Die Theorie der Collectivgegenstände.

Von

Gottl. Friedr. Lipps.

Mit 6 Figuren im Text.

III. Eigenschaften der Mittelwerthe.

§ 1. Ungleichungen für die aus den symmetrischen Grundfunctionen gebildeten Mittelwerthe beliebiger reeller, absoluter Größen.

Wenn die C. G. durch Mittelwerthe charakterisirt werden sollen, so ist es unerlässlich, sich über die Eigenschaften der Mittelwerthe zu orientiren. Ich beginne mit der Ableitung von Ungleichungen, welche für die aus den symmetrischen Grundfunctionen reeller, absoluter Größen gebildeten Mittelwerthe allgemeine Geltung haben.

Durch $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ mögen n reelle Größen dem absoluten Werthe nach bestimmt werden. Sie sollen nicht alle einander gleich sein, so dass es einen kleinsten Werth α_1 und einen hiervon verschiedenen größten Werth α_n gibt.

Entwickelt man nun das Product

$$(x - \alpha_1) . (x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$$

nach Potenzen von x, so dass

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \cdots \pm a_n$$

resultirt, so werden durch

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \\ a_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

die symmetrischen Grundfunctionen von $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ dargestellt. Setzt man ferner

$$\begin{aligned}
n \cdot \beta_1 &= a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \\
\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \beta_2^2 &= a_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n, \\
&\ldots \\
\beta_n^n &= a_n = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n;
\end{aligned}$$

bringt man also die Gleichung $n$ten Grades, deren Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ sind, in die Form

$$x^n - \binom{n}{1} \beta_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} \beta_2^2 - \cdots \pm \beta_n^n = 0,$$

so dass allgemein für $i = 1, 2 \ldots n$

$$\binom{n}{i} \beta_i^i = a_i = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_i + \cdots, \tag{2}$$

wo

$$\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \ldots i},$$

so sind $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ die aus den symmetrischen Grundfunctionen gebildeten Mittelwerthe von $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$.

Sie sind in der That Mittelwerthe. Da nämlich α_1 der kleinste und α_n der größte von den gegebenen Werthen ist, so ist

$$\binom{n}{i} \beta_i^i > \binom{n}{i} \alpha_1^i \text{ und } \binom{n}{i} \beta_i^i < \binom{n}{i} \alpha_n^i$$

oder für $i = 1, 2 \ldots n$.

$$\alpha_1 < \beta_i < \alpha_n \tag{3}$$

Insbesondere ist β_1 das arithmetische und β_n das geometrische Mittel der gegebenen Größen.

Nach einem bekannten Satze[1]) ist das arithmetische Mittel reeller absoluter Größen stets größer als das geometrische Mittel der näm-

---

1) Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich leicht in folgender Weise. Es sei

$$A_{n-1} = \frac{1}{n-1}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}); \quad G_{n-1} = \sqrt[n-1]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}};$$

$$A_n = \frac{1}{n}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = \frac{n-1}{n} A_{n-1} + \frac{\alpha_n}{n};$$

$$G_n = \sqrt[n]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n} = \sqrt[n]{G_{n-1}^{n-1} \cdot \alpha_n};$$

lichen Größen, und nur dann, wenn die Größen alle einander gleich sind, erhalten auch die beiden Mittel denselben Werth. Es ist daher $\beta_1 > \beta_n$. Dann ist aber auch für die $\binom{n}{i}$ Producte von der Form $\alpha_1 . \alpha_2 \ldots \alpha_i$, deren i Factoren auf alle möglichen Arten der Reihe $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ zu entnehmen sind, das arithmetische Mittel größer als das geometrische Mittel. Das arithmetische Mittel ist nach (2) gleich β_i^i. Das geometrische Mittel findet sich gleich der $\binom{n}{i}$ten Wurzel des, aus den $\binom{n}{i}$ Producten von der Form $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_i$ gebildeten Gesammtproductes, das aus $i \cdot \binom{n}{i}$ Factoren besteht und jedes Glied der Reihe $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ in der $\binom{n-1}{i-1}$ten Potenz enthält. Da nun die $\binom{n}{i}$te Wurzel aus der $\binom{n-1}{i-1}$ten Potenz einer Zahl sich auf die $n$te Wurzel aus der $i$ten Potenz eben jener Zahl reducirt, so erhält man für das geometrische Mittel den Werth

$$\sqrt[n]{(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n)^i} = \beta_n^i$$

Demgemäß ist für $i = 1, 2 \ldots n-1$

$$\beta_i^i > \beta_n^i \text{ oder } \beta_i > \beta_n \tag{4}$$

Es gilt sonach der Satz: Bringt man eine Gleichung $n$ten Grades

---

Denkt man sich nun die Werthe $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ beliebig, aber fest gewählt, während α_n variabel ist, so erreicht die Differenz $A_n - G_n$ als Function von α_n betrachtet ihr Minimum für den Werth

$$\alpha_n = G_{n-1}.$$

In diesem Falle ist

$$A_n - G_n = \frac{n-1}{n}(A_{n-1} - G_{n-1}).$$

Somit bleibt $A_n - G_n$ durchweg positiv, wenn $A_{n-1} - G_{n-1}$ durchweg positiv ist, und es kann nur dann $A_n = G_n$ werden, wenn zuvor $A_{n-1} = G_{n-1}$. Es ist aber

$$A_2 - G_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{\alpha_1} - \sqrt{\alpha_2})^2$$

durchweg positiv und nur dann gleich Null, wenn $\alpha_1 = \alpha_2$. Somit ist auch $A_3 - G_3$, $A_4 - G_4, \ldots A_n - G_n$ durchweg positiv und nur dann gleich Null, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n$.

mit reellen positiven Wurzeln, die nicht alle einander gleich sind, in die Form

$$x^n - \binom{n}{1} \beta_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} \beta_2^2 x^{n-2} - \cdots \pm \beta_n^n = 0$$

so ist

$$\beta_1 > \beta_n; \; \beta_2 > \beta_n; \; \beta_3 > \beta_n; \ldots \beta_{n-1} > \beta_n.$$

Sind aber die Wurzeln dieser Gleichung sämmtlich reell und positiv, so gilt bekanntlich dasselbe von den Wurzeln der Gleichungen, die man durch successive Differentiation nach x erhält. Diese Gleichungen sind

$$x^{n-1} - \binom{n-1}{1} \beta_1 x^{n-2} + \binom{n-1}{2} \beta_2^2 x^{n-3} - \cdots \pm \beta_{n-1}^{n-1} = 0$$

$$x^{n-2} - \binom{n-2}{1} \beta_1 x^{n-3} + \binom{n-2}{2} \beta_2^2 x^{n-4} - \cdots \pm \beta_{n-2}^{n-2} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^2 - 2\beta_1 x + \beta_2^2 = 0.$$

Es ist daher dem angegebenen Satze zufolge

$$\beta_1 > \beta_{n-1}; \; \beta_2 > \beta_{n-1}; \ldots \beta_{n-2} > \beta_{n-1};$$
$$\beta_1 > \beta_{n-2}; \; \beta_2 > \beta_{n-2}; \ldots \beta_{n-3} > \beta_{n-2};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\beta_1 > \beta_2 .$$

Die Zusammenfassung dieser Ungleichungen führt im Verein mit den Ungleichungen (4) und (3) zu folgendem Satze:

Berechnet man aus den symmetrischen Grundfunctionen der reellen, positiven Größen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, deren kleinste α_1 und deren größte α_n ist, die Mittelwerthe $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$, oder bringt man die Gleichung $n$ten Grades

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \cdots \pm a_n = 0,$$

deren Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ sind, in die Form

$$x^n - \binom{n}{1} \beta_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} \beta_2^2 x^{n-2} - \cdots \pm \beta_n^n = 0,$$

so ist

$$\alpha_n > \beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_{n-1} > \beta_n > \alpha_1 . \tag{5}$$

Und es sind nur dann zwei auf einander folgende Mittelwerthe gleich, wenn sie alle einander gleich sind und die Werthe $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ insgesammt übereinstimmen.

Auf Grund dieses Satzes lassen sich weitere Ungleichungen aufstellen, die ebenso wie (5) Eigenschaften der aus den symmetrischen Grundfunctionen reeller, positiver Größen gebildeten Mittelwerthe oder — mit anderen Worten — nothwendige (aber nicht hinreichende) Bedingungen dafür, dass die n Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades alle reell und positiv sind, angeben.

Zu diesem Zwecke leite man aus der Gleichung

$$x^n - \binom{n}{1}\beta_1 x^{n-1} + \binom{n}{2}\beta_2^2 x^{n-2} - \cdots \pm \beta_n^n = 0 \tag{6}$$

mit den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ neue Gleichungen ab, deren Coefficienten bestimmte Functionen von $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ sind und deren Wurzeln insgesammt reelle, positive Werthe erhalten, wenn $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ in beliebiger Weise dem reellen, positiven Zahlengebiete entnommen werden. Hat nämlich eine solche Gleichung den Grad r und wird sie in die Form

$$x^r - \binom{r}{1} B_1 x^{r-1} + \binom{r}{2} B_2^2 x^{r-2} - \cdots \pm B_r^r = 0, \tag{7}$$

gebracht, so ist

$$B_1 > B_2 > \cdots > B_r.$$

Diese Ungleichungen bieten aber, da $B_1, B_2^2 \ldots B_r^r$ Functionen von $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ sind, neue Beziehungen zwischen den β dar.

Soll z. B. die Gleichung (7) die reciproken Werthe von $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ zu Wurzeln haben, so ist $r = n$,

$$B_1 = \frac{\beta_{n-1}^{n-1}}{\beta_n^n};\ B_2^2 = \frac{\beta_{n-2}^{n-2}}{\beta_n^n};\ \ldots\ B_{n-1}^{n-1} = \frac{\beta_1}{\beta_n^n};\ B_n^n = \frac{1}{\beta_n^n},$$

und aus $B_1 > B_2 > \cdots > B_n$ folgt

$$\frac{\beta_{n-1}^{n-1}}{\beta_n^n} > \sqrt{\frac{\beta_{n-2}^{n-2}}{\beta_n^n}} > \sqrt[3]{\frac{\beta_{n-3}^{n-3}}{\beta_n^n}} > \cdots > \sqrt[n-1]{\frac{\beta_1}{\beta_n^n}} > \frac{1}{\beta_n}. \tag{8}$$

Andererseits ist, wenn (7) die Combinationen $\alpha_1 \cdot \alpha_2;\ \alpha_1 \cdot \alpha_3;\ \ldots\ \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n$ zu Wurzeln haben soll,

$$r = \frac{n(n-1)}{1.2};\ B_1 = \beta_2^2;\ B_2^2 = \frac{n-2}{3n(n-1)-6}\left[4n\beta_1\beta_3^3 - (n-3)\beta_4^4\right];$$

so dass aus $B_1 > B_2$ die Ungleichung

$$\beta_2^4 > \frac{n-2}{3n(n-1)-6}\left[4n\beta_1\beta_3^3 - (n-3)\beta_4^4\right] \tag{9}$$

folgt, wo $4n\beta_1\beta_3^3 > (n-3)\beta_4^4$, da B_2^2 nicht negativ werden kann.

Ist die Gleichung (7) so beschaffen, dass ihre Wurzeln insgesammt reell und positiv sind, wenn die Wurzeln von (6) positive oder negative reelle Werthe darstellen, so erhält man aus $B_1 > B_2 > \cdots > B_r$ nothwendige Bedingungen für das Vorhandensein von n reellen Wurzeln der Gleichung (6). Beispielsweise hat die Gleichung

$$\begin{aligned}
x^n &- \left\{\binom{n}{1}^2\cdot\beta_1^2 - 2\cdot\binom{n}{2}\cdot\beta_2^2\right\}x^{n-1}\\
&+ \left\{\binom{n}{2}^2\cdot\beta_2^4 - 2\cdot\binom{n}{3}\cdot\binom{n}{1}\cdot\beta_3^3\cdot\beta_1 + 2\cdot\binom{n}{4}\cdot\beta_4^4\right\}x^{n-2}\\
&- \left\{\binom{n}{3}^2\cdot\beta_3^6 - 2\cdot\binom{n}{4}\cdot\binom{n}{2}\cdot\beta_4^4\cdot\beta_2^2 + 2\cdot\binom{n}{5}\cdot\binom{n}{1}\cdot\beta_5^5\cdot\beta_1 - 2\cdot\binom{n}{6}\cdot\beta_6^6\right\}x^{n-3}\\
&+ \cdots \pm \beta_n^{2n} = 0
\end{aligned}$$

die Quadrate von $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ zu Wurzeln. Es ergibt sich somit als nothwendige Bedingung dafür, dass die n Wurzeln von (6) reell sind,

$$\left.\begin{aligned}
&n\beta_1^2 - (n-1)\beta_2^2 > \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}\beta_2^4 - \frac{2n(n-2)}{3}\beta_3^3\beta_1 + \frac{(n-2)(n-3)}{6}\beta_4^4}\\
&> \sqrt[3]{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\beta_3^6 - \frac{n(n-1)(n-3)}{4}\beta_4^4\beta_2^2 + \frac{n(n-3)(n-4)}{10}\beta_5^5\beta_1 - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{60}\beta_6^6}\\
&> \cdots > \beta_n^2
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

§ 2. Ungleichungen für die aus Potenzsummen gebildeten Mittelwerthe beliebiger reeller, absoluter Größen.

Es mögen, unter Zusammenfassung etwa vorhandener gleicher Größen, z_1 Größen α_1, z_2 Größen $\alpha_2 \cdots z_n$ Größen α_n gegeben sein; und es sei $m = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$; $o < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$.

Setzt man nun

$$p_1 = \frac{z_1}{m}; \quad p_2 = \frac{z_2}{m}; \quad \ldots \quad p_n = \frac{z_n}{m},$$

so bestimmt die reelle (bei geradem ν dem absoluten Werthe nach genommene) ν-te Wurzel der Potenzsumme:

$$\varepsilon_\nu^\nu = p_1\alpha_1^\nu + p_2\alpha_2^\nu + \cdots + p_n\alpha_n^\nu \tag{11}$$

den Mittelwerth ν-ter Ordnung ε_ν für jeden positiven und negativen ganzzahligen Werth ν. Demgemäß ist für positive Indices:

$$\varepsilon_\nu = \sqrt[\nu]{p_1 \alpha_1^\nu + p_2 \alpha_2^\nu + \cdots + p_n \alpha_n^\nu}$$

und für negative Indices:

$$\varepsilon_{-\nu} = \sqrt[-\nu]{p_1 \alpha_1^{-\nu} + p_2 \alpha_2^{-\nu} + \cdots + p_n \alpha_n^{-\nu}}$$

oder in anderer Schreibweise:

$$\varepsilon_{-\nu} = 1 : \sqrt[\nu]{\frac{p_1}{\alpha_1^\nu} + \frac{p_2}{\alpha_2^\nu} + \cdots + \frac{p_n}{\alpha_n^\nu}},$$

während $\varepsilon_o^o = 1$ für ε_o jeden Zahlenwerth vorauszusetzen gestattet.

Da $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$, so ist für positive Exponenten

$$\alpha_1^\nu < \alpha_2^\nu < \cdots < \alpha_n^\nu,$$

dagegen für negative Exponenten

$$\alpha_1^{-\nu} > \alpha_2^{-\nu} > \cdots > \alpha_n^{-\nu}.$$

Mithin ist

$$(p_1 + \cdots + p_n)\alpha_1^\nu < p_1 \alpha_1^\nu + \cdots + p_n \alpha_n^\nu < (p_1 + \cdots + p_n)\alpha_n^\nu;$$
$$p_1 + \cdots + p_n)\alpha_1^{-\nu} > p_1 \alpha_1^{-\nu} + \cdots + p_n \alpha_n^{-\nu} > (p_1 + \cdots + p_n)\alpha_n^{-\nu},$$

sodass, da $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$, die Ungleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_1^\nu < \varepsilon_\nu^\nu < \alpha_n^\nu; & \alpha_1 < \varepsilon_\nu < \alpha_n \\ \alpha_1^{-\nu} > \varepsilon_{-\nu}^{-\nu} > \alpha_n^{-\nu}; & \alpha_1 < \varepsilon_{-\nu} < \alpha_n \end{array}\right\} \tag{12}$$

gelten. Die Werthe ε_ν sind somit (für positive und negative Indices) in der That Mittelwerthe. Insbesondere ist ε_1 das arithmetische Mittel der gegebenen Größen.

Es ist ferner

$$(p_1 \alpha_1^\nu + \cdots + p_n \alpha_n^\nu)\alpha_1 < p_1 \alpha_1^{\nu+1} + \cdots + p_n \alpha_n^{\nu+1} < (p_1 \alpha_1^\nu + \cdots + p_n \alpha_n^\nu)\alpha_n$$

oder

$$\varepsilon_\nu^\nu \alpha_1 < \varepsilon_{\nu+1}^{\nu+1} < \varepsilon_\nu^\nu \alpha_n \tag{13}$$

für jeden (positiven oder negativen) ganzzahligen Werth ν. Ist nun $\alpha_1 > 1$, sodass alle α größer als 1 sind, so ist um so mehr

$$\varepsilon_\nu^\nu < \varepsilon_{\nu+1}^{\nu+1}.$$

Ist hingegen $\alpha_n < 1$, so dass alle α kleiner als 1 sind, so ist um so mehr

$$\varepsilon_{\nu+1}^{\nu+1} < \varepsilon_\nu^\nu .$$

Die Mittelwerthpotenzen

$$\ldots \varepsilon_{-3}^{-3}, \ \varepsilon_{-2}^{-2}, \ \varepsilon_{-1}^{-1}, \ 1, \ \varepsilon_1, \ \varepsilon_2^2, \ \varepsilon_3^3 \ldots$$

bilden somit eine ständig wachsende oder ständig abnehmende Reihe, je nachdem die Größen α sämmtlich größer oder sämmtlich kleiner als 1 sind.

Demgemäß bestehen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Mittelwerthpotenzen keine allgemein gültigen Ungleichungen. Solche Ungleichungen lassen sich hingegen für die aufeinanderfolgenden Mittelwerthe selbst nachweisen. Man bedarf hierzu des Vergleichs gleich hoher Potenzen von Mittelwerthen.

Um beispielsweise ε_2^2 mit ε_1^2 zu vergleichen, multiplicirt man

$$\varepsilon_2^2 = p_1\alpha_1^2 + p_2\alpha_2^2 + \cdots + p_n\alpha_n^2$$

mit $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$, so dass

$$\varepsilon_2^2 = p_1^2\alpha_1^2 + p_1\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + p_2^2\alpha_2^2 + \cdots$$

sich ergiebt. Subtrahirt man hiervon

$$\varepsilon_1^2 = p_1^2\alpha_1^2 + 2p_1p_2\alpha_1\alpha_2 + p_2^2\alpha_2^2 + \cdots,$$

so resultirt

$$\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2 = p_1p_2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + p_1p_3(\alpha_1 - \alpha_3)^2 + \cdots.$$

Da nun die rechte Seite dieser Gleichung aus wesentlich positiven Größen besteht, so ist stets

$$\varepsilon_1^2 < \varepsilon_2^2; \quad \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \tag{14}$$

und nur dann, wenn alle Größen α einander gleich sind, ist auch $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. In gleicher Weise findet man für die Werthe

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_{-1}}\right)^2 = \frac{p_1}{\alpha_1^2} + \frac{p_2}{\alpha_2^2} + \cdots + \frac{p_n}{\alpha_n^2}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{-1}} = \frac{p_1}{\alpha_1} + \frac{p_2}{\alpha_2} + \cdots + \frac{p_n}{\alpha_n}$$

die Beziehung

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_{-1}}\right)^2 < \left(\frac{1}{\varepsilon_{-2}}\right)^2; \quad \varepsilon_{-1} > \varepsilon_{-2}. \tag{15}$$

Zu analogen Ergebnissen führt der Vergleich der Werthe

$$\varepsilon_{\nu+1}^{(\nu+1)\nu} = \left(p_1 \alpha_1^{\nu+1} + \cdots + p_n \alpha_n^{\nu+1}\right)^\nu,$$
$$\varepsilon_\nu^{\nu(\nu+1)} = \left(p_1 \alpha_1^\nu + \cdots + p_n \alpha_n^\nu\right)^{\nu+1}$$

einerseits und

$$\varepsilon_{-\nu-1}^{-(\nu+1)\nu} = \left(\frac{p_1}{\alpha_1^{\nu+1}} + \cdots + \frac{p_n}{\alpha_n^{\nu+1}}\right)^\nu,$$
$$\varepsilon_{-\nu}^{-\nu(\nu+1)} = \left(\frac{p_1}{\alpha_1^\nu} + \cdots + \frac{p_n}{\alpha_n^\nu}\right)^{\nu+1}$$

andererseits für $\nu = 1, 2, 3 \ldots$

Multiplicirt man die ν-te Potenz von $\varepsilon_{\nu+1}^{\nu+1}$ mit $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$, so erhält man durch Entwicklung der Polynome:

$$\varepsilon_{\nu+1}^{(\nu+1)\nu} = \sum_{\varkappa_1 .. \varkappa_n} \sum_{\lambda_1 .. \lambda_n} \frac{\nu!}{\varkappa_1! \ldots \varkappa_n!} p_1^{\varkappa_1+\lambda_1} \ldots p_n^{\varkappa_n+\lambda_n} \cdot \alpha_1^{(\nu+1)\varkappa_1} \ldots \alpha_n^{(\nu+1)\varkappa_n};$$
$$\varepsilon_\nu^{\nu(\nu+1)} = \sum_{\mu_1 .. \mu_n} \frac{(\nu+1)!}{\mu_1! \ldots \mu_n!} p_1^{\mu_1} \ldots p_n^{\mu_n} \cdot \alpha_1^{\nu\mu_1} \ldots \alpha_n^{\nu\mu_n};$$

wo die Summationen über alle Werthe $\varkappa$ von 0 bis ν, über alle Werthe λ gleich 0 und 1 und über alle Werthe μ von 0 bis $\nu + 1$ auszudehnen sind, die den Bedingungen

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n = \nu$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$$
$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = \nu + 1$$

genügen. Da es nun n Systeme $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ gibt, für welche $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ (indem der Reihe nach jeder λ-Werth gleich 1 und zugleich jeder der übrigen gleich Null sein kann), so gehören zu einem beliebig, aber fest gewählten Systeme $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$ stets n Systeme $\varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_n$, so dass $\varkappa_1 + \lambda_1 = \mu_1$, $\varkappa_2 + \lambda_2 = \mu_2 \ldots$, $\varkappa_n + \lambda_n = \mu_n$. Es sind dies die Systeme

$$\varkappa_1 = \mu_1 - \lambda_1; \quad \varkappa_2 = \mu_2 - \lambda_2; \quad \ldots \quad \varkappa_n = \mu_n - \lambda_n.$$

Unter denselben treten solche mit einem negativen Werthe -1 auf, sobald mindestens einer der Werthe $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$ gleich Null ist. Man kann aber ohne Rücksicht auf dieselben in dem Summenausdruck für $\varepsilon_{\nu+1}^{(\nu+1)\nu}$ die Werthe $\varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_n$ durch $\mu_1 - \lambda_1, \mu_2 - \lambda_2, \ldots, \mu_n - \lambda_n$ ersetzen, da bekanntlich

$$\frac{\nu!}{(\mu_1 - \lambda_1)! \ldots (\mu_n - \lambda_n)!} = 0,$$

wenn einer der Werthe $\mu_1 - \lambda_1$, $\mu_2 - \lambda_2, \ldots, \mu_n - \lambda_n$ negativ ist. Demgemäß besteht die Differenz

$$\varepsilon_{\nu+1}^{(\nu+1)\nu} - \varepsilon_{\nu}^{\nu(\nu+1)}$$

aus Gliedern von der Form

$$\sum_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} \frac{\nu!}{(\mu_1 - \lambda_1)! \ldots (\mu_n - \lambda_n)!} p_1^{\mu_1} \ldots p_n^{\mu_n} \cdot \alpha_1^{(\nu+1)(\mu_1-\lambda_1)} \ldots \alpha_n^{(\nu+1)(\mu_n-\lambda_n)}$$
$$- \frac{(\nu+1)!}{\mu_1! \ldots \mu_n!} p_1^{\mu_1} \ldots p_n^{\mu_n} \cdot \alpha_1^{\nu\mu_1} \ldots \alpha_n^{\nu\mu_n}.$$

Setzt man hier zur Abkürzung

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1^{(\nu+1)(\mu_1-1)} \cdot \alpha_2^{(\nu+1)\mu_2} \ldots \alpha_n^{(\nu+1)\mu_n} \\ A_2 &= \alpha_1^{(\nu+1)\mu_1} \cdot \alpha_2^{(\nu+1)(\mu_2-1)} \ldots \alpha_n^{(\nu+1)\mu_n} \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A_n &= \alpha_1^{(\nu+1)\mu_1} \cdot \alpha_2^{(\nu+1)\mu_2} \ldots \alpha_n^{(\nu+1)(\mu_n-1)}, \end{aligned}$$

so lassen sich jene Glieder in der Form

$$\frac{(\nu+1)!}{\mu_1! \ldots \mu_n!} p_1^{\mu_1} \ldots p_n^{\mu_n} \left\{ \frac{1}{\nu+1} (\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \cdots + \mu_n A_n) - \alpha_1^{\nu\mu_1} \ldots \alpha_n^{\nu\mu_n} \right\}$$

darstellen. Es ist aber

$$\frac{1}{\nu+1} (\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \cdots + \mu_n A_n)$$

das arithmetische Mittel der μ_1 Größen A_1, μ_2 Größen $A_2, \ldots$ μ_n Größen A_n, da $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = \nu + 1$. Ferner ist

$$\alpha_1^{\nu\mu_1} \cdot \alpha_2^{\nu\mu_2} \ldots \alpha_n^{\nu\mu_n}$$

das geometische Mittel der nämlichen Größen. Denn es ist

$$A_1^{\mu_1} \cdot A_2^{\mu_2} \ldots A_n^{\mu_n}$$
$$= \alpha_1^{(\nu+1)(\nu+1)\mu_1 - (\nu+1)\mu_1} \cdot \alpha_2^{(\nu+1)(\nu+1)\mu_2 - (\nu+1)\mu_2} \ldots \alpha_n^{(\nu+1)(\nu+1)\mu_n - (\nu+1)\mu_n}$$
$$= \left(\alpha_1^{\nu\mu_1} \cdot \alpha_2^{\nu\mu_2} \ldots \alpha_n^{\nu\mu_n}\right)^{\nu+1},$$

so dass

$$\alpha_1^{\nu\mu_1} \cdot \alpha_2^{\nu\mu_2} \ldots \alpha_n^{\nu\mu_n} = \sqrt[\nu+1]{A_1^{\mu_1} \cdot A_2^{\mu_2} \ldots A_n^{\mu_n}}.$$

Und dies gilt unabhängig davon, ob die eine oder die andere der Anzahlen $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$ gleich Null oder nicht gleich Null ist, wenn nur $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = \nu + 1$. Da aber das arithmetische

Mittel endlicher absoluter Größen stets größer als das geometrische Mittel der nämlichen Größen ist, so besteht die Differenz

$$\varepsilon_{\nu+1}^{(\nu+1)\nu} - \varepsilon_{\nu}^{\nu(\nu+1)}$$

aus lauter wesentlich positiven Gliedern, die nur dann, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$ ist, insgesammt gleich Null werden.

Es ist somit

$$\varepsilon_{\nu}^{\nu(\nu+1)} < \varepsilon_{\nu+1}^{(\nu+1)\nu}; \quad \varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1} \tag{16}$$

für $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ und nur dann, wenn die gegebenen Größen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ alle einander gleich sind, ist $\varepsilon_\nu = \varepsilon_{\nu+1}$.

In derselben Weise findet man, dass

$$\varepsilon_{-\nu}^{-\nu(\nu+1)} < \varepsilon_{-\nu-1}^{-(\nu+1)\nu}; \quad \varepsilon_{-\nu} > \varepsilon_{-\nu-1} \tag{17}$$

für $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ und dass nur dann, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$, auch $\varepsilon_{-\nu} = \varepsilon_{-\nu-1}$.

Ueberdies erhält man aus

$$\varepsilon_1 = p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \cdots + p_n\alpha_n$$

$$\varepsilon_{-1}^{-1} = \frac{p_1}{\alpha_1} + \frac{p_2}{\alpha_2} + \cdots + \frac{p_n}{\alpha_n}$$

durch Multiplication

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_{-1}^{-1} = p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2 + p_1p_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) + \cdots$$

$$= 1 + \frac{p_1p_2}{\alpha_1\alpha_2}(\alpha_1-\alpha_2)^2 + \frac{p_1p_3}{\alpha_1\alpha_3}(\alpha_1-\alpha_3)^2 + \cdots,$$

so dass

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_{-1}^{-1} > 1 \quad \text{oder} \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_{-1}. \tag{18}$$

Aus (16), (17) und (18) folgt in Verbindung mit (12) die Erkenntniss:

Bildet man aus den Potenzsummen reeller absoluter Größen, deren kleinste α_1 und deren größte α_n ist, die Mittelwerthe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots; \varepsilon_{-1}, \varepsilon_{-2}, \varepsilon_{-3} \ldots$, so ist stets

$$\alpha_1 < \cdots < \varepsilon_{-2} < \varepsilon_{-1} < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \cdots \alpha_n. \tag{19}$$

Da hiernach die Mittelwerthe mit wachsender positiver Ordnungszahl immer größer und mit wachsender negativer Ordnungszahl immer kleiner werden und dabei zwischen den endlichen Grenzen α_1 und α_n eingeschlossen bleiben, so besitzen sie eine obere und eine untere

Häufungsstelle. Diese Stellen werden durch α_n und α_1 bestimmt. Denn aus

$$\varepsilon_\nu^\nu = p_n \alpha_n^\nu \left\{\frac{p_1}{p_n}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_n}\right)^\nu + \cdots + \frac{p_{n-1}}{p_n}\left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)^\nu + 1\right\}$$

$$\varepsilon_{-\nu}^{-\nu} = \frac{p_1}{\alpha_1^\nu}\left\{1 + \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^\nu + \cdots + \frac{p_n}{p_1}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_n}\right)^\nu\right\}$$

folgt zunächst unter Berücksichtigung, dass die aus den p-Werthen gebildeten Quotienten endlich und die Brüche $\alpha_1 : \alpha_n \ldots \alpha_{n-1} : \alpha_n$, $\alpha_1 : \alpha_2 \ldots \alpha_1 : \alpha_n$ der über die α getroffenen Bestimmung zufolge kleiner als 1 sind, für unbegrenzt wachsendes ν

$$\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu^\nu = p_n \alpha_n^\nu\,; \qquad \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_{-\nu}^{-\nu} = p_1\, \alpha_1^{-\nu}.$$

Daraus ergibt sich sodann, wenn der echte Bruch p_n gleich $1 - \gamma$ und der echte Bruch p_1 gleich $1 - \delta$ gesetzt wird, mit Rücksicht auf

$$\sqrt[\nu]{p_n} = 1 - \frac{1}{\nu} \cdot \gamma - \cdots$$

$$\sqrt[-\nu]{p_1} = 1 + \frac{1}{\nu} \cdot \delta + \cdots$$

für unbegrenzt wachsendes ν

$$\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = \alpha_n\,; \qquad \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_{-\nu} = \alpha_1\,. \tag{20}$$

Dieser Schluss ist indessen nur dann bindend, wenn — wie vorausgesetzt wurde — die Werthe von α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ endlich sind. Wachsen dieselben über alle Grenzen jedoch so, dass ihre Differenzen endlich bleiben, so erhalten die Brüche $\alpha_1 : \alpha_n \ldots \alpha_{n-1} : \alpha_n$, $\alpha_1 : \alpha_2 \ldots \alpha_1 : \alpha_n$ den Grenzwerth 1 und eine bestimmte Häufungsstelle ist nicht mehr angebbar.

Aus den abgeleiteten Beziehungen folgt, dass jeder einzelne der Brüche

$$\ldots \frac{\varepsilon_{-1}}{\varepsilon_{-2}},\ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{-1}},\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},\ \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \ldots$$

größer als 1 ist. Für die Werthe von je zwei aufeinanderfolgenden Brüchen lässt sich aber keine allgemein gültige Ungleichung aufstellen, da z. B. der Werth von

$$\varepsilon_2^6 - \varepsilon_1^3 \cdot \varepsilon_3^3$$

je nach Umständen positiv oder negativ und somit

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \text{ größer oder kleiner als } \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}$$

ist. Es ist hingegen stets

$$\varepsilon_2^4 < \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3^3 \quad \text{oder} \quad \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} < \frac{\varepsilon_3^3}{\varepsilon_2^2}\,.$$

Um diese Gesetzmäßigkeit in ihrer Allgemeinheit zu erkennen, subtrahire man von dem Producte

$$\begin{aligned}\varepsilon_\lambda^\lambda \cdot \varepsilon_{\lambda+\mu+\nu}^{\lambda+\mu+\nu} &= p_1^2 \alpha_1^{2\lambda+\mu+\nu} + p_2^2 \alpha_2^{2\lambda+\mu+\nu} + \cdots \\ &+ p_1 p_2 \left(\alpha_1^\lambda \cdot \alpha_2^{\lambda+\mu+\nu} + \alpha_2^\lambda \cdot \alpha_1^{\lambda+\mu+\nu}\right) + \cdots\end{aligned}$$

das Product

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\lambda+\mu}^{\lambda+\mu} \cdot \varepsilon_{\lambda+\nu}^{\lambda+\nu} &= p_1^2 \alpha_1^{2\lambda+\mu+\nu} + p_2^2 \alpha_2^{2\lambda+\mu+\nu} + \cdots \\ &+ p_1 p_2 \left(\alpha_1^{\lambda+\mu} \cdot \alpha_1^{\lambda+\nu} + \alpha_2^{\lambda+\mu} \cdot \alpha_1^{\lambda+\nu}\right) + \cdots\end{aligned}$$

Alsdann ist die Differenz

$$\varepsilon_\lambda^\lambda \cdot \varepsilon_{\lambda+\mu+\nu}^{\lambda+\mu+\nu} - \varepsilon_{\lambda+\mu}^{\lambda+\mu} \cdot \varepsilon_{\lambda+\nu}^{\lambda+\nu} = p_1 p_2 \cdot \alpha_1^\lambda \alpha_2^\lambda \left(\alpha_1^\mu - \alpha_2^\mu\right)\left(\alpha_1^\nu - \alpha_2^\nu\right) + \cdots \tag{21}$$

positiv oder negativ, je nachdem die ganzen Zahlen μ und ν gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Es ist daher für jeden positiven oder negativen ganzzahligen Werth λ

$$\varepsilon_\lambda^\lambda \cdot \varepsilon_{\lambda+\mu+\nu}^{\lambda+\mu+\nu} > \varepsilon_{\lambda+\mu}^{\lambda+\mu} \cdot \varepsilon_{\lambda+\nu}^{\lambda+\nu} \quad \text{oder} \quad \frac{\varepsilon_{\lambda+\mu}^{\lambda+\mu}}{\varepsilon_\lambda^\lambda} < \frac{\varepsilon_{\lambda+\mu+\nu}^{\lambda+\mu+\nu}}{\varepsilon_{\gamma+\nu}^{\lambda+\nu}}, \tag{21a}$$

wenn von den ganzzahligen Werthen μ und ν jeder positiv oder jeder negativ ist; es ist hingegen

$$\varepsilon_\lambda^\lambda \cdot \varepsilon_{\lambda+\mu+\nu}^{\lambda+\mu+\nu} < \varepsilon_{\lambda+\mu}^{\lambda+\mu} \cdot \varepsilon_{\lambda+\nu}^{\lambda+\nu} \quad \text{oder} \quad \frac{\varepsilon_{\lambda+\mu}^{\lambda+\mu}}{\varepsilon_\lambda^\lambda} > \frac{\varepsilon_{\lambda+\mu+\nu}^{\lambda+\mu+\nu}}{\varepsilon_{\lambda+\nu}^{\lambda+\nu}}, \tag{21b}$$

wenn von den ganzen Zahlen μ und ν die eine positiv und die andere negativ ist.

