsch ist; nur das Verhältniss $\frac{\Delta s}{\Delta r}$ darf als bloße Function von R aufgefasst werden, wenn der Langer'sche Schluss überhaupt anwendbar ist; aber selbst dieser Schluss scheint mir nicht richtig zu sein; er würde, wie ich meine, nur dann gerechtfertigt sein, wenn die Beziehung 1) eine identische wäre. Verfolgen wir nun die Consequenzen dieses Schlusses. Langer wandelt seiner Folgerung gemäß, dass Δs und Δr nur von R abhängen können, sein modificirtes Weber'sches Gesetz:

$$\Delta r = kr^2 + b$$
$$\Delta s = \varkappa r$$

um in:

$$2) \qquad \Delta r = k_1[r + \varepsilon(r_1 - r)]^2 + b_1$$
$$3) \qquad \Delta s = \varkappa[r + \varepsilon(r_1 - r)]$$

oder kürzer:

$$2) \qquad \Delta r = k_1 R^2 + b_1$$
$$3) \qquad \Delta s = \varkappa R.$$

2) und 3) sagen aus, dass Δs und Δr nicht von einem, sondern von den beiden der das betreffende Intervall bildenden Reize abhängen. Setzen wir also $r = r_1$, so ist das Reizintervall Null; es müsste also aus 2) und 3) folgen:

$$\varDelta r = 0, \quad \varDelta s = 0.$$

Statt dessen folgt aber

$$\varDelta r = k_1 r^2 + b_1$$
$$\varDelta s = \varkappa r.$$

Hieraus geht hervor, dass die Beziehungen 2) und 3) nicht richtig sein können. Wenn das Verhältniss $\frac{\varDelta r}{\varDelta s}$ wirklich eine bloße Function von R sein sollte, so müsste man weiter schließen, dass $\varDelta r$ und $\varDelta s$ von der Form:

$$7) \quad \begin{cases} \varDelta r = \psi_1(R) \cdot \varphi(r) \\ \varDelta s = \psi_2(R) \cdot \varphi(r) \end{cases}$$

sind, wo die Function φ von der Art ist, dass $\varphi(0) = 0$ wird. Die Bedingungen 7) gestatten aber nicht mehr, dass das Weber'sche Gesetz die Form

$$\varDelta r = kr^2 + b$$
$$\varDelta s = ks$$

habe.

Es sei noch auf einen Umstand hingewiesen, der befremdend ist. An Stelle der Reizschwelle b in der Langer'schen Formulirung des Weber'schen Gesetzes:

$$\varDelta r = kr^2 + b$$

ist in der umgewandelten Form 2) die Größe b_1 getreten. Die Reizschwelle ist eine empirisch zu bestimmende Größe; während also sehr wohl der Proportionalitätsfactor k eventuell in k_1 übergehen kann, darf doch nicht die empirische Constante b durch b_1 ersetzt werden. Oder sollte b_1 nicht mehr die Reizschwelle bedeuten? — Bei der Bestimmung der Integrationsconstanten wird b_1 als Reizschwelle betrachtet, während ursprünglich b als solche eingeführt war. Ich meine also, es müsste in 2) b an Stelle von b_1 beibehalten werden.

Durch den Nachweis dieser Bedenken und Widersprüche, welche sich in der Langer'schen Ableitung zeigen, dürfte das Gesetz selbst hinfällig werden. Wenn ich trotzdem in meiner Kritik fortfahre, so geschieht es, um zu zeigen, dass das Gesetz derselben fast in keinem Punkte Stand zu halten vermag.

Aus der Formel 4) leitet Langer zwei verschiedene Beziehungen ab je nach Annahme oder Nichtannahme einer Reizschwelle. Trotzdem tritt aber in beiden Beziehungen a) und b) der ursprüngliche Schwellenwerth b auf. Dass auch in der Formel a), welche dem Fall entspricht, wo keine Reizschwelle, wohl aber eine Empfindungsschwelle besteht, der Schwellenwerth b auftritt, ist jedenfalls so zu erklären, dass b in diesem Fall nicht eigentlich als Reizschwelle aufzufassen ist, sondern als die Größe des Reizes, welchem die Empfindungsschwelle entspricht.