Aus diesen, sich gegenseitig bedingenden Ungleichungen (21a) und (21b) resultirt unter Berücksichtigung von (13) die Erkenntniss:

Berechnet man aus den Potenzsummen reeller absoluter Größen, deren kleinste α_1 und deren größte α_n ist, die

Mittelwerthpotenzen ε_1, ε_2^2, $\varepsilon_3^3 \ldots$; ε_{-1}^{-1}, ε_{-2}^{-2}, $\varepsilon_{-3}^{-3} \ldots$, so ist stets[1])

$$\alpha_1 < \cdots < \frac{\varepsilon_{-1}^{-1}}{\varepsilon_{-2}^{-2}} < \frac{1}{\varepsilon_{-1}^{-1}} < \frac{\varepsilon_1}{1} < \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} < \frac{\varepsilon_3^3}{\varepsilon_2^2} < \cdots < \alpha_n . \tag{22}$$

Aus (21) ergibt sich insbesondere

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mu+\nu}^{\mu+\nu} - \varepsilon_\mu^\mu \cdot \varepsilon_\nu^\nu &= p_1 p_2 (\alpha_1^\mu - \alpha_2^\mu)(\alpha_1^\nu - \alpha_2^\nu) + p_1 p_3 (\alpha_1^\mu - \alpha_3^\mu)(\alpha_1^\nu - \alpha_3^\nu) + \ldots \\
\varepsilon_{2\mu}^{2\mu} - \varepsilon_\mu^{2\mu} &= p_1 p_2 (\alpha_1^\mu - \alpha_2^\mu)^2 + p_1 p_3 (\alpha_1^\mu - \alpha_3^\mu)^2 + \cdots \\
\varepsilon_{2\nu}^{2\nu} - \varepsilon_\nu^{2\nu} &= p_1 p_2 (\alpha_1^\nu - \alpha_2^\nu)^2 + p_1 p_3 (\alpha_1^\nu - \alpha_3^\nu)^2 + \cdots ,
\end{aligned}$$

sodass die Differenz

$$\left.\begin{aligned}
&(\varepsilon_{2\mu}^{2\mu} - \varepsilon_\mu^{2\mu}) \cdot (\varepsilon_{2\nu}^{2\nu} - \varepsilon_\nu^{2\nu}) - (\varepsilon_{\mu+\nu}^{\mu+\nu} - \varepsilon_\mu^\mu \cdot \varepsilon_\nu^\nu)^2 \\
&= p_1 p_2 \cdot p_1 p_3 \{(\alpha_1^\mu - \alpha_2^\mu)(\alpha_1^\nu - \alpha_3^\nu) - (\alpha_1^\nu - \alpha_2^\nu)(\alpha_1^\mu - \alpha_3^\mu)\}^2 + \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

aus einer Summe wesentlich positiver Glieder besteht. Mithin gilt für beliebige positive und negative Werthe μ und ν die Ungleichung

$$(\varepsilon_{2\mu}^{2\mu} - \varepsilon_\mu^{2\mu}) \cdot (\varepsilon_{2\nu}^{2\nu} - \varepsilon_\nu^{2\nu}) > (\varepsilon_{\mu+\nu}^{\mu+\nu} - \varepsilon_\mu^\mu \cdot \varepsilon_\nu^\nu)^2 . \tag{23a}$$

Aus den, durch unmittelbares Vergleichen gefundenen Eigenschaften der Mittelwerthe ε_ν und der Mittelwerthpotenzen ε_ν^ν können weitere Ungleichungen in folgender Weise abgeleitet werden.

---

1) Aus dem angegebenen Satze folgt:

$$\frac{\varepsilon_\nu^\nu - \varepsilon_{\nu-1}^{\nu-1}}{\varepsilon_{\nu-1}^{\nu-1}} < \frac{\varepsilon_{\nu+1}^{\nu+1} - \varepsilon_\nu^\nu}{\varepsilon_\nu^\nu}, \text{ wenn } \varepsilon_\nu^\nu > \varepsilon_{\nu-1}^{\nu-1},$$

$$\frac{\varepsilon_{\nu-1}^{\nu-1} - \varepsilon_\nu^\nu}{\varepsilon_{\nu-1}^{\nu-1}} > \frac{\varepsilon_\nu^\nu - \varepsilon_{\nu+1}^{\nu+1}}{\varepsilon_\nu^\nu}, \text{ wenn } \varepsilon_\nu^\nu < \varepsilon_{\nu-1}^{\nu-1},$$

so dass im ersteren Falle

$$\varepsilon_\nu^\nu - \varepsilon_{\nu-1}^{\nu-1} < \frac{\varepsilon_{\nu-1}^{\nu-1}}{\varepsilon_\nu^\nu}(\varepsilon_{\nu+1}^{\nu+1} - \varepsilon_\nu^\nu) < \varepsilon_{\nu+1}^{\nu+1} - \varepsilon_\nu^\nu ,$$

und im letzteren Falle

$$\varepsilon_\nu^\nu - \varepsilon_{\nu+1}^{\nu+1} < \frac{\varepsilon_\nu^\nu}{\varepsilon_{\nu-1}^{\nu-1}}(\varepsilon_{\nu-1}^{\nu-1} - \varepsilon_\nu^\nu) < \varepsilon_{\nu-1}^{\nu-1} - \varepsilon_\nu^\nu ,$$

und somit in beiden Fällen

$$\varepsilon_{\nu+1}^{\nu+1} + \varepsilon_{\nu-1}^{\nu-1} > 2 \cdot \varepsilon_\nu^\nu$$

was übrigens ohne weiteres aus $\alpha_\varkappa^{\nu+1} + \alpha_\varkappa^{\nu-1} > 2\alpha_\varkappa^\nu$ durch Multiplication mit $p_\varkappa$ und Summation von $\varkappa = 1$ bis $\varkappa = n$ sich ergibt.

Man bezeichne die z_1 Größen α_1, z_2 Größen $\alpha_2 \ldots z_n$ Größen α_n, deren Gesammtzahl gleich m ist, vorübergebend durch $\alpha', \alpha'', \alpha''' \ldots \alpha^{(m)}$ und erzeuge aus denselben die Reihe der Größen $A_1, A_2 \ldots A_r$, so dass erstens jedes A reell und positiv wird, wenn die α in beliebiger Weise dem reellen, positiven Zahlengebiete entnommen werden, und zweitens die symmetrischen Functionen von $A_1, A_2 \ldots A_r$ zugleich symmetrisch bezüglich $\alpha', \alpha'', \alpha''' \ldots \alpha^{(m)}$ sind. Alsdann gelten für die aus den Potenzsummen der A gebildeten und durch

$$r \cdot E_\nu^\nu = A_1^\nu + A_2^\nu + \cdots A_r^\nu$$

definirten Mittelwerthe E_ν die bereits gefundenen Ungleichungen. Da aber die Potenzsummen der A symmetrisch bezüglich $\alpha', \alpha'', \alpha''' \ldots \alpha^{(m)}$ sind, so sind sie durch die Potenzsummen der α und somit durch die Werte ε_ν^ν ausdrückbar. Man erhält daher neue Ungleichungen für die Mittelwerte ε_ν.

Setzt man z. B.

$$A_1 = \alpha' \cdot \alpha''; \quad A_2 = \alpha' \cdot \alpha'''; \quad A_3 = \alpha'' \cdot \alpha''' \cdots,$$

so dass

$$r = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}; \quad r \cdot E_\nu^\nu = (\alpha' \cdot \alpha'')^\nu + (\alpha' \cdot \alpha''')^\nu + \cdots,$$

so wird

$$E_\nu^\nu = \frac{m}{m-1} \varepsilon_\nu^{2\nu} - \frac{1}{m-1} \varepsilon_{2\nu}^{2\nu},$$

und man erhält auf Grund von

$$\cdots < E_{-2} < E_{-1} < E_1 < E_2 < \cdots$$

$$\frac{E_\nu^\nu}{E_{\nu-1}^{\nu-1}} < \frac{E_{\nu+1}^{\nu+1}}{E_\nu^\nu}$$

die Ungleichungen

$$\cdots < \sqrt{\frac{m-1}{m\varepsilon_{-2}^{-4} - \varepsilon_{-4}^{-4}}} < \frac{m-1}{m\varepsilon_{-1}^{-2} - \varepsilon_{-2}^{-2}} < \frac{m\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{m-1} < \sqrt{\frac{m\varepsilon_2^4 - \varepsilon_4^4}{m-1}} < \cdots \tag{24}$$

und für jedes positive oder negative ganzzahlige ν:

$$\frac{m\varepsilon_\nu^{2\nu} - \varepsilon_{2\nu}^{2\nu}}{m\varepsilon_{\nu-1}^{2\nu-2} - \varepsilon_{2\nu-2}^{2\nu-2}} < \frac{m\varepsilon_{\nu+1}^{2\nu+2} - \varepsilon_{2\nu+2}^{2\nu+2}}{m\varepsilon_\nu^{2\nu} - \varepsilon_{2\nu}^{2\nu}} \tag{25}$$

womit sich, da E_ν^ν wesentlich positiv ist, die Bedingung

$$\varepsilon_{2\nu} < \varepsilon_\nu \cdot \sqrt[2\nu]{m}; \quad \varepsilon_{-\nu} < \varepsilon_{-2\nu} \cdot \sqrt[2\nu]{m} \tag{26}$$

für jedes positive ganzzahlige ν verbindet.

Wählt man ferner die Producte von je drei Gliedern aus der Reihe α', α'', $\alpha''' \cdots \alpha^{(m)}$ als Werthe A, so dass

$$r = \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \quad r \cdot E_\nu^\nu = (\alpha' \cdot \alpha'' \cdot \alpha''')^\nu + \cdots,$$

so sind in die Ungleichungen

$$\left.\begin{array}{c} \cdots < E_{-2} < E_{-1} < E_1 < E_2 < \cdots \\ \dfrac{E_\nu^\nu}{E_{\nu-1}^{\nu-1}} < \dfrac{E_{\nu+1}^{\nu+1}}{E_\nu^\nu} \end{array}\right\} \tag{27}$$

die Werthe

$$E_\nu^\nu = \frac{m^2}{(m-1)(m-2)} \varepsilon_\nu^{3\nu} - \frac{3m}{(m-1)(m-2)} \varepsilon_{2\nu}^{2\nu} \cdot \varepsilon_\nu^\nu + \frac{2}{(m-1)(m-2)} \varepsilon_{3\nu}^{3\nu} \tag{27a}$$

einzusetzen. Sollen hingegen die $m(m-1)$ Quotienten von je zwei Werthen α', α'', $\alpha''' \cdots \alpha^{(m)}$ durch $A_1, A_2 \cdots A_r$ dargestellt werden, so werden die in (27) einzusetzenden Werthe bestimmt durch

$$E_\nu^\nu = \frac{m \cdot \varepsilon_\nu^\nu \cdot \varepsilon_{-\nu}^{-\nu} - 1}{m-1}. \tag{27b}$$

Andererseits resultirt, wenn man die A aus den Quadraten der $\frac{1}{2} m(m-1)$ Differenzen $(\alpha' - \alpha'')$; $(\alpha' - \alpha''')$; $(\alpha'' - \alpha''') \cdots$ bildet, für positive ganzzahlige ν

$$\left.\begin{array}{l} E_\nu^\nu = \dfrac{2m}{m-1} \varepsilon_{2\nu}^{2\nu} - \dfrac{2m}{m-1} \cdot \dbinom{2\nu}{1} \cdot \varepsilon_{2\nu-1}^{2\nu-1} \cdot \varepsilon_1 \\ \quad + \dfrac{2m}{m-1} \cdot \dbinom{2\nu}{2} \cdot \varepsilon_{2\nu-2}^{2\nu-2} \varepsilon_2^2 - \cdots \pm \dfrac{m}{m-1} \dbinom{2\nu}{\nu} \varepsilon_\nu^{2\nu}, \end{array}\right\} \tag{28}$$

so dass

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2m}{m-1}(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2) < \sqrt{\dfrac{2m}{m-1}(\varepsilon_4^4 - 4\varepsilon_3^3 \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2^4)} \\ \quad < \sqrt[3]{\dfrac{2m}{m-1}(\varepsilon_6^6 - 6\varepsilon_5^5 \varepsilon_1 + 15\varepsilon_4^4 \varepsilon_2^2 - 10\varepsilon_3^6)} < \cdots \\ \dfrac{\varepsilon_4^4 - 4\varepsilon_3^3 \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2^4}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2} < \dfrac{\varepsilon_6^6 - 6\varepsilon_5^5 \varepsilon_1 + 15\varepsilon_4^4 \varepsilon_2^2 - 10\varepsilon_3^6}{\varepsilon_4^4 - 4\varepsilon_3^3 \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2^4} < \cdots \end{array}\right\} \tag{29}$$

Der Vollständigkeit wegen sei noch erwähnt, dass aus jeder, auf diese oder ähnliche Weise gefundenen Eigenschaft der Mittelwerthe ε_ν eine entsprechende Eigenschaft der aus den symmetrischen Grundfunctionen von α', α'', $\alpha''' \ldots \alpha^{(m)}$ gebildeten Mittelwerthe $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m$

abgeleitet und zugleich als notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung dafür, dass die m Wurzeln einer Gleichung m-ten Grades alle reell und positiv sind, gedeutet werden kann.

Bringt man nämlich die Gleichung m-ten Grades, deren Wurzeln die m reellen, positiven Werthe α', α'', α''' ... $\alpha^{(m)}$ sind, in die Form

$$x^m - \binom{m}{1}\beta_1 x^{m-1} + \binom{m}{2}\beta_2^2 x^{m-2} - \cdots \pm \beta_m^m = 0, \tag{30}$$

so können die ε durch die β und auch die β durch die ε mittelst der Newton'schen Formeln ausgedrückt werden. Diese, die Potenzsummen der Wurzeln einer Gleichung mit ihren Coefficienten verknüpfenden Formeln lauten, wenn an Stelle der Potenzsummen die ε-Werthe und an Stelle der Coefficienten die β-Werthe gesetzt werden:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 - \beta_1 = 0\\
&\varepsilon_2^2 - m\varepsilon_1\beta_1 + (m-1)\beta_2^2 = 0\\
&\varepsilon_3^3 - m\varepsilon_2^2\beta_1 + \binom{m}{2}\varepsilon_1\beta_2^2 - \binom{m-1}{2}\beta_3^3 = 0\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{aligned}$$

oder allgemein für jedes positive ganzzahlige ν:

$$\varepsilon_\nu^\nu - \binom{m}{1}\varepsilon_{\nu-1}^{\nu-1}\beta_1 + \binom{m}{2}\varepsilon_{\nu-2}^{\nu-2}\beta_2^2 - \cdots \pm \binom{m}{\nu-1}\varepsilon_1\beta_{\nu-1}^{\nu-1} \mp \binom{m-1}{\nu-1}\beta_\nu^\nu = 0, \tag{31}$$

wo für $\nu > m$ die Glieder, in denen β_{m+1}, β_{m+2} ... auftreten würde, von selbst wegfallen. Für negative Indices gilt entsprechend:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{-\nu}^{-\nu} - \binom{m}{1}\varepsilon_{-\nu+1}^{-\nu+1}\beta_{-1}^{-1} + \binom{m}{2}\varepsilon_{-\nu+2}^{-\nu+2}\beta_{-2}^{-2} - \cdots\\
&\qquad \pm \binom{m}{\nu-1}\varepsilon_{-1}^{-1}\beta_{-\nu+1}^{-\nu+1} \mp \binom{m-1}{\nu-1}\beta_{-\nu}^{-\nu} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

wenn

$$\beta_{-1}^{-1} = \frac{\beta_{m-1}^{m-1}}{\beta_m^m}; \quad \beta_{-2}^{-2} = \frac{\beta_{m-2}^{m-2}}{\beta_m^m}; \quad \ldots \quad \beta_{-\nu}^{-\nu} = \frac{\beta_{m-\nu}^{m-\nu}}{\beta_m^m} \tag{32 a}$$

gesetzt wird. — Bleibt die Eigenschaft der ε-Werthe, aus der die Bedingung für die β-Werthe oder für die Coefficienten der Gleichung (30) abgeleitet wird, bestehen, wenn die α positiv oder negativ reell sind, so erhält man auf diese Weise nothwendige Bedingungen für die Realität der m Wurzeln von (30).

§ 3. Abhängigkeit der aus Potenzsummen gebildeten Mittelwerthe absoluter Größen von den Größenstufen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$.

Aus der Ungleichung (13) folgt für jedes positive, ganzzahlige ν

$$\varepsilon_{\nu+1} < \sqrt[\nu+1]{\varepsilon_\nu^\nu \cdot \alpha_n}\,; \quad \varepsilon_{-\nu} > \sqrt[\nu]{\varepsilon_{-\nu+1}^{\nu-1} \cdot \alpha_1}\,. \tag{33}$$

Es liegt somit $\varepsilon_{\nu+1}$, dessen Werth nach (16) größer als derjenige von ε_ν ist, zwischen ε_ν und dem geometrischen Mittel aus α_n und dem ν-fach gezählten ε_ν; entsprechend liegt $\varepsilon_{-\nu}$ zwischen $\varepsilon_{-\nu+1}$ und dem geometrischen Mittel aus α_1 und dem $(\nu-1)$-fach gezählten $\varepsilon_{-\nu+1}$.

Allgemeinere Bedingungen, welche die Ungleichungen (13) und (33) in sich fassen, erhält man in folgender Weise.

In dem Systeme der $i+1$ Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}
p_1\alpha_1^\nu + p_2\alpha_2^\nu + \cdots + p_n\alpha_n^\nu = \varepsilon_\nu^\nu \\
p_1\alpha_1^{\nu+\mu} + p_2\alpha_2^{\nu+\mu} + \cdots + p_n\alpha_n^{\nu+\mu} = \varepsilon_{\nu+\mu}^{\nu+\mu} \\
p_1\alpha_1^{\nu+2\mu} + p_2\alpha_2^{\nu+2\mu} + \cdots + p_n\alpha_n^{\nu+2\mu} = \varepsilon_{\nu+2\mu}^{\nu+2\mu} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p_1\alpha_1^{\nu+i\mu} + p_2\alpha_2^{\nu+i\mu} + \cdots + p_n\alpha_n^{\nu+i\mu} = \varepsilon_{\nu+i\mu}^{\nu+i\mu},
\end{array}\right\} \tag{34}$$

wo ν eine positive oder negative, μ eine positive ganze Zahl bedeutet und i gleich 1, 2, 3 ... n sein kann, multiplicire man die beiderseitigen Glieder der ersten, zweiten ... i-ten Gleichung mit γ_1^μ und subtrahire die entsprechenden Glieder der unmittelbar folgenden Gleichung. Man gelangt so zu dem Systeme der i Gleichungen

$$p_1\alpha_1^\nu(\gamma_1^\mu - \alpha_1^\mu) + p_2\alpha_2^\nu(\gamma_1^\mu - \alpha_2^\mu) + \cdots = \gamma_1^\mu \cdot \varepsilon_\nu^\nu - \varepsilon_{\nu+\mu}^{\nu+\mu}$$
$$p_1\alpha_1^{\nu+\mu}(\gamma_1^\mu - \alpha_1^\mu) + p_2\alpha_2^{\nu+\mu}(\gamma_1^\mu - \alpha_2^\mu) + \cdots = \gamma_1^\mu \cdot \varepsilon_{\nu+\mu}^{\nu+\mu} - \varepsilon_{\nu+2\mu}^{\nu+2\mu}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Mit den Gleichungen dieses Systems verfahre man in ähnlicher Weise, indem man die Glieder der $i-1$ ersten Gleichungen mit γ_2^μ multiplicirt und die Glieder der jeweils folgenden Gleichung subtrahirt. Man erhält alsdann die $i-1$ Gleichungen

$$p_1\alpha_1^\nu(\gamma_1^\mu - \alpha_1^\mu)(\gamma_2^\mu - \alpha_1^\mu) + p_2\alpha_2^\nu(\gamma_1^\mu - \alpha_2^\mu)(\gamma_2^\mu - \alpha_2^\mu) + \cdots$$
$$= \gamma_1^\mu \cdot \gamma_2^\mu \cdot \varepsilon_\nu^\nu - (\gamma_1^\mu + \gamma_2^\mu)\varepsilon_{\nu+\mu}^{\nu+\mu} + \varepsilon_{\nu+2\mu}^{\nu+2\mu}$$
$$p_1\alpha_1^{\nu+\mu}(\gamma_1^\mu - \alpha_1^\mu)(\gamma_2^\mu - \alpha_1^\mu) + p_2\alpha_2^{\nu+\mu}(\gamma_1^\mu - \alpha_2^\mu)(\gamma_2^\mu - \alpha_2^\mu) + \cdots$$
$$= \gamma_1^\mu \cdot \gamma_2^\mu \cdot \varepsilon_{\nu+\mu}^{\nu+\mu} - (\gamma_1^\mu + \gamma_2^\mu)\varepsilon_{\nu+2\mu}^{\nu+2\mu} + \varepsilon_{\nu+3\mu}^{\nu+3\mu}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Durch die Fortsetzung dieses Verfahrens, durch welches der Reihe nach die Hülfsgrößen $\gamma_3^\mu \ldots \gamma_i^\mu$ eingeführt werden, gewinnt man schließlich die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} p_1\alpha_1^\nu(\gamma_1^\mu - \alpha_1^\mu)\ldots(\gamma_i^\mu - \alpha_1^\mu) + p_2\alpha_2^\nu(\gamma_1^\mu - \alpha_2^\mu)\ldots(\gamma_i^\mu - \alpha_2^\mu) + \cdots \\ \quad = C_i \cdot \varepsilon_\nu^\nu - C_{i-1}\cdot\varepsilon_{\nu+\mu}^{\nu+\mu} + C_{i-2}\cdot\varepsilon_{\nu+2\mu}^{\nu+2\mu} - \cdots \pm \varepsilon_{\nu+i\mu}^{\nu+i\mu} \end{array}\right\} \quad (35)$$

wo durch C_i, $C_{i-1} \ldots C_1$ die symmetrischen Grundfunctionen von γ_1^μ, $\gamma_2^\mu \ldots \gamma_i^\mu$ in der Weise bezeichnet werden, dass

$$(\gamma_1^\mu - \alpha)(\gamma_2^\mu - \alpha)\ldots(\gamma_i^\mu - \alpha) = C_i - C_{i-1}\alpha + C_{i-2}\alpha^2 - \cdots \pm \alpha^i.$$

Nun kann man die Hülfsgrößen γ_1^μ, $\gamma_2^\mu \ldots \gamma_i^\mu$ dem Bereiche der reellen, positiven Zahlen so entnehmen, dass von den n Producten

$$p_\varkappa \cdot \alpha_\varkappa^\nu(\gamma_1^\mu - \alpha_\varkappa^\mu)\ldots(\gamma_i^\mu - \alpha_\varkappa^\mu)\,; \quad \varkappa = 1,\ 2 \ldots n$$

entweder keines positiv oder keines negativ wird. Dann wird, wenn nicht alle Producte gleich Null werden,

$$C_i \cdot \varepsilon_\nu^\nu - C_{i-1}\cdot\varepsilon_{\nu+\mu}^{\nu+\mu} + \cdots \pm \varepsilon_{\nu+i\mu}^{\nu+i\mu}$$

entweder kleiner oder größer als Null. Dies lässt sich insbesondere dadurch erreichen, dass man γ_1, $\gamma_2 \ldots \gamma_i$ aus der Reihe der Werthe α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ mit Rücksicht auf die Voraussetzung $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ wählt.

Setzt man zunächst $i = 1$, so findet man

$$p_1\alpha_1^\nu(\gamma_1^\mu - \alpha_1^\mu) + p_2\alpha_2^\nu(\gamma_1^\mu - \alpha_2^\mu) + \cdots + p_n\alpha_n^\nu(\gamma_1^\mu - \alpha_n^\mu)$$

für $\gamma_1 = \alpha_n$ positiv und für $\gamma_1 = \alpha_1$ negativ. Es ist daher

$$\alpha_n^\mu \cdot \varepsilon_\nu^\nu - \varepsilon_{\nu+\mu}^{\nu+\mu} > 0\,; \qquad \alpha_1^\mu \cdot \varepsilon_\nu^\nu - \varepsilon_{\nu+\mu}^{\nu+\mu} < 0\,, \qquad (36)$$

woraus für $\mu = 1$ die Ungleichungen (13) und (33) sich wiederum ergeben.

Für $i = 2$ ferner wird

$$p_1\alpha_1^\nu(\gamma_1^\mu - \alpha_1^\mu)(\gamma_2^\mu - \alpha_1^\mu) + \cdots + p_n\alpha_n^\nu(\gamma_1^\mu - \alpha_n^\mu)(\gamma_2^\mu - \alpha_n^\mu)$$

positiv, wenn $\gamma_1 = \alpha_n$, $\gamma_2 = \alpha_{n-1}$ oder wenn $\gamma_1 = \alpha_1$, $\gamma_2 = \alpha_2$, hingegen negativ, wenn $\gamma_1 = \alpha_n$, $\gamma_2 = \alpha_1$. Es ist folglich

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_n^\mu \cdot \alpha_{n-1}^\mu \cdot \varepsilon_\nu^\nu - (\alpha_n^\mu + \alpha_{n-1}^\mu)\cdot\varepsilon_{\nu+\mu}^{\nu+\mu} + \varepsilon_{\nu+2\mu}^{\nu+2\mu} > 0\,, \\ \alpha_1^\mu \cdot \alpha_2^\mu \quad\ \cdot \varepsilon_\nu^\nu - (\alpha_1^\mu + \alpha_2^\mu) \quad\ \cdot\varepsilon_{\nu+\mu}^{\nu+\mu} + \varepsilon_{\nu+2\mu}^{\nu+2\mu} > 0\,, \\ \alpha_1^\mu \cdot \alpha_n^\mu \quad\ \cdot \varepsilon_\nu^\nu - (\alpha_1^\mu + \alpha_n^\mu) \quad\ \cdot\varepsilon_{\nu+\mu}^{\nu+\mu} + \varepsilon_{\nu+2\mu}^{\nu+2\mu} < 0\,. \end{array}\right\} \quad (37)$$

Dementsprechend ist auch für $i = 3, 4 \ldots n-1$ einerseits

$$C_i \cdot \varepsilon_\nu^\nu - C_{i-1} \cdot \varepsilon_{\nu+\mu}^{\nu+\mu} + \cdots \pm \varepsilon_{\nu+i\mu}^{\nu+i\mu} > 0, \tag{38a}$$

wenn die Werthe $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_i$ in beliebiger Reihenfolge mit den Werthen $\alpha_n, \alpha_{n-1} \ldots \alpha_{n-i+1}$ oder mit den Werthen $\alpha_n, \alpha_{n-1} \ldots \alpha_{n-i+3}, \alpha_1, \alpha_2$ oder mit $\alpha_n, \alpha_{n-1} \ldots \alpha_{n-i+5}, \alpha_1 \ldots \alpha_4$ oder mit $\alpha_n, \alpha_{n-1} \ldots \alpha_{n-i+7}, \alpha_1 \ldots \alpha_6$ u. s. w. übereinstimmen, und anderseits

$$C_i \cdot \varepsilon_\nu^\nu - C_{i-1} \cdot \varepsilon_{\nu+\mu}^{\nu+\mu} + \cdots \pm \varepsilon_{\nu+i\mu}^{\nu+i\mu} < 0, \tag{38b}$$

wenn die Werthe $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_i$ den Werthen $\alpha_1, \alpha_n, \alpha_{n-1} \ldots \alpha_{n-i+2}$ oder $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_n \ldots \alpha_{n-i+4}$ oder $\alpha_1 \ldots \alpha_5, \alpha_n \ldots \alpha_{n-i+6}$ oder $\alpha_1 \ldots \alpha_7, \alpha_n \ldots \alpha_{n-i+8}$ u. s. w. gleich gesetzt werden. Denn es besteht alsdann die linke Seite der Gleichung (35) im ersteren Falle aus wesentlich positiven Gliedern, da die nicht verschwindenden Producte aus positiven und einer geraden Anzahl negativer Factoren zusammengesetzt sind; im letzteren Falle dagegen aus wesentlich negativen Gliedern, da jedes nicht verschwindende Product aus positiven und einer ungeraden Anzahl negativer Factoren zusammengesetzt ist.

Schließlich ist für $i = n$

$$C_n \varepsilon_\nu^\nu - C_{n-1} \varepsilon_{\nu+\mu}^{\nu+\mu} + C_{n-2} \varepsilon_{\nu+2\mu}^{\nu+2\mu} - \cdots \pm \varepsilon_{\nu+n\mu}^{\nu+n\mu} = 0, \tag{39}$$

wenn die Werthe $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ in beliebiger Folge den Werthen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ gleichgesetzt werden. Denn es werden alsdann sämmtliche Producte auf der linken Seite von (35) gleich Null.

Die durch (34) definirte Reihe von Mittelwerthpotenzen $\varepsilon_\nu^\nu, \varepsilon_{\nu+\mu}^{\nu+\mu} \ldots \varepsilon_{\nu+i\mu}^{\nu+i\mu}$ ist somit für $i = 1, 2, 3 \ldots n-1$ mittelst der Ungleichungen (36), (37), (38) und für $i = n$ mittelst der Gleichung (39) an die Größenstufen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ gebunden.

Für $\nu = 0$, $\mu = 1$ ergibt sich insbesondere, dass in der Reihe der Mittelwerthe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1}$ jeder Werth durch die vorhergehenden und die Größenstufen α auf gewisse Bereiche eingeschränkt wird, während $\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1} \ldots \varepsilon_{-1}, \varepsilon_{-2} \ldots$ vollständig durch $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1}$ und $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ bestimmt ist. Beispielsweise mögen die ganzen Zahlen von 4 bis 15 als Größenstufen α angenommen und ihre Häufigkeiten z durch die Vertheilungstafel[1]):

1) Entnommen aus: »Experimentelle Beiträge zur Untersuchung des Gedächtnisses« von G. E. Müller und F. Schumann; Zeitschrift für Psychologie

α	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
z	1	12	13	16	7	4	4	4	1	0	1	1

bestimmt werden. Die Berechnung des arithmetischen Mittels ergibt $\varepsilon_1 = 7{,}4$. Auf Grund dieses Werthes liefern die Ungleichungen (37) die Bestimmung $47 < \varepsilon_2^2 < 81$. Die Berechnung führt zu $\varepsilon_2^2 = 59{,}2$; $\varepsilon_2 = 7{,}7$. Mit Benutzung dieses Werthes gelangt man vermittelst (38) für $i = 3$ zu $460 < \varepsilon_3^3 < 574$. Die Berechnung lässt $\varepsilon_3^3 = 523{,}9$; $\varepsilon_3 = 8{,}1$ finden. Dieser Werth gestattet aus (38) für $i = 4$ die Ungleichung $4919 < \varepsilon_4^4 < 6061$ abzuleiten, während der berechnete Werth $\varepsilon_4^4 = 5098$; $\varepsilon_4 = 8{,}4$ ist; u. s. w.

§ 4. Die aus Potenzsummen gebildeten Mittelwerthe reeller, algebraischer Größen.

An Stelle der absoluten Größen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ sollen nun algebraische Größen $a_1, a_2 \ldots a_n$, die positiv oder negativ oder theils positiv, theils negativ sein können, vorausgesetzt und auf den beliebigen, positiven oder negativen Ausgangswerth b bezogen werden. Es seien demgemäß z_1 Abweichungen $a_1 - b$, z_2 Abweichungen $a_2 - b, \ldots z_n$ Abweichungen $a_n - b$ gegeben, so dass $m = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$; $p_1 = z_1 : m$, $p_2 = z_2 : m, \ldots p_n = z_n : m$ und mit Rücksicht auf die algebraischen (nicht absoluten) Werthe $a_1 - b < a_2 - b < \ldots < a_n - b$.

Bildet man nun die Summe

$$\varepsilon_\nu^\nu = p_1(a_1 - b)^\nu + p_2(a_2 - b)^\nu + \cdots + p_n(a_n - b)^\nu, \tag{40}$$

so kann ε_ν nur für positive, ganzzahlige ν in jedem Falle als Mittelwerth in Anspruch genommen werden. Denn für negative Werthe $-\nu$ wird $\varepsilon_{-\nu}^{-\nu}$ unendlich groß und mithin $\varepsilon_{-\nu} = 0$, wenn b mit einem der Werthe $a_1, a_2 \ldots a_n$ zusammenfällt, so dass $\varepsilon_{-\nu}$ in diesem Falle von den Werthen $p_1, p_2 \ldots p_n$ unabhängig und zur

---

und Physiologie der Sinnesorgane; VI, 1894; S. 269. — Die Werthe α geben an, wie oft eine gegebene Silbenreihe durchlesen werden musste, um sie auswendig hersagen zu können. Die Anzahlen z bezeichnen die Häufigkeiten der Beobachtungswerthe α.

Bestimmung dieser Werthe nicht verwendbar ist. Es gibt ferner für negative, ungeradzahlige Werthe $-2\nu-1$ stets solche zwischen a_1 und a_n liegende Werthe b, für welche $\varepsilon_{-2\nu-1}^{-2\nu-1}=0$ und mithin $\varepsilon_{-2\nu-1}$ unendlich groß wird. Für positive Werthe 2ν und $2\nu+1$ hingegen liegt $\varepsilon_{2\nu}$ stets zwischen dem kleinsten und dem größten der absoluten Beträge von a_1-b, $a_2-b\ldots a_n-b$ und $\varepsilon_{2\nu+1}$ zwischen a_1-b und a_n-b. Es wird somit durch ε_ν für jedes positive ganzzahlige ν ein auf b als Ausgangswerth bezogener Mittelwerth dargestellt. Derselbe ist für ein ungerades ν positiv oder negativ, je nachdem die Summe (40) positiv oder negativ ist; für ein gerades ν hingegen ergeben sich aus der, nunmehr stets positiven Summe (40) zwei entgegengesetzte Werthe $\pm\,\varepsilon_\nu$, deren absoluter Betrag durch ε_ν mit Beiseitelassen der Vorzeichen bezeichnet werden soll.

a. Die Mittelwerthe als Functionen des variablen Ausgangswerthes.

Setzt man für $\nu=1, 2, 3\ldots$

$$y_\nu^\nu=p_1(a_1-b-x)^\nu+p_2(a_2-b-x)^\nu+\cdots+p_n(a_n-b-x)^\nu, \tag{41}$$

so ist y_ν der auf den Ausgangswerth $b+x$ bezogene Mittelwerth ν-ter Ordnung. Die Entwicklung nach Potenzen von x führt zu

$$y_\nu^\nu=\varepsilon_\nu^\nu-\binom{\nu}{1}\cdot\varepsilon_{\nu-1}^{\nu-1}\cdot x+\binom{\nu}{2}\cdot\varepsilon_{\nu-2}^{\nu-2}\cdot x^2-\cdots\pm x^\nu, \tag{41a}$$

so dass y_ν durch ε_1, $\varepsilon_2\ldots\varepsilon_\nu$ und x völlig bestimmt ist. Der Mittelwerth y_ν soll nun als Function von x betrachtet werden.

Um den Functionsverlauf anschaulich vor Augen zu stellen, mögen die Werthe y_ν als Ordinaten und die Werthe x als Abscissen eines rechtwinkeligen Coordinatensystems gedeutet werden. Dann repräsentirt $y_\nu=\varphi_\nu(x)$ eine algebraische Curve, die für ein ungerades ν aus einem einzigen Zuge, für ein gerades ν aus zwei zur Abscissenaxe symmetrischen Zügen besteht.

Für $\nu=1$ erhält man die Gleichung der Geraden

$$y_1=\varepsilon_1-x, \tag{42}$$

welche die Abscissenaxe im Punkte $x=\varepsilon_1$ schneidet und mit der negativen Richtung der Abscissenaxe einen Winkel von 45° bildet. Die Ordinaten der symmetrisch verlaufenden Geraden, welche mit der positiven Richtung der Abscissenaxe einen Winkel von 45° bildet, mögen durch

$$y' = x - \varepsilon_1 \tag{42a}$$

bezeichnet werden.

Für $\nu = 2$ ergibt sich

$$y_2^2 = \varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_1 x + x^2 = \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2 + (x - \varepsilon_1)^2$$

oder, da $\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2$ (wie die Herleitungsweise der Ungleichung (14) in § 2 zeigt) durch die wesentlich positive Größe

$$c^2 = p_1 p_2 (a_1 - a_2)^2 + p_1 p_3 (a_1 - a_3)^2 + \cdots + p_{n-1} p_n (a_{n-1} - a_n)^2$$

darstellbar ist,

$$y_2^2 = c^2 + (x - \varepsilon_1)^2. \tag{43}$$

Die Curve $y_2 = \varphi_2(x)$ ist somit eine gleichseitige Hyperbel, deren reelle Axe im Punkte $x = \varepsilon_1$ auf der Abscissenaxe senkrecht steht, und deren Asymptoten die beiden Geraden

$$y_1 = \varepsilon_1 - x \quad \text{und} \quad y' = x - \varepsilon_1$$

sind. Für $x = \varepsilon_1$ erreicht der absolute Werth von y_2 mit dem Betrage c sein Minimum.

Ersetzt man in (41) für $i = 1, 2 \ldots n$

$$(a_i - b - x)^\nu \text{ durch } \{(a_i - b - \varepsilon_1) + (\varepsilon_1 - x)\}^\nu$$

und entwickelt man nach Potenzen von $\varepsilon_1 - x$, so gelangt man zu

$$\left.\begin{aligned}
y_\nu^\nu = \varepsilon_\nu^\nu &- \binom{\nu}{1} \varepsilon_{\nu-1}^{\nu-1} \varepsilon_1 + \binom{\nu}{2} \varepsilon_{\nu-2}^{\nu-2} \varepsilon_1^2 - \cdots \\
&+ \binom{\nu}{1} (\varepsilon_1 - x) \left\{ \varepsilon_{\nu-1}^{\nu-1} - \binom{\nu-1}{1} \varepsilon_{\nu-2}^{\nu-2} \varepsilon_1 + \binom{\nu-1}{2} \varepsilon_{\nu-3}^{\nu-3} \varepsilon_1^2 - \cdots \right\} \\
&\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&+ \binom{\nu}{2} (\varepsilon_1 - x)^{\nu-2} \{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2\} \\
&+ (\varepsilon_1 - x)^\nu.
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Für einen hinreichend großen absoluten Betrag von $\varepsilon_1 - x$ darf man demnach

$$y_\nu^\nu = (\varepsilon_1 - x)^\nu \left\{ 1 + \binom{\nu}{2} \frac{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2}{(\varepsilon_1 - x)^2} \right\}$$

setzen. Geht man jetzt zu den Wurzelwerthen über, so ist, wenn die geradzahligen Indices 2ν von den ungeradzahligen $2\nu - 1$ getrennt werden,

$$\left.\begin{aligned} y_{2\nu-1} &= (\varepsilon_1 - x)\left\{1 + \frac{2\nu-2}{2}\cdot\frac{\varepsilon_2^2-\varepsilon_1^2}{(\varepsilon_1-x)^2}\right\} \\ y_{2\nu} &= \pm(\varepsilon_1 - x)\left\{1 + \frac{2\nu-1}{2}\cdot\frac{\varepsilon_2^2-\varepsilon_1^2}{(\varepsilon_1-x)^2}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Demzufolge nähern sich die Werthe von $y_{2\nu-1}$ dem Betrage $\varepsilon_1 - x$ und die Werthe von $y_{2\nu}$ den beiden Beträgen $\pm(\varepsilon_1 - x)$, wenn x dem absoluten Betrage nach in positiver oder negativer Richtung unbegrenzt wächst. Die Curven $y_{2\nu-1} = \varphi_{2\nu-1}(x)$ schmiegen sich daher der Geraden $y_1 = \varepsilon_1 - x$ und die Curven $y_{2\nu} = \varphi_{2\nu}(x)$ den beiden Geraden $y_1 = \varepsilon_1 - x$ und $y' = x - \varepsilon_1$ asymptotisch an.

Differentiirt man (41) nach x, so resultirt

$$\nu \cdot y_\nu^{\nu-1} \cdot \frac{dy_\nu}{dx} = -\nu \cdot y_{\nu-1}^{\nu-1}.$$

Es ist daher

$$\frac{dy_\nu}{dx} = -\left(\frac{y_{\nu-1}}{y_\nu}\right)^{\nu-1}. \tag{46}$$

Da nun für ungerade Indices $2\nu - 1$ der Differentialquotient

$$\frac{dy_{2\nu-1}}{dx} = -\left(\frac{y_{2\nu-2}}{y_{2\nu-1}}\right)^{2\nu-2}$$

stets negativ ist, weil die $(2\nu-2)$te Potenz einer reellen Größe stets einen positiven Werth hat, so nimmt $y_{2\nu-1}$ ständig ab, wenn x die Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft; $y_{2\nu-1}$ erhält daher jeden reellen Werth, also auch den Werth Null, nur einmal; d. h. die Curve $y_{2\nu-1}$ schneidet die Abscissenaxe und jede zu derselben parallele Gerade nur in einem Punkte. Im Schnittpunkte mit der Abscissenaxe wird der Differentialquotient unendlich groß, so dass die Tangente senkrecht auf der Abscissenaxe steht. Zugleich tritt die Curve von der einen Seite der Tangente auf die andere; der Berührungspunkt ist daher ein Inflexionspunkt. — Da ferner für gerade Indices 2ν

$$\frac{dy_{2\nu}}{dx} = -\left(\frac{y_{2\nu-1}}{y_{2\nu}}\right)^{2\nu-1},$$

so bleibt für positive $y_{2\nu}$ der Differentialquotient negativ, so lange $y_{2\nu-1}$ positiv ist, und er wird positiv für negative Werthe von $y_{2\nu-1}$.

Umgekehrt ist es für die negativen $y_{2\nu}$. Die beiden symmetrisch zur Abscissenaxe verlaufenden Zweige der Curve $y_{2\nu} = \varphi_{2\nu}(x)$ nähern sich daher, wenn x von $-\infty$ bis zu $+\infty$ anwächst, zunächst der Abscissenaxe ständig, bis sie für den Nullpunkt der Curve $y_{2\nu-1}$ den kleinsten Abstand mit einem bestimmten endlichen Werthe erreichen, um sodann sich wieder in ähnlicher Weise von der Abscissenaxe zu entfernen. Die Curve $y_{2\nu}$ bleibt daher der Abscissenaxe fern und schneidet nur diejenigen Parallelen zur Abscissenaxe, deren Abstände von der letzteren dem absoluten Werthe nach das Minimum der absoluten Beträge von $y_{2\nu}$ übersteigen, in je zwei Punkten.

Wird wie üblich der absolute Betrag einer algebraischen Größe a durch $|a|$ bezeichnet und

$$z_\nu^\nu = p_1 \cdot |a_1 - b - x|^\nu + p_2 \cdot |a_2 - b - x|^\nu + \cdots + p_n \cdot |a_n - b - x|^\nu \tag{47}$$

gesetzt, so ist für jeden endlichen Werth von x [nach (19), § 2]

$$z_1 < z_2 < z_3 < \cdots.$$

Es ist nun — wie aus der Definitionsgleichung (41) unmittelbar folgt — für jeden Werth von x

$$z_{2\nu} = y_{2\nu}.$$

Es ist ferner mit Rücksicht darauf, dass $a_1 - b - x < a_2 - b - x < \cdots < a_n - b - x$:

$$\begin{aligned} z_{2\nu-1} &= y_{2\nu-1}, && \text{wenn } x < a_1 - b; \\ -z_{2\nu-1} < y_{2\nu-1} &< z_{2\nu-1}, && \text{wenn } a_1 - b < x < a_n - b; \\ -z_{2\nu-1} &= y_{2\nu-1}, && \text{wenn } x > a_n - b. \end{aligned}$$

Demzufolge erfüllen die Werthe von y_ν folgende Bedingungen: erstens, wenn $x < a_1 - b$:

$$\cdots - y_4 < -y_2 < 0 < y_1 < +y_2 < y_3 < +y_4 < \cdots,$$

zweitens, wenn $a_1 - b < x < a_n - b$:

$$\begin{aligned} &\cdots - y_4 < -y_2 < 0 < +y_2 < +y_4 < \cdots \\ &\quad -y_{2\nu} < -z_{2\nu-1} < y_{2\nu-1} < z_{2\nu-1} < +y_{2\nu} \text{ und somit} \\ &\quad -y_{2\nu} < y_{2\nu-1} < +y_{2\nu} \text{ für } \nu = 1, 2, 3 \cdots, \end{aligned}$$

drittens, wenn $x > a_n - b$:

$$-y_4 < y_3 < -y_2 < y_1 < 0 < +y_2 < +y_4 < \cdots$$

Hieraus erhellt, dass einerseits für jeden Werth von x:

$$\left.\begin{array}{l} -y_{2\nu} < -y_{2\nu-2\lambda} < 0 < +y_{2\nu-2\lambda} < +y_{2\nu}\,; \quad \lambda - 1,\ 2 \cdots \nu - 1 \\ -y_{2\nu} < y_{2\nu-2\lambda+1} < +y_{2\nu}\,; \quad \lambda = 1,\ 2 \cdots \nu \end{array}\right\} \quad (48)$$

anderseits, wenn $x < a_1 - b$:

$$\left.\begin{array}{l} y_{2\nu-1} > +y_{2\nu-2\lambda} > 0 > -y_{2\nu-2\lambda}\,; \quad \lambda = 1,\ 2 \cdots \nu - 1 \\ y_{2\nu-1} > y_{2\nu-2\lambda+1}\,; \quad \lambda = 2,\ 3 \cdots \nu \end{array}\right\} \quad (49)$$

und wenn $x > a_n - b$:

$$\left.\begin{array}{l} y_{2\nu-1} < -y_{2\nu-2\lambda} < 0 < +y_{2\nu-2\lambda}\,; \quad \lambda = 1,\ 2 \cdots \nu - 1 \\ y_{2\nu-1} < y_{2\nu-2\lambda+1}\,; \quad \lambda = 2,\ 3 \cdots \nu \end{array}\right\} \quad (50)$$

Demnach wird auf Grund von (48) eine Curve $y_{2\nu} = \varphi_{2\nu}(x)$ mit gerader Ordnungszahl von keiner Curve mit niedrigerer Ordnungszahl geschnitten; während aus (49) und (50) mit Rücksicht auf die Stetigkeit des Curvenverlaufs gefolgert werden muss, dass eine Curve $y_{2\nu-1} = \varphi_{2\nu-1}(x)$ mit ungerader Ordnungszahl von jeder Curve mit niedrigerer und ungerader Ordnungszahl und ebenso von jedem Zweig der Curven mit niedrigerer und gerader Ordnungszahl in mindestens einem Punkte, dessen Abscisse zwischen $a_1 - b$ und $a_n - b$ liegt, geschnitten wird.

Es ist somit jedenfalls je ein Werth x vorhanden, für den

$$y_{2\nu-1} = +y_{2\nu-2\lambda}\,;\ y_{2\nu-1} = -y_{2\nu-2\lambda}, \text{ wo } \lambda = 1,\ 2 \cdots \nu - 1;$$
$$y_{2\nu-1} = y_{2\nu-2\lambda+1}\,; \text{ wo } \lambda = 2,\ 3 \cdots \nu.$$

Und da auch ein Werth x vorhanden ist, für den $y_{2\nu-1} = -y_{2\nu-2\lambda+1}$ (da die Werthe $y_{2\nu-1}$ zuerst positiv und dann negativ und die Werthe $-y_{2\nu-2\lambda+1}$ zuerst negativ und dann positiv sind, wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst), so kann man sagen, dass jedenfalls je ein Werth x existirt, für den

$$y_{2\nu-1} = +y_{2\nu-1-\lambda} \quad \text{und} \quad y_{2\nu-1} = -y_{2\nu-1-\lambda}, \text{ wo } \lambda = 1,\ 2 \cdots 2\nu - 2.$$

Dann ist auch für die nämlichen Werthe von x

$$y_{2\nu-1}^{2\nu-1} = +y_{2\nu-1-\lambda}^{2\nu-1} \quad \text{und} \quad y_{2\nu-1}^{2\nu-1} = -y_{2\nu-1-\lambda}^{2\nu-1} \quad \text{oder}$$
$$y_{2\nu-1}^{2\nu-1} - y_{2\nu-1-\lambda}^{2\nu-1} = 0; \quad y_{2\nu-1}^{2\nu-1} + y_{2\nu-1-\lambda}^{2\nu-1} = 0.$$

Da aber

$$\frac{d y_{2\nu-1}^{2\nu-1}}{dx} = -(2\nu - 1) y_{2\nu-2}^{2\nu-2},$$

$$\frac{d y_{2\nu-1-\lambda}^{2\nu-1}}{dx} = -(2\nu - 1) y_{2\lambda-1-\lambda}^{\lambda} \cdot y_{2\nu-2-\lambda}^{2\nu-2-\lambda},$$

so ist

$$\frac{d\left(y_{2\nu-1}^{2\nu-1} \mp y_{2\nu-1-\lambda}^{2\nu-1}\right)}{dx} = -(2\nu-1)\left(y_{2\nu-2}^{2\nu-2} \mp y_{2\nu-1-\lambda}^{\lambda} \cdot y_{2\nu-2-\lambda}^{2\nu-2-\lambda}\right). \tag{51}$$

Und dieser Differentialquotient ist in jedem Falle stets negativ. Denn $y_{2\nu-2}$ ist positiv und nach (48) größer als der absolute Betrag jedes y-Werthes mit niedrigerer Ordnungszahl. Es ist daher auch, je nachdem $\lambda = 1$ oder $\lambda = 2, 3 \cdots 2\nu - 2$

$$y_{2\nu-2}^{\lambda} = y_{2\nu-1-\lambda}^{\lambda} \quad \text{oder} \quad y_{2\nu-2}^{\lambda} > \pm\, y_{2\nu-1-\lambda}$$

und je nachdem $\lambda = 1, 2 \cdots 2\nu - 3$ oder $\lambda = 2\nu - 2$

$$y_{2\nu-2}^{2\nu-2-\lambda} > \pm\, y_{2\nu-2-\lambda}^{2\nu-2-\lambda} \quad \text{oder} \quad y_{2\nu-2}^{2\nu-2-\lambda} = y_{2\nu-2-\lambda}^{2\nu-2-\lambda},$$

so dass durchweg

$$y_{2\nu-2}^{2\nu-2} > \pm\, y_{2\nu-1-\lambda}^{\lambda} \cdot y_{2\nu-2-\lambda}^{2\nu-2-\lambda}. \tag{52}$$

Der Betrag von

$$y_{2\nu-1}^{2\nu-1} \mp y_{2\nu-1-\lambda}^{2\nu-1}$$

nimmt folglich beständig ab und erreicht einen bestimmten Werth, also auch den Werth Null, nur einmal. Es gibt demgemäß nur je einen Werth x, für den einestheils

$$y_{2\nu-1}^{2\nu-1} = +\, y_{2\nu-1-\lambda}^{2\nu-1} \quad \text{und somit} \quad y_{2\nu-1} = +\, y_{2\nu-1-\lambda}$$

und anderntheils

$$y_{2\nu-1}^{2\nu-1} = -\, y_{2\nu-1-\lambda}^{2\nu-1} \quad \text{und somit} \quad y_{2\nu-1} = -\, y_{2\nu-1-\lambda}.$$

Die Curve $y_{2\nu-1} = \varphi_{2\nu-1}(x)$ schneidet daher jede Curve mit niedrigerer und ungerader Ordnungszahl und jeden Zweig der Curven mit niedrigerer und gerader Ordnungszahl in nur einem Punkte.

Die beiden Curven $y_\nu = \varphi_\nu(x)$ und $y_\mu = \varphi_\mu(x)$ haben demgemäß keinen reellen, im Endlichen liegenden Schnittpunkt, wenn die größere der beiden Ordnungszahlen gerade ist; sie haben einen und nur einen derartigen Schnittpunkt, wenn beide Ordnungszahlen ungerade sind; sie haben zwei solche Schnittpunkte, den einen im Gebiete der positiven, den anderen im Gebiete der negativen Ordinaten, wenn die größere der beiden Ordnungszahlen ungerade, die kleinere gerade ist.

In Fig. 1 wird der Verlauf der Curven $y_\nu = \varphi_\nu(x)$ für $\nu = 1$, 2, 3, 4, 5 vor Augen gestellt. Dabei wurde die am Schluss von § 3 mitgetheilte Vertheilungstafel zu Grunde gelegt. Die Curven werden somit, wenn der Coordinatenanfangspunkt in den arithmetischen Mittelwerth 7,36 der Vertheilungstafel verlegt wird, durch die Mittelwerthe[1] $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2^2 = 5{,}04$; $\varepsilon_3^3 = 14{,}0$; $\varepsilon_4^4 = 114$; $\varepsilon_5^5 = 670$ und mithin durch die Gleichungen

$$y_1 = -x;\; y' = x;$$
$$y_2^2 = 5{,}04 - x^2;$$
$$y_3^3 = 14{,}0 - 15{,}1x - x^3;$$
$$y_4^4 = 114 - 56{,}0x + 30{,}2x^2 + x^4;$$
$$y_5^5 = 670 - 570x + 140x^2 - 50{,}4x^3 - x^5$$

bestimmt.

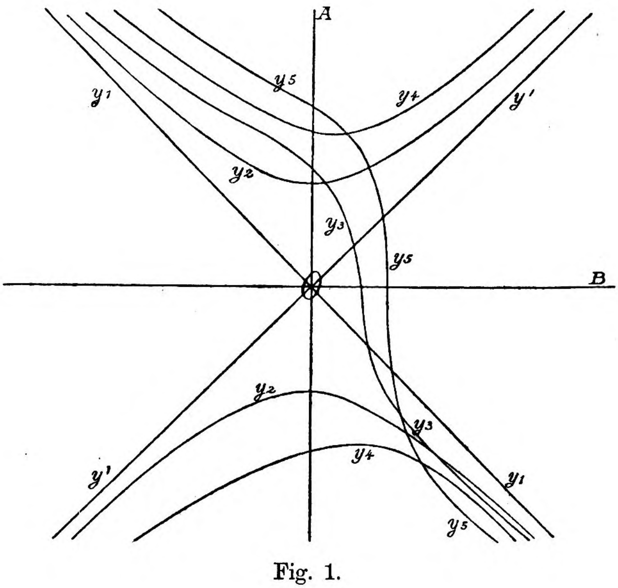


Fig. 1.

b. Das arithmetische Mittel als Ausgangswerth.

Aus diesen Angaben über den Verlauf der Mittelwerthe erhellt, dass als Ausgangswerthe insbesondere solche Werthe in Betracht zu

1) Siehe V; § 1; d; erstes Beispiel.

ziehen sind, für welche der Mittelwerth von der $(2\nu - 1)$-ten Ordnung einem Mittelwerthe niedrigerer Ordnung gleich oder selbst gleich Null wird. Unter denselben ist das arithmetische Mittel der gegebenen Werthe

$$b = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n, \tag{53}$$

für welches $\varepsilon_1 = 0$ wird, durch die Einfachheit seiner Bestimmungsweise ausgezeichnet, so dass es schon aus diesem Grunde als bevorzugter Ausgangswerth zu gelten hat. Es besitzt aber überdies eine bemerkenswerthe Eigenschaft, zu deren Erkenntniss ich in folgender Weise gelange.

Auf Grund von (41a) ist

$$\begin{aligned} y_1 &= \varepsilon_1 - x \\ y_2^2 &= \varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_1 x + x^2 \\ y_3^3 &= \varepsilon_3^3 - 3\varepsilon_2^2 x + 3\varepsilon_1 x^2 - x^3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass

$$\begin{aligned} y_2^2 - y_1^2 &= \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2 \\ y_3^3 - 3y_2^2 \cdot y_1 + 2y_1^3 &= \varepsilon_3^3 - 3\varepsilon_2^2 \cdot \varepsilon_1 + 2\varepsilon_1^3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und allgemein für $\nu = 2, 3, 4 \cdots$

$$\left.\begin{aligned} & y_\nu^\nu - \binom{\nu}{1} \cdot y_{\nu-1}^{\nu-1} \cdot y_1 + \binom{\nu}{2} \cdot y_{\nu-2}^{\nu-2} \cdot y_1^2 - \cdots \pm \binom{\nu}{2} \cdot y_2^2 y_1^{\nu-2} \mp (\nu-1) \cdot y_1^\nu \\ = {} & \varepsilon_\nu^\nu - \binom{\nu}{1} \cdot \varepsilon_{\nu-1}^{\nu-1} \cdot \varepsilon_1 + \binom{\nu}{2} \cdot \varepsilon_{\nu-2}^{\nu-2} \cdot \varepsilon_1^2 - \cdots \pm \binom{\nu}{2} \cdot \varepsilon_2^2 \varepsilon_1^{\nu-2} \mp (\nu-1) \cdot \varepsilon_1^\nu \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Es ist somit die auf der linken Seite von (54) stehende, aus $y_1, y_2 \ldots y_\nu$ gebildete Function vom Ausgangswerthe unabhängig. Dies findet man durch Differentiation nach der Variabeln x bestätigt, indem sich so die Identität $0 = 0$ ergibt.

Wählt man nun das arithmetische Mittel (53) als Ausgangswerth b, so wird ε_1 gleich Null und man erhält

$$\varepsilon_\nu^\nu = y_\nu^\nu - \binom{\nu}{1} \cdot y_{\nu-1}^{\nu-1} \cdot y_1 + \cdots \pm \binom{\nu}{2} \cdot y_2^2 \cdot y_1^{\nu-2} \mp (\nu-1) \cdot y_1^\nu. \tag{55}$$

Demnach stellen die auf das arithmetische Mittel als Ausgangswerth bezogenen Mittelwerthe unmittelbar die in-varianten (vom Ausgangswerthe unabhängigen) Werthe (54) dar.

Diese Eigenschaft sichert dem arithmetischen Mittel, auch wenn man von der Leichtigkeit seiner Bestimmung absieht, aus rein theoretischen Gesichtspunkten den Vorzug vor jedem anderen Ausgangswerthe. Es empfiehlt sich darum, bei Anwendung der im II. Capitel (§ 3) entwickelten Methode zur Bestimmung eines aus z_1 Größen a_1, z_2 Größen $a_2 \ldots$, z_n Größen a_n bestehenden C. G. die auf das arithmetische Mittel dieser Größen bezogenen Mittelwerthe zu benutzen. Die so bedingte Wahl des Ausgangswerthes stimmt mit der in der Fehlertheorie üblichen überein; sie ist aber von dem Vertheilungsgesetze des C. G. und insbesondere von der Hypothese, dass im arithmetischen Mittel der theoretisch wahrscheinlichste Werth sich darbiete (vergl. II; § 4; a), unabhängig.

c. Symmetrie und Asymmetrie in ihrem Zusammenhang mit den Mittelwerthen ungerader Ordnung.

Sind von den n Abweichungswerthen $a_1 - b$, $a_2 - b \ldots a_n - b$ λ hinsichtlich der absoluten Beträge d_1, $d_2 \ldots d_\lambda$ verschieden und benutzt man die letzteren zur Darstellung der Mittelwerthe, so erhält man für $\nu = 1, 2, 3 \ldots$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{2\nu-1}^{2\nu-1} &= x_1 \cdot d_1^{2\nu-1} + x_2 \cdot d_2^{2\nu-1} + \cdots + x_\lambda \cdot d_\lambda^{2\nu-1} \\ \varepsilon_{2\nu}^{2\nu} &= y_1 \cdot d_1^{2\nu} + y_2 \cdot d_2^{2\nu} + \cdots + y_\lambda \cdot d_\lambda^{2\nu}, \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

wo (für $i = 1, 2 \ldots \lambda$) x_i gleich der Differenz und y_i gleich der Summe der beiden, auf Grund von (40) zu $+ d_i$ und $- d_i$ gehörenden p-Werthe ist.

Der Werth x_i kann positiv oder negativ oder gleich Null sein. Er ist gleich Null, wenn die Abweichungen $+ d_i$ und $- d_i$ mit dem nämlichen p-Werthe behaftet sind. Es ist daher, wenn alle Werthe x_1, $x_2 \ldots x_\lambda$ gleich Null sind, das System der gegebenen Größen symmetrisch. Dann ist jeder Mittelwerth ungerader Ordnung gleich Null, und der Ausgangswerth b ist, da insbesondere $\varepsilon_1 = 0$, zugleich das arithmetische Mittel. Sind anderseits die λ Mittelwerthe ungerader Ordnung ε_1, $\varepsilon_3 \ldots \varepsilon_{2\lambda-1}$ gleich Null, so ist das System der gegebenen Größen symmetrisch. Denn die λ Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_1 = x_1 \cdot d_1 \quad + x_2 \cdot d_2 \quad + \cdots + x_\lambda \cdot d_\lambda \\ \overset{3}{\varepsilon_3} = x_1 \cdot d_1^3 \quad + x_2 \cdot d_2^3 \quad + \cdots + x_\lambda \cdot d_\lambda^3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overset{2\lambda-1}{\varepsilon_{2\lambda-1}} = x_1 \cdot d_1^{2\lambda-1} + x_2 \cdot d_2^{2\lambda-1} + \cdots + x_\lambda \cdot d_\lambda^{2\lambda-1}\end{array}\right\} \quad (57)$$

können für $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon_{2\lambda-1} = 0$ nur dann bestehen, wenn $x_1 = x_2 = \ldots = x_\lambda = 0$.

Ein System von z_1 Größen a_1, z_2 Größen $a_2, \ldots z_n$ Größen a_n ist daher symmetrisch, wenn die λ auf das arithmetische Mittel als Ausgangswerth bezogenen Mittelwerthe ungerader Ordnung $\varepsilon_1, \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_{2\lambda-1}$ gleich Null sind, wo λ die Anzahl der von einander verschiedenen absoluten Beträge der Abweichungswerthe angibt.

Ein durch ν Mittelwerthe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\nu$ charakterisirtes Größensystem ist demzufolge bei verschwindenden Mittelwerthen ungerader Ordnung nur dann nothwendig symmetrisch, wenn die Anzahl der Mittelwerthe ungerader Ordnung nicht kleiner als die Anzahl der verschiedenen absoluten Beträge der Abweichungswerthe ist.

Sind nicht alle Werthe $x_1, x_2 \ldots x_\lambda$ gleich Null, so ist das gegebene Größensystem asymmetrisch. Es ist dann zwar stets $\varepsilon_1 = 0$, da das arithmetische Mittel als Ausgangswerth dienen soll; es sind aber jedenfalls nicht alle Mittelwerthe $\varepsilon_3 \ldots \varepsilon_{2\lambda-1}$ gleich Null. Dieselben können übrigens positive und negative Werthe in beliebiger Folge aufweisen. Ersetzt man nämlich in (57) $\varepsilon_1, \overset{3}{\varepsilon_3}, \ldots \overset{2\lambda-1}{\varepsilon_{2\lambda-1}}$ durch die willkürlich gewählten, reellen Werthe $e_1, e_3, \ldots e_{2\lambda-1}$, so kann stets ein System reeller Werthe $x_1, x_2 \ldots x_\lambda$ aus den Gleichungen berechnet werden. Weist man nun auf Grund derselben den Abweichungen $+d_1, -d_1; +d_2, -d_2; \ldots +d_\lambda, -d_\lambda$ bestimmte p-Werthe zu, so wird allerdings die Summe der letzteren im allgemeinen nicht gleich 1 sein. Es lässt sich aber stets ein Factor σ angeben, so dass die aus $\sigma x_1, \sigma x_2 \ldots \sigma x_\lambda$ abgeleiteten p-Werthe die Summe 1 haben. Folglich gibt es stets ein System von Abweichungswerthen mit den absoluten Beträgen $d_1, d_2 \ldots d_\lambda$, deren Mittelwerthe durch

$$\varepsilon_1 = \sigma \cdot e_1; \; \overset{3}{\varepsilon_3} = \sigma \cdot e_3; \; \ldots \; \overset{2\lambda-1}{\varepsilon_{2\lambda-1}} = \sigma \cdot e_{2\lambda-1}$$

bestimmt werden. Es können daher auch die auf das arithmetische Mittel als Ausgangswerth bezogenen Mittelwerthe $\varepsilon_3, \varepsilon_5, \ldots \varepsilon_{2\lambda-1}$

unabhängig von einander positiv oder negativ oder auch gleich Null sein.

Die Asymmetrie eines auf das arithmetische Mittel als Ausgangswerth bezogenen Größensystems, das λ dem absoluten Werthe nach verschiedene Abweichungswerthe aufweist, wird somit vollständig durch die Mittelwerthe ε_3, $\varepsilon_5 \ldots \varepsilon_{2\lambda-1}$ bestimmt und kann so vielgestaltig sein, wie die Reihe dieser Werthe.

Neben den Mittelwerthen ungerader Ordnung können auch die Werthe

$$e_{2\nu} = x_1 \cdot d_1^{2\nu} + x_2 \cdot d_2^{2\nu} + \cdots + x_\lambda \cdot d_\lambda^{2\nu}; \quad \nu = 0, 1, 2 \ldots$$

als Kennzeichen für Symmetrie und Asymmetrie verwendet werden. Sie sind der Differenz aus den beiden Summen der 2ν-ten Potenzen der positiven und der negativen Abweichungen vom arithmetischen Mittel proportional. Insbesondere ist

$$e_0 = x_1 + x_2 + \cdots + x_\lambda$$

gleich dem Unterschied zwischen den Anzahlen der positiven und der negativen Abweichungen, dividirt durch ihre Gesammtzahl.

Den Werth e_0 legt Fechner der Beurtheilung der Asymmetrie zu Grunde. Pearson hingegen benutzt einen von den Momenten μ_2, μ_3, μ_4 oder den Mittelwerthen zweiter, dritter und vierter Ordnung abhängigen und hinsichtlich des Vorzeichens mit dem Mittelwerthe dritter Ordnung übereinstimmenden Factor als Maßstab der Asymmetrie. Eine solche auf nur einen, positiver und negativer Schwankungen fähigen Zahlenwerth gestützte Auffassung der Asymmetrie ist aber offenbar zu eng; und wenn man auch nicht die zur vollständigen Bestimmung der Asymmetrie und zweifelsfreien Sicherstellung der Symmetrie nothwendige Reihe von Mittelwerthen ungerader Ordnung oder von Werthen e_0, e_2, $e_4 \ldots$ bis zum letzten Gliede berechnen wird, so wird man doch neben dem Mittelwerthe dritter Ordnung auch diejenigen von höherer ungerader Ordnung, soweit man sie kennen lernt, und, falls man überhaupt die Werthe $e_{2\nu}$ in Rechnung zieht, neben dem Werthe e_0 auch e_2, $e_4 \ldots$ zur Charakterisirung der Asymmetrie benutzen. Es wird so zugleich der Irrthum vermieden, als müsste die Asymmetrie ihrem Wesen nach eine ausgesprochen positive oder negative Richtung besitzen.

d. Allgemein gültige Beziehungen zwischen den Mittelwerthen.

Jede Beziehung zwischen Mittelwerthen besteht entweder zwischen Mittelwerthen ungerader Ordnung oder zwischen Mittelwerthen gerader Ordnung oder zwischen Mittelwerthen gerader und ungerader Ordnung.

Für die Mittelwerthe ungerader Ordnung $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5 \ldots$ gibt es keine von den Größenstufen unabhängige, allgemein gültige Beziehungen. Denn es lassen sich, wie soeben bemerkt wurde, stets Größensysteme mit dem absoluten Werthe nach bestimmten Abweichungswerthen aufstellen, für welche die Mittelwerthpotenzen ε_1, ε_3^3, $\varepsilon_5^5 \ldots$ den beliebig gewählten reellen Zahlen $e_1, e_3, e_5 \ldots$ proportional sind.

Auf die Mittelwerthe gerader Ordnung $\varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_6 \ldots$ hingegen sind alle Beziehungen übertragbar, die für die Mittelwerthe reeller absoluter Größen abgeleitet werden können. Setzt man nämlich

$$(a_1 - b)^2 = \alpha_1; \quad (a_2 - b)^2 = \alpha_2; \quad \ldots \quad (a_n - b)^2 = \alpha_n,$$

so sind $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ reell und positiv und es ist

$$p_1(a_1 - b)^{2\nu} + \cdots + p_n(a_n - b)^{2\nu} = p_1\alpha_1^\nu + \cdots + p_n\alpha_n^\nu.$$

Man erhält daher aus jeder Relation zwischen den Mittelwerthen absoluter Größen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ eine solche für die auf den Ausgangswerth b bezogenen Mittelwerthe der algebraischen Größen $a_1, a_2 \ldots a_n$ von gerader Ordnungszahl, wenn $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ durch $(a_1 - b)^2$, $(a_2 - b)^2, \ldots (a_n - b)^2$ ersetzt und die Mittelwerthe ν-ter Ordnung als Mittelwerthe 2ν-ter Ordnung aufgefasst werden.

Für die Mittelwerthe gerader und ungerader Ordnung $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$ gelten ferner in gleicher Weise wie für die Mittelwerthe der absoluten Größen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ diejenigen Ungleichungen, bei deren Begründung nur gerade Potenzen der α oder von Functionen der α in Betracht kommen, so dass die Beziehungen erhalten bleiben, wenn die absoluten Größen durch algebraische ersetzt werden.

Ein anderer Weg zur Ableitung solcher Beziehungen eröffnet sich in der Aufstellung von Gleichungen, deren Coefficienten Functionen der Mittelwerthe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$ sind, wenn man die Anzahlen der reellen Wurzeln kennt. Wird nämlich y_ν^ν in der Form (41a) oder (44) vorausgesetzt, so lehrt die Untersuchung der Mittelwerthe als Functionen des variablen Ausgangswerthes (§ 4, a), dass

$$y_\nu^\nu = 0,$$

als Gleichung für x betrachtet, keine oder nur eine reelle Wurzel hat, je nachdem ν gerade oder ungerade ist; dass ferner die Gleichung

$$y_\nu^{\nu \cdot \mu} = y_\mu^{\mu \cdot \nu}$$

keine oder nur eine reelle, endliche Wurzel oder deren zwei besitzt, je nachdem die größere der beiden ganzen Zahlen μ und ν gerade oder jede ungerade oder die größere ungerade, die kleinere gerade ist. Ueberdies haben, wie ohne weiteres erhellt, die Gleichungen

$$y_{\nu+\mu}^{\nu+\mu} = \pm\, y_\nu^\nu \cdot y_\mu^\mu\,; \quad y_{\nu+\mu+\lambda}^{\nu+\mu+\lambda} = \pm\, y_\nu^\nu \cdot y_\mu^\mu \cdot y_\lambda^\lambda\,; \ldots$$

keine oder nur eine reelle, endliche Wurzel, je nachdem $\mu + \nu$, $\mu + \nu + \lambda$, ... gerade oder ungerade ist. — Für die Mittelwerthe ε_2 und ε_1 ergibt sich so die Ungleichung $\varepsilon_2^2 > \varepsilon_1^2$; denn auf Grund derselben hat weder die Gleichung $y_2^2 = 0$, noch die Gleichung $y_2^2 = \pm\, y_1^2$ eine reelle Lösung. Die Mittelwerthe ε_3, ε_2, ε_1 hingegen zeigen sich an keine besondere Bedingung gebunden, da die Gleichungen $y_3^3 = 0$; $y_3^3 = \pm\, y_1^3$; $y_3^3 = \pm\, y_1 \cdot y_2^2$ bloß eine reelle Wurzel haben, wenn $\varepsilon_2^2 > \varepsilon_1^2$, und da die Gleichung $y_3^6 = y_2^6$ wegen der Beschaffenheit der Coefficienten von vorn herein zwei reelle und zwei complexe Wurzeln hat. Für die Mittelwerthe ε_4, ε_3, ε_2, ε_1 findet sich ferner die Bedingung

$$(\varepsilon_3^3 - 3\varepsilon_2^2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1^3)^2 < (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)(\varepsilon_4^4 - 4\varepsilon_3^3\varepsilon_1 + 6\varepsilon_2^2\varepsilon_1^2 - 3\varepsilon_1^4) - (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)^3,$$

oder

$$(\varepsilon_3^3 - \varepsilon_2^2\varepsilon_1)^2 < (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)(\varepsilon_4^4 - \varepsilon_2^4)\,.$$

Sie ist nothwendig, damit von den beiden Wurzeln der Gleichung $y_4^4 = y_2^4$, und hinreichend, damit von den Wurzeln der Gleichungen $y_4^4 = 0$; $y_4^4 = \pm\, y_1^4$; $y_4^4 = \pm\, y_1 \cdot y_3^3$; $y_4^4 = \pm\, y_1^2 \cdot y_2^2$; $y_4^4 = -\, y_2^4$ keine reell sei. Sie genügt zugleich, um den Gleichungen $y_5^5 = y_1^5$; $y_5^5 = y_1^3 \cdot y_2^2$; $y_5^5 = y_1^2 \cdot y_3^3$; $y_5^5 = y_1 \cdot y_2^4$; $y_5^5 = y_2^2 \cdot y_3^3$ eine und nur eine reelle Wurzel zu sichern, so dass aus diesen Gleichungen keine besondere Bedingung für die Mittelwerthe ersten bis fünften Grades resultirt.