Es ist nun befremdend, dass die Frage der Schwelle so zweifelhaft gelassen wird, dass sie erst ganz nachträglich dazu dient, um eventuell zwei verschiedene Gesetze zu bestimmen; es scheint wahrscheinlicher, dass dieser Punkt so fundamental für ein psychophysisches Gesetz ist, dass er von vorn herein bestimmend für ein solches wird. In der That ist ja auch dieser Punkt bei Langer der Anlass zu einer Modification des Weber'schen Gesetzes gewesen, und wenn wir nun näher zusehen, so findet sich, dass diese Modification nur begründet ist für den Fall, dass man keine Reizschwelle, sondern eine Empfindungsschwelle annimmt; denn in diesem Falle liegt die Sache so: die Empfindung beginnt gleichzeitig mit dem Reiz bei Null und wächst stetig mit demselben; die Merklichkeit der Empfindung wächst indessen unstetig; der jeweilige eben merkliche Reizunterschied bestimmt sich nach dem Weber'schen Gesetz; man kann also dasselbe von dem ersten eben merklichen Reizunterschied verlangen, dieser ist aber nichts Anderes als die Schwelle. Für diesen Fall passt also die Langer'sche Argumentation, nicht aber für den anderen Fall der Annahme einer Reizschwelle, in welchem $s = 0$ für $r = b$ gesetzt wird. Denn bis zur Reizschwelle als unterster Grenze gilt auch das ursprüngliche Weber'sche Gesetz empirisch und unterhalb dieser Grenze kann man keine empirische Geltung mehr beanspruchen, sobald man für dieselbe die Empfindung gleich Null annimmt.

Langer beschäftigt sich nun näher mit dem Gesetz:

$$\text{a)} \qquad s = K \,.\, \log \frac{k r^2 + b}{b},$$

welches dem Fall entspricht, dass keine Reizschwelle, sondern eine Empfindungsschwelle besteht.

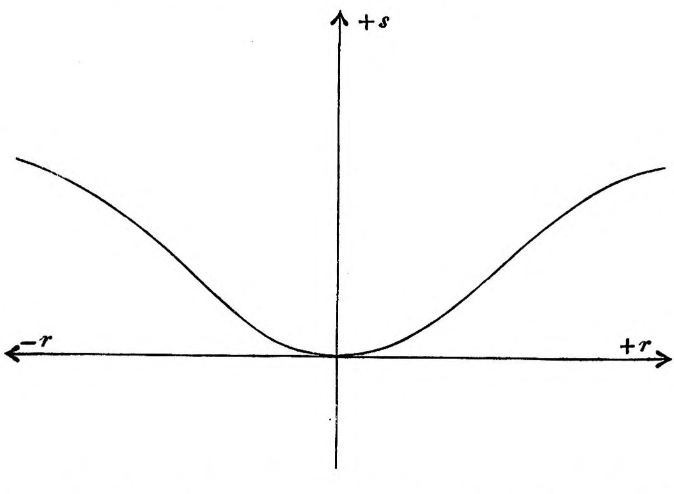
Nach a) ist der beziehungsweise Gang zwischen Reiz und Empfindung folgender: Reiz und Empfindung wachsen gemeinschaftlich vom Werthe Null an. Die Formel gilt ebenso für positive wie für negative Reizwerthe, und zwar, so schließt Langer weiter, tritt für gleiche aber entgegengesetzte Reize dieselbe Empfindung ein. Aus dem Werth des ersten Differentialquotienten:

$$\frac{ds}{dr} = \frac{2kK \cdot r}{kr^2 + b}$$

ist ersichtlich, dass die Empfindung mit wachsenden positiven Reizen von Null bis Unendlich stetig wächst; und dasselbe soll gelten für absolut wachsende negative Reize. Da ferner der zweite Differentialquotient

$$\frac{d^2 s}{dr^2} = 2kK \frac{b - kr^2}{(kr^2 + b)^2}$$

verschwindet für $r = \pm \sqrt{\frac{b}{k}}$, so findet an diesen Punkten eine Inflexion der Curve statt; für absolut genommen kleinere Reize ist $\frac{d^2 s}{dr^2} > 0$, die Curve also convex nach unten; für Werthe, welche absolut genommen größer als $\sqrt{\frac{b}{k}}$ sind, ist $\frac{d^2 s}{dr^2} < 0$, die Curve ist also concav nach unten. Nach Langer's Ansicht liegt also die durch a) dargestellte Curve vollständig symmetrisch zur s-Achse; ihr geometrisches Bild würde etwa das folgende sein:



Hierzu ist Folgendes zu bemerken: Da in der Formel a) r quadratisch vorkommt, so schließt Langer, dass die Formel ebenso für negative wie für positive Reize gelte. Nun finde ich bei Langer keine weiteren Auseinandersetzungen darüber, was er unter negativen im Gegensatz zu den positiven Reizen versteht. Jedenfalls hat er den Gegensatz von Wärme und Kälte im Auge, fasst also die Kälte als einen negativen Reiz im Gegensatz zur Wärme als positivem Reiz auf. Mag man indess unter negativen Reizen verstehen, was man will, und mag deren Zulassung gerechtfertigt sein oder nicht, auf alle Fälle wird man leicht einsehen, dass die Langer'sche Formel durchaus nicht in gleicher Weise für negative Reize gilt wie für positive, und dass die oben gezeichnete Curve unzutreffend ist. Die oben gegebene Auseinandersetzung über den Verlauf der durch a) dargestellten Curven gilt nämlich nur unter der Voraussetzung, dass alle Constanten in der Formel wirklich constant dieselben Werthe beibehalten. Für die Constante b ist aber diese Voraussetzung nicht erfüllt; denn negativen Reizen entsprechend wird man auch eine negative Reizschwelle anzunehmen haben. Für positive abnehmende Reize nimmt auch die Merklichkeit der Empfindung ab bis zu einem Schwellenwerth b, der positiv ist. Nimmt r weiter von b bis Null ab, so bleibt die Merklichkeit der Empfindung Null; für negative, absolut genommen wachsende Reize bleibt dieselbe ebenfalls Null, bis ein gewisser negativer Reizwerth, die negative Reizschwelle, überschritten wird. Nehmen wir an, dass diese negative Reizschwelle absolut genommen gleich der positiven ist, so haben wir in der Formel a), wenn wir sie für negative Reize anwenden wollen, $-b$ statt b einzuführen; für negative Reize lautet demnach die Formel:

$$s = K . \log \frac{k r^2 - b}{- b} .$$

Sobald nun $k r^2 > b$ ist, liefert diese Formel imaginäre Empfindungswerthe. Die Formel a) ist also durchaus nicht für negative Reizwerthe anwendbar, außer für $r^2 < \frac{b}{k}$. Von der oben gezeichneten Curve bleibt demnach nur der auf der positiven r-Achse liegende Zweig bestehen; auf der anderen Seite verläuft die Curve wesentlich anders, da für $k r^2 - b = 0$ $s = -\infty$ wird.

Sollte es nach Langer's Ansicht ein besonderer Vorzug sein, dass seine Formel für negative Reizwerthe scheinbar Geltung hat, sollte ihn vielleicht gar dieser Gesichtspunkt bei Aufstellung seiner

Formel geleitet haben, so würde durch den gegebenen entgegengesetzten Nachweis der Formel eine bedeutende Stütze entzogen sein, selbst wenn ihre Herleitung unantastbar wäre.

Auf die Formel b) näher einzugehen unterlasse ich, da dies ganz werthlos sein würde. Langer selbst hat übrigens wenig zu derselben bemerkt.

Es sei nun noch darauf aufmerksam gemacht, dass das Langer-sche Gesetz ebenso wie das Fechner'sche auf einer Hypothese beruht. Dass eine solche überhaupt nöthig ist zur Aufstellung eines Empfindungsgesetzes, ist schon mehrfach hervorgehoben worden, und so ist denn Langer vorsichtig genug, nur von einem wahrscheinlichsten Gesetz zu reden. Seine wahrscheinlichste Hypothese ist nun die, dass die Empfindungsunterschiede proportional mit den Reizen wachsen. Langer gelangt zu dieser Hypothese nach eingehenden Auseinandersetzungen über die Fechner'sche Annahme, dass den eben merklichen Reizunterschieden gleiche Empfindungsunterschiede entsprechen sollen. Indem er die Art und Weise auseinandersetzt, wie wir überhaupt bei der Beurtheilung der Empfindungen mittelst der Erinnerung verfahren, gelangt er zu dem Schluss, dass die Fechner'sche Annahme nicht haltbar sei, und stellt dagegen die genannte Hypothese auf.