Zu allgemeineren Bedingungen führen jedoch die, in § 2 und § 3 für die Mittelwerthe absoluter Größen angegebenen Beziehungen. Werden dieselben in der soeben angegebenen Weise auf die Mittelwerthe algebraischer Größen übertragen, so erhält man zunächst auf Grund der Ableitung der Formeln (16), (19), (21), (22), (23) den Satz:

Sind ε_1, ε_2, ε_3 ... die auf den Ausgangswerth b bezogenen Mittelwerthe der z_1 Größen a_1, z_2 Größen a_2, ... z_n Größen a_n, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_4 < \varepsilon_6 < \cdots \\ \overset{2}{\varepsilon_1} < \overset{2}{\varepsilon_2};\quad \overset{2}{\varepsilon_3} < \overset{2}{\varepsilon_4};\quad \overset{2}{\varepsilon_5} < \overset{2}{\varepsilon_6};\quad \ldots \end{array}\right\} \tag{58a}$$

oder für $\nu = 1, 2, 3 \ldots$

$$\varepsilon_{2\nu} < \varepsilon_{2\nu+2};\quad \overset{2}{\varepsilon}_{2\nu-1} < \overset{2}{\varepsilon}_{2\nu}. \tag{58}$$

Es ist ferner:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{2}{\varepsilon_2} \cdot \overset{4}{\varepsilon_4} > \overset{6}{\varepsilon_3};\quad \overset{4}{\varepsilon_4} \cdot \overset{6}{\varepsilon_6} > \overset{10}{\varepsilon_5};\quad \ldots \\ \dfrac{\overset{2}{\varepsilon_2}}{1} < \dfrac{\overset{4}{\varepsilon_4}}{\overset{2}{\varepsilon_2}} < \dfrac{\overset{6}{\varepsilon_6}}{\overset{4}{\varepsilon_4}} < \cdots \end{array}\right\} \tag{59a}$$

und allgemein für $\lambda = 1, 2, 3 \ldots$; $\mu = 1, 2, 3 \ldots$; $\nu = 0, 1, 2 \ldots$ $\mu - 1$:

$$\overset{2\lambda}{\varepsilon}_{2\lambda} \cdot \overset{2\lambda+2\mu}{\varepsilon}_{2\lambda+2\mu} > \overset{2\lambda+\mu-\nu}{\varepsilon}_{2\lambda+\mu-\nu} \cdot \overset{2\lambda+\mu+\nu}{\varepsilon}_{2\lambda+\mu+\nu}. \tag{59}$$

Weiterhin besteht für $\mu = 1, 2, 3 \ldots$; $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ die Ungleichung

$$\left(\overset{2\mu}{\varepsilon}_{2\mu} - \overset{2\mu}{\varepsilon}_{\mu}\right) \cdot \left(\overset{2\nu}{\varepsilon}_{2\nu} - \overset{2\nu}{\varepsilon}_{\nu}\right) > \left(\overset{\mu+\nu}{\varepsilon}_{\mu+\nu} - \overset{\mu}{\varepsilon}_{\mu} \cdot \overset{\nu}{\varepsilon}_{\nu}\right)^2, \tag{60}$$

so dass für die nach II, § 3 berechneten mittleren Fehler M_μ und M_ν, die bei der Bestimmung von $\overset{\mu}{\varepsilon}_{\mu}$ und $\overset{\nu}{\varepsilon}_{\nu}$ zu befürchten sind, die Bedingung

$$M_\mu \cdot M_\nu > \left|\frac{\overset{\mu+\nu}{\varepsilon}_{\mu+\nu} - \overset{\mu}{\varepsilon}_{\mu} \cdot \overset{\nu}{\varepsilon}_{\nu}}{m}\right| \tag{60a}$$

resultirt.

Außerdem gelten als Folge von (24), (25), (26) die Ungleichungen:

$$\frac{m\,\overset{4}{\varepsilon_2} - \overset{4}{\varepsilon_4}}{m-1} < \sqrt{\frac{m\,\overset{8}{\varepsilon_4} - \overset{8}{\varepsilon_8}}{m-1}} < \sqrt[3]{\frac{m\,\overset{12}{\varepsilon_6} - \overset{12}{\varepsilon_{12}}}{m-1}} < \cdots \tag{61}$$

und für $\nu = 1, 2, 3 \ldots$

$$\frac{m\,\overset{4\nu}{\varepsilon}_{2\nu} - \overset{4\nu}{\varepsilon}_{4\nu}}{m\,\overset{4\nu-4}{\varepsilon}_{2\nu-2} - \overset{4\nu-4}{\varepsilon}_{4\nu-4}} < \frac{m\,\overset{4\nu+4}{\varepsilon}_{2\nu+2} - \overset{4\nu+4}{\varepsilon}_{4\nu+4}}{m\,\overset{4\nu}{\varepsilon}_{2\nu} - \overset{4\nu}{\varepsilon}_{4\nu}}, \tag{62}$$

mit der Bedingung

$$\varepsilon_{4\nu} < \varepsilon_{2\nu}\sqrt[4\nu]{m}\,; \tag{63}$$

und als Uebertragung von (29):

$$\left.\begin{aligned}\frac{2m}{m-1}(\varepsilon_2^2-\varepsilon_1^2) &< \sqrt{\frac{2m}{m-1}(\varepsilon_4^4-4\varepsilon_3^3\varepsilon_1+3\varepsilon_2^4)}\\ &< \sqrt[3]{\frac{2m}{m-1}(\varepsilon_6^6-6\varepsilon_5^5\varepsilon_1+15\varepsilon_4^4\varepsilon_2^2-10\varepsilon_3^6)} < \cdots\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

$$\frac{\varepsilon_4^4-4\varepsilon_3^3\varepsilon_1+3\varepsilon_2^4}{\varepsilon_2^2-\varepsilon_1^2} < \frac{\varepsilon_6^6-6\varepsilon_5^5\varepsilon_1+15\varepsilon_4^4\varepsilon_2^2-10\varepsilon_3^6}{\varepsilon_4^4-4\varepsilon_3^3\varepsilon_1+3\varepsilon_2^4} < \cdots \tag{65}$$

Um schließlich auch noch die Abhängigkeit der Mittelwerthe von den Abweichungsgrößen festzustellen, ist zu beachten, dass einerseits auf Grund von $a_1 - b < a_2 - b < \cdots < a_n - b$ für $\mu = 1, 2, 3 \ldots$

$$(a_1-b)^{2\mu-1} < (a_2-b)^{2\mu-1} < \cdots < (a_n-b)^{2\mu-1}$$

und anderseits, wenn durch $d_1 < d_2 < \cdots < d_\varrho$ die ϱ verschiedenen absoluten Beträge der Abweichungswerthe $a_1 - b,\ a_2 - b, \ldots a_n - b$, der Größe nach geordnet angegeben werden,

$$d_1^{2\mu} < d_2^{2\mu} < \cdots < d_\varrho^{2\mu}.$$

Man kann daher in (35) die Hülfsgrößen $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_i$ für ungeradzahlige Werthe $2\mu - 1$ der Reihe $a_1 - b,\ a_2 - b \ldots a_n - b$ und für geradzahlige Werthe 2μ der Reihe $d_1, d_2 \ldots d_\varrho$ so entnehmen, wie es für die Bestimmung von $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_i$ durch Glieder der Reihe $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ bei der Erläuterung der Formeln (38a) und (38b) vorgeschrieben wurde. Auf diese Weise gelangt man für geradzahlige Werthe 2ν auf Grund von (35) zu den Bedingungen:

$$(a_n-b)^{2\mu-1}\cdot\varepsilon_{2\nu}^{2\nu}-\varepsilon_{2\nu+2\mu-1}^{2\nu+2\mu-1}>0;\quad (a_1-b)^{2\mu-1}\cdot\varepsilon_{2\nu}^{2\nu}-\varepsilon_{2\nu+2\mu-1}^{2\nu+2\mu-1}<0 \tag{66}$$

$$d_\varrho^{2\mu}\cdot\varepsilon_{2\nu}^{2\nu}-\varepsilon_{2\nu+2\mu}^{2\nu+2\mu}>0;\quad d_1^{2\mu}\cdot\varepsilon_{2\nu}^{2\nu}-\varepsilon_{2\nu+2\mu}^{2\nu+2\mu}<0 \tag{67}$$

$$\left.\begin{aligned}&(a_n-b)^{2\mu-1}\cdot(a_{n-1}-b)^{2\mu-1}\cdot\varepsilon_{2\nu}^{2\nu}\\ &\qquad-\left[(a_n-b)^{2\mu-1}+(a_{n-1}-b)^{2\mu-1}\right]\cdot\varepsilon_{2\nu+2\mu-1}^{2\nu+2\mu-1}+\varepsilon_{2\nu+4\mu-2}^{2\nu+4\mu-2}>0\\ &(a_1-b)^{2\mu-1}\cdot(a_2-b)^{2\mu-1}\cdot\varepsilon_{2\nu}^{2\nu}\\ &\qquad-\left[(a_1-b)^{2\mu-1}+(a_2-b)^{2\mu-1}\right]\cdot\varepsilon_{2\nu+2\mu-1}^{2\nu+2\mu-1}+\varepsilon_{2\nu+4\mu-2}^{2\nu+4\mu-2}>0\\ &(a_1-b)^{2\mu-1}\cdot(a_n-b)^{2\mu-1}\cdot\varepsilon_{2\nu}^{2\nu}\\ &\qquad-\left[(a_1-b)^{2\mu-1}+(a_n-b)^{2\mu-1}\right]\cdot\varepsilon_{2\nu+2\mu-1}^{2\nu+2\mu-1}+\varepsilon_{2\nu+4\mu-2}^{2\nu+4\mu-2}<0\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

$$\left.\begin{array}{l} d_\varrho^{2\mu} \cdot d_{\varrho-1}^{2\mu} \cdot \varepsilon_{2\nu}^{2\nu} - \left(d_\varrho^{2\mu} + d_{\varrho-1}^{2\mu}\right) \cdot \varepsilon_{2\nu+2\mu}^{2\nu+2\mu} + \varepsilon_{2\nu+4\mu}^{2\nu+4\mu} > 0 \\ d_1^{2\mu} \cdot d_2^{2\mu} \cdot \varepsilon_{2\nu}^{2\nu} - \left(d_1^{2\mu} + d_2^{2\mu}\right) \cdot \varepsilon_{2\nu+2\mu}^{2\nu+2\mu} + \varepsilon_{2\nu+4\mu}^{2\nu+4\mu} > 0 \\ d_1^{2\mu} \cdot d_\varrho^{2\mu} \cdot \varepsilon_{2\nu}^{2\nu} - \left(d_1^{2\mu} + d_\varrho^{2\mu}\right) \cdot \varepsilon_{2\nu+2\mu}^{2\nu+2\mu} + \varepsilon_{2\nu+4\mu}^{2\nu+4\mu} < 0 \end{array}\right\} \tag{69}$$

u. s. w.

Die Gleichung (39) hingegen bleibt für alle ganzzahligen Werthe ν und μ in Geltung, so dass

$$C_n \cdot \varepsilon_\nu^\nu - C_{n-1} \cdot \varepsilon_{\nu+\mu}^{\nu+\mu} + C_{n-2} \cdot \varepsilon_{\nu+2\mu}^{\nu+2\mu} - \cdots \pm \varepsilon_{\nu+n\cdot\mu}^{\nu+n\cdot\mu} = 0, \tag{70}$$

wo C_n, $C_{n-1} \ldots C_1$ die aus den n Abweichungspotenzen $(a_1 - b)^\mu$, $(a_2 - b)^\mu \ldots (a_n - b)^\mu$ gebildeten symmetrischen Grundfunctionen sind.

§ 5. Vertheilungsgesetze und Mittelwerthe.

Aus einem System von z_0 Werthen 0, z_1 Werthen 1, … z_n Werthen n werde eine Vertheilungstafel in der Form

$$\frac{0,\ 1,\ 2,\ \ldots n}{z_0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots z_n} \tag{71}$$

hergestellt, und es soll z_α für $\alpha = 0, 1, 2 \ldots$ als der zu α gehörige Werth einer Function $F(\alpha)$ aufgefasst werden, die mittelst der Hülfsfunction [II; (45)]

$$\varphi(\alpha) = \frac{\lambda^\alpha}{\Pi(\alpha)} \tag{72}$$

darstellbar sei. Die darstellende Function werde, da nur positive ganze Zahlen als Argumentwerthe in Betracht kommen, in der Form

$$\Phi(\alpha) = \gamma_0 \cdot \varphi_0(\alpha) + \gamma_1 \cdot \varphi_1(\alpha) + \gamma_2 \cdot \varphi_2(\alpha) + \cdots \tag{73}$$

vorausgesetzt, wo

$$\varphi_0(\alpha) = \varphi(\alpha); \quad \varphi_\mu(\alpha) = \varphi_{\mu-1}(\alpha) - \varphi_{\mu-1}(\alpha - 1) \text{ für } \mu = 1, 2, 3 \ldots$$

Es ist demgemäß

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_\mu(\alpha) = \varphi_0(\alpha) \cdot f_\mu(\alpha); \\ f_\mu(\alpha) = 1 - \binom{\mu}{1}\frac{\alpha}{\lambda} + \binom{\mu}{2}\frac{\alpha(\alpha-1)}{\lambda^2} - \cdots \pm \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\mu+1)}{\lambda^\mu}. \end{array}\right\} \tag{74}$$

Die so definirte rationale Function $f_\mu(\alpha)$ besitzt die leicht nachweisbare Eigenschaft, dass

$$\left.\begin{aligned}
&f_\mu(\alpha)=f_\mu(\alpha-1)-\frac{\mu}{\lambda}f_{\mu-1}(\alpha-1);\\
&f_\mu(\alpha)=f_\mu(\alpha-2)-2\cdot\frac{\mu}{\lambda}f_{\mu-1}(\alpha-2)+\frac{\mu(\mu-1)}{\lambda^2}f_{\mu-2}(\alpha-2);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_\mu(\alpha)=f_\mu(\alpha-\nu)-\binom{\nu}{1}\frac{\mu}{\lambda}f_{\mu-1}(\alpha-\nu)+\binom{\nu}{2}\frac{\mu(\mu-1)}{\lambda^2}f_{\mu-2}(\alpha-\nu)-\cdots,
\end{aligned}\right\}\tag{75}$$

wo die Reihe bis zum Abbrechen der Glieder, nämlich bis zum $(\nu+1)$-ten, wenn $\mu>\nu$, und bis zum $(\mu+1)$-ten, wenn $\mu<\nu$, fortzusetzen ist.

Als empirisch bekannte Werthe sollen an Stelle der Summen [vergl. II; (36); (39)]

$$\sum(\alpha-b)^\nu\cdot F(\alpha)=s_\nu,$$

die über die Zahlen $\alpha=0,\ 1\ldots n$ erstreckten Summen

$$\sum\binom{\alpha}{\nu}\cdot F(\alpha)=S_\nu\tag{76}$$

zu Grunde gelegt werden, was gestattet ist, da $s_0,\ s_1\ldots s_\nu$ einerseits und $S_0,\ S_1\ldots S_\nu$ anderseits in eindeutiger Beziehung zu einander stehen. Setzt man nämlich

$$\alpha^\nu=c_{1\nu}\binom{\alpha}{\nu}+c_{2\nu}\binom{\alpha}{\nu-1}+\cdots+c_{\nu\nu}\binom{\alpha}{1},$$

so wird

$$s_\nu=\{c_{1,\nu}S_\nu+\cdots+c_{\nu,\nu}S_1\}-\binom{\nu}{1}b\{c_{1,\nu-1}S_{\nu-1}+\cdots+c_{\nu-1,\nu-1}S_1\}$$
$$+\cdots\pm\binom{\nu}{\nu-1}b^{\nu-1}S_1\mp b^\nu\cdot S_0,$$

wonach

$$\begin{aligned}
s_0&=S_0,\\
s_1&=S_1-b\cdot S_0,\\
s_2&=2S_2+S_1-2b\cdot S_1+b^2\cdot S_0,\\
s_3&=6S_3+6S_2+S_1-3b(2S_2+S_1)+3b^2S_1-b^3S_0
\end{aligned}$$

u. s. w.

Man erhält daher zur Bestimmung der Coefficienten $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \dots$ in (73) auf Grund von (76) die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} S_\nu &= \sum \binom{\alpha}{\nu} \cdot \{\gamma_0 \cdot \varphi_0(\alpha) + \gamma_1 \cdot \varphi_1(\alpha) + \gamma_2 \cdot \varphi_2(\alpha) + \cdots\} \\ &= \frac{\lambda^\nu}{1\cdot 2 \cdots \nu} \sum \varphi_0(\alpha - \nu) \cdot \{\gamma_0 + \gamma_1 \cdot f_1(\alpha) + \gamma_2 \cdot f_2(\alpha) + \cdots\}, \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

wo die Summation nunmehr über alle positiven ganzen Zahlen $\alpha = 0, 1, 2 \dots$ zu erstrecken ist. Da aber mit Rücksicht auf (75) und (74)

$$\varphi_0(\alpha - \nu) \cdot f_\mu(\alpha) = \varphi_\mu(\alpha - \nu) - \binom{\nu}{1} \frac{\mu}{\lambda} \varphi_{\mu-1}(\alpha - \nu) + \cdots$$

und

$$\sum \varphi_\mu(\alpha - \nu) = \sum \varphi_\mu(\alpha) = 0 \text{ für } \mu = 1, 2, 3 \dots$$
$$\sum \varphi_0(\alpha - \nu) = \sum \varphi_0(\alpha) = \exp(\lambda),$$

so wird

$$\begin{aligned} \sum \varphi_0(\alpha - \nu) \cdot f_\mu(\alpha) &= (-1)^\mu \cdot \binom{\nu}{\mu} \frac{\mu(\mu-1)\cdots 1}{\lambda^\mu} \exp(\lambda) \\ &= (-1)^\mu \cdot \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-\mu+1)}{\lambda^\mu} \exp(\lambda). \end{aligned}$$

Aus (77) resultirt somit für $\nu = 0, 1, 2 \dots$

$$S_\nu = \frac{\lambda^\nu \cdot \exp(\lambda)}{1\cdot 2 \cdots \nu} \{\gamma_0 - \frac{\nu}{\lambda} \gamma_1 + \frac{\nu(\nu-1)}{\lambda^2} \gamma_2 - \cdots \pm \frac{\nu \cdots 2 \cdot 1}{\lambda^\nu} \gamma_\nu\} \quad (78)$$

woraus sich

$$\gamma_\nu = \frac{\lambda^\nu \cdot \exp(-\lambda)}{1 \cdot 2 \cdots \nu} \left\{S_0 - \frac{\nu}{\lambda} S_1 + \frac{\nu(\nu-1)}{\lambda^2} S_2 - \cdots \pm \frac{\nu \cdots 2 \cdot 1}{\lambda^\nu} S_\nu\right\} \quad (79)$$

ergibt. Es ist demgemäß

$$\gamma_0 = \exp(-\lambda) \cdot S_0$$
$$\gamma_1 = \exp(-\lambda) \cdot \left\{\frac{\lambda}{1} \cdot S_0 - S_1\right\}$$
$$\gamma_2 = \exp(-\lambda) \cdot \left\{\frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} \cdot S_0 - \frac{\lambda}{1} \cdot S_1 + S_2\right\}$$
$$\gamma_3 = \exp(-\lambda) \cdot \left\{\frac{\lambda^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot S_0 - \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} \cdot S_1 + \frac{\lambda}{1} \cdot S_2 - S_3\right\}$$

u. s. w.

Die Kenntniss der Summenwerthe $S_0, S_1, S_2 \dots$ wird in einfacher Weise durch successives Aufsummiren erlangt, wie in Cap. V, § 3, gezeigt wird.

Die Anwendung dieser Darstellungsweise setzt voraus, dass nur eine beschränkte Anzahl von Coefficienten $\gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_\nu$ berechnet werden muss. Dies trifft zu, wenn $\gamma_{\nu+1} = \gamma_{\nu+2} = \cdots = 0$. Dann ist, (79) zufolge, für $\mu = 1, 2, 3 \ldots$

$$S_0 - \frac{\nu+\mu}{\lambda} \cdot S_1 + \frac{(\nu+\mu)(\nu+\mu-1)}{\lambda^2} \cdot S_2 - \cdots \pm \frac{(\nu+\mu)\cdots 2\cdot 1}{\lambda^{\nu+\mu}} S_{\nu+\mu} = 0$$

oder, wenn zur Abkürzung für $\varkappa = 0, 1, 2 \ldots$

$$c_\varkappa = \frac{1\cdot 2\cdots\varkappa}{\lambda^\varkappa} \cdot S_\varkappa$$

gesetzt wird,

$$c_0 - \binom{\nu+\mu}{1} \cdot c_1 + \binom{\nu+\mu}{2} \cdot c_2 - \cdots \pm c_{\nu+\mu} = 0. \tag{80}$$

Es ist daher [1])

---

1) Um die Gültigkeit dieser Formeln zu beweisen, setze man:

$$f_{\nu+\mu}(x) = c_0 x^{\nu+\mu} - \binom{\nu+\mu}{1} \cdot c_1 \cdot x^{\nu+\mu-1} + \cdots \pm c_{\nu+\mu},$$

so dass

$$f'_{\nu+\mu}(x) = (\nu+\mu)\cdot f_{\nu+\mu-1}(x);\quad f''_{\nu+\mu}(x) = (\nu+\mu)(\nu+\mu-1)\cdot f_{\nu+\mu-2}(x);\ \ldots$$

Da nun $f_{\nu+\mu}(x)$ sammt den $\mu - 1$ ersten Ableitungen für $x = 1$ den Werth Null erhalten soll, so ist auch:

$$f_{\nu+\mu}(x) = \left(\gamma_0 x^\nu - \binom{\nu}{1}\gamma_1 x^{\nu-1} + \cdots \pm \gamma_\nu\right)(x-1)^\mu,$$

wo die Werthe von $\gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_\nu$ so zu bestimmen sind, dass die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x für beide Darstellungsformen übereinstimmen. Es ist somit einerseits $\gamma_\nu = c_{\nu+\mu}$ und anderseits

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 &&= c_0\\
&\binom{\mu}{1}\cdot\gamma_0 + \binom{\nu}{1}\cdot\gamma_1 &&= \binom{\nu+\mu}{1}\cdot c_1\\
&\binom{\mu}{2}\cdot\gamma_0 + \binom{\mu}{1}\cdot\binom{\nu}{1}\cdot\gamma_1 + \binom{\nu}{2}\cdot\gamma_2 &&= \binom{\nu+\mu}{2}\cdot c_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&\\
&\binom{\mu}{\nu}\cdot\gamma_0 + \binom{\mu}{\nu-1}\cdot\binom{\nu}{1}\cdot\gamma_1 + \cdots + \gamma_\nu &&= \binom{\nu+\mu}{\nu}\cdot c_\nu.
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man nun, dass

$$\binom{\mu+\nu-1}{\nu} - \binom{\mu}{1}\cdot\binom{\mu+\nu-2}{\nu-1} + \binom{\mu}{2}\cdot\binom{\mu+\nu-3}{\nu-2} - \cdots \pm \binom{\mu}{\nu} = 0$$

oder

$$\binom{\mu+\nu-1}{\mu-1} - \binom{\mu}{1}\cdot\binom{\mu+\nu-2}{\mu-1} + \binom{\mu}{2}\cdot\binom{\mu+\nu-3}{\mu-1} - \cdots \pm \binom{\mu}{\nu} = 0,$$

da

$$\frac{d^{\mu-1}}{dx^{\mu-1}}\{x^{\nu-1}(x-1)^\mu\} = 0 \quad \text{für } x = 1,$$

$$c_{\nu+1} = \binom{\nu+1}{\nu} \cdot c_\nu - \binom{\nu+1}{\nu-1} \cdot c_{\nu-1} + \cdots \mp \binom{\nu+1}{1} c_1 \pm c_0\,,$$

$$c_{\nu+2} = \binom{\nu+2}{\nu} \cdot c_\nu - 2 \cdot \binom{\nu+2}{\nu-1} \cdot c_{\nu-1} + \cdots \mp \nu \cdot \binom{\nu+2}{1} c_1 \pm (\nu+1) \cdot c_0$$

und allgemein für $\mu = 1, 2, 3 \ldots$

$$\left.\begin{aligned} c_{\nu+\mu} = \binom{\nu+\mu}{\nu} \cdot c_\nu - \binom{\mu}{1} \cdot \binom{\nu+\mu}{\nu-1} \cdot c_{\nu-1} + \binom{\mu+1}{2} \cdot \binom{\nu+\mu}{\nu-2} \cdot c_{\nu-2} - \cdots \\ \mp \binom{\mu+\nu-2}{\nu-1} \cdot \binom{\nu+\mu}{1} c_1 \pm \binom{\mu+\nu-1}{\nu} \cdot c_0 \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

Aus diesen Beziehungen zwischen den S-Werthen erhält man durch den Uebergang zu den s-Werthen, mit welchen die Mittelwerthe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$ durch

$$s_0 \cdot \varepsilon_\nu^\nu = s_\nu; \quad \nu = 0, 1, 2 \ldots$$

verknüpft sind, Bedingungen für die Mittelwerthe.

Es gilt folglich der Satz:

Ist die Vertheilungstafel (71) durch die Function

$$\Phi(\alpha) = \gamma_0 \varphi_0(\alpha) + \gamma_1 \varphi_1(\alpha) + \cdots + \gamma_\nu \varphi_\nu(\alpha) \quad (82)$$

darstellbar, so sind die Mittelwerthe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$ an die, aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} S_{\nu+\mu} = \frac{\lambda^\mu}{1 \cdot 2 \cdot\cdot \mu} \cdot S_\nu - \binom{\mu}{1} \frac{\lambda^{\mu+1}}{1 \cdot 2 \cdot\cdot (\mu+1)} \cdot S_{\nu-1} + \binom{\mu+1}{2} \frac{\lambda^{\mu+2}}{1 \cdot 2 \cdot\cdot (\mu+2)} \cdot S_{\nu-2} \\ - \cdots \mp \binom{\mu+\nu-2}{\nu-1} \frac{\lambda^{\mu+\nu-1}}{1 \cdot 2 \cdot\cdot (\mu+\nu-1)} \cdot S_1 \pm \binom{\mu+\nu-1}{\nu} \frac{\lambda^{\mu+\nu}}{1 \cdot 2 \cdot\cdot (\mu+\nu)} \cdot S_0 \end{aligned}\right\} \quad (83)$$

sich ergebenden Bedingungen gebunden.

Ist z. B.

$$\Phi(\alpha) = \gamma_0 \cdot \varphi_0(\alpha),$$

---

so erhält man:

$$\gamma_\nu = \binom{\nu+\mu}{\nu} \cdot c_\nu - \binom{\mu}{1} \cdot \binom{\nu+\mu}{\nu-1} \cdot c_{\nu-1} + \cdots \pm \binom{\mu+\nu-1}{\nu} \cdot c_0 \,.$$

Dabei ist zu beachten, dass das Zeichen $\binom{\mu}{\nu}$ auch für $\nu > \mu$ einen Sinn hat, indem es den Zahlenwerth 0 vorstellt. Die gegebene Ableitung des Werthes von γ_ν gilt daher für alle Zahlenpaare ν und μ.

so erhält man für $\mu = 1, 2, 3 \ldots$

$$S_\mu = \frac{\lambda^\mu}{1 \cdot 2 \cdots \mu} \cdot S_0 ,$$

woraus für die auf das arithmetische Mittel als Ausgangswerth bezogenen Mittelwerthe sich die Bedingungen

$$\varepsilon_1 = 0; \quad \varepsilon_2^2 = \lambda; \quad \varepsilon_3^3 = \lambda; \quad \varepsilon_4^4 = 3\lambda^2 + \lambda;$$
$$\varepsilon_5^5 = 10\lambda^2 + \lambda; \quad \varepsilon_6^6 = 15\lambda^3 + 25\lambda^2 + \lambda; \ldots$$

ergeben. — Ist hingegen

$$\Phi(\alpha) = \gamma_0 \cdot \varphi_0(\alpha) + \gamma_1 \cdot \varphi_1(\alpha),$$

so wird

$$S_{\mu+1} = \frac{\lambda^\mu}{1 \cdot 2 \cdots \mu} \cdot S_1 - \frac{\mu \cdot \lambda^{\mu+1}}{1 \cdot 2 \cdots (\mu+1)} \cdot S_0 ,$$

und demgemäß, wenn b das arithmetische Mittel bezeichnet,

$$\varepsilon_1 = 0; \quad \varepsilon_2^2 = b - (b-\lambda)^2;$$
$$\varepsilon_3^3 = b - 3(b-\lambda)^2 + 2(b-\lambda)^3;$$
$$\varepsilon_4^4 = b + 3b^2 - (b-\lambda)^2 \cdot (7 + 6\lambda) + 6(b-\lambda)^3 - 3(b-\lambda)^4;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Es werde anderseits aus einem Systeme von z_1 Werthen a_1, z_2 Werthen $a_2, \ldots z_n$ Werthen a_n eine Vertheilungstafel

$$\frac{a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n}{z_1 \quad z_2 \quad \ldots \quad z_n} \tag{84}$$

hergestellt, deren z nicht den a unmittelbar, sondern den aneinandergrenzenden Intervallen

$$a_1 \pm \tfrac{1}{2} i_1 , \quad a_2 \pm \tfrac{1}{2} i_2, \quad \ldots \quad a_n \pm \tfrac{1}{2} i_n$$

zuertheilt zu denken sind, so dass auf jeden, der Vertheilungstafel angehörenden, von den Werthen a und $a + da$ begrenzten Bereich ein bestimmter Werth $f(a) \,.\, da$ fällt. Die so definirte Function $f(a)$, die außerhalb des Gebietes der Vertheilungstafel durchweg gleich Null ist, soll mittelst der Hilfsfunction [II, (57)]

$$\varphi[h(a-b)] = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-h^2(a-b)^2\right] \tag{85}$$

darstellbar sein, wo b als Ausgangswerth der Abweichungen dient. Die darstellende Function werde, wenn

$$h(a-b)=t;\quad h\cdot da = dt$$

gesetzt wird, in der Form

$$\Phi(t)=\gamma_0\varphi(t)+\gamma_1\cdot\varphi'(t)+\gamma_2\cdot\varphi''(t)+\cdots \tag{86}$$

angenommen, wo

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-t^2);\quad \varphi'(t)=\frac{d}{dt}\varphi(t);\quad \varphi''(t)=\frac{d}{dt}\varphi'(t);\quad \ldots$$

Als empirisch gegebene Werthe mögen die über das Gebiet der Vertheilungstafel erstreckten Integrale

$$s_\nu=\int(a-b)^\nu\cdot f(a)\cdot da \tag{87}$$

zu Grunde gelegt werden, die, wie aus V, § 2, erhellt, mit einer im allgemeinen als ausreichend zu betrachtenden Annäherung durch die Summen

$$z_1(a_1-b)^\nu+z_2(a_2-b)^\nu+\cdots+z_n(a_n-b)^\nu$$

dargestellt werden. Aus denselben werden mittelst der Gleichungen

$$s_\nu=\varepsilon_\nu^\nu\cdot s_0 \tag{87a}$$

die Mittelwerthe der Vertheilungstafel gewonnen.

Die Bestimmung der Coefficienten $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \ldots$ in (86) ist daher auf Grund der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} h^\nu\cdot s_\nu &= \int t^\nu\cdot\Phi(t)\cdot dt\\ &=\gamma_0\int t^\nu\cdot\varphi(t)\cdot dt+\gamma_1\int t^\nu\cdot\varphi'(t)\cdot dt+\gamma_2\int t^\nu\cdot\varphi''(t)\cdot dt+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{88}$$

zu leisten, wo die Integration nunmehr von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken ist.

Da aber bekanntlich für $\nu=1, 2, 3\ldots$

$$\int\varphi(t)\cdot dt=1;\quad \int t^{2\nu-1}\cdot\varphi(t)\cdot dt=0$$

$$\int t^{2\nu}\cdot\varphi(t)\cdot dt=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2\nu-1)}{2^\nu}=\frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}\cdot\nu!}$$

und, wenn $\varphi^{(\mu)}$ den μ-ten Differentialquotienten von φ bezeichnet (so dass $\varphi^{(0)}=\varphi$), für $\mu=1, 2, 3\ldots$

$$\int \varphi^{(\mu)}(t)\cdot dt = 0\,; \quad \int t^{\nu}\cdot\varphi^{(\mu)}(t)\cdot dt = -\,\nu\int t^{\nu-1}\cdot\varphi^{(\mu-1)}(t)\cdot dt,$$

wonach für alle Werthenpaare ν und μ

$$\int t^{\nu}\cdot\varphi^{(\mu)}(t)\cdot dt = (-1)^{\mu}\cdot\nu(\nu-1)\cdot\cdot(\nu-\mu+1)\cdot\int t^{\nu-\mu}\cdot\varphi(t)\cdot dt$$

gesetzt werden kann, so erhält man aus (88) für $\nu = 0, 1, 2\ldots$

$$\left.\begin{aligned} \frac{h^{2\nu}\cdot s_{2\nu}}{(2\nu)!} &= \frac{\gamma_0}{2^{2\nu}\cdot\nu!} + \frac{\gamma_2}{2^{2\nu-2}(\nu-1)!} + \cdots + \frac{\gamma_{2\nu}}{2^0\cdot 0!} \\ -\frac{h^{2\nu+1}s_{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} &= \frac{\gamma_1}{2^{2\nu}\cdot\nu!} + \frac{\gamma_3}{2^{2\nu-2}(\nu-1)!} + \cdots + \frac{\gamma_{2\nu+1}}{2^0\cdot 0!} \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

woraus sich

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{2\nu} &= \frac{h^{2\nu}\cdot s_{2\nu}}{(2\nu)!} - \frac{h^{2\nu-2}\cdot s_{2\nu-2}}{(2\nu-2)!\;2^2\cdot 1!} + \cdots \pm \frac{s_0}{0!\;2^{2\nu}\cdot\nu!} \\ -\,\gamma_{2\nu+1} &= \frac{h^{2\nu+1}\cdot s_{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} - \frac{h^{2\nu-1}\cdot s_{2\nu-1}}{(2\nu-1)!\;2^2\cdot 1!} + \cdots \pm \frac{h s_1}{1!\;2^{2\nu}\cdot\nu!} \end{aligned}\right\} \quad (90)$$

ergibt. Es ist somit

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= s_0\,; \\ \gamma_1 &= -\,hs_1\,; \\ \gamma_2 &= \frac{h^2 s_2}{2} - \frac{s_0}{4}\,; \\ \gamma_3 &= -\,\frac{h^3 s_3}{6} + \frac{hs_1}{4}\,; \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Diese Darstellungsweise kann Verwendung finden, wenn die Berechnung einer kleinen Anzahl von Coefficienten zu einer hinreichenden Annäherung führt. Setzt man demgemäß voraus, dass für die Coefficienten mit geradzahligen Indices $\gamma_{2\nu+2} = \gamma_{2\nu+4} = \cdots = 0$ und für die Coefficienten mit ungeradzahligen Indices $\gamma_{2\mu+3} = \gamma_{2\mu+5} = \cdots = 0$ ist, wo ν und μ unabhängig von einander sind, da die Coefficienten $\gamma_0, \gamma_2, \gamma_4\ldots$ einerseits und $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5\ldots$ anderseits nicht aneinander gebunden sind, so resultiren aus (90) Bedingungen, die man, wenn zur Abkürzung für $\varkappa = 0, 1, 2\ldots$

$$c_{\varkappa} = \frac{2^{2\varkappa}\cdot h^{2\varkappa}\cdot s_{2\varkappa}\cdot\varkappa!}{(2\varkappa)!}\,; \quad c'_{\varkappa} = \frac{2^{2\varkappa}\cdot h^{2\varkappa+1}\cdot s_{2\varkappa+1}\cdot\varkappa!}{(2\varkappa+1)!}$$

gesetzt wird, in der Form

$$\left.\begin{aligned}&c_0-\binom{\nu+\lambda}{1}\cdot c_1+\binom{\nu+\lambda}{2}\cdot c_2-\cdots\pm c_{\nu+\lambda}=0\,,\\&c_0'-\binom{\mu+\lambda}{1}\cdot c_1'+\binom{\mu+\lambda}{2}\cdot c_2'-\cdots\pm c_{\mu+\lambda}'=0\end{aligned}\right\}\qquad(91)$$

für $\lambda = 1, 2, 3\ldots$ darstellen kann. Man findet demzufolge — wie die Ableitung von (81) aus (80) zeigt —

$$\left.\begin{aligned}c_{\nu+\lambda}=&\binom{\nu+\lambda}{\nu}\cdot c_\nu-\binom{\lambda}{1}\cdot\binom{\nu+\lambda}{\nu-1}\cdot c_{\nu-1}+\binom{\lambda+1}{2}\binom{\nu+\lambda}{\nu-2}\cdot c_{\nu-2}-\cdots\\&\cdots\mp\binom{\lambda+\nu-2}{\nu-1}\cdot\binom{\nu+\lambda}{1}\cdot c_1\pm\binom{\lambda+\nu-1}{\nu}\cdot c_0\,,\\c_{\mu+\lambda}'=&\binom{\mu+\lambda}{\mu}\cdot c_\mu'-\binom{\lambda}{1}\cdot\binom{\mu+\lambda}{\mu-1}\cdot c_{\mu-1}'+\binom{\lambda+1}{2}\cdot\binom{\mu+\lambda}{\mu-2}\cdot c_{\mu-2}'-\cdots\\&\cdots\mp\binom{\lambda+\mu-2}{\mu-1}\cdot\binom{\mu+\lambda}{1}\cdot c_1'\pm\binom{\lambda+\mu-1}{\mu}\cdot c_0'\,.\end{aligned}\right\}\qquad(92)$$

Hierdurch werden, wenn $s_\varkappa = \varepsilon_\varkappa^\varkappa\cdot s_0$ gesetzt wird, Bedingungen für die Mittelwerthe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\ldots$ angegeben.