Bezüglich der Uebereinstimmung der Formel mit den Thatsachen bemerkt Langer, dass die aus

$$\varDelta r = kr^2 + b$$

berechneten Werthe von $\varDelta r$ sich unter gewissen Voraussetzungen in einige Uebereinstimmung mit den von Aubert gefundenen Zahlen bringen lassen. Diese Ausdrucksweise bietet keine große Bürgschaft dafür, dass sich die vorstehende modificirte Weber'sche Formel experimentell rechtfertigen werde. Von anderer Seite ist wohl noch kein Versuch zu einer solchen Rechtfertigung gemacht worden. Rechnet man hierzu noch die Behauptung G. E. Müller's, dass die Modification des Weber'schen Gesetzes

$$\varDelta r = kr^2 + b$$

der Thatsache nicht hinlänglich gerecht werde, dass innerhalb eines gewissen Gebietes mittlerer Reizintensitäten die Unterschiedsempfindlichkeit annähernd constant bleibe, so kommt man zu dem Schluss, dass die Langer'sche Modification des Weber'schen Gesetzes ein misslungener Versuch einer Verbesserung ist. Die aus derselben abgeleitete psychophysische Beziehung aber ist überhaupt in keiner Weise haltbar, da sie die mannigfachsten Bedenken aufweist.

3. G. E. Müller's psychophysisches Gesetz.[1])

Auch G. E. Müller nimmt wie Helmholtz und Langer eine Umgestaltung der Fechner'schen resp. Weber'schen Fundamentalformel in der Weise vor, dass er Rücksicht nimmt auf die oberen und unteren Abweichungen. Zu dem Zweck ersetzt er die Fechner'sche Formel:

$$s = k \,.\, \log \frac{r}{\varrho}$$

zunächst durch die ganz allgemeine, unbestimmte Formel:

$$s = k \,.\, \log (\varphi\, r).$$

Den Charakter der Function φ bestimmt er nun näher rücksichtlich der Erfarungsthatsachen, wie folgt:

Innerhalb mittlerer Reizintensitäten muss die Formel

$$s = k \,.\, \log \varphi\,(r)$$

mit der Fundamentalformel übereinstimmen; hier muss also die Function $\varphi\,(r)$ den Werthen r annähernd proportional sein. In den niederen und höheren Theilen der Reizscala dagegen muss erfahrungsgemäß das Verhältniss zweier Reize r' und $r'' < r'$ größer genommen werden, als für mittlere Reizintensitäten, wenn immer noch ein eben merklicher Empfindungsunterschied erhalten werden soll; mit anderen Worten, die Empfindlichkeit nimmt in den höheren und niederen Theilen der Scala ab. In der corrigirten Formel muss also für niedere und höhere Reizintensitäten das Verhältniss $\frac{\varphi\,(r')}{\varphi\,(r'')}$ größere Werthe annehmen als für mittlere Reizintensitäten. Soll also trotzdem derselbe Empfindungsunterschied

$$s' - s'' = k \,.\, \log \frac{\varphi\,(r')}{\varphi\,(r'')}$$

1) G. E. Müller, Zur Grundlegung der Psychophysik. Berlin 1878. S. 229.

eintreten, so muss für niedere und höhere Reizintensitäten die Function $\varphi(r)$ langsamer wachsen. Ob die Function φ von der Art ist, dass jeder endliche Reizwerth einen positiven endlichen Empfindungswerth zur Folge hat, lässt Müller noch unentschieden, da bis jetzt noch nicht mit Sicherheit zu entscheiden sei, ob die Thatsache der Reizschwelle wirklich bestehe. Jedenfalls aber soll φ so beschaffen sein, dass bereits bei einem bestimmten endlichen Werth von r die Empfindungsintensität ihr Maximum erreicht. Näheres über die Function φ auszusagen erklärt Müller nach dem bis jetzt vorliegenden Material als verfehlt.

Gegen die allgemeine Charakteristik der Function φ, wie sie Müller gegeben hat, lässt sich nichts einwenden; denn sie entspricht den Erfahrungsthatsachen. Aber was fangen wir mit der allgemeinen unbestimmten Formel Müller's an? Jeder Versuch, eine bestimmte Formel aufzustellen, ist anerkennenswerth. Zeigt sich auch, dass die aufgestellte Formel nicht den gestellten Anforderungen genügt, so kann sie doch insofern von Nutzen sein, als sie die ganze Sachlage von einer neuen Seite beleuchtet und so zu neuen Gesichtspunkten Anlass gibt. In diesem Sinne sind auch die verschiedenen Formulirungen des Weber'schen Gesetzes, die wir kennen gelernt haben, möge man ihnen nun mehr oder weniger Anerkennung zusprechen, nicht als werthlos zu erachten.