Man gewinnt so die Erkenntniss:

Ist die Vertheilungstafel (84) durch die Function

$$\left.\begin{aligned}\Phi(t)=&\gamma_0\varphi(t)+\gamma_2\varphi''(t)+\cdots+\gamma_{2\nu}\varphi^{(2\nu)}(t)\\&+\gamma_1\varphi'(t)+\gamma_3\varphi'''(t)+\cdots+\gamma_{2\mu+1}\varphi^{(2\mu+1)}(t)\end{aligned}\right\}\qquad(93)$$

darstellbar, so müssen die Mittelwerthe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\ldots$ die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2^{2\nu+2\lambda}\cdot h^{2\nu+2\lambda}\cdot\varepsilon_{2\nu+2\lambda}^{2\nu+2\lambda}\cdot(\nu+\lambda)!}{(2\nu+2\lambda)!}=\binom{\nu+\lambda}{\nu}\frac{2^{2\nu}\cdot h^{2\nu}\cdot\varepsilon_{2\nu}^{2\nu}\cdot\nu!}{(2\nu)!}\\&-\binom{\lambda}{1}\cdot\binom{\nu+\lambda}{\nu-1}\frac{2^{2\nu-2}\cdot h^{2\nu-2}\cdot\varepsilon_{2\nu-2}^{2\nu-2}\cdot(\nu-1)!}{(2\nu-2)!}+\binom{\lambda+1}{2}\cdot\binom{\nu+\lambda}{\nu-2}\frac{2^{2\nu-4}\cdot h^{2\nu-4}\cdot\varepsilon_{2\nu-4}^{2\nu-4}\cdot(\nu-2)!}{(2\nu-4)!}\\&\qquad-\cdots\pm\binom{\lambda+\nu-1}{\nu};\\&\frac{2^{2\mu+2\lambda}\cdot h^{2\mu+2\lambda+1}\cdot\varepsilon_{2\mu+2\lambda+1}^{2\mu+2\lambda+1}\cdot(\mu+\lambda)!}{(2\mu+2\lambda+1)!}=\binom{\mu+\lambda}{\mu}\frac{2^{2\mu}\cdot h^{2\mu+1}\cdot\varepsilon_{2\mu+1}^{2\mu+1}\cdot\mu!}{(2\mu+1)!}\\&-\binom{\lambda}{1}\cdot\binom{\mu+\lambda}{\mu-1}\frac{2^{2\mu-2}\cdot h^{2\mu-1}\cdot\varepsilon_{2\mu-1}^{2\mu-1}(\mu-1)!}{(2\mu-1)!}+\binom{\lambda+1}{2}\cdot\binom{\mu+\lambda}{\mu-2}\frac{2^{2\mu-4}\cdot h^{2\mu-3}\cdot\varepsilon_{2\mu-3}^{2\mu-3}\cdot(\mu-2)!}{(2\mu-3)!}\\&\qquad-\cdots\pm\binom{\lambda+\mu-1}{\mu}\end{aligned}\right\}(94)$$

für $\lambda = 1, 2, 3\ldots$ erfüllen.

Ist z. B.

$$\Phi(t) = \gamma_0 \cdot \varphi(t), \quad \gamma_0 = s_0,$$

gilt also das gewöhnliche Fehlergesetz, so muss

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon_5 = \cdots = 0;$$

$$\frac{2^{2\lambda} \cdot h^{2\lambda} \cdot \varepsilon_{2\lambda}^{2\lambda} \cdot \lambda!}{(2\lambda)!} = 1 \quad \text{oder} \quad \varepsilon_{2\lambda}^{2\lambda} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2\lambda - 1)}{2^{\lambda} \cdot h^{2\lambda}}$$

sein. Ist hingegen, wenn das arithmetische Mittel als Ausgangswerth dient und somit ε_1 und γ_1 gleich Null ist,

$$\Phi(t) = \gamma_0 \cdot \varphi(t) + \gamma_2 \cdot \varphi''(t) + \gamma_3 \cdot \varphi'''(t);$$

$$\gamma_0 = s_0; \quad \gamma_2 = s_0 \left(\frac{h^2 \varepsilon_2^2}{2} - \frac{1}{4}\right); \quad \gamma_3 = - s_0 \cdot \frac{h^3 \varepsilon_3^3}{6},$$

so erhält man

$$\varepsilon_{2\lambda+2}^{2\lambda+2} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2\lambda + 1)}{2^{\lambda+1} \cdot h^{2\lambda+2}} \left\{(\lambda + 1) 2 h^2 \varepsilon_2^2 - \lambda\right\},$$

$$\varepsilon_{2\lambda+3}^{2\lambda+3} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2\lambda + 3)}{2^{\lambda+1} \cdot h^{2\lambda+3}} \cdot (\lambda + 1) \frac{2}{3} h^3 \varepsilon_3^3.$$

Wird überdies

$$h^2 = \frac{1}{2 \varepsilon_2^2}$$

gesetzt, so dass $\gamma_2 = 0$, so gilt für

$$\Phi(t) = \gamma_0 \cdot \varphi(t) + \gamma_3 \cdot \varphi'''(t);$$

$$\gamma_0 = s_0; \quad \gamma_3 = - s_0 \frac{\varepsilon_3^3}{2 \varepsilon_2^3 \cdot \sqrt{2}}$$

die Bedingung

$$\varepsilon_{2\lambda+2}^{2\lambda+2} = 1 \cdot 3 \, .. \, (2\lambda + 1) \cdot \varepsilon_2^{2\lambda+2},$$

$$\varepsilon_{2\lambda+3}^{2\lambda+3} = 5 \cdot 7 \, .. \, (2\lambda + 3)(\lambda + 1) \cdot \varepsilon_2^{2\lambda} \cdot \varepsilon_3^3.$$

Wird die Function $f(a)$, welche die Vertheilung der z auf die Intervalle der Vertheilungstafel (84) regelt, lediglich der Einschränkung unterworfen, bei wachsendem absoluten Betrage der Abweichungswerthe $(a - b)$ abzunehmen oder wenigstens nicht zu wachsen, so ist, nach einer Bemerkung von Gauss[1]) für die auf b bezogenen Mittelwerthe

$$\varepsilon_4^4 \geqq \frac{9}{5}\,\varepsilon_2^4. \tag{95a}$$

Es ist zugleich — wie Krüger[2]) bewiesen hat —

$$\varepsilon_{2\nu}^{2\nu} \geqq \frac{3^\nu}{2\nu+1}\,\varepsilon_2^{2\nu}; \quad \varepsilon_{4\nu}^{4\nu} \geqq \frac{(2\nu+1)^2}{4\nu+1}\,\varepsilon_{2\nu}^{4\nu}. \tag{95}$$

§ 6. Die aus Potenzsummen reeller Größenpaare gebildeten Mittelwerthe.

Wie aus den Potenzsummen einzelner Größen, so lassen sich auch aus den Potenzsummen paarweise zusammengehöriger reeller Größen Mittelwerthe bilden und hinsichtlich ihrer Eigenschaften untersuchen.

Für eine endliche Anzahl solcher Größenpaare können stets zwei Werthenreihen $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$ und $b_1 < b_2 < \cdots < b_s$ bestimmt werden, so dass die gegebenen Größen Combinationen der r Werthe a und der s Werthe b sind. Wird alsdann die Anzahl der Werthenpaare $(a_\varkappa, b_\lambda)$ durch $z_{\varkappa\lambda}$ bezeichnet, so lässt sich das System der Größenpaare in der früher [II; (58a)] mitgetheilten Form der Vertheilungstafel eines C. G. mit einer Doppelreihe von Varianten darstellen. Zugleich werden die Mittelwerthe $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ durch II; (59) definirt.

Bei dieser Darstellungsweise treten jedoch im allgemeinen leere $(a_\varkappa, b_\lambda)$ auf, deren $z_{\varkappa\lambda}$ gleich Null ist. Will man dieselben von vorn herein bei Seite lassen, so empfiehlt es sich, die von einander verschiedenen Werthenpaare irgendwie in eine einzige Reihe zu ordnen und das erste Glied durch (a_1, b_1), das zweite durch (a_2, b_2) u. s. w. zu bezeichnen. Die beiden Reihen $a_1, a_2 \ldots$ und $b_1, b_2 \ldots$ zeigen dann im allgemeinen zwar keine Regelmäßigkeit; denn für zwei Werthenpaare $(a_\varkappa, b_\varkappa)$ und (a_λ, b_λ) kann $a_\varkappa$ größer oder kleiner als a_λ oder auch gleich a_λ sein, desgleichen kann $b_\varkappa$ mit b_λ übereinstimmen oder von b_λ in positivem oder negativem Sinne abweichen,

---

1) Theoria combinationis observ. error. min. obn. Art. 11.

2) Ueber einen Satz der Theoria Combinationis. Göttinger Nachrichten, 1897, S. 147.

wenn nur nicht sowohl $a_\varkappa = a_\lambda$ als auch $b_\varkappa = b_\lambda$ ist. Es ist aber vielfach bequemer, mit einer einfachen Reihe von Werthenpaaren statt mit einer Doppelreihe zu operiren.

Es seien demgemäß z_1 Werthenpaare (a_1, b_1), z_2 Werthenpaare (a_2, b_2), ... z_n Werthenpaare (a_n, b_n) gegeben. Bezieht man dieselben auf das Werthenpaar (c, d), so dass $a_\varkappa - c$ an Stelle von $a_\varkappa$ und $b_\varkappa - d$ an Stelle von $b_\varkappa$ tritt, und ist $m = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$, $p_1 = z_1 : m$, ... $p_n = z_n : m$, so werden die auf (c, d) bezogenen Mittelwerthe $\varepsilon_{\mu,\nu}$ der gegebenen Werthenpaare durch

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu} = p_1(a_1 - c)^\mu \cdot (b_1 - d)^\nu + p_2(a_2 - c)^\mu \cdot (b_2 - d)^\nu + \cdots \\ + p_n(a_n - c)^\mu \cdot (b_n - d)^\nu\end{aligned}\right\} \tag{96}$$

definirt.

a. Die Bedeutung der Mittelwerthe.

Um die Bedeutung dieser Mittelwerthe klarzustellen, sollen die Abweichungen $a_1 - c$, $b_1 - d$, ... $a_n - c$, $b_n - d$ als Abscissen x und Ordinaten y eines rechtwinkeligen Coordinatensystems gedeutet und durch x_1, y_1, ... x_n, y_n bezeichnet werden. Dann bestimmt jedes Paar von Abweichungswerthen $(x_\varkappa, y_\varkappa)$ einen Punkt der Ebene, und es handelt sich nun um die Bedeutung des durch

$$\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu} = p_1 x_1^\mu y_1^\nu + p_2 x_2^\mu y_2^\nu + \cdots + p_n x_n^\mu y_n^\nu \tag{96a}$$

definirten Werthes $\varepsilon_{\mu,\nu}$ für das System der gegebenen Punkte, wenn μ und ν irgend welche positive oder negative ganzzahlige Werthe annehmen (ausgenommen $\mu = \nu = 0$, da in diesem Falle ε_{00} jeden endlichen Werth bezeichnen kann). Dabei möge zunächst vorausgesetzt werden, dass keiner von den Werthen $x_1, y_1, x_2, y_2 \ldots x_n, y_n$ gleich Null sei, und dass auch $\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}$ einen von Null verschiedenen endlichen Werth darstelle.

Der Werth von $\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}$ bleibt unverändert, wenn die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) ... (x_n, y_n) auf den zugehörigen Curven

$$x^\mu \cdot y^\nu = x_1^\mu \cdot y_1^\nu; \quad x^\mu \cdot y^\nu = x_2^\mu \cdot y_2^\nu; \quad \ldots \; x^\mu \cdot y^\nu = x_n^\mu \cdot y_n^\nu \tag{97}$$

sich bewegen, die dem Curvenbüschel

$$x^\mu \cdot y^\nu = \alpha \tag{98}$$

mit dem Parameter α angehören. Dieses Büschel besteht aus hyperbolischen Curven, welche die Coordinatenaxen zu Asymptoten haben, oder aus parabolischen Curven, die durch den Punkt $x = 0$, $y = 0$ gehen, je nachdem die ganzen Zahlen μ und ν gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben; und je zwei Curven des Büschels

$$x^{\mu} \cdot y^{\nu} = \alpha_1 , \quad x^{\mu} \cdot y^{\nu} = \alpha_2$$

haben außer den allen gemeinsamen Grundpunkten (den unendlich fernen Punkten der Coordinatenaxen oder dem Nullpunkte des Coordinatensystems) keinen Schnittpunkt, so dass sie jede Curve, deren Parameter zwischen α_1 und α_2 liegt, vollständig umschließen und so einen Bereich der Ebene abgrenzen, dem alle Curven mit mittleren Parameterwerthen zugehören. Es wird daher auch durch die Curven (97) ein Bereich der Ebene bestimmt, in welchem die Curven verlaufen, deren Parameterwerthe zwischen dem größten und dem kleinsten der Werthe

$$x_1^{\mu} \cdot y_1^{\nu} ; \quad x_2^{\mu} \cdot y_2^{\nu} ; \quad \ldots \quad x_n^{\mu} \cdot y_n^{\nu}$$

liegen. Er soll der Bereich der Curven (97) heißen.

Hiernach ist $\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}$ nicht zu den Punkten (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$, sondern zu den durch diese Punkte gehenden Curven (97) des Büschels (98) in Beziehung zu setzen. Nun gehört auch zu $\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}$ eine Curve des Büschels, nämlich

$$x^{\mu} \cdot y^{\nu} = \varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu} . \tag{99}$$

Sie verläuft innerhalb des Bereichs der Curven (97) und ist somit eine mittlere Curve, da ihr Parameter auf Grund von (96a) zwischen dem kleinsten und größten Parameterwerthe der Curven (97) sich hält.

Auf dieser Curve befinden sich, wenn $\mu + \nu$ nicht gleich Null ist, stets vier oder zwei Punkte, deren Abscisse und Ordinate in ihrem absoluten Betrage übereinstimmen.

Ist nämlich μ und ν geradzahlig, so ist $\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}$, wie aus (96) folgt, wesentlich positiv, und es gibt stets einen reellen, positiven Werth $\varepsilon_{\mu,\nu}$, der die $(\mu + \nu)$-te Wurzel von $\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}$ darstellt. Es sind daher die vier Punkte

$$x = \pm \varepsilon_{\mu,\nu} ; \quad y = \pm \varepsilon_{\mu,\nu}$$

Punkte der Curve (99). — Ist ferner von den beiden Zahlen μ und ν die eine gerade und die andere ungerade, so kann $\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}$ positiv oder negativ sein. Wird die reelle $(\mu + \nu)$-te Wurzel dieses Werthes durch $\varepsilon_{\mu,\nu}$ bezeichnet, so liegen, wenn μ gerade und ν ungerade ist, die beiden Punkte

$$x = \pm\, \varepsilon_{\mu,\nu}\,; \quad y = \varepsilon_{\mu,\nu}$$

und, wenn μ ungerade und ν gerade ist, die beiden Punkte

$$x = \varepsilon_{\mu,\nu}\,; \quad y = \pm\, \varepsilon_{\mu,\nu}$$

auf der Curve (99). — Ist weiterhin μ und ν ungeradzahlig und $\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}$ zugleich mit dem reellen Wurzelwerth $\varepsilon_{\mu,\nu}$ positiv, so gehören die beiden Punkte

$$x = \varepsilon_{\mu,\nu}\,; \quad y = \varepsilon_{\mu,\nu} \quad \text{und} \quad x = -\,\varepsilon_{\mu,\nu}\,; \quad y = -\,\varepsilon_{\mu,\nu}$$

der Curve (99) an. Ist aber $\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}$ negativ, so gibt es keine reelle $(\mu+\nu)$-te Wurzel. Bringt man jedoch — in Uebereinstimmung mit der in II; § 6 getroffenen Vereinbarung — die Wurzel in die Form $\varepsilon_{\mu,\nu}\cdot\sqrt[\mu+\nu]{-1}$, so dass $\varepsilon_{\mu,\nu}$ die $(\mu+\nu)$-te Wurzel des absoluten Betrags von $\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}$ angibt, so ist

$$x = \varepsilon_{\mu,\nu}\,; \quad y = -\,\varepsilon_{\mu,\nu} \quad \text{und} \quad x = -\,\varepsilon_{\mu,\nu}\,; \quad y = \varepsilon_{\mu,\nu}$$

je ein Punkt der Curve (99).

Demnach stellt der aus (96) in der angegebenen Weise abgeleitete reelle Werth $\varepsilon_{\mu,\nu}$ einen die mittlere Curve (99) bestimmenden Coordinatenwerth dar.

Wird hingegen $\mu+\nu=0$, ohne dass $\mu=\nu=0$ ist, so ist die Curve (99) eine Gerade, die durch den Nullpunkt des Coordinatensystems geht. Dann gibt es, wenn $\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}$ nicht gleich 1 ist, außer $x=0$, $y=0$, keinen weiteren Punkt, dessen Abscisse gleich der Ordinate sei. Dementsprechend kann $\varepsilon_{\mu,\nu}$ nicht bestimmt werden, während $\varepsilon_{\mu,\nu}^{0}$ den, aus (96) resultirenden Werth erhalten muss.

Zwei endliche, von Null verschiedene Mittelwerthpotenzen $\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}$ und $\varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma}$ bestimmen somit die beiden mittleren Curven

$$x^{\mu}\cdot y^{\nu} = \varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}\,; \quad x^{\varrho}\cdot y^{\sigma} = \varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} \tag{100}$$

für die Curven

$$x^{\mu}\cdot y^{\nu} = x_1^{\mu}\cdot y_1^{\nu}\,; \quad \ldots \quad x^{\mu}\cdot y^{\nu} = x_n^{\mu}\cdot y_n^{\nu} \tag{100a}$$

und

$$x^{\varrho}\cdot y^{\sigma} = x_1^{\varrho}\cdot y_1^{\sigma}\,; \quad \ldots \quad x^{\varrho}\cdot y^{\sigma} = x_n^{\varrho}\cdot y_n^{\sigma}\,. \tag{100b}$$

Ist nun $\mu\sigma - \nu\varrho = 0$ oder $\varrho = \lambda\cdot\mu\,;\ \sigma = \lambda\cdot\nu$, so gehören die Curven (100a) und (100b) einem und demselben Büschel an; und die beiden mittleren Curven (100) verlaufen, ohne sich (außer in den

Grundpunkten des Büschels) zu schneiden, in dem durch beide Curvensysteme gemeinsam bestimmten Bereiche. Ist aber $\mu\sigma - \nu\varrho$ von Null verschieden, so schneiden sich je zwei Curven

$$x^{\mu} \cdot y^{\nu} = x_{\varkappa}^{\mu} \cdot y_{\varkappa}^{\nu}; \quad x^{\varrho} \cdot y^{\sigma} = x_{\varkappa}^{\varrho} \cdot y_{\varkappa}^{\sigma}$$

in dem Punkte $(x_{\varkappa}, y_{\varkappa})$. Die Curven (100a) und (100b) gehören daher, nebst den zugehörigen mittleren Curven, zu zwei verschiedenen Büscheln, und die mittleren Curven können gleichfalls einen Schnittpunkt haben. Dieser Schnittpunkt liegt sowohl in dem Bereiche der Curven (100a), als auch in dem Bereiche der Curven (100b); er gehört daher dem gemeinsamen Theile der beiden Bereiche an, der auch die Punkte (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$ umfasst. Seine Coordinaten ergeben sich aus

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu\sigma-\nu\varrho} &= \varepsilon_{\mu,\,\nu}^{(\mu+\nu)\sigma} : \varepsilon_{\varrho,\,\sigma}^{(\varrho+\sigma)\nu} \\ y^{\mu\sigma-\nu\varrho} &= \varepsilon_{\varrho,\,\sigma}^{(\varrho+\sigma)\mu} : \varepsilon_{\mu,\,\nu}^{(\mu+\nu)\varrho}, \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

woraus zugleich ersichtlich wird, dass ein Schnittpunkt immer vorhanden ist, wenn $\mu\sigma - \nu\varrho$ ungeradzahlig ist oder wenn — bei beliebigen Werthen von $\mu\sigma - \nu\varrho$ — nur positive Werthe $\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}$ und $\varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma}$ in Betracht kommen. Er ist ein durch $\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}$ und $\varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma}$ bestimmter **mittlerer Punkt** und seine Coordinaten (x, y) stellen ein **mittleres Werthenpaar** dar.

Hebt man jetzt die Beschränkung, dass von den Werthen $x_1, y_1, \ldots x_n, y_n, \varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}, \varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma}$ keiner gleich Null sein soll, auf, so können als Parameter der Curven (97) und (99) oder (100), (100a), (100b) die Werthe 0 und ∞ auftreten. Der Parameter kann bloß gleich 0, nicht gleich ∞ werden, wenn die Werthe von μ und ν, ϱ und σ auf positive ganze Zahlen eingeschränkt bleiben. Dann zerfällt die zugehörige Curve $x^{\mu} \cdot y^{\nu} = 0$ oder $x^{\varrho} \cdot y^{\sigma} = 0$ in die beiden Coordinatenaxen, und die Bestimmung mittlerer Curven und ihrer Schnittpunkte wird nicht gehindert. Bei der Zulassung negativer Indices tritt aber auch der Parameter ∞ auf. Beispielsweise wird $x_1^{\mu} \cdot y_1^{\nu}$ für $x_1 = 0$ und negatives μ unendlich groß. Dann zerfällt die zugehörige Curve $x^{\mu} \cdot y^{\nu} = \infty$ in die durch $x = 0$ bestimmte y-Axe und in die durch $y = \infty$ charakterisirte unendlich ferne Gerade, so dass die unendlich ferne Gerade in den Bereich der Curven fällt und ein Bestandtheil der mittleren Curve sein kann. Dies trifft zu, wenn für negatives μ die Mittelwerthpotenz $\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}$ gleich 0 ist und somit die mittlere Curve durch $x^\mu \cdot y^\nu = 0$ bestimmt wird. Die Angabe mittlerer Curven und ihrer Schnittpunkte ist dann nicht ausführbar.

Hiernach darf man, falls die Werthe $x_1, y_1 \ldots x_n, y_n$ irgend welche positive oder negative reelle Zahlen vorstellen, nur die aus (96) für positive ganze Zahlen $\mu = 0, 1, 2 \ldots$; $\nu = 0, 1, 2 \ldots$ (mit Ausnahme von $\mu = \nu = 0$) resultirenden $\varepsilon_{\mu,\nu}$ in jedem Falle als Mittelwerthe in Anspruch nehmen. Bedeuten aber $x_1, y_1 \ldots x_n, y_n$ positive, von Null verschiedene, reelle Zahlen, so ist auch $\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}$ für positive und negative ganze Zahlen $\mu = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ reell und positiv, so dass $\varepsilon_{\mu,\nu}$ für positive und negative μ und ν, wofern $\mu + \nu$ nicht gleich Null, ein Mittelwerth ist.

Beispielsweise ist für die doppelreihige Vertheilungstafel, die V; § 4 zur Erläuterung dient,

$$\varepsilon_{10} = 0;\ \varepsilon_{01} = 0;\ \varepsilon_{11}^{2} = 2{,}4;\ \varepsilon_{20}^{2} = 3{,}0;\ \varepsilon_{02}^{2} = 3{,}0;\ \varepsilon_{21}^{3} = 1{,}5;\ \varepsilon_{12}^{3} = 1{,}4;\ \varepsilon_{22}^{4} = 18{,}6.$$

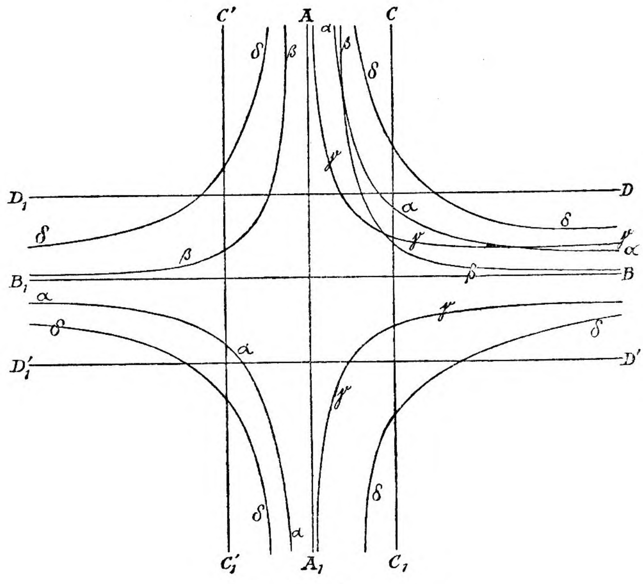


Fig. 2.

Diese Werthe bestimmen somit folgende, in Fig. 2 veranschaulichte, mittlere Curven:

1) die Geraden $x = 0$ und $y = 0$, welche die Coordinatenaxen A_1AA und B_1BB darstellen; die Richtung der wachsenden

x geht von B_1 nach B, die Richtung der wachsenden y von A_1 nach A;

2) die Hyperbel $x \cdot y = 2{,}4$, welche die Coordinatenaxen zu Asymptoten hat; sie besteht aus den beiden durch α markirten Curvenzügen;

3) die Geradenpaare $x^2 = 3{,}0$ und $y^2 = 3{,}0$, von welchen das erste CC_1, $C'C'_1$ der y-Axe und das zweite DD_1, $D'D'_1$ der x-Axe parallel ist;

4) die durch β, γ, δ markirten hyperbolischen Curven $x^2 \cdot y = 1{,}5$; $x \cdot y^2 = 1{,}9$; $x^2 \cdot y^2 = 18{,}6$.

Ihre Schnittpunkte geben mittlere Werthenpaare an. Von denselben fallen die Punkte $x = \pm 0{,}3$; $y = +12{,}4$ und $x = +13{,}3$; $y = \pm 0{,}3$, in welchen δ die Curven β und γ schneidet, nicht in den gezeichneten Theil.

b. Eigenschaften der Mittelwerthe.

Zwei Mittelwerthe $\varepsilon_{\mu,\nu}$ und $\varepsilon_{\varrho,\sigma}$ zeigen ein verschiedenes Verhalten, je nachdem $\mu\sigma - \varrho\nu$ gleich Null oder verschieden von Null ist.

Ist

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu} &= p_1 x_1^\mu \cdot y_1^\nu + \cdots + p_n x_n^\mu \cdot y_n^\nu \\ \varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} &= p_1 x_1^\varrho \cdot y_1^\sigma + \cdots + p_n x_n^\varrho \cdot y_n^\sigma \end{aligned}\right\} \tag{102}$$

und $\mu\sigma - \varrho\nu$ nicht gleich Null, so kann man stets n Paare von einander unabhängiger, reeller absoluter Werthe $u_1, v_1; \ldots u_n, v_n$ bestimmen und für $\varkappa = 1, 2 \ldots n$

$$x_\varkappa = \pm u_\varkappa^\sigma : v_\varkappa^\nu; \quad y_\varkappa = \pm v_\varkappa^\mu : u_\varkappa^\varrho$$

setzen, so dass

$$x_\varkappa^\mu \cdot y_\varkappa^\nu = \pm u_\varkappa^{\mu\sigma - \varrho\nu} = U_\varkappa$$

$$x_\varkappa^\varrho \cdot y_\varkappa^\sigma = \pm v_\varkappa^{\mu\sigma - \varrho\nu} = V_\varkappa$$

und somit

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu} &= p_1 U_1 + p_2 U_2 + \cdots + p_n U_n \\ \varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} &= p_1 V_1 + p_2 V_2 + \cdots + p_n V_n . \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Es sind sonach die beiden Mittelwerthe $\varepsilon_{\mu,\nu}$ und $\varepsilon_{\varrho,\sigma}$, wenn $\mu\sigma - \varrho\nu$ nicht gleich Null ist, im allgemeinen von einander unabhängig.

Ist hingegen $\mu\sigma - \varrho\nu = 0$, so lassen sich vier ganze Zahlen α, β, γ, δ angeben, so dass

$$\mu = \gamma\alpha\,; \quad \nu = \gamma\beta$$
$$\varrho = \delta\alpha\,; \quad \sigma = \delta\beta\,.$$

Setzt man nun für $\varkappa = 1, 2 \ldots n$

$$x_\varkappa^\alpha \cdot y_\varkappa^\beta = u_\varkappa$$

und bezeichnet man die aus $u_1, u_2 \ldots u_n$ gebildeten Mittelwerthe durch η, so wird

$$\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu} = p_1 u_1^\gamma + p_2 u_2^\gamma + \cdots + p_n u_n^\gamma = \eta_\gamma^\gamma$$
$$\varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} = p_1 u_1^\delta + p_2 u_2^\delta + \cdots + p_n u_n^\delta = \eta_\delta^\delta$$

oder

$$\varepsilon_{\mu,\nu}^{\alpha+\beta} = \eta_\gamma\,; \quad \varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\alpha+\beta} = \eta_\delta\,. \tag{104}$$

Demgemäß gelten für zwei Mittelwerthe $\varepsilon_{\mu,\nu}$ und $\varepsilon_{\varrho,\sigma}$, wenn $\mu\sigma - \varrho\nu = 0$, die Beziehungen, an welche zwei, aus Einzelgrößen gebildete Mittelwerthe gebunden sind, deren Ordnungszahlen durch die größten gemeinsamen Theiler von μ und ν resp. ϱ und σ angegeben werden.

Eine allgemein gültige Beziehung zwischen drei Mittelwerthen erhält man auf Grund der Bemerkung, dass für $\varkappa = 1, 2 \ldots n$, wenn $x_\varkappa$ nicht gleich $y_\varkappa$ ist,

$$(x_\varkappa^\mu - y_\varkappa^\nu)^2 > 0 \quad \text{oder} \quad x_\varkappa^{2\mu} + y_\varkappa^{2\nu} > 2x_\varkappa^\mu \cdot y_\varkappa^\nu\,.$$

Es ist daher für die aus beliebigen reellen Größenpaaren x_1, y_1; $\ldots$ x_n, y_n gebildeten Mittelwerthe $\varepsilon_{2\mu,0}$, $\varepsilon_{0,2\nu}$, $\varepsilon_{\mu,\nu}$

$$\varepsilon_{2\mu,0}^{2\mu} + \varepsilon_{0,2\nu}^{2\nu} > 2 \cdot \varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}\,. \tag{105}$$

Werden aber die Größenpaare dem Gebiete der reellen, positiven Zahlenwerthe entnommen, so ist

$$x_\varkappa^{\mu+\varrho} \cdot y_\varkappa^{\nu+\sigma} + x_\varkappa^{\mu-\varrho} \cdot y_\varkappa^{\nu-\sigma} > 2 \cdot x_\varkappa^\mu \cdot y_\varkappa^\nu\,.$$

Denn $x_\varkappa^\mu \cdot y_\varkappa^\nu$ ist das geometrische Mittel aus $x_\varkappa^{\mu+\varrho} \cdot y_\varkappa^{\nu+\sigma}$ und $x_\varkappa^{\mu-\varrho} \cdot y_\varkappa^{\nu-\sigma}$. Somit gilt für die aus reellen positiven Größenpaaren x_1, y_1, $\cdots$ x_n, y_n gebildeten Mittelwerthe $\varepsilon_{\mu+\varrho,\nu+\sigma}$, $\varepsilon_{\mu-\varrho,\nu-\sigma}$, $\varepsilon_{\mu,\nu}$ die Ungleichung

$$\varepsilon_{\mu+\varrho,\,\nu+\sigma}^{\mu+\varrho+\nu+\sigma} + \varepsilon_{\mu-\varrho,\,\nu-\sigma}^{\mu-\varrho+\nu-\sigma} > 2 \cdot \varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}\,. \tag{106}$$

Entsprechend ist für positive und negative $x_\varkappa$, $y_\varkappa$

$$x_\varkappa^{2\varrho} \cdot y_\varkappa^{2\sigma}(x_\varkappa^\mu - y_\varkappa^\mu)(x_\varkappa^\nu - y_\varkappa^\nu) > 0\,,$$

wenn μ und ν gleiches Vorzeichen haben, und für positive $x_\varkappa$, $y_\varkappa$

$$x_\varkappa^{\mu+\varrho} \cdot y_\varkappa^{\nu+\sigma} + x_\varkappa^{\mu+\tau} \cdot y_\varkappa^{\nu+v} + x_\varkappa^{\mu-\varrho-\tau} \cdot y_\varkappa^{\nu-\sigma-v} > 3 \cdot x_\varkappa^{\mu} \cdot y_\varkappa^{\nu},$$

so dass unter der angegebenen Bedingung

$$\varepsilon_{2\varrho+\mu+\nu,\,2\sigma}^{2\varrho+2\sigma+\mu+\nu} + \varepsilon_{2\varrho,\,2\sigma+\mu+\nu}^{2\varrho+2\sigma+\mu+\nu} > \varepsilon_{2\varrho+\mu,\,2\sigma+\nu}^{2\varrho+2\sigma+\mu+\nu} + \varepsilon_{2\varrho+\nu,\,2\sigma+\mu}^{2\varrho+2\sigma+\mu+\nu} \tag{107}$$

für die aus beliebigen reellen Größenpaaren gebildeten Mittelwerthe und

$$\varepsilon_{\mu+\varrho,\,\nu+\sigma}^{\mu+\nu+\varrho+\sigma} + \varepsilon_{\mu+\tau,\,\nu+v}^{\mu+\nu+\tau+v} + \varepsilon_{\mu-\varrho-\tau,\,\nu-\sigma-v}^{\mu+\nu-\varrho-\tau-\sigma-v} > 3\,\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu} \tag{108}$$

für die aus reellen, positiven Größenpaaren gebildeten Mittelwerthe.

In diesen beispielsweise angeführten Fällen werden Functionen der Argumente $x_\varkappa$ und $y_\varkappa$ hergestellt, deren Werthe gewissen Einschränkungen unterworfen sind. Bei der Herleitung der Relationen (104) hingegen wurde eine Function $u_\varkappa$ der Argumente $x_\varkappa$ und $y_\varkappa$ gebildet, um aus $u_1, u_2 \ldots u_n$ Mittelwerthe zu gewinnen, deren Beziehungen sich auf die Mittelwerthe $\varepsilon_{\mu,\nu}$ und $\varepsilon_{\varrho,\sigma}$ übertragen. Hiernach stehen überhaupt zwei Wege offen, um Beziehungen für die aus Größenpaaren gebildeten Mittelwerthe abzuleiten. Bezeichnet nämlich $f(x_\varkappa, y_\varkappa)$ für $\varkappa = 1, 2 \ldots n$ eine aus Potenzwerthen $x_\varkappa^\mu \cdot y_\varkappa^\nu$ bestehende Summe, so ist

$$p_1 \cdot f(x_1, y_1) + p_2 \cdot f(x_2, y_2) + \cdots + p_n \cdot f(x_n, y_n)$$

rational durch Mittelwerthpotenzen $\varepsilon_{\mu,\nu}^{\mu+\nu}$ darstellbar. Sind nun die Werthe von $f(x_\varkappa, y_\varkappa)$ gewissen Einschränkungen unterworfen, so gewinnt man auf Grund derselben Ungleichungen für die Mittelwerthe $\varepsilon_{\mu,\nu}$. Setzt man aber $u_1 = f(x_1, y_1)$; $u_2 = f(x_2, y_2)$; $\ldots u_n = f(x_n, y_n)$, so übertragen sich die für die Mittelwerthe

$$\eta_\nu^\nu = p_1 u_1^\nu + p_2 u_2^\nu + \cdots + p_n, u_n^\nu$$

geltenden Beziehungen auf die aus den Größenpaaren $x_\varkappa$, $y_\varkappa$ gebildeten Mittelwerthe $\varepsilon_{\mu,\nu}$.

IV. Abhängigkeitsbestimmungen.

§ 1. C.G., die von variirbaren Constanten abhängen. Fehlerreihen.

Wird eine und dieselbe Größe wiederholt beobachtet, so ergibt sich im allgemeinen, in Folge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, eine Reihe von mehr oder minder verschiedenen Werthen, die einen C.G. bilden. Die Exemplare des C.G. — die einzelnen Beobachtungen — sind von der beobachteten Größe abhängig; denn nur unter dieser Voraussetzung hat es einen Sinn, Beobachtungen anzustellen. Und die Abhängigkeit muss sich darin zeigen, dass eine Veränderung der beobachteten Größe zu einer in bestimmter Weise veränderten Beobachtungsreihe führt. Die beobachtete Größe ist somit ein Parameter der Beobachtungsreihe.

Hieraus erhellt, dass Beobachtungsreihen Beispiele von C.G. darbieten, deren Besonderheit in der Abhängigkeit von Parametern besteht. Für einen und denselben C.G. bleiben die Parameter constant. Verändern sich aber ihre Werthe, so entsteht ein neuer C.G., der eine Transformation des ursprünglichen darstellt; und die Gesammtheit aller Werthe, die den Parametern zuertheilt werden können, bestimmt eine Gruppe zusammengehöriger C.G.

Zwei in dieser Weise zusammengehörige C.G. besitzen verschiedene Mittelwerthe. Ihre Verschiedenheit beruht auf der Verschiedenheit der Parameter. In der Gesetzmäßigkeit, mit der sich die Mittelwerthe ändern, tritt daher die Abhängigkeit des C.-G. von den Parametern zu Tage.

Ist z. B. ein C.G. gegeben, dessen Exemplare (in der Anzahl m) ohne Rücksicht auf Gleichheit und Verschiedenheit durch $a_1, a_2 \ldots a_m$ mit dem arithmetischen Mittel $b = (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) : m$ und den auf b bezogenen Mittelwerthen $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$ bezeichnet werden, und ist nur ein Parameter vorhanden, dessen Aenderung um γ eine gleich große Aenderung aller Exemplare des C.G. erzeugt, — so ist, wenn durch $a'_1, a'_2 \ldots a'_m$ die Exemplare, durch b' das arithmetische Mittel, durch $\varepsilon'_1 = 0, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3 \ldots$ die auf b' bezogenen Mittelwerthe des transformirten C.G. angegeben werden,

$$a'_\varkappa = a_\varkappa + \gamma$$

für $\varkappa = 1, 2 \ldots m$ und folglich

$$b' = b + \gamma; \quad \varepsilon_1' = \varepsilon' = 0; \quad \varepsilon_2' = \varepsilon_2; \quad \varepsilon_3' = \varepsilon_3; \ldots \tag{1}$$

da jeder Abweichung $a_\varkappa' - b'$ eine gleich große $a_\varkappa - b$ zur Seite steht. Wird hingegen neben jenem Parameter noch ein zweiter vorausgesetzt, dessen Aenderung die Werthe $a_1, a_2 \ldots a_m$ in gleichem Verhältnisse beeinflusst, so dass

$$a_\varkappa' = \lambda \cdot a_\varkappa + \gamma$$

für $\varkappa = 1, 2 \ldots m$, so wird

$$b' = \lambda \cdot b + \gamma; \quad \varepsilon_1' = \lambda \cdot \varepsilon_1 = 0; \quad \varepsilon_2' = \lambda \cdot \varepsilon_2; \quad \varepsilon_3' = \lambda \cdot \varepsilon_3; \ldots \tag{2}$$

da nunmehr $a_\varkappa' - b' = \lambda \cdot (a_\varkappa - b)$ zu setzen ist. Im ersten Falle ändert sich somit nur das arithmetische Mittel um den nämlichen Betrag wie der Parameter, während die auf das jeweilige arithmetische Mittel bezogenen Mittelwerthe dieselben bleiben; im zweiten Falle dagegen erleidet das arithmetische Mittel die nämliche lineare Transformation wie die Einzelwerthe und es sind die Verhältnisse der Mittelwerthe unveränderlich.

Demnach muss eine Annahme bezüglich der Parameter eines C.G. durch das Verhalten der Mittelwerthe bei einer Veränderung der Parameter ihre Bestätigung finden; und es ist anderseits möglich, auf Grund einer für die Mittelwerthe zusammengehöriger C.G. constatirten Gesetzmäßigkeit die Form zu erschließen, in der die C.G. von ihren Parametern abhängen.

Ein die Transformation $a_\varkappa' = a_\varkappa + \gamma$ bedingender Parameter ist offenbar vorhanden, wenn eine objectiv gegebene Größe gemessen wird. Denn es ist im allgemeinen gleichgültig, ob man unter gleichen Umständen etwa eine Strecke von 20 oder 30 mm auf einem Maßstabe abträgt, oder die Größe eines Winkels von 15° oder 30° bestimmt, so dass die beobachteten Werthe bei veränderter Größe in der Hauptsache und im Durchschnitt vieler Fälle nur um den Betrag der Größenänderung sich unterscheiden[1]). Man wird daher erwarten,

---

1) Aehnlich sagt Fechner (Collectivmaßlehre, S. 78): »Beobachtungsfehler sind, allgemein gesprochen, wenigstens bezüglich der Messung von Raumlängen, wesentlich unabhängig von der Größe des zu messenden Gegenstandes, insofern nicht mit dessen Größe die Maßmittel sich ändern, sich zusammensetzen, compliciren; denn freilich die Beobachtungsfehler bei Messung einer Meile werden

dass die in den äußeren Verhältnissen und in der Individualität des Beobachters begründeten Fehlbeträge das eine wie das andere Mal, unabhängig von der Größe des gemessenen Gegenstandes, zu nahe den gleichen Mittelwerthen führen, und nur der jeweilige Werth des arithmetischen Mittels verschieden ausfällt.

Dann ist das arithmetische Mittel das Kennzeichen für die wirkliche Größe des gemessenen Gegenstandes, und zwar in der Weise, dass einer Aenderung des Mittels eine gleich große Aenderung des Gegenstandes zur Seite steht. Mangels eines Anhalts über die etwaige Abweichung des arithmetischen Mittels, die durch besondere, bei jeder Größenstufe in gleicher Weise wirkende Fehlerquellen veranlasst werden müsste, wird man daher das arithmetische Mittel ohne weiteres als den gesuchten Größenwerth in Anspruch nehmen.

Dies gilt ohne Rücksicht auf die Mittelwerthe $\varepsilon_1 = 0$, ε_2, $\varepsilon_3 \ldots$, welche die Gruppirung der Fehler um das arithmetische Mittel bestimmen. Die Annahme, dass im arithmetischen Mittel der gesuchte Werth einer wiederholt gemessenen Größe sich darbiete, ist daher von der Voraussetzung eines Fehlergesetzes und insbesondere von der Hypothese, dass das arithmetische Mittel der wahrscheinlichste Werth sei, unabhängig.

Sind die Messungsfehler von der Größe des gemessenen Gegenstandes unabhängig, so ist es gestattet, zwei oder mehr unter gleichen Umständen entstandene Fehlerreihen wie eine einzige zu betrachten, und überhaupt die Fehler der, unter übereinstimmenden Bedingungen vorgenommenen Messungen einer Reihe gleichartiger Größen so aufzufassen, wie wenn sie bei der wiederholten Messung eines einzelnen Gegenstandes entstanden wären.

Dies kommt insbesondere dann zur Geltung, wenn es sich um die Beobachtung verschiedener, von einander abhängiger Größen handelt. Dann bestehen Relationen, welche die Abhängigkeit zum Ausdruck bringen. Die verschiedenen Größen sind daher als Func-

---

größer sein als bei Messung einer Fußlänge, aber nur, weil mehr und zusammengesetztere Operationen zur Messung der ersteren gehören; indess die Beobachtungsfehler bei Messung eines hohen Thermometer- oder Barometerstandes, allgemein gesprochen, nicht größer sind als bei Messung eines niedrigen.«

tionen einer kleineren Anzahl unabhängiger Variablen $\xi, \eta, \zeta \ldots$ aufzufassen, deren Werthe auf Grund der Beobachtungen zu berechnen sind. Ist aber $f(\xi, \eta, \zeta \ldots)$ eine solche Function, so kann sie bekanntlich in eine lineare Form gebracht werden, da man stets hinreichend angenäherte Werthe $\xi_0, \eta_0, \zeta_0 \ldots$ angeben kann, so dass die Function für den in Betracht kommenden Bereich der Argumente $\xi_0 + x, \eta_0 + y, \zeta_0 + z \ldots$ durch

$$f(\xi, \eta, \zeta \ldots) = f(\xi_0, \eta_0, \zeta_0 \ldots) + x \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} + z \cdot \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \cdots$$

darstellbar ist, wo höhere Potenzen und die Producte von $x, y, z \ldots$ vernachlässigt werden dürfen. Jedem beobachteten Werthe tritt somit eine lineare Gleichung von der Form

$$\alpha + \beta x + \gamma y + \delta z + \cdots = 0$$

zur Seite, wo α die Differenz des vorläufig berechneten Werthes $f(\xi_0, \eta_0, \zeta_0 \ldots)$ und des beobachteten Werthes $f(\xi, \eta, \zeta \ldots)$ ist. Und es gilt nun, aus dem Systeme der linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y + \cdots &= 0 \\ \alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 y + \cdots &= 0 \\ \alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 y + \cdots &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

deren Anzahl größer als die Anzahl der Unbekannten $x, y, \ldots$ ist, ein Werthensystem der Unbekannten zu bestimmen.

Nun hat die Einsetzung irgend eines Systems von Werthen $x, y, \ldots$ für die Unbekannten das Auftreten einer Fehlerreihe $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \ldots$ auf Grund der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y + \cdots &= \Delta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 y + \cdots &= \Delta_2 \\ \alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 y + \cdots &= \Delta_3 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

zur Folge, so dass im allgemeinen verschiedenen Werthensystemen $x, y \ldots$ verschiedene Fehlerreihen entsprechen, und umgekehrt durch die Aufstellung einer geeigneten Bedingung, der die Fehlerreihe genügen soll, die Unbekannten bestimmt werden können.

Zu einer solchen Bedingung führt die Anerkennung des Grundsatzes, dass die Beobachtungen einer Reihe zusammengehöriger

Größen so zu behandeln sind, wie wenn sie aus den wiederholten Beobachtungen a_1, a_2, a_3 ... einer und derselben Größe herrührten. In diesem Fall ist das arithmetische Mittel b der gesuchte Werth. Für denselben ist die Summe aus den Quadraten der Fehler $\Delta_1 = a_1 - b$; $\Delta_2 = a_2 - b$; $\Delta_3 = a_3 - b$; ... kleiner als für jeden anderen, von b verschiedenen Werth. Es muss daher auch für die Gleichungen (3)

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \cdots$$

ein Minimum sein. Dies führt dazu, die Unbekannten x, y ... nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den Gleichungen

$$\Delta_1 \cdot \frac{\partial \Delta_1}{\partial x} + \Delta_2 \cdot \frac{\partial \Delta_2}{\partial x} + \Delta_3 \cdot \frac{\partial \Delta_3}{\partial x} + \cdots = 0$$

$$\Delta_1 \cdot \frac{\partial \Delta_1}{\partial y} + \Delta_2 \cdot \frac{\partial \Delta_2}{\partial y} + \Delta_3 \cdot \frac{\partial \Delta_3}{\partial y} + \cdots = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

zu berechnen.

Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate beruht demnach wesentlich auf der Voraussetzung, dass die Beobachtungsfehler von der beobachteten Größe unabhängig sind[1]). Denn nur unter dieser Voraussetzung dürfen die bei der Messung verschiedener, zusammengehöriger Größen auftretenden Fehler so aufgefasst werden, wie wenn sie bei der wiederholten Messung einer und derselben Größe entstanden wären. — Die Häufigkeit, mit welcher die verschiedenen Fehler sich einstellen, kommt hingegen ebenso wenig wie bei der Annahme, dass das arithmetische Mittel aus den wiederholten Messungen einer Größe den gesuchten Werth angebe, in Betracht. Die Methode der kleinsten Quadrate ist daher nicht an die Geltung eines bestimmten Fehlergesetzes gebunden. Sie ist insbesondere von dem Bestehen des gewöhnlichen Fehlergesetzes, auf welches sie in der Regel gegründet wird, unabhängig.

Ist jedoch die Beobachtungsreihe nicht in der einfachen (die Transformation $a'_x = a_x + \gamma$ bedingenden) Weise von der Größe des

---

1) Man kann noch hinzufügen, dass die Fehler für den Fall nicht linearer Functionen $f(\xi, \eta, \zeta \ldots)$ klein genug sein müssen, um in der näherungsweise gültigen linearen Form (3) darstellbar zu sein.

beobachteten Objectes abhängig, so ist das arithmetische Mittel für sich allein zur Charakterisirung der Abhängigkeit nicht ausreichend: es müssen noch die auf das arithmetische Mittel bezogenen Mittelwerthe hinzutreten, die alsdann eine Bedeutung für das beobachtete Object gewinnen, und nicht mehr bloß durch die zufällig wechselnden äußeren Umstände und durch die individuellen Besonderheiten des Beobachters bedingt werden[1]).

Die Abhängigkeit von Parametern ist aber nicht etwa auf Beobachtungsreihen eingeschränkt. Jede Gruppe zusammengehöriger C.G. fordert vielmehr die Annahme von Parametern und, wenn möglich, die Zerfällung in solche Untergruppen, die nur von einem Parameter abhängen. Und zur Feststellung der Abhängigkeit dient die Angabe der Veränderung, welche der Ausgangswerth und die auf den Ausgangswerth bezogenen Mittelwerthe des C.G. bei einer Veränderung des Parameters erleiden. In dieser Weise ist z. B. die Variation einer Pflanzen- oder Thierspecies im Zusammenhang mit dem Wechsel bestimmter Existenzbedingungen (wie Bodenbeschaffenheit, Klima, Ernährungsweise) zu untersuchen und festzustellen. Die Theorie der C.G. tritt alsdann in den Dienst entwicklungsgeschichtlicher Probleme und wird zur Grundlage für eine mit mathematischen Hülfsmitteln arbeitende Entwicklungslehre.

Ein besonderer Fall solcher Abhängigkeit liegt vor, wenn ein C.G. aus zwei oder mehr C.G. von bestimmter Beschaffenheit zusammengesetzt ist. Werden z. B. nur zwei C.G. als Componenten vorausgesetzt, von welchen der eine durch das arithmetische Mittel b_1 und die auf b_1 bezogenen Mittelwerthe $\varepsilon_{11} = 0$, ε_{12}, ε_{13} . . . und der andere durch das arithmetische Mittel b_2 und die auf b_2 bezogenen Mittelwerthe $\varepsilon_{21} = 0$, ε_{22}, ε_{23} . . . bestimmt wird, und verhalten sich die Anzahlen der Exemplare beider C.G. wie $p : q$, wo $p + q = 1$, so gelten für den zusammengesetzten C.G. mit dem arithmetischen Mittel b und den auf b bezogenen Mittelwerthen ε_ν die Beziehungen:

---

1) Dies gilt insbesondere bezüglich der Beobachtungsreihen der experimentellen Psychologie und der Psychophysik.

$$\left.\begin{aligned} b &= pb_1 + qb_2; \\ \varepsilon_\nu^\nu &= p\cdot\left\{\varepsilon_{1,\nu}^\nu + \binom{\nu}{1}\varepsilon_{1,\nu-1}^{\nu-1}(b_1-b) + \cdots + (b_1-b)^\nu\right\} \\ &+ q\cdot\left\{\varepsilon_{2,\nu}^\nu + \binom{\nu}{1}\varepsilon_{2,\nu-1}^{\nu-1}(b_2-b) + \cdots + (b_2-b)^\nu\right\} \\ \nu &= 1,\,2,\,3\,\ldots. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Hieraus erkennt man, wie die Werthe b und ε_ν des zusammengesetzten C.G. sich ändern müssen, wenn die Art und Weise der Zusammensetzung, die in den Werthen p und q zum Ausdruck gelangt, und die Constanten b_1, ε_{12}, ε_{13}.. oder b_2, ε_{22}, ε_{23}.. in Folge eines Entwicklungsprocesses der einen oder der anderen Componente variiren.

§ 2. C.G., deren Merkmale in wechselweiser Abhängigkeit variiren. Correlation.

Wird ein C.G. durch das Variiren von zwei Merkmalen a und b erzeugt, so können die Exemplare des C.G. sowohl mit Rücksicht auf a oder b allein wie auch mit Rücksicht auf beide Merkmale zugleich geordnet werden. Man findet alsdann, wenn der ganze Begriffsumfang des C.G. oder ein dem Gesammtumfange ähnlicher Theil untersucht wird, für jede Abstufung des einen und des anderen Merkmals und für jede Combination der Abstufungen den zugehörigen Häufigkeits- oder Wahrscheinlichkeitswerth. Werden die möglichen Abstufungen von a und b durch die reellen, ihrer Größe nach aufeinanderfolgenden Zahlen $a_1, a_2 \ldots a_r$ und $b_1, b_2 \ldots b_s$ bezeichnet, und findet man für $a_\varkappa$, b_λ und die Combination $(a_\varkappa, b_\lambda)$ die Wahrscheinlichkeitswerthe $u_\varkappa$, v_λ, $p_{\varkappa\lambda}$ (wo $\varkappa$ die Werthe $1, 2 \ldots r$; λ die Werthe $1, 2 \ldots s$ annehmen kann), so stellt sich der Ertrag der Untersuchung des C.G. in folgenden drei Vertheilungstafeln dar.

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \ldots & a_r \\ \hline u_1 & u_2 & \ldots & u_r \end{array} \tag{5}$$

$$\begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \ldots & b_s \\ \hline v_1 & v_2 & \ldots & v_s \end{array} \tag{6}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & \ldots & a_r \\ \hline b_1 & p_{11} & p_{21} & \ldots & p_{r1} \\ b_2 & p_{12} & p_{22} & \ldots & p_{r2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_s & p_{1s} & p_{2s} & \ldots & p_{rs} \end{array} \tag{7}$$

Es ist hier:

$$u_\varkappa = p_{\varkappa 1} + p_{\varkappa 2} + \cdots + p_{\varkappa s}$$
$$v_\lambda = p_{1\lambda} + p_{2\lambda} + \cdots + p_{r\lambda}$$
$$1 = \sum u_\varkappa = \sum v_\lambda = \sum p_{\varkappa\lambda}$$

Nun lassen sich jedem der r Werthe $u_\varkappa$ je s Werthe $v_{\varkappa 1}, v_{\varkappa 2} \ldots v_{\varkappa s}$ und jedem der s Werthe v_λ je r Werthe $u_{1\lambda}, u_{2\lambda} \ldots u_{r\lambda}$ zuordnen, so dass einerseits für $\varkappa = 1, 2 \ldots r$

$$p_{\varkappa 1} = u_\varkappa \cdot v_{\varkappa 1}; \quad p_{\varkappa 2} = u_\varkappa \cdot v_{\varkappa 2}; \quad \ldots \; p_{\varkappa s} = u_\varkappa \cdot v_{\varkappa s}$$
$$v_{\varkappa 1} + v_{\varkappa 2} + \cdots + v_{\varkappa s} = 1,$$

und anderseits für $\lambda = 1, 2 \ldots s$

$$p_{1\lambda} = v_\lambda \cdot u_{1\lambda}; \quad p_{2\lambda} = v_\lambda \cdot u_{2\lambda}; \quad \ldots \; p_{r\lambda} = v_\lambda \cdot u_{r\lambda}$$
$$u_{1\lambda} + u_{2\lambda} + \cdots + u_{r\lambda} = 1.$$

Die Vertheilungstafel (7) kann daher ebensowohl in der Form

	a_1	a_2	$\ldots$	a_r
b_1	$u_1 \cdot v_{11}$	$u_2 \cdot v_{21}$	$\ldots$	$u_r \cdot v_{r1}$
b_2	$u_1 \cdot v_{12}$	$u_2 \cdot v_{22}$	$\ldots$	$u_r \cdot v_{r2}$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$		$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$		$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$		$\cdot$
b_s	$u_1 \cdot v_{1s}$	$u_2 \cdot v_{2s}$	$\ldots$	$u_r \cdot v_{rs}$

(7a)

wie auch in der Form

	a_1	a_2	$\ldots$	a_r
b_1	$v_1 \cdot u_{11}$	$v_1 \cdot u_{21}$	$\ldots$	$v_1 \cdot u_{r1}$
b_2	$v_2 \cdot u_{12}$	$v_2 \cdot u_{22}$	$\ldots$	$v_2 \cdot u_{r2}$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$		$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$		$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$		$\cdot$
b_s	$v_s \cdot u_{1s}$	$v_s \cdot u_{2s}$	$\ldots$	$v_s \cdot u_{rs}$

(7b)

dargestellt werden.

Es wird sonach bei Festhalten der Abstufung $a_\varkappa$ das Variiren des Merkmals b innerhalb der Reihe $b_1, b_2 \ldots b_s$ durch die Wahrscheinlichkeitswerthe $v_{\varkappa 1}, v_{\varkappa 2} \ldots v_{\varkappa s}$ geregelt, während nach Bestimmung einer Abstufung b_λ die Abstufungen $a_1, a_2 \ldots a_r$ des Merkmals a den Wahrscheinlichkeitswerthen $u_{1\lambda}, u_{2\lambda} \ldots u_{r\lambda}$ entsprechend auftreten. Das Variiren des Merkmals b erfolgt daher in

Abhängigkeit von dem Merkmal a, wenn die Werthe $v_{\varkappa 1}, v_{\varkappa 2} \ldots v_{\varkappa s}$ mit $\varkappa$ sich ändern. Dann ändern sich zugleich die Werthe $u_{1\lambda}, u_{2\lambda} \ldots u_{r\lambda}$ mit λ, so dass alsdann auch das Merkmal a in Abhängigkeit von dem Merkmale b variirt. Es ist hingegen keine Abhängigkeit vorhanden, wenn $v_{\varkappa 1}, v_{\varkappa 2} \ldots v_{\varkappa s}$ von $\varkappa$ und mithin auch $u_{1\lambda}, u_{2\lambda} \ldots u_{r\lambda}$ von λ unabhängig ist. In diesem Falle wird

$$v_\lambda = v_{1\lambda} = v_{2\lambda} = \cdots = v_{r\lambda},$$
$$u_\varkappa = u_{\varkappa 1} = u_{\varkappa 2} = \cdots = u_{\varkappa s},$$

so dass die Darstellungsformen (7a) und (7b) mit einander übereinstimmen und jede in der Gestalt

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & \ldots & a_r \\ \hline b_1 & u_1 \cdot v_1 & u_2 \cdot v_1 & \ldots & u_r \cdot v_1 \\ b_2 & u_1 \cdot v_2 & u_2 \cdot v_2 & \ldots & u_r \cdot v_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_s & u_1 \cdot v_s & u_2 \cdot v_s & \ldots & u_r \cdot v_s \end{array} \tag{7c}$$

sich darbietet.

Man gewinnt hieraus die Erkenntniss:

Zwei Merkmale a und b eines C.G. variiren unabhängig von einander, wenn für die Wahrscheinlichkeitswerthe u, v, p der Vertheilungstafeln (5), (6), (7) die Relationen

$$p_{\varkappa\lambda} = u_\varkappa \cdot v_\lambda \tag{8}$$

für $\varkappa = 1, 2 \ldots r$; $\lambda = 1, 2 \ldots s$ Geltung haben. Die Merkmale variiren hingegen in wechselweiser Abhängigkeit — es besteht Correlation — wenn die Wahrscheinlichkeitswerthe diesen Relationen nicht oder nur theilweise genügen.

Demgemäß ist das Bestehen von Correlation der allgemeine, in der Regel auftretende Fall, während das gänzliche Fehlen von Correlation nur ausnahmsweise zu erwarten ist — ganz ebenso, wie die Symmetrie eines C.G. nur einen Ausnahmefall gegenüber der Asymmetrie darstellt.

Die Anwendbarkeit der Relationen (8) wird aber dadurch beeinträchtigt, dass die Wahrscheinlichkeitswerthe im allgemeinen nur innerhalb gewisser Grenzen zuverlässig bestimmt werden können. Es ist daher angezeigt, auf Grund jener Relationen andere Kennzeichen der Correlation zu entwickeln, die sich auf die Mittelwerthe der Vertheilungstafel (7) stützen.

Werden die auf ein beliebiges Werthenpaar (c, d) bezogenen Mittelwerthe für $\varrho = 0, 1, 2 \ldots; \sigma = 0, 1, 2 \ldots$ durch

$$\varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} = \sum_{\varkappa,\lambda} p_{\varkappa\lambda}(a_\varkappa - c)^\varrho \cdot (b_\lambda - d)^\sigma \tag{9}$$

definirt, so ist, wenn keine Correlation besteht, mit Rücksicht auf (8)

$$\varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} = \sum_\varkappa u_\varkappa(a_\varkappa - c)^\varrho \cdot \sum_\lambda v_\lambda(b_\lambda - d)^\sigma.$$

Es ist aber der Bedeutung von $u_\varkappa$ und v_λ zufolge

$$\varepsilon_{\varrho,0}^{\varrho} = \sum_\varkappa u_\varkappa(a_\varkappa - c)^\varrho,$$

$$\varepsilon_{0,\sigma}^{\sigma} = \sum_\lambda v_\lambda(b_\lambda - d)^\sigma,$$

so dass

$$\varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} = \varepsilon_{\varrho,0}^{\varrho} \cdot \varepsilon_{0,\sigma}^{\sigma}. \tag{10}$$

Umgekehrt folgen aus dem Bestehen dieser Gleichungen für $\varrho = 0, 1 \ldots r-1$; $\sigma = 0, 1 \ldots s-1$ die Beziehungen $p_{\varkappa\lambda} = u_\varkappa \cdot v_\lambda$, so dass die Relationen (10) an die Stelle der Relationen (8) treten können. Demgemäß gilt der Satz:

Zwei Merkmale a und b eines C.G. variiren unabhängig von einander, wenn die Mittelwerthe $\varepsilon_{\varrho,\sigma}$ der Vertheilungstafel (7) den Bedingungen

$$\varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} = \varepsilon_{\varrho,0}^{\varrho} \cdot \varepsilon_{0,\sigma}^{\sigma}$$

für $\varrho = 1, 2 \ldots r-1$; $\sigma = 1, 2 \ldots s-1$ genügen. Es besteht hingegen Correlation zwischen den Merkmalen, wenn diese Bedingungen nicht oder nur theilweise erfüllt werden.

Die Werthe der Differenzen

$$\varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} - \varepsilon_{\varrho,0}^{\varrho} \cdot \varepsilon_{0,\sigma}^{\sigma} = \varDelta_{\varrho,\sigma} \tag{11}$$

für $\varrho = 1, 2 \ldots r-1$; $\sigma = 1, 2 \ldots s-1$ bieten sich somit als Kennzeichen der Correlation dar. Sie müssen sämmtlich gleich

Null sein, wenn das Fehlen der Correlation sicher gestellt sein soll; während jeder von Null verschiedene Werth das Vorhandensein von Correlation bezeugt.

Die Correlation zwischen den Merkmalen a und b des durch die Vertheilungstafel (7) dargestellten C.G. wird folglich durch die $(r-1)\cdot(s-1)$ Werthe

$$\varDelta_{\varrho,\sigma} = \overset{\varrho+\sigma}{\varepsilon}_{\varrho,\sigma} - \overset{\varrho}{\varepsilon}_{\varrho,0} \cdot \overset{\sigma}{\varepsilon}_{0,\sigma}$$

für $\varrho = 1, 2 \ldots r-1$; $\sigma = 1, 2 \ldots s-1$ vollständig bestimmt und kann so vielgestaltig sein wie die Reihe dieser Werthe.

Es werden allerdings in der Regel — von C.G. mit sehr beschränkter Vertheilungstafel abgesehen — die nach (II, § 6) zur vollständigen Bestimmung des C.G. erforderlichen $r \cdot s - 1$ Mittelwerthe $\varepsilon_{\varrho,\sigma}$ und demzufolge die $(r-1)\cdot(s-1)$ Werthe $\varDelta_{\varrho,\sigma}$ nicht insgesammt zur Verfügung stehen. Dies hindert aber keineswegs, auch bei einem C.G., der durch eine kleinere Anzahl von Mittelwerthen charakterisirt wird, von fehlender oder vorhandener Correlation zu reden — soweit dieselbe durch die thatsächlich berechneten Mittelwerthe zur Kenntniss gebracht wird. So werden beispielsweise bei einem C.G., der durch die Mittelwerthe ε_{10}, ε_{01}, ε_{11}, ε_{20}, ε_{02}, ε_{21}, ε_{12}, ε_{22} charakterisirt wird, die Werthe

$$\begin{aligned}
\overset{2}{\varepsilon}_{11} - \varepsilon_{10} \cdot \varepsilon_{01} &= \varDelta_{11} \\
\overset{3}{\varepsilon}_{21} - \overset{2}{\varepsilon}_{20} \cdot \varepsilon_{01} &= \varDelta_{21} \\
\overset{3}{\varepsilon}_{12} - \varepsilon_{10} \cdot \overset{2}{\varepsilon}_{02} &= \varDelta_{12} \\
\overset{4}{\varepsilon}_{22} - \overset{2}{\varepsilon}_{20} \cdot \overset{2}{\varepsilon}_{02} &= \varDelta_{22}
\end{aligned}$$

das Urtheil über Correlation bedingen (vergl. das Beispiel in V, § 4). Es ist hingegen nur als ein Nothbehelf anzusehen, wenn bloß ein einzelner Zahlenwerth als »Correlationscoefficient« der Bestimmung der Correlation zu Grunde gelegt wird[1]).

---

1) Zur Ableitung eines solchen Correlationscoefficienten führt die von Galton zuerst entwickelte und durch Pearson wesentlich geförderte Auffassung der

Um nun die Werthe $\varDelta_{\varrho,\sigma}$ für besonders einfach gestaltete Vertheilungstafeln etwas näher zu bestimmen, mögen die $r \cdot s$ Werthenpaare $(a_\varkappa - c,\ b_\lambda - d)$ mit Beiseitelassen der leeren Paare (für welche das zugehörige $p_{\varkappa\lambda}$ gleich Null ist) in eine einzige Reihe von n Gliedern geordnet und durch (x_1, y_1); $(x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$ mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeitswerthen $p_1, p_2 \ldots p_n$ bezeichnet werden. Zugleich sollen die Werthe x und y als rechtwinkelige Coordinaten der Ebene gedeutet werden. Dann tritt zur Definition der Mittelwerthe an Stelle von (9) [entsprechend der Formel III, (96a)]:

$$\varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} = p_1 \cdot x_1^\varrho y_1^\sigma + p_2 \cdot x_2^\varrho y_2^\sigma + \cdots + p_n \cdot x_n^\varrho y_n^\sigma. \tag{12}$$

Durch Multiplication mit $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ ergibt sich hieraus

$$\varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} = p_1^2 \cdot x_1^\varrho y_1^\sigma + p_2^2 \cdot x_2^\varrho y_2^\sigma + \cdots$$
$$+ p_1 p_2 (x_1^\varrho y_1^\sigma + x_2^\varrho y_2^\sigma) + \cdots$$

Correlation. Galton sagt (Correlations and their measurement, chiefly from anthropometric data; Proceedings Roy. Soc. London; Vol. XLV, 1888, S. 135): »Two variable organs are said to be correlated when the variation of the one is accompanied on the average by more ore less variation of the other, and in the same direction. Thus the length of the arm is said to be correlated with that of the leg, because a person with a long arm has usually a long leg and conversely.« Dem entsprechend gründet Galton die Bestimmung der Correlation darauf, dass zu jedem Werthe $a_\varkappa$ ein mittlerer Werth $p_{\varkappa 1} b_1 + p_{\varkappa 2} b_2 + \cdots + p_{\varkappa s} b_s$ und zu jedem Werthe b_λ ein mittlerer Werth $p_{1\lambda} a_1 + p_{2\lambda} a_2 + \cdots + p_{r\lambda} a_r$ gehört. — Pearson hingegen definirt (Mathematical contributions to the theory of evolution. III. Regression, heredity and panmixia. Philosophical Transactions Roy. Soc. London; Vol. 187 A, 1896, S. 257): »Two organs in the same individual, or in a connected pair of individuals, are said to be correlated, when a series of the first organ of a definite size being selected, the mean of the sizes of the corresponding second organ is found to be a function of the size of the selected first organ. If the mean is independent of this size, the organs are said to be non-correlated. Correlation is defined mathematically by any constant or series of constants, which determine the above function.« Unter Voraussetzung des »normalen Vertheilungsgesetzes«, das bei Beschränkung auf eine Variable in das gewöhnliche Fehlergesetz übergeht, findet sodann Pearson die Correlation bestimmt durch den am Schluss dieses Paragraphen (15b) mitgetheilten Werth. — Eine Darlegung der Methode Galton's und Pearson's gibt Duncker »die Methode der Variationsstatistik«, Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen, VIII, 1899, S. 148.

Subtrahirt man hiervon das Product

$$\varepsilon^{\varrho}_{\varrho,0} \cdot \varepsilon^{\sigma}_{0,\sigma} = p_1^2 \cdot x_1^{\varrho} y_1^{\sigma} + p_2^2 \cdot x_2^{\varrho} y_2^{\sigma} + \cdots$$
$$+ p_1 p_2 (x_1^{\varrho} y_2^{\sigma} + x_2^{\varrho} y_1^{\sigma}) + \cdots,$$

so erhält man

$$\varepsilon^{\varrho+\sigma}_{\varrho,\sigma} - \varepsilon^{\varrho}_{\varrho,0} \cdot \varepsilon^{\sigma}_{0,\sigma} = p_1 p_2 (x_1^{\varrho} - x_2^{\varrho})(y_1^{\sigma} - y_2^{\sigma}) + \cdots \tag{13}$$

Demgemäß ist der durch (11) definirte Werth $\varDelta_{\varrho,\sigma}$ jedenfalls dann positiv, wenn für alle voneinander verschiedenen Werthenpaare (x_μ, y_μ), (x_ν, y_ν) die Producte

$$(x_\mu^{\varrho} - x_\nu^{\varrho})(y_\mu^{\sigma} - y_\nu^{\sigma})$$

positiv sind. Bieten jedoch diese Producte durchweg negative Werthe dar, so ist auch $\varDelta_{\varrho,\sigma}$ jedenfalls negativ.

Um diese Bestimmungen zu verdeutlichen, werde in der xy-Ebene eine Curve vorausgesetzt, auf welcher die n Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) ... (x_n, y_n) liegen.

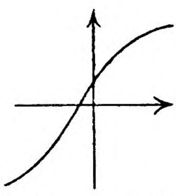
Besteht diese Curve aus einem einzigen, durchweg steigenden Zuge (Fig. 3a), der im übrigen beliebig verlaufen möge, so wachsen die Ordinaten y, wenn die Abscissen x wachsen. Es ist daher, wenn $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ zugleich $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$. Dann bestehen aber auch für $\varrho = 1, 2, 3 \ldots$; $\sigma = 1, 2, 3 \ldots$ die Ungleichungen

$$x_1^{2\varrho-1} < x_2^{2\varrho-1} < \cdots < x_n^{2\varrho-1},$$
$$y_1^{2\sigma-1} < y_2^{2\sigma-1} < \cdots < y_n^{2\sigma-1},$$

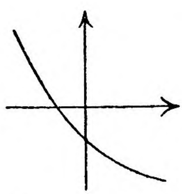
so dass alle Producte

$$(x_\mu^{2\varrho-1} - x_\nu^{2\varrho-1}) \cdot (y_\mu^{2\sigma-1} - y_\nu^{2\sigma-1}),$$

für welche μ von ν verschieden ist, positiv sind. — Diese Producte sind hingegen insgesammt negativ, wenn der Curvenzug durchweg fällt (Fig. 3b), so dass bei wachsenden x die y abnehmen; denn nun gelten die Ungleichungen



$\varDelta_{2\varrho-1,2\sigma-1}$ pos.
Fig. 3a.