Hat sich demnach Müller in seiner mathematischen Formulirung des Weber'schen Gesetzes so allgemein gehalten, so muss ich mich auch mit diesen allgemeinen Bemerkungen begnügen. Nur von einem Vorwurf möchte ich die Formel noch befreien, der ihr von Fechner gemacht wird. Müller lässt nämlich keine negativen Empfindungswerthe zu. In dieser Beziehung hält ihm Fechner entgegen [1]), er täusche sich, wenn er meine, in der corrigirten Maßformel von den negativen Empfindungswerthen frei zu sein; denn er müsse die Empfindung bei einem endlichen Reizwerth gleich Null setzen, weil die Gleichung

$$0 = k \, . \log \varphi(0)$$

nicht bestehen könne. Hier liegt offenbar ein Versehen von Seiten

1) Vgl. Fechner, Revision der Hauptpunkte der Psychophysik. Leipzig, 1882. S. 204.

Fechner's vor; denn der vorstehenden Gleichung wird entsprochen, sobald $\varphi(0) = 1$ ist, und dieser Fall ist wiederum möglich; wir haben ihn, wenn wie in der ersten Delboeuf'schen Formel

$$\varphi = \frac{c + r}{c}$$

ist. —

Müller verbindet mit seiner corrigirten Maßformel eine physiologische Deutung und ist so ein Hauptgegner Fechner's, der die psychophysische Auffassung des Gesetzes vertritt. Die Reizschwelle hält Müller, wie oben erwähnt, für eine noch nicht sicher erwiesene Thatsache; falls sie bestehen sollte, will er sie physiologisch erklärt wissen. Vor Allem wendet er sich gegen die negativen Empfindungen, deren Vermeidung einen Hauptgesichtspunkt bei der Aufstellung seiner Formel bildet. Das Fechner'sche Gesetz erklärt er schon deshalb für hinfällig, weil sich aus demselben negative Empfindungswerthe ergeben, und er meint daher, dass, wenn man überhaupt die psychophysische Deutung des Gesetzes aufrecht erhalten wolle, man der Fechner'schen Formel

$$s = k \, . \log E,$$

wo E die psychophysische Erregung bedeutet und der Erregungsschwellenwerth E_0 als Einheit der Erregungsintensitäten angenommen ist, die folgende Formel substituiren müsse[1]:

$$s = \frac{2\,k \, . \log E}{\pi} \int_0^\infty \sin x \, . \cos \frac{x}{E} \, \frac{dx}{x} \, .$$

Müller selbst gibt hierzu nur folgende erläuternde Bemerkungen: »Diese Formel ergibt für alle Werthe von E, die > 1 sind, ganz dieselben Werthe von s, wie Fechner's psychophysisches Gesetz, hingegen für diejenigen Werthe von E, welche < 1 sind, ebenso wie für den Werth $E = 1$ keine negativen Empfindungsgrößen, sondern nur den Nullpunkt der Empfindung (vgl. G. F. Meyer, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale etc. S. 565 f.).«

Diese so knappen Bemerkungen zu einer neu aufgestellten Formel,

---

1) Müller, a. a. O. S. 373 u. 374.

die durchaus nicht einfach ist, sondern, wie man sofort erkennt, in's Gebiet der höheren Mathematik übergreift, haben Fechner in seiner Revision etc.« S. 205 zu folgender Kritik veranlasst: »Diese Formel imponirt in der That mit ihrem kometenartig ins Unendliche ∞ gestreckten Integralschweife; nur finde ich eine eigene Zumuthung darin, dass die psychophysische Ansicht sich daran halten soll, da gar nicht abzusehen, wie sie dazu kommen soll. Denn dass es in der abstracten Mathematik eine solche Formel gibt, reicht doch nicht hin, sie in der Psychophysik zu verwenden, ohne einen Weg zu zeigen, der in ihr selber dazu führt. Nun kommt die psychophysische Ansicht vom Weber'schen Gesetz nach Uebersetzung des Reizes in psychophysische Erregung unmittelbar zu:

$$s = k \,.\, \log E + \text{const.}$$

Auf welchem mathematischen Wege man aber dazu kommen soll, die additive Constante in einen Factor zu übersetzen, in welchen gar die Variable E mit eingeht, ist mir ganz unerfindlich etc.«