$\varDelta_{2\varrho-1,2\sigma-1}$ neg.
Fig. 3b.

$$x_1^{2\varrho-1} < x_2^{2\varrho-1} < \cdots < x_n^{2\varrho-1},$$
$$y_1^{2\sigma-1} > y_2^{2\sigma-1} > \cdots > y_n^{2\sigma-1}.$$

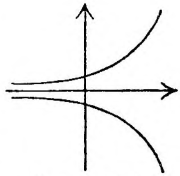
Verläuft jener Curvenzug vollständig im Gebiete der positiven Ordinaten und wird demselben der zur x-Axe symmetrische (im

Gebiete der negativen Ordinaten verlaufende) beigesellt, so möge die aus beiden Zügen bestehende Curve (Fig. 4) durchweg steigend oder durchweg fallend heißen, je nachdem die absoluten Beträge der Ordinaten y bei wachsendem x ständig zunehmen oder ständig abnehmen. Dann ist für beliebige, auf den beiden Zweigen einer durchweg steigenden Curve liegende Punkte $|y_1| < |y_2| < \cdots < |y_n|$, wenn $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Es bestehen daher für $\varrho = 1, 2, 3 \ldots$; $\sigma = 1, 2, 3 \ldots$ die Ungleichungen

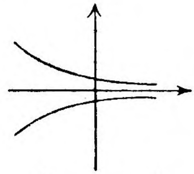
$$x_1^{2\varrho-1} < x_2^{2\varrho-1} < \cdots < x_n^{2\varrho-1},$$
$$y_1^{2\sigma} < y_2^{2\sigma} < \cdots < y_n^{2\sigma},$$

so dass die Producte

$$(x_\mu^{2\varrho-1} - x_\nu^{2\varrho-1}) \cdot (y_\mu^{2\sigma} - y_\nu^{2\sigma}),$$



$\Delta_{2\varrho-1,\,2\sigma}$ pos.
Fig. 4a.



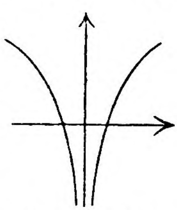
$\Delta_{2\varrho-1,\,2\sigma}$ neg.
Fig. 4b.

wenn μ nicht gleich ν ist, positiv sind. — Zugleich erhellt, dass diese Producte insgesammt negativ sind, wenn die Curve durchweg fällt, da alsdann die beiden Reihen von Ungleichungen

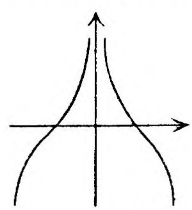
$$x_1^{2\varrho-1} < x_2^{2\varrho-1} < \cdots < x_n^{2\varrho-1}$$
$$y_1^{2\sigma} > y_2^{2\sigma} > \cdots > y_n^{2\sigma}$$

aneinander geknüpft sind.

Gehört hingegen der anfänglich ins Auge gefasste, durchweg steigende oder durchweg fallende Curvenzug völlig dem Gebiete der positiven Abscissen an, und wird demselben der zur y-Axe symmetrische zugeordnet, so soll auch die aus beiden Zügen zusammengesetzte Curve (Fig. 5) durchweg steigend oder durchweg fallend genannt werden, je nachdem das eine oder das andere von dem im positiven Abscissengebiete verlaufenden Zuge gilt. Dann sind — wie ohne weiteres klar ist — die Producte



$\Delta_{2\varrho,\,2\sigma-1}$ pos.
Fig. 5a.

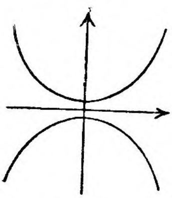


$\Delta_{2\varrho,\,2\sigma-1}$ neg.
Fig. 5b.

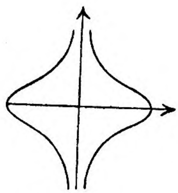
$$(x_\mu^{2\varrho} - x_\nu^{2\varrho}) \cdot (y_\mu^{2\sigma-1} - y_\nu^{2\sigma-1})$$

für verschiedene Werthe μ und ν alle positiv oder alle negativ, wenn die Punkte beliebig auf einer durchweg steigenden oder durchweg fallenden Curve gelagert sind.

Schließlich soll eine Curve auch dann noch als durchweg steigend oder durchweg fallend gelten, wenn sie aus vier zur x-Axe und y-Axe symmetrischen Zügen zusammengesetzt ist, von welchen jeder ganz innerhalb je eines der vier von den Coordinatenaxen gebildeten Ebenenquadranten sich hält, und wenn für jeden Zug die Zunahme des absoluten Betrags der Abscissen ausnahmslos von einer Zunahme oder Abnahme des absoluten Betrags der Ordinaten begleitet ist (Fig. 6). Dann gelten für beliebige Punkte dieser Curve die Ungleichungen



$\Delta_{2\varrho, 2\sigma}$ pos.
Fig. 6a.



$\Delta_{2\varrho, 2\sigma}$ neg.
Fig. 6b.

$$x_1^{2\varrho} < x_2^{2\varrho} < \cdots < x_n^{2\varrho}$$
$$y_1^{2\sigma} < y_2^{2\sigma} < \cdots < y_n^{2\sigma}$$

bei ständigem Wachsen, und die Ungleichungen

$$x_1^{2\varrho} < x_2^{2\varrho} < \cdots < x_n^{2\varrho}$$
$$y_1^{2\sigma} > y_2^{2\sigma} > \cdots > y_n^{2\sigma}$$

bei ständigem Fallen. Es sind daher die Producte

$$(x_\mu^{2\varrho} - x_\nu^{2\varrho}) \cdot (y_\mu^{2\sigma} - y_\nu^{2\sigma}),$$

wenn μ von ν verschieden ist, alle positiv für eine ständig wachsende und alle negativ für eine ständig fallende Curve.

Hieraus ergibt sich folgende Erkenntniss bezüglich der Werthe $\Delta_{\varrho,\sigma}$ für $\varrho = 1, 2, 3 \ldots$; $\sigma = 1, 2, 3 \ldots$

Liegen die Punkte mit den Abscissen $a_\varkappa - c$ und den Ordinaten $b_\lambda - d$ auf einem einzigen Curvenzug, so ist $\Delta_{2\varrho-1, 2\sigma-1}$ nothwendig positiv oder negativ, je nachdem der im übrigen beliebig verlaufende Curvenzug durchweg steigt oder durchweg fällt. Gehören jene Punkte den beiden Zweigen einer zur x-Axe symmetrischen und durch die x-Axe getrennten Curve an, so ist $\Delta_{2\varrho-1, 2\sigma}$ nothwendig positiv oder negativ, je nachdem der im Gebiete der positiven Ordinaten verlaufende Zug durchweg steigt oder durchweg fällt. Besteht hingegen die Curve aus zwei zur y-Axe symmetrischen und durch die y-Axe getrennten Zweigen, so ist $\Delta_{2\varrho, 2\sigma-1}$ nothwendig positiv oder negativ, je nachdem der dem Gebiete der positiven Abscissen angehörende

Zug durchweg steigt oder fällt. Wird schließlich die Curve aus vier, zur x-Axe und y-Axe symmetrischen und durch diese Axen getrennten Zügen gebildet, so ist $\varDelta_{2\varrho, 2\sigma}$ nothwendig positiv oder negativ, je nachdem der im Bereiche der positiven x und positiven y sich erstreckende Zweig durchweg steigt oder durchweg fällt. — Demgemäß sind alle Werthe $\varDelta_{\varrho, \sigma}$ nothwendig positiv oder negativ, wenn jene Punkte einem einzigen, auf das Gebiet der positiven x und positiven y beschränkten, durchweg steigenden oder durchweg fallenden Curvenzuge angehören. Es gilt ferner das Gleiche für alle Werthe $\varDelta_{\varrho, 2\sigma}$, wenn der Curvenzug nur das Gebiet der negativen Ordinaten meidet, und für alle Werthe $\varDelta_{2\varrho, \sigma}$, wenn der Curvenzug bloß dem Bereiche der negativen Abscissen fern bleibt.

Ist insbesondere der durchweg steigende oder durchweg fallende Curvenzug eine Gerade, die durch den Coordinatenanfangspunkt geht, so genügen die Werthenpaare (x_1, y_1); (x_2, y_2) ... (x_n, y_n) den Bedingungen $y_1 = \lambda x_1$; $y_2 = \lambda x_2$ ... $y_n = \lambda x_n$. Es ist daher in diesem besonderen Falle

$$\varepsilon_{\varrho, \sigma}^{\varrho+\sigma} = \lambda^{\sigma}\, \varepsilon_{\varrho+\sigma, 0}^{\varrho+\sigma} = \frac{1}{\lambda^{\varrho}}\, \varepsilon_{0, \varrho+\sigma}^{\varrho+\sigma}$$

oder, nach Elimination von λ und Ausziehen der $(\varrho + \sigma)$-ten Wurzel (wenn man bei geradzahligem $\varrho + \sigma$ und negativem $\varepsilon_{\varrho, \sigma}^{\varrho+\sigma}$ vom Vorzeichen absieht),

$$\varepsilon_{\varrho, \sigma}^{\varrho+\sigma} = \varepsilon_{\varrho+\sigma, 0}^{\varrho} \cdot \varepsilon_{0, \varrho+\sigma}^{\sigma}, \tag{14}$$

so dass die Differenzen $\varDelta_{\varrho, \sigma}$ bei dieser ganz speciellen Art von Correlation durch

$$\varDelta'_{\varrho, \sigma} = \varepsilon_{\varrho+\sigma, 0}^{\varrho} \cdot \varepsilon_{0, \varrho+\sigma}^{\sigma} - \varepsilon_{\varrho, 0}^{\varrho} \cdot \varepsilon_{0, \sigma}^{\sigma}$$

dargestellt werden. Nun ist für geradzahlige Werthe $\varrho + \sigma$ stets $\varepsilon_{\varrho+\sigma, 0} > \varepsilon_{\varrho, 0}$ und $\varepsilon_{0, \varrho+\sigma} > \varepsilon_{0, \sigma}$ (da weder ϱ noch σ gleich Null ist), so dass die angegebenen Differenzen positiv und von Null verschieden sind. Man kann darum für geradzahlige $\varrho + \sigma$ an Stelle von (11) auch die Quotienten

$$\frac{\varDelta_{\varrho, \sigma}}{\varDelta'_{\varrho, \sigma}} = \frac{\varepsilon_{\varrho, \sigma}^{\varrho+\sigma} - \varepsilon_{\varrho, 0}^{\varrho} \cdot \varepsilon_{0, \sigma}^{\sigma}}{\varepsilon_{\varrho+\sigma, 0}^{\varrho} \cdot \varepsilon_{0, \varrho+\sigma}^{\sigma} - \varepsilon_{\varrho, 0}^{\varrho} \cdot \varepsilon_{0, \sigma}^{\sigma}} \tag{15}$$

als Kennzeichen der Correlation verwenden. Man erhält so für $\varrho = \sigma = 1$

$$\frac{\varDelta_{11}}{\varDelta'_{11}} = \frac{\varepsilon_{11}^2 - \varepsilon_{10} \cdot \varepsilon_{01}}{\varepsilon_{20} \cdot \varepsilon_{02} - \varepsilon_{10} \cdot \varepsilon_{01}} \tag{15a}$$

oder, wenn die Ausgangswerthe c und d — wie in der Regel geschehen wird — so gewählt werden, dass $\varepsilon_{10} = \varepsilon_{01} = 0$,

$$\frac{\varDelta_{11}}{\varDelta'_{11}} = \frac{\varepsilon_{11}^2}{\varepsilon_{20} \cdot \varepsilon_{02}}. \tag{15b}$$

Dieser zwischen $+1$ und -1 schwankende Zahlenwerth ist der »Correlationscoefficient« Pearson's, der hier als erstes Glied in einer unbegrenzt fortsetzbaren Reihe von Correlationscoefficienten auftritt. Diese Quotienten können aber nur dann zweckmäßig zur Bestimmung des correlativen Verhaltens verwendet werden, wenn es sich unzweifelhaft um die angegebene ganz specielle Art von Correlation handelt. Liegen nämlich die Punkte (x_1, y_1); $(x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$ nicht auf einer Geraden, sondern auf einem einfachen Curvenzuge anderer Art, so treten an Stelle von (14) andere Relationen, die in gleicher Weise die Correlation in vollkommener Ausbildung charakterisiren.

V. Die Anwendung der Theorie.

§ 1. Die Berechnung der Mittelwerthe ε_ν.

a. Die Herstellung äquidistanter a und die Wahl des Ausgangswerthes.

Wollte man die Mittelwerthe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\nu$ der Vertheilungstafel

$$\frac{a_1, \quad a_2, \quad a_3 \ \ldots \ a_n}{z_1, \quad z_2, \quad z_3 \ \ldots \ z_n} \tag{1}$$

für einen beliebig, aber bestimmt gewählten Ausgangswerth b ohne weiteres berechnen, so müsste man die Abweichungswerthe

$$(a_\varkappa - b), \quad (a_\varkappa - b)^2 \ \ldots \ (a_\varkappa - b)^\nu$$

für $\varkappa = 1, 2, 3 \ldots n$ mit den zugehörigen Häufigkeitswerthen $z_\varkappa$ multipliciren, die Abweichungssummen

$$\left.\begin{aligned} m \cdot \varepsilon_1 &= \sum z_\varkappa (a_\varkappa - b) \\ m \cdot \varepsilon_2^2 &= \sum z_\varkappa (a_\varkappa - b)^2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ m \cdot \varepsilon_\nu^\nu &= \sum z_\varkappa (a_\varkappa - b)^\nu \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

bilden und nach Division mit $m = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ schließlich die Werthe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\nu$ ableiten.

Die Ausführung dieser Berechnungen ist indessen so mühevoll, dass man sich in Fällen, wo die Gültigkeit des gewöhnlichen Fehlergesetzes vorausgesetzt werden darf, auf die unmittelbare Bestimmung des Mittelwerthes der einfachen, ihrem absoluten Werthe nach genommenen (auf das arithmetische Mittel als Ausgangswerth b bezogenen) Abweichungen

$$\eta = \frac{1}{m} \sum z_\varkappa \cdot |a_\varkappa - b|$$

beschränkt und bereits den Mittelwerth zweiter Ordnung ε_2 auf Grund der bekannten, für jenes Gesetz zutreffenden Formel

$$\eta \sqrt{\pi} = \varepsilon_2 \sqrt{2}$$

mit einer bei großem m hinreichenden Annäherung ermittelt.

Eine derartige mittelbare Bestimmungsweise ist aber hier ausgeschlossen, da die Mittelwerthe so, wie sie von der Erfahrung dargeboten werden, der Vertheilungstafel zu entnehmen sind, um in den zwischen denselben bestehenden Beziehungen etwaige Gesetzmäßigkeiten der Vertheilungstafel erkennen zu können. Man wird darum wünschen, das Rechenverfahren möglichst einfach zu gestalten. Diesen Wunsch soll die im Folgenden entwickelte Berechnungsweise der Mittelwerthe befriedigen, wobei nur zu berücksichtigen ist, dass es sich nicht bloß um die Aufstellung, sondern wesentlich um die Herleitung und Begründung der an sich einfachen Rechnungsregeln handelt.

Es wird hierbei vorausgesetzt, dass die a-Werthe der Vertheilungstafel (1) äquidistant sind. Ist dies nicht der Fall, so sind die a-Werthe durch Einschieben leerer a (deren z gleich Null ist) äquidistant zu machen, was sich stets erreichen lässt, da die a-Werthe als Merkzeichen für unterscheidbare Varianten um endliche Beträge von einander verschieden sind und die Gesammtheit der denkbaren und unterscheidbaren Varianten immer durch eine äquidistante Zahlenreihe markirt werden kann (vergl. II, § 3). — Nur dann, wenn die Endabtheilungen ausgedehnter Vertheilungstafeln so regellos zerstreute z aufweisen, dass erst nach Einschieben einer sehr großen Anzahl leerer a eine äquidistante Reihe entstehen würde, wird man die darzulegende Berechnungsweise auf den regulären, mittleren Theil einschränken und die vereinzelten a der Endabtheilungen gesondert in Rechnung stellen. Die Behandlung solcher Fälle bedarf jedoch keiner besonderen Erörterung.

Da man von den für einen bestimmten Ausgangswerth berechneten Mittelwerthen zu den für einen anderen Ausgangswerth geltenden Mittelwerthen nach II, (22) nachträglich übergehen kann, so ist man nicht darauf angewiesen, den durch die Bedürfnisse der Untersuchung als Norm geforderten Ausgangswerth b (in der Regel das arithmetische Mittel) zu Grunde zu legen. Man kann vielmehr den Ausgangswerth zunächst mit Rücksicht auf die Bequemlichkeit der Rechnung wählen und dann erst den normalen Ausgangswerth einführen.

Wegen der vorausgesetzten Aequidistanz der a wird man mit Vortheil einen der a-Werthe selbst als Ausgangswerth wählen: etwa den mit dem Maximal-z behafteten oder den in der Tafelmitte liegenden. Die Abweichungswerthe sind alsdann positive und negative Vielfache des Intervallwerthes i, der je zwei aufeinanderfolgende a-Werthe trennt. Zugleich zerlegt der Ausgangswerth die ganze Vertheilungstafel in zwei Abtheilungen, von welchen die eine die positiven, die andere die negativen Abweichungen enthält.

Ist die Anzahl n der Intervalle oder der a-Werthe so groß, dass die beiden Abtheilungen (oder je nach der Lage des Ausgangswerthes nur die eine oder die andere) unbequem lang würden, so kann man statt nur eines Ausgangswerthes deren zwei (oder noch mehr) wählen, jedem einen Bereich der Vertheilungstafel zuweisen und für jeden Bereich gesondert die Abweichungssummen berechnen, um schließlich von jedem der beiden Ausgangswerthe zu dem normalen Ausgangswerth überzugehen und aus der Summe der beiden Abweichungssummen nach Division mit m (und Ausziehen der Wurzel) die gesuchten Mittelwerthe zu gewinnen.

Setzt man der Einfachheit wegen voraus, dass die Annahme nur eines Ausgangswerthes, der a_0 heißen möge, genügt, so tritt an Stelle der Reihe $a_1, a_2 \ldots a_n$ der Vertheilungstafel (1) die aus negativen und positiven Vielfachen des Intervalls i bestehende Reihe

$$-n_1 \cdot i, \quad \ldots -2i, \quad -i, \quad 0, \quad i, \quad 2i, \quad \ldots n_2 i,$$

wo $n_1 + n_2 + 1 = n$. Dementsprechend sind auch die Häufigkeitswerthe $z_1, z_2 \ldots z_n$ durch

$$z_{-n_1}, \quad \ldots z_{-2}, \quad z_{-1}, \quad z_0, \quad z_1, \quad z_2 \ldots z_{n_2}$$

zu bezeichnen, so dass die Vertheilungstafel (1) in der Form

$$\frac{-n_1 i \ldots -2i, \quad -i, \quad 0, \quad i, \quad 2i \ldots n_2 i}{z_{-n_1} \ldots \quad z_{-2}, \quad z_{-1}, \quad z_0, \quad z_1, \quad z_2 \ldots z_{n_2}} \tag{3}$$

sich darstellt. Die auf den Nullwerth bezogenen Mittelwerthe dieser Tabelle, die zur Unterscheidung von den auf den normalen Ausgangswerth bezogenen Mittelwerthen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\nu$ durch $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_\nu$ angedeutet werden mögen, erhält man alsdann aus den Abweichungssummen

$$\left.\begin{aligned}
m \cdot \eta_1 &= -i \cdot \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n_1} \varkappa \cdot z_{-\varkappa} + i \cdot \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_2} \lambda \cdot z_\lambda \\
m \cdot \eta_2^2 &= i^2 \cdot \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n_1} \varkappa^2 \cdot z_{-\varkappa} + i^2 \cdot \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_2} \lambda^2 \cdot z_\lambda \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
m \cdot \eta_\nu^\nu &= (-i)^\nu \cdot \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n_1} \varkappa^\nu \cdot z_\varkappa + i^\nu \cdot \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_2} \lambda^\nu \cdot z_\lambda
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Hieraus wird ersichtlich, dass es sich zunächst darum handelt, Summen von der Form:

$$\left.\begin{aligned}
1 \cdot z_1 + 2 \cdot z_2 + \cdots + n \cdot z_n &= \sum \varkappa \cdot z_\varkappa \\
1 \cdot z_1 + 2^2 \cdot z_2 + \cdots + n^2 \cdot z_n &= \sum \varkappa^2 \cdot z_\varkappa \\
&\ldots\ldots\ldots \\
1 \cdot z_1 + 2^\nu \cdot z_2 + \cdots + n^\nu \cdot z_n &= \sum \varkappa^\nu \cdot z_\varkappa
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

wo n den Werth von n_1 oder von n_2 darstellt, zu berechnen.

b. Die Berechnung der Summen

$$\sum z_\varkappa \cdot \varkappa\,; \qquad \sum z_\varkappa \cdot \varkappa^2\,; \quad \ldots \quad \sum z_\varkappa \cdot \varkappa^\nu.$$

Aus den zu der Reihe $n, n-1 \ldots 3, 2, 1$ gehörenden Häufigkeitswerthen $z_n, z_{n-1} \ldots z_3, z_2, z_1$ leite man durch successives Aufsummiren ν weitere Reihen ab, die man in einer Tabelle von folgender Form zusammenstellen kann:

n	z_n	$s_1^{(1)}$	$s_1^{(2)}$	$\ldots$	$s_1^{(\nu-1)}$	$s_1^{(\nu)}$	
$n-1$	z_{n-1}	$s_2^{(1)}$	$s_2^{(2)}$	$\ldots$	$s_2^{(\nu-1)}$	$s_2^{(\nu)}$	
.	.	.	.		.	.	
.	.	.	.		.	.	
.	.	.	.		.	.	
$\nu+1$	$z_{\nu+1}$	$s_{n-\nu}^{(1)}$	$s_{n-\nu}^{(2)}$	$\ldots$	$s_{n-\nu}^{(\nu-1)}$	$s_{n-\nu}^{(\nu)}$	
ν	z_ν	$s_{n-\nu+1}^{(1)}$	$s_{n-\nu+1}^{(2)}$	$\ldots$	$s_{n-\nu+1}^{(\nu-1)}$	S_ν	
$\nu-1$	$z_{\nu-1}$	$s_{n-\nu+2}^{(1)}$	$s_{n-\nu+2}^{(2)}$	$\ldots$	$S_{\nu-1}$		(6)
.	.	.	.				
.	.	.	.				
.	.	.	.				
3	z_3	$s_{n-2}^{(1)}$	$s_{n-2}^{(2)}$				
2	z_2	$s_{n-1}^{(1)}$	S_2				
1	z_1	S_1					
	S_0						

In derselben ist

$$\begin{aligned}
s_1^{(1)} &= z_n\,, \\
s_2^{(1)} &= z_n + z_{n-1}\,, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
s_{n-2}^{(1)} &= z_n + z_{n-1} + \cdots + z_3\,, \\
s_{n-1}^{(1)} &= z_n + z_{n-1} + \cdots + z_3 + z_2\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_1^{(2)} &= s_1^{(1)}\,, \\
s_2^{(2)} &= s_1^{(1)} + s_2^{(1)}\,, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
s_{n-2}^{(2)} &= s_1^{(1)} + s_2^{(1)} + \cdots + s_{n-2}^{(1)}\,;
\end{aligned}$$

u. s. w.,

so dass schließlich durch Fortsetzen des Summationsverfahrens

$$\begin{aligned} s_1^{(\nu)} &= s_1^{(\nu-1)}, \\ s_2^{(\nu)} &= s_1^{(\nu-1)} + s_2^{(\nu-1)}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ s_{n-\nu}^{(\nu)} &= s_1^{(\nu-1)} + s_2^{(\nu-1)} + \dots + s_{n-\nu}^{(\nu-1)} \end{aligned}$$

resultirt. Es ist sonach allgemein

$$s_\varkappa^{(\lambda)} = s_{\varkappa-1}^{(\lambda)} + s_\varkappa^{(\lambda-1)} \tag{7}$$

für $\lambda = 1, 2 \dots \nu$; $\varkappa = 1, 2 \dots n - \lambda$, wenn

$$s_0^{(\lambda)} = 0 \quad \text{und} \quad s_\varkappa^{(0)} = z_{n-\varkappa+1}$$

gesetzt wird.

Berechnet man nun noch in (6) durch directes Summiren aller Glieder jeder Verticalreihe die Summen

$$\left.\begin{aligned} S_0 &= z_n + z_{n-1} + \dots + z_1, \\ S_1 &= s_1^{(1)} + s_2^{(1)} + \dots + s_{n-1}^{(1)}, \\ S_2 &= s_1^{(2)} + s_2^{(2)} + \dots + s_{n-2}^{(2)}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_{\nu-1} &= s_1^{(\nu-1)} + s_2^{(\nu-1)} + \dots + s_{n-\nu+1}^{(\nu-1)}, \\ S_\nu &= s_1^{(\nu)} + s_2^{(\nu)} + \dots + s_{n-\nu}^{(\nu)}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

so ist der Bildungsweise der s-Werthe zufolge

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \sum (\varkappa - 1) \cdot z_\varkappa, \\ S_2 &= \sum \frac{(\varkappa-1)(\varkappa-2)}{1.2} \cdot z_\varkappa, \\ S_3 &= \sum \frac{(\varkappa-1)(\varkappa-2)(\varkappa-3)}{1.2.3} \cdot z_\varkappa, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_{\nu-1} &= \sum \frac{(\varkappa-1)(\varkappa-2)\dots(\varkappa-\nu+1)}{1.2\dots(\nu-1)} \cdot z_\varkappa, \\ S_\nu &= \sum \frac{(\varkappa-1)(\varkappa-2)\dots(\varkappa-\nu)}{1.2\dots\nu} \cdot z_\varkappa, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

wo durch Σ die über $\varkappa = 1, 2 \dots n$ erstreckte Summation angedeutet wird.

Auf Grund der Bedeutung der Werthe $s_{n-1}^{(1)}, s_{n-2}^{(2)} \dots s_{n-\nu+1}^{(\nu-1)}$, $s_{n-\nu}^{(\nu)}$ bestehen aber auch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} S_0 &= s_{n-1}^{(1)} + z_1\,, \\ S_1 &= s_{n-2}^{(2)} + s_{n-1}^{(1)}\,, \\ S_2 &= s_{n-3}^{(3)} + s_{n-2}^{(2)}\,, \\ &\dots\dots\dots \\ S_{\nu-1} &= s_{n-\nu}^{(\nu)} + s_{n-\nu+1}^{(\nu-1)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Sie dienen zur Controlle für die Richtigkeit der nach (8) berechneten Werthe S_0, $S_1 \dots S_{\nu-1}$, so dass nur für S_ν eine doppelte Ausführung der directen Summation zur Sicherstellung gegen Rechenfehler nöthig ist.

Hat man so durch einfache Summation die Werthe S_0, S_1, $S_2 \dots S_\nu$ gefunden, so gelangt man auf folgende Weise zu den gesuchten Summenwerthen

$$\sum z_\varkappa \cdot \varkappa\,; \qquad \sum z_\varkappa \cdot \varkappa^2\,; \qquad \dots \qquad \sum z_\varkappa \cdot \varkappa^\nu.$$

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \varkappa &= (\varkappa - 1) + 1\,, \\ \varkappa^2 &= (\varkappa - 1)(\varkappa - 2) + 3(\varkappa - 1) + 1\,, \\ \varkappa^3 &= (\varkappa - 1)(\varkappa - 2)(\varkappa - 3) + 6(\varkappa - 1)(\varkappa - 2) + 7(\varkappa - 1) + 1, \end{aligned}$$

u. s. w.

ergeben sich mit Rücksicht darauf, dass nach (9)

$$\sum (\varkappa - 1) \cdot z_\varkappa = S_1\,; \quad \sum (\varkappa - 1)(\varkappa - 2) \cdot z_\varkappa = 2 \cdot S_2\,;$$
$$\sum (\varkappa - 1)(\varkappa - 2)(\varkappa - 3) \cdot z_\varkappa = 6 \cdot S_3\,; \quad \text{u. s. w.}$$

die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \sum z_\varkappa \cdot \varkappa &= S_1 + S_0\,, \\ \sum z_\varkappa \cdot \varkappa^2 &= 2 \cdot S_2 + 3 \cdot S_1 + S_0\,, \\ \sum z_\varkappa \cdot \varkappa^3 &= 6 \cdot S_3 + 12 \cdot S_2 + 7 \cdot S_1 + S_0\,, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Um aber allgemein den Zusammenhang von $\sum z_\varkappa \cdot \varkappa^\lambda$ mit S_0, $S_1 \dots S_\lambda$ für $\lambda = 1, 2 \dots \nu$ zu erhalten, möge vorübergehend das Product

$$(\varkappa - 1)(\varkappa - 2) \dots (\varkappa - \lambda) \quad \text{durch } \varkappa_\lambda$$

bezeichnet und die λ-te Potenz von $\varkappa$ in der Form

$$\varkappa^\lambda = \varkappa_\lambda + c_\lambda^{(1)} \cdot \varkappa_{\lambda-1} + c_\lambda^{(2)} \cdot \varkappa_{\lambda-2} + \dots + c_\lambda^{(\lambda-1)} \cdot \varkappa_1 + c_\lambda^{(\lambda)} \tag{12}$$

vorausgesetzt werden. Da, der Definition von $\varkappa_\lambda$ zufolge,

$$\varkappa_{\lambda+1} = \varkappa_\lambda \cdot (\varkappa - \lambda - 1) \quad \text{oder} \quad \varkappa \cdot \varkappa_\lambda = \varkappa_{\lambda+1} + (\lambda + 1) \cdot \varkappa_\lambda \,,$$

so erhält man aus (12) durch Multiplication mit $\varkappa$

$$\varkappa^{\lambda+1} = \varkappa_{\lambda+1} + \left(c_\lambda^{(1)} + \lambda + 1\right) \varkappa_\lambda + \left(c_\lambda^{(2)} + \lambda \cdot c_\lambda^{(1)}\right) \varkappa_{\lambda-1}$$
$$+ \left(c_\lambda^{(3)} + (\lambda - 1)\, c_\lambda^{(2)}\right) \varkappa_{\lambda-2} + \cdots + \left(c_\lambda^{(\lambda)} + 2 c_\lambda^{(\lambda-1)}\right) \varkappa_1 + c_\lambda^{(\lambda)}.$$

Es ist aber auch, wenn in (12) der Index λ durch $\lambda + 1$ ersetzt wird,

$$\varkappa^{\lambda+1} = \varkappa_{\lambda+1} + c_{\lambda+1}^{(1)} \cdot \varkappa_\lambda + c_{\lambda+1}^{(2)} \cdot \varkappa_{\lambda-1} + \cdots + c_{\lambda+1}^{(\lambda)} \varkappa_1 + c_{\lambda+1}^{(\lambda+1)}.$$

Der Vergleich beider Darstellungsformen führt daher zu den Relationen:

$$c_{\lambda+1}^{(1)} = c_\lambda^{(1)} + \lambda + 1\,; \quad c_{\lambda+1}^{(2)} = c_\lambda^{(2)} + \lambda \cdot c_\lambda^{(1)}\,; \quad \ldots$$
$$c_{\lambda+1}^{(\lambda)} = c_\lambda^{(\lambda)} + 2 \cdot c_\lambda^{(\lambda+1)}\,; \quad c_{\lambda+1}^{(\lambda+1)} = c_\lambda^{(\lambda)},$$

aus denen das Bildungsgesetz für die Coefficienten c erhellt. Es ist sonach allgemein

$$c_\lambda^{(\mu)} = c_{\lambda-1}^{(\mu)} + (\lambda - \mu + 1) \cdot c_{\lambda-1}^{(\mu-1)} \tag{13}$$

für $\lambda = 1, 2 \ldots \nu$; $\mu = 1, 2 \ldots \lambda$, wenn für $\mu = 1$

$$c_\lambda^{(1)} = c_{\lambda-1}^{(1)} + \lambda\,, \quad \text{also} \quad c_{\lambda-1}^{(0)} = 1$$

und für $\mu = \lambda$

$$c_\lambda^{(\lambda)} = c_{\lambda-1}^{(\lambda-1)}\,, \quad \text{also} \quad c_{\lambda-1}^{(\lambda)} = 0$$

gesetzt wird. Da $\varkappa = \varkappa_1 + 1$, so ist überdies $c_1^{(1)} = 1$ und somit auch $c_\lambda^{(\lambda)} = 1$.

Für die Werthe $c_\lambda^{(\mu)}$ kann demgemäß folgende, dem Bildungsgesetze (13) genügende Tabelle, die beliebig weit fortsetzbar ist, hergestellt werden:

	$c^{(1)}$	$c^{(2)}$	$c^{(3)}$	$c^{(4)}$	$c^{(5)}$	$c^{(6)}$	$c^{(7)}$	$c^{(8)}$
c_1	1	0	0	0	0	0	0	0
c_2	3	1	0	0	0	0	0	0
c_3	6	7	1	0	0	0	0	0
c_4	10	25	15	1	0	0	0	0
c_5	15	65	90	31	1	0	0	0
c_6	21	140	350	301	63	1	0	0
c_7	28	266	1050	1701	966	127	1	0
c_8	36	462	2646	6951	7770	3025	255	1

(14)

Hier ist $c_\lambda^{(\mu)}$ die in der λ-ten Horizontalreihe und μ-ten Verticalreihe stehende, zu c_λ und $c^{(\mu)}$ gehörige Zahl. Sie entsteht dadurch, dass die in der nämlichen Verticalreihe unmittelbar vorangehende Zahl $c_{\lambda-1}^{(\mu)}$ um den $(\lambda - \mu + 1)$-fachen Betrag der links von der letzteren stehenden Zahl $c_{\lambda-1}^{(\mu-1)}$ vermehrt wird.

Die Coefficienten $c_\lambda^{(\mu)}$ sind somit ihrem Werthe nach bekannt. Um aber eine allgemein gültige Darstellungsweise zu erhalten, setze man in (12) der Reihe nach $\varkappa = 1, 2 \ldots \mu + 1$. Man gelangt so zu den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
1^\lambda &= c_\lambda^{(\lambda)}, \\
2^\lambda &= c_\lambda^{(\lambda)} + c_\lambda^{(\lambda-1)} \cdot 1, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mu^\lambda &= c_\lambda^{(\lambda)} + c_\lambda^{(\lambda-1)} \cdot (\mu - 1) + \cdots + c_\lambda^{(\lambda-\mu+1)} \cdot (\mu - 1) \ldots 2 \cdot 1, \\
(\mu + 1)^\lambda &= c_\lambda^{(\lambda)} + c_\lambda^{(\lambda-1)} \cdot \mu + \cdots + c_\lambda^{(\lambda-\mu+1)} \cdot \mu \ldots 3 \cdot 2 + c_\lambda^{(\lambda-\mu)} \cdot \mu \ldots 2 \cdot 1.
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich[1])

$$\left.\begin{aligned}
c_\lambda^{(\lambda)} &= 1^\lambda, \\
1 \cdot c_\lambda^{(\lambda-1)} &= 2^\lambda - 1^\lambda, \\
1 \cdot 2 \cdot c_\lambda^{(\lambda-2)} &= 3^\lambda - 2 \cdot 2^\lambda + 1^\lambda, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mu! \cdot c_\lambda^{(\lambda-\mu)} &= (\mu+1)^\lambda - \binom{\mu}{1} \cdot \mu^\lambda + \binom{\mu}{2} \cdot (\mu-1)^\lambda - \cdots \mp \binom{\mu}{1} \cdot 2^\lambda \pm 1^\lambda.
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Auf Grund dieser Bestimmungen sind die Coefficienten $c_\lambda^{(\mu)}$ ebenso wie beispielsweise die Binomialcoefficienten als bekannte Zahlen anzusehen und zu verwenden.