Diesen Worten Fechner's kann man im Allgemeinen vollständig beistimmen; die Ableitung der Müller'schen Formel scheint in der That ganz unerfindlich; jedenfalls beruht sie auch gar nicht auf einer mathematischen Ableitung; sie ist, das scheint mir ganz offenbar zu sein, lediglich das Resultat der Zusammensetzung der Fechner'schen Formel $s = k \,.\, \log E$ mit dem sogenannten Dirichlet'schen discontinuirlichen Factor:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin x \,.\, \cos \lambda x}{x}\, dx.$$

Behufs Nachweisung der Richtigkeit der obigen Müller'schen Behauptung citire ich die in Betracht kommende Stelle aus Meyer, »Vorlesungen etc.«, auf welche Müller verweist:

»Das Integral

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin x \,.\, \cos \lambda x}{x}\, dx,$$

der sogenannte discontinuirliche Factor Dirichlet's, erhält, wenn λ eine von $+1$ verschiedene positive Constante bedeutet, den Werth 1, so lange λ kleiner als 1 ist, dagegen fällt es mit der Null zusammen, wenn λ die Eins überschreitet, und für $\lambda = 1$ endlich ist es $= \frac{1}{2}$.«

Setzt man $\lambda = \frac{1}{E}$ und fügt den Ausdruck

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin x \,.\, \cos \frac{x}{E} \cdot \frac{dx}{x}$$

zu dem Ausdruck $k \,.\, \log E$ als Factor, so erhält man die Formel

$$s = \frac{2k \,.\, \log E}{\pi}\int_0^\infty \sin x \,.\, \cos \frac{x}{E} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Im Müller'schen Werk findet man diese Formel, wie auch oben, fälschlicher Weise folgendermaßen geschrieben:

$$s = \frac{2k \,.\, \log E}{\pi}\int_0^\infty \sin x \,.\, \cos \frac{x}{E} \, \frac{dx}{x},$$

und bei Fechner tritt das Falsche dieser Schreibweise in der nur wenig veränderten folgenden Schreibweise hervor:

$$s = \frac{2k \,.\, \log E \int_0^\infty \sin x \,.\, \cos x \, \frac{dx}{x}}{E}.$$

Nach der Müller'schen und Fechner'schen Schreibweise ist E der Nenner im gesammten Ausdruck, während in Wirklichkeit E nur in der Verbindung $\cos \frac{x}{E}$ aufzutreten hat.

Aus den obigen Worten aus Meyer, »Vorlesungen etc.« ergibt sich für $\lambda = \frac{1}{E}$ Folgendes: Für $E < 1$ wird $\lambda > 1$, daher der Werth des Dirichlet'schen Factors gleich Null; für $E = 1$ wird $\lambda = 1$, daher der Ausdruck gleich $\frac{1}{2}$; für $\lambda > 1$ wird $\lambda < 1$, daher der Ausdruck gleich 1. Somit rechtfertigen sich in der That die Müller-schen Behauptungen, dass für $E < 1$ $s = 0$ wird, dass für $E = 1$ ebenfalls $s = 0$ wird, da in diesem Fall $\log E = 0$ folgt, und dass für $E > 1$ s dieselben Werthe erhält, die sich auch aus der Fechner'schen Formel ergeben. Die Müller'sche Modification ist also richtig und entspricht dem beabsichtigten Zweck. Es ist aber zu bemerken, dass dieser Zweck auf künstlichem Wege erreicht worden ist; man vermisst an der Müller'schen Formel die mathematische Ableitung: die gegebene Umwandlung der Fechner'schen Formel ist nichts anderes als eine mathematische Darstellung dessen, was man in Worten so wiedergeben kann: Die Empfindung wird erfahrungsgemäß für den Reiz $E = E_0$ gleich Null, also kann man nicht verlangen, dass die Fechner'sche Formel für $E < E_0$ noch Geltung habe. Es scheint indess von wenig Werth zu sein, das, was sich in Worten so einfach und leicht verständlich wiedergeben lässt, erst nachträglich, nachdem die eigentliche psychophysische Beziehung schon hergeleitet ist, auf rein äußerliche Weise mathematisch zum Ausdruck zu bringen; noch dazu durch eine so complicirte Formel, wie es die Müller'sche ist.