Demgemäß folgt aus (12) nach Multiplication mit $z_\varkappa$ und Ausführung der Summation von $\varkappa = 1$ bis $\varkappa = n$ die Gleichung

$$\sum z_\varkappa \cdot \varkappa^\lambda = \sum \varkappa_\lambda \cdot z_\varkappa + c_\lambda^{(1)} \cdot \sum \varkappa_{\lambda-1} \cdot z_\varkappa + \cdots + c_\lambda^{(\lambda)} \sum z_\varkappa,$$

aus der, da nach (9)

---

1) Man berücksichtige, dass

$$\mu(\mu-1) \cdots (\mu - \nu + 1) - \binom{\mu}{1} (\mu - 1) \cdots (\mu - \nu) + \binom{\mu}{2} (\mu - 2) \cdots (\mu - \nu - 1) - \cdots$$
$$= \mu \cdots (\mu - \nu + 1) \cdot \left\{1 - \binom{\mu-\nu}{1} + \binom{\mu-\nu}{2} - \cdots \right\} = 0,$$

wenn μ von ν verschieden ist.

$$\sum \varkappa_\lambda \cdot z_\varkappa = \lambda!\ S_\lambda; \quad \text{für } \lambda = 1,\ 2\ \ldots\ \nu$$

schließlich die gesuchte Beziehung in der Form

$$\left.\begin{aligned} \sum z_\varkappa \cdot \varkappa^\lambda = \lambda!\ S_\lambda + c_\lambda^{(1)} (\lambda-1)!\ S_{\lambda-1} + c_\lambda^{(2)} (\lambda-2)!\ S_{\lambda-2} + \cdots \\ + c_\lambda^{(\lambda-1)} S_1 + S_0 \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

sich ergibt. Insbesondere ist

$$\left.\begin{aligned} &\sum z_\varkappa \cdot \varkappa = S_1 + S_0, \\ &\sum z_\varkappa \cdot \varkappa^2 = 2 \cdot S_2 + c_2^{(1)} \cdot S_1 + S_0, \\ &\sum z_\varkappa \cdot \varkappa^3 = 6 \cdot S_3 + c_3^{(1)} \cdot 2 \cdot S_2 + c_3^{(2)} \cdot S_1 + S_0, \\ &\sum z_\varkappa \cdot \varkappa^4 = 24 \cdot S_4 + c_4^{(1)} \cdot 6 \cdot S_3 + c_4^{(2)} \cdot 2 \cdot S_2 + c_4^{(3)} \cdot S_1 + S_0, \\ &\sum z_\varkappa \cdot \varkappa^5 = 120 \cdot S_5 + c_5^{(1)} \cdot 24 \cdot S_4 + c_5^{(2)} \cdot 6 \cdot S_3 + c_5^{(3)} \cdot 2 \cdot S_2 + c_5^{(4)} \cdot S_1 + S_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (16a)$$

Setzt man hier die Werthe von $c_\lambda^{(\mu)}$ aus der Tabelle (14) ein, so erhält man wiederum die Beziehungen (11), deren Bildungsgesetz nunmehr aus (16) in Verbindung mit (14) oder (15) erhellt[1]).

c. Der Uebergang zu den Mittelwerthen.

Um nun die Mittelwerthpotenzen η_1, η_2^2, ... η_ν^ν der in der Form (3) vorausgesetzten Vertheilungstafel zu finden, sind die S-Werthe der positiven und der negativen Abweichungen vom vorläufig gewählten Ausgangswerthe a_0 durch den Summationsprocess (6) zu bilden. Werden die S-Werthe für die positiven Abweichungen durch

1) Wird in der Tabelle (6) $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 1$ gesetzt, so erhält man die »Tafel der figurirten Zahlen« von Jakob Bernoulli (Ars conjectandi, II. Theil, Ostwald's Klassiker, Nr. 107, S. 88), welche zur Bestimmung der Potenzsummen für die Reihe der natürlichen Zahlen dient. Die oben entwickelte Berechnungsweise der Summen $\Sigma z_\varkappa \cdot \varkappa^\lambda$ kann daher als eine Verallgemeinerung der von Bernoulli gegebenen Ableitung der Summen $\Sigma \varkappa^\lambda$ aus den Summen der figurirten Zahlen angesehen werden. Die Bestimmung der einfachen Summe $\Sigma z_\varkappa \cdot \varkappa$ durch die Summe der $s_1^{(1)}$, $s_2^{(1)}$ ... $s_n^{(1)}$ findet sich schon (als S-Verfahren bezeichnet) in Fechner's Collectivmaßlehre, S. 144, 146, wo eine Abhandlung von Elliott (on the military statistics of the United States of America, Berlin 1863; international statistical congress) als Quelle bezeichnet wird. Die Möglichkeit, durch successives Aufsummiren die Potenzsummen $\Sigma z_\varkappa \cdot \varkappa^\lambda$ höherer Ordnung zu berechnen, scheint unbeachtet geblieben zu sein.

$$S_0^+,\ S_1^+,\ S_2^+\ \ldots\ S_\nu^+,$$

für die negativen Abweichungen durch

$$S_0^-,\ S_1^-,\ S_2^-\ \ldots\ S_\nu^-$$

bezeichnet, so erhält man auf Grund von (16) und (14) die Formeln:

$$\begin{aligned}
m &= S_0^+ + z_0 + S_0^-,\\
m\eta_1 &= i\{(S_1^+ - S_1^-) + (S_0^+ - S_0^-)\},\\
m\eta_2^2 &= i^2\{2(S_2^+ + S_2^-) + 3(S_1^+ + S_1^-) + (S_0^+ + S_0^-)\},\\
m\eta_3^3 &= i^3\{6(S_3^+ - S_3^-) + 12(S_2^+ - S_2^-) + 7(S_1^+ - S_1^-) + (S_0^+ - S_0^-)\},\\
m\eta_4^4 &= i^4\{24(S_4^+ + S_4^-) + 60(S_3^+ + S_3^-) + 50(S_2^+ + S_2^-)\\
&\qquad + 15(S_1^+ + S_1^-) + (S_0^+ + S_0^-)\},\\
m\eta_5^5 &= i^5\{120(S_5^+ - S_5^-) + 360(S_4^+ - S_4^-) + 390(S_3^+ - S_3^-)\\
&\qquad + 180(S_2^+ - S_2^-) + 31(S_1^+ - S_1^-) + (S_0^+ - S_0^-)\},\\
m\eta_6^6 &= i^6\{720(S_6^+ + S_6^-) + 2520(S_5^+ + S_5^-) + 3360(S_4^+ + S_4^-)\\
&\qquad + 2100(S_3^+ + S_3^-) + 602(S_2^+ + S_2^-) + 63(S_1^+ + S_1^-) + (S_0^+ + S_0^-)\},
\end{aligned}$$

und allgemein:

$$\left.\begin{aligned}
m\eta_\nu^\nu = i^\nu\{\nu!\,(S_\nu^+ \pm S_\nu^-) + c_\nu^{(1)}(\nu-1)!\,(S_{\nu-1}^+ \pm S_{\nu-1}^-)\\
+ c_\nu^{(2)}(\nu-2)!\,(S_{\nu-2}^+ \pm S_{\nu-2}^-) + \cdots + c_\nu^{(\nu-1)}(S_1^+ \pm S_1^-) + (S_0^+ \pm S_0^-)\},
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

wo für gerades ν die Summe und für ungerades ν die Differenz der S-Werthe zu nehmen ist.

Soll jetzt an Stelle des Ausgangswerthes a_0, welcher für die Vertheilungstafel (3) vorausgesetzt wurde, der als Norm geforderte Ausgangswerth b der Vertheilungstafel (1) treten, der von a_0 um den Betrag l differiren möge, so ist der Uebergang von $\eta_1,\ \eta_2^2,\ \eta_3^3\ \ldots$ zu den für den normalen Ausgangswerth geltenden Mittelwerthen in Uebereinstimmung mit II, (22) mittelst folgender Formeln auszuführen:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \eta_1 - l,\\
\varepsilon_2^2 &= \eta_2^2 - 2\eta_1 l + l^2,\\
\varepsilon_3^3 &= \eta_3^3 - 3\eta_2^2 l + 3\eta_1 l^2 - l^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varepsilon_\nu^\nu &= \eta_\nu^\nu - \binom{\nu}{1}\eta_{\nu-1}^{\nu-1} l + \binom{\nu}{2}\eta_{\nu-2}^{\nu-2} l^2 - \cdots \pm l^\nu.
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Dient insbesondere das arithmetische Mittel als normaler Ausgangswerth b, so ist $l = \eta_1$ und man erhält

$$\left.\begin{array}{l} b = a_0 + \eta_1 \quad \text{oder} \quad \varepsilon_1 = 0\,, \\ \varepsilon_2^2 = \eta_2^2 - \eta_1^2\,, \\ \varepsilon_3^3 = \eta_3^3 - 3\eta_2^2\eta_1 + 2\eta_1^3\,, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varepsilon_\nu^\nu = \eta_\nu^\nu - \binom{\nu}{1}\eta_{\nu-1}^{\nu-1}\eta_1 + \binom{\nu}{2}\eta_{\nu-2}^{\nu-2}\eta_1^2 - \cdots \pm (\nu - 1)\,\eta_1^\nu\,. \end{array}\right\} \quad (18\,\text{a})$$

Diese Werthe sind noch wegen der Endlichkeit des m zu corrigiren, falls die hierdurch bedingte Aenderung in Betracht kommt. Dabei ist die Formel (25a) des II. Capitels zu Grunde zu legen, wenn nicht aus der allgemein gültigen Formel (25) ebendesselben Capitels geeignetere Specialisirungen durch wohlbegründete Annahmen abgeleitet werden können. Es sind ferner nach II, (23) die mittleren Fehler M_ν für ε_ν^ν zu berechnen[1]), um einen Maßstab für den Grad der Sicherheit, welcher den gefundenen Werthen zukommt, zu erhalten. In den Eigenschaften der nach Möglichkeit berichtigten und gesicherten Mittelwerthe zeigt sich schließlich die Gesetzmäßigkeit der Vertheilungstafel. Hierbei kommen nicht nur die (im III. Cap., § 4, abgeleiteten) allgemein gültigen Eigenschaften der Mittelwerthe, sondern auch die für besondere Vertheilungsgesetze (III, § 5) zutreffenden Beziehungen zwischen den Mittelwerthen in Betracht. Insbesondere werden die das gewöhnliche Fehlergesetz charakterisirenden Beziehungen, die als Specialisirungen von III, (94) angegeben sind, zum Vergleich heranzuziehen sein.

d. Beispiele.

Als erstes Beispiel möge die am Schluss von III, § 3, mitgetheilte, den Untersuchungen von **Müller** und **Schumann** über das Gedächtniss entnommene Vertheilungstafel dienen. Als Ausgangswerth

---

1) Der bei Berechnung des arithmetischen Mittels b oder des Mittelwerthes $\varepsilon_1 = 0$ zu befürchtende mittlere Fehler ist insbesondere gleich

$$\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{m}} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{\eta_2^2 - \eta_1^2}{m}}\,.$$

a_0 wähle ich den Werth 7, dessen $z_0 = 16$ ist, und erhalte durch successives Summiren die Tabelle:

a	z	$s^{(1)}$	$s^{(2)}$	$s^{(3)}$	$s^{(4)}$	$s^{(5)}$	$s^{(6)}$
4	1	1	1	0	0	0	0
5	12	13	1				
6	13	14					
7	16						
8	7	41					
9	4	15	58				
10	4	11	26	63			
11	4	7	15	32	51		
12	1	3	8	17	31	27	
13	0	2	5	9	14	20	8
14	1	2	3	4	5	6	7
15	1	1	1	1	1	1	1

Es ist folglich $S_0^+ = 22$; $S_0^- = 26$; $z_0 = 16$; $S_1^+ = 41$; $S_1^- = 14$; $S_2^+ = 58$; $S_2^- = 1$; $S_3^+ = 63$; $S_3^- = 0$; u. s. w. Das Einsetzen dieser Werthe in (17) führt, da $i = 1$, zu $m = 64$; $m\eta_1 = 23$; $m\overset{2}{\eta_2} = 331$; $m\overset{3}{\eta_3} = 1247$; $m\overset{4}{\eta_4} = 8827$; $m\overset{5}{\eta_5} = 57\,263$; $m\overset{6}{\eta_6} = 416\,451$ oder $\eta_1 = 0{,}36$; $\overset{2}{\eta_2} = 5{,}17$; $\overset{3}{\eta_3} \doteq 19{,}48$; $\overset{4}{\eta_4} = 137{,}9$; $\overset{5}{\eta_5} = 895$; $\overset{6}{\eta_6} = 6507$. Das arithmetische Mittel ist daher $b = 7{,}36$, und die auf das arithmetische Mittel als Ausgangswerth bezogenen Mittelwerthe werden nach (18a) durch

$$\varepsilon_1 = 0; \quad \overset{2}{\varepsilon_2} = 5{,}04; \quad \overset{3}{\varepsilon_3} = 14{,}0; \quad \overset{4}{\varepsilon_4} = 114; \quad \overset{5}{\varepsilon_5} = 670; \quad \overset{6}{\varepsilon_6} = 4830$$

bestimmt. Die Correction dieser Werthe wegen Endlichkeit von m mittelst der Correctionsformel (25a) des II. Capitels ergibt

$$(\varepsilon_1) = 0; \quad (\varepsilon_2)^2 = 5{,}12; \quad (\varepsilon_3)^3 = 14{,}2; \quad (\varepsilon_4)^4 = 118; \quad (\varepsilon_5)^5 = 702;$$
$$(\varepsilon_6)^6 = 5240$$

mit den nach Formel (23) des nämlichen Capitels berechneten mittleren Fehlern

$$M_1 = \pm\, 0{,}28; \quad M_2 = \pm\, 1{,}2; \quad M_3 = \pm\, 9\,.$$

Zur Berechnung der mittleren Fehler für die Mittelwerthpotenzen vierter und höherer Ordnung müssten die Mittelwerthpotenzen achter, zehnter Ordnung u. s. w. bekannt sein. Eine untere Grenze für M_4 erhält man zwar aus der Formel III, (60a), da auf Grund derselben

$$M_4 \cdot M_1 > \frac{702}{64}\,; \quad M_4 \cdot M_2 > \frac{5240 - 118 \cdot 5}{64}\,;$$

und somit der absolute Betrag von M_4 der ersten Ungleichung zufolge größer als 39 und der zweiten Ungleichung zufolge größer als 63 ist. In entsprechender Weise erhält man aus

$$M_5 \cdot M_1 > \frac{5240}{64}$$

für M_5 die untere Grenze 292. Man gewinnt aber ohne besondere Mühe eine hinreichend genaue Bestimmung von M_4, M_5 und M_6, wenn man die mittleren Fehler von $\overset{4}{\eta_4}$, $\overset{5}{\eta_5}$, $\overset{6}{\eta_6}$ berechnet und als näherungsweise für $\overset{4}{\varepsilon_4}$, $\overset{5}{\varepsilon_5}$, $\overset{6}{\varepsilon_6}$ gültig ansieht. Aus dem hinreichend weit ausgeführten Formelsysteme (17) folgt nämlich ohne weiteres $\overset{8}{\eta_8} = 363000$; $\overset{10}{\eta_{10}} = 214.10^5$; $\overset{12}{\eta_{12}} = 129.10^7$, so dass

$$M_4 = \pm 73\,; \quad M_5 = \pm 570\,; \quad M_6 = \pm 4200.$$

Zu den Wurzelwerthen übergehend findet man schließlich, wenn die ν-ten Wurzeln von $\overset{\nu}{\varepsilon_\nu} + M_\nu$ und $\overset{\nu}{\varepsilon_\nu} - M_\nu$ dem Werthe ε_ν in Klammern beigefügt werden, folgendes System von Bestimmungsstücken für die gegebene Vertheilungstafel:

$$b = 7{,}36 \pm 0{,}28\,; \quad \varepsilon_2 = 2{,}26\,(2{,}51;\, 1{,}99)\,; \quad \varepsilon_3 = +\,2{,}42\,(2{,}85;\, 1{,}73);$$
$$\varepsilon_4 = 3{,}30\,(3{,}72;\, 2{,}59)\,; \quad \varepsilon_5 = +\,3{,}71\,(4{,}18;\, 2{,}66)\,; \quad \varepsilon_6 = 4{,}17\,(4{,}60;\, 3{,}18).$$

Diese Werthe bilden die Unterlage zur Beurtheilung von Besonderheiten des untersuchten C.G. und zum Vergleich mit anderen C.G. verwandter Art.

Als zweites Beispiel entnehme ich den Beiträgen zur Collectivmaßlehre von F. Werner[1]) die von Bruns ausgeführte Bestimmung der Anzahlen, wie oft innerhalb der ersten tausend Spalten des Thesaurus logarithmorum von Vega in jeder Spalte eine Null in der zehnten Decimalstelle auftritt. Es fanden sich 6 Spalten mit je einer Null, 36 Spalten mit je zwei Nullen, 78 Spalten mit je drei Nullen in der zehnten Decimalstelle u. s. w., so dass, wenn a die Anzahl der Nullen und z die Häufigkeit ihres Auftretens bezeichnet, die

1) Philosophische Studien XV, 1900, S. 458.

folgende Tabelle die Grundlage für die rechnerische Behandlung des C.G. bildet:

a	z	$s^{(1)}$	$s^{(2)}$	$s^{(3)}$	$s^{(4)}$	$s^{(5)}$	$s^{(6)}$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	6	6	6	6	6	0	
2	36	42	48	54	6		
3	78	120	168	60			
4	149	269	222				
5	161	437					
6	183						
7	134	504					
8	114	253	432				
9	74	139	251	280			
10	34	65	112	181	139		
11	19	31	47	69	99	52	
12	10	12	16	22	30	40	14
13	0	2	4	6	8	10	12
14	2	2	2	2	2	2	2

Da somit $S_0^+ = 387$; $S_0^- = 430$; $z_0 = 183$; $S_1^+ = 504$; $S_1^- = 437$ u. s. w., so erhält man durch Einsetzen der S-Werthe in (17):

$$m = 1000;\quad \eta_1 = 0{,}024;\quad \eta_2^2 = 4{,}948;\quad \eta_3^3 = 4{,}266;\quad \eta_4^4 = 71{,}51;$$
$$\eta_5^5 = 179{,}8;\quad \eta_6^6 = 1796.$$

Demnach ist das arithmetische Mittel $b = 6{,}024$ mit dem mittleren Fehler $\pm\, 0{,}070$. Da dieser Werth nur um einen geringen Betrag von dem anfänglichen Ausgangswerth $a_0 = 6$ verschieden ist, so können die η-Werthe ohne weiteres als die für den Ausgangswerth b gültigen ε-Werthe angesehen werden. Auch kann man auf die Correction wegen Endlichkeit von m verzichten. Man gewinnt so (wenn noch die Werthe $\eta_8^8 = 65770$; $\eta_{10}^{10} = 3079 \cdot 10^3$; $\eta_{12}^{12} = 1666 \cdot 10^5$ aus der obigen Tabelle abgeleitet werden, um die mittleren Fehler für η_4^4, η_5^5 und η_6^6 angeben zu können) folgende Bestimmungsstücke für den vorliegenden C.G.

$$b = 6{,}02 \pm 0{,}07;\quad \varepsilon_2 = 2{,}22\ (2{,}27;\ 2{,}17);\quad \varepsilon_3 = +\,1{,}6\ (1{,}8;\ 1{,}4);$$
$$\varepsilon_4 = 2{,}91\ (2{,}98;\ 2{,}83);\quad \varepsilon_5 = +\,2{,}8\ (3{,}0;\ 2{,}6);\quad \varepsilon_6 = 3{,}5\ (3{,}6;\ 3{,}3).$$

Als drittes Beispiel benutze ich die in Fechner's Collectivmaßlehre[1]) behandelten Maße für den Verticalumfang (genauer »Länge des Scheitelbogens«) von 450 europäischen Männerschädeln. Die von Welcker gesammelten Maße geben die Längen in Millimetern an und variiren von 368 mm bis 448 mm. Um die hierdurch bedingte Ausdehnung der ursprünglichen, »primären« Vertheilungstafel zu verringern, nehme ich nach Fechner's Vorgang eine Reduction auf Intervalle von je 5 mm vor und gehe von folgender Tabelle aus:

a	z	$s^{(1)}$	$s^{(2)}$	$s^{(3)}$	$s^{(4)}$	$s^{(5)}$	$s^{(6)}$
368	1	1	1	1	1	1	1
373	2	3	4	5	6	7	8
378	5	8	12	17	23	30	9
383	17	25	37	54	77	38	
388	24	49	86	140	107		
393	36	85	171	217			
398	41	126	311				
403	59	297					
408	65						
413	65	304					
418	51	135	317				
423	40	84	169	243			
428	17	44	85	148	139		
433	19	27	41	63	95	58	
438	4	8	14	22	32	44	16
443	2	4	6	8	10	12	14
448	2	2	2	2	2	2	2

Man erhält folglich auf Grund von (17):

$$m = 450\,; \quad m\eta_1 = 5.22\,; \quad m\eta_2^2 = 25.344\,; \quad m\eta_3^3 = 5^3.292\,;$$
$$m\eta_4^4 = 5^4.74304\,; \quad m\eta_5^5 = 5^5.25372\,; \quad m\eta_6^6 = 5^6.2468784\,,$$

wonach

$$\eta_1 = 0{,}24\,; \; \eta_2^2 = 191\,; \; \eta_3^3 = 81\,; \; \eta_4^4 = 103200\,; \; \eta_5^5 = 176000\,; \; \eta_6^6 = 857.10^5$$

1) Vergl. S. 101, 134, 280 des Fechner'schen Werkes.

zu setzen ist; es ist ferner

$$\eta_8^8 = 918 \cdot 10^8; \quad \eta_{10}^{10} = 1149 \cdot 10^{11}; \quad \eta_{12}^{12} = 1577 \cdot 10^{14}.$$

Hieraus resultirt mittelst der Formeln (18a), sowie II, (25a) und (23):

$b = 408{,}24 \pm 0{,}65$; $\varepsilon_2 = 13{,}8\,(14{,}2;\ 13{,}4)$; $\varepsilon_3 = -3{,}8\,(+7{,}3;\ -7{,}9)$; $\varepsilon_4 = 18{,}0\,(18{,}5;\ 17{,}3)$; $\varepsilon_5 = +8{,}8\,(+14{,}1;\ -13{,}5)$; $\varepsilon_6 = 21{,}1\,(21{,}7;\ 20{,}2)$.

Geht man von der primären Vertheilungstafel aus, so ergibt sich:

$$b = 408{,}54 \pm 0{,}65; \quad \varepsilon_2 = 13{,}9\,(14{,}3;\ 13{,}4); \quad \varepsilon_3 = -4{,}6\,(+7{,}0;\ -8{,}2);$$
$$\varepsilon_4 = 18{,}0; \quad \varepsilon_5 = -8{,}6; \quad \varepsilon_6 = 21{,}1.$$

Der Vergleich der zusammengehörigen Bestimmungsstücke zeigt, dass die Mittelwerthe gerader Ordnung durch die Reduction der Vertheilungstafel nicht wesentlich geändert werden, während die Mittelwerthe ungerader Ordnung innerhalb des durch die mittleren Fehler markirten Gebietes erheblich schwanken. Da diese Gebiete für ε_3 und ε_5 sich vom arithmetischen Mittel b nahezu gleich weit in positiver und negativer Richtung erstrecken, ist die Asymmetrie des vorliegenden C.G. als unwesentlich aufzufassen.

Als viertes Beispiel wähle ich aus den Untersuchungen von G. Duncker[1]) über »Variation und Asymmetrie bei Pleuronectes flesus L.« die Bestimmung der Strahlenzahl der Rückenflosse an 1120 (602 männlichen und 518 weiblichen) Individuen. Unter den von 55 bis 71 variirenden Strahlenzahlen soll $a_0 = 62$ mit $z_0 = 194$ als vorläufiger Ausgangswerth dienen. Dann erhält man aus der Tabelle der folgenden Seite die Werthe:

$$m = 1120; \quad m\eta_1 = -312; \quad m\eta_2^2 = 6482; \quad m\eta_3^3 = -3186;$$
$$m\eta_4^4 = 114734; \quad m\eta_5^5 = -33762; \quad m\eta_6^6 = 3364742, \quad \text{oder}$$
$$\eta_1 = -0{,}2786; \quad \eta_2^2 = 5{,}7875; \quad \eta_3^3 = -2{,}845; \quad \eta_4^4 = 102{,}4;$$
$$\eta_5^5 = -30{,}14; \quad \eta_6^6 = 3004.$$

Es ist ferner $\eta_8^8 = 121500$; $\eta_{10}^{10} = 6590 \cdot 10^3$; $\eta_{12}^{12} = 3776 \cdot 10^5$.
Es resultiren somit folgende Bestimmungsstücke für den C.G.:

$$b = 61{,}72 \pm 0{,}07; \quad \varepsilon_2 = 2{,}39\,(2{,}44;\ 2{,}34); \quad \varepsilon_3 = +1{,}2\,(1{,}5;\ 0{,}7);$$
$$\varepsilon_4 = 3{,}18\,(3{,}25;\ 3{,}10); \quad \varepsilon_5 = +2{,}6\,(2{,}9;\ 2{,}0); \quad \varepsilon_6 = 3{,}8\,(3{,}9;\ 3{,}7).$$

---

1) Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen, herausgeg. v. d. Commission zur Unters. d. deutschen Meere in Kiel und der Biolog. Anstalt auf Helgoland, III. Band, Abtheilung Helgoland, Heft 2, 1900, S. 339, 388, 390.

a	z	$s^{(1)}$	$s^{(2)}$	$s^{(3)}$	$s^{(4)}$	
55	4	4	4	4	4	. .
56	12	16	20	24	28	. .
57	24	40	60	84	112	. .
58	46	86	146	230	144	
59	103	189	335	342		
60	161	350	565			
61	174	685				
62	194					
63	162	495				
64	101	240	443			
65	70	139	255	297		
66	39	69	116	188	163	
67	18	30	47	72	109	. .
68	9	12	17	25	37	. .
69	2	3	5	8	12	. .
70	0	1	2	3	4	. .
71	1	1	1	1	1	. .

Um auch eine Vertheilungstafel mit stark asymmetrischen und über ein weites Gebiet zerstreuten Werthen als Beispiel zu bringen, will ich an fünfter Stelle die täglichen Regenhöhen des Monats October für Genf während der Jahre 1845—1892 behandeln[1]). Die in den Archives des sciences physiques et naturelles der Bibliothèque universelle de Genève allmonatlich veröffentlichten meteorologischen Tabellen geben die Regenhöhen bis auf Zehntel Millimeter an. Indem ich die aus diesen Werthen sich ergebende primäre Vertheilungstafel auf Intervalle von 1 mm reducire, erhalte ich folgende reducirte Tabelle:

1) Vergl. Fechner's Collectivmaßlehre, S. 344 und 436 ff. Dort dienen die Regenhöhen für Januar, April, Juli und October als Beispiele für die logarithmische Behandlung der C.G. nach Fechner's Methode. Ich wählte oben den Monat October, weil er die höchsten Regenhöhen aufweist.

a	z	a	z	a	z
0,5	125	16,5	8,5	32,5	6,5
1,5	72,5	17,5	9	33,5	3
2,5	60	18,5	4,5	34,5	2
3,5	31	19,5	6,5	35,5	0
4,5	24,5	20,5	3	36,5	1
5,5	39	21,5	5,5	37,5	2
6,5	26	22,5	7	43,5	1
7,5	19,5	23,5	2	45,5	1
8,5	26,5	24,5	4	55,5	1
9,5	14	25,5	6	56,5	1
10,5	21	26,5	2	59,5	1
11,5	12,5	27,5	5	62,5	2
12,5	14,5	28,5	3	66,5	1
13,5	10,5	29,5	2	79,5	1
14,5	11,5	30,5	1	80,5	1
15,5	13	31,5	1,5	97,5	1

Für den von 0—38 mm sich erstreckenden Theil wähle ich $a_0 = 8{,}5$ mit $z = 26{,}5$ als vorläufigen Ausgangswerth und erhalte $S_0^+ = 182$; $S_0^- = 397{,}5$; $S_1^+ = 1507{,}5$; $S_1^- = 1911{,}5$; $S_2^+ = 10376$; $S_2^- = 4611$; $S_3^+ = 57\,933{,}5$; $S_3^- = 6573{,}5$; $S_4^+ = 261\,793$; $S_4^- = 5793{,}5$; $S_5^+ = 970\,690{,}5$; $S_5^- = 3120$; $S_6^+ = 3\,000\,926{,}5$; $S_6^- = 947{,}5$. Für den Rest mit den von 43,5—8,5 = 35 bis 97,5—8,5 = 98 sich erstreckenden Abweichungswerthen sind die Abweichungssummen direct zu bestimmen. Um diese Arbeit zu vereinfachen, fasse ich die Abweichungswerthe 35—45; 45—55 mm u. s. w. unter 40; 50 mm u. s. w. zusammen, so dass bloß die Summen

$$2.40^\nu + 5.50^\nu + 1.60^\nu + 2.70^\nu + 1.90^\nu$$

für $\nu = 1$ bis 6 zu berechnen sind. Man erhält für dieselben der Reihe nach: 620; 37200; 2384000; $16296 \cdot 10^4$; $118112 \cdot 10^5$; $899712 \cdot 10^6$. Demgemäß ist $m = 617$; $m\eta_1 = -404 - 215{,}5 + 620 = 0{,}5$; $m\eta_2^2 = 2 \cdot 14987 + 3 \cdot 3419 + 579{,}5 + 37200 = 78010{,}5$; u. s. w. Da $\eta_1 = 0{,}001$, so sind die η-Werthe unmittelbar als die auf das arithmetische Mittel b bezogenen ε-Werthe aufzufassen, so dass $\varepsilon_1 = 0$;

$\varepsilon_2^2 = 126$; $\varepsilon_3^3 = 4470$; $\varepsilon_4^4 = 282100$; $\varepsilon_5^5 = 1951 \cdot 10^4$; $\varepsilon_6^6 = 1467 \cdot 10^6$. Um die mittleren Fehler für ε_4^4, ε_5^5, ε_6^6 abzuschätzen, genügt es, die Potenzsummen der Abweichungswerthe vom achten, zehnten und zwölften Grade für den Rest der Vertheilungstafel zu berechnen. Denn der Antheil des Restes an diesen Summen wird mit wachsendem ν immer größer. Er beträgt für $\nu = 2$ nicht ganz die Hälfte und für $\nu = 6$ das 0,994-fache der Gesammtsumme. Man findet so $\varepsilon_8^8 = 946 \cdot 10^{10}$; $\varepsilon_{10}^{10} = 675 \cdot 10^{14}$; $\varepsilon_{12}^{12} = 184 \cdot 10^{18}$ als Näherungswerthe. Es resultirt demgemäß:

$$b = 8{,}50 \pm 0{,}45; \quad \varepsilon_2 = 11\ (12;\ 10); \quad \varepsilon_3 = +16\ (18;\ 14);$$
$$\varepsilon_4 = 23\ (25;\ 20); \quad \varepsilon_5 = +29\ (31;\ 25); \quad \varepsilon_6 = 34\ (36;\ 31).$$

§ 2. Die Correction der Summenwerthe $\sum z_\varkappa (a_\varkappa - b)^\nu$ wegen stetiger Vertheilung der z-Werthe auf die Intervalle.

Bei der Berechnung der Mittelwerthe ε_ν wurde vorausgesetzt, dass jedes $z_\varkappa$ dem in der Vertheilungstafel beigeschriebenen $a_\varkappa$ unmittelbar zugehöre. Diese Auffassungsweise ist bei Anwendung der Methode der Mittelwerthe in jedem Falle zulässig und im Interesse einer gleichförmigen Behandlung aller C.G. auch dann geboten, wenn die a-Werthe stetig veränderliche Maßzahlen sind, so dass eine Vertheilung der $z_\varkappa$ auf die den $a_\varkappa$ zugehörigen Intervalle $a_\varkappa \pm \frac{1}{2} i_\varkappa$ anzunehmen ist. Soll aber die Vertheilungstafel durch eine Function $\Phi(a)$ des stetig variablen reellen Argumentes a dargestellt werden (vergl. II, § 4, c und III, § 5), so sind auch die empirisch gegebenen $z_\varkappa$ auf die den $a_\varkappa$ zugehörigen Intervalle vertheilt zu denken, mag im übrigen die Annahme einer solchen Vertheilung, der Bedeutung der durch $a_\varkappa$ markirten Varianten zufolge, von vornherein geboten sein oder nicht. Man wird dann wünschen, an Stelle der aus der Vertheilungstafel zu berechnenden Summen

$$m \varepsilon_\nu^\nu = \sum z_\varkappa (a_\varkappa - b)^\nu \tag{19}$$

die Werthe der über das Gebiet der Vertheilungstafel erstreckten Integrale [III, (87)]

$$s_\nu = \int f(a) \cdot (a - b)^\nu \cdot da, \tag{20}$$

wo $f(a)$ die Vertheilung der z-Werthe auf die Intervalle angibt, als Unterlage zur Bestimmung von $\Phi(a)$ zu benutzen.

Dass diesem Wunsche, sofern ich die Verhältnisse richtig beurtheile, nicht in zweifelsfreier Weise entsprochen werden kann, zeigen die folgenden Darlegungen, für die constante Intervalle von der Länge i vorausgesetzt werden.

Da von der Function $f(a)$ bloß die Werthe der von $a_\varkappa - \frac{1}{2}i$ bis $a_\varkappa + \frac{1}{2}i$ erstreckten Integrale

$$z_\varkappa = \int f(a) \cdot da$$

bekannt sind, so wird man — den Regeln der Interpolationsrechnung gemäß — $f(a)$ innerhalb eines jeden Intervalls durch eine ganze rationale Function von a darstellen, deren Coefficienten durch die jenem Intervalle sowie den benachbarten Intervallen zugehörenden z-Werthe zu bestimmen sind[1]. Es ergibt sich so, wenn $f(a)$ innerhalb eines jeden Intervalls entweder in erster Annäherung constant oder mit größerer Genauigkeit durch eine lineare Function von a oder bei noch schärferer Bestimmung durch eine Function zweiten Grades darstellbar vorausgesetzt wird, für das Intervall $a_\varkappa \pm \frac{1}{2}i$ im ersten Falle

$$f(a) = \frac{z_\varkappa}{i}; \tag{21}$$

im zweiten Falle

$$f(a) = \frac{z_\varkappa}{i} + (a - a_\varkappa)\frac{z_\varkappa - z_{\varkappa-1}}{i^2} \quad \text{oder} \quad f(a) = \frac{z_\varkappa}{i} + (a - a_\varkappa)\frac{z_{\varkappa+1} - z_\varkappa}{i^2}; \tag{22}$$

so dass auch das arithmetische Mittel beider Werthe

$$f(a) = \frac{z_\varkappa}{i} + (a - a_\varkappa)\frac{z_{\varkappa+1} - z_{\varkappa-1}}{2 \cdot i^2} \tag{22a}$$

1) Vergl. Fechner's Collectivmaßlehre S. 183, wo die Formeln (21), (22) und (23) von mir benutzt werden, um den dichtesten Werth D_i interpolatorisch zu bestimmen. Eben diese Formeln resultiren auch aus den üblichen Interpolationsformeln, wenn man nicht von $f(a)$, sondern von dem Integrale

$$F(a) = \int f(a) \cdot da$$

ausgeht, das von der unteren Grenze der Vertheilungstafel $a_1 - \frac{1}{2}i$ oder, da $f(a)$ unterhalb dieses Werthes durchweg gleich Null ist, von $-\infty$ bis zu einem beliebigen, in den Bereich der Vertheilungstafel fallenden Werth a zu erstrecken ist. Es sind dann die Werthe $F(a_\varkappa + \frac{1}{2}i) = z_1 + z_2 + \cdots + z_\varkappa$, für $\varkappa = 1, 2 \ldots n$, bekannt.

zulässig ist, und im dritten Falle

$$\left.\begin{aligned} f(a) = \frac{z_\varkappa}{i} - \frac{z_{\varkappa+1} - 2z_\varkappa + z_{\varkappa-1}}{24 \cdot i} + (a - a_\varkappa)\,\frac{z_{\varkappa+1} - z_{\varkappa-1}}{2 \cdot i^2} \\ + (a - a_\varkappa)\,\frac{2z_{\varkappa+1} - 2z_\varkappa + z_{\varkappa-1}}{2 \cdot i^3} \end{aligned}\right\}. \tag{23}$$

Zerlegt man nun s_ν in die Summe [II, (49)]

$$s_\nu^{(1)} + s_\nu^{(2)} + \cdots + s_\nu^{(n)},$$

wo für $\varkappa = 1, 2 \ldots n$

$$s_\nu^{(\varkappa)} = \int f(a) \cdot (a - b)^\nu \cdot da$$

das von $a_\varkappa - \frac{1}{2}i$ bis $a_\varkappa + \frac{1}{2}i$ erstreckte Theilintegral darstellt, und setzt man für dasselbe

$$a = a_\varkappa + \Delta; \quad f(a) = \frac{\alpha_\varkappa}{i} + \frac{\beta_\varkappa}{i^2}\Delta + \frac{\gamma_\varkappa}{i^3}\Delta^2,$$

so wird

$$\begin{aligned} s_\nu = {} & \sum (a_\varkappa - b)^\nu \left(\frac{\alpha_\varkappa}{1} + \frac{\gamma_\varkappa}{4 \cdot 3}\right) + \binom{\nu}{1}\frac{i}{2}\sum (a_\varkappa - b)^{\nu-1}\frac{\beta_\varkappa}{2 \cdot 3} \\ & + \binom{\nu}{2}\frac{i^2}{4}\sum (a_\varkappa - b)^{\nu-2}\left(\frac{\alpha_\varkappa}{3} + \frac{\gamma_\varkappa}{4 \cdot 5}\right) + \binom{\nu}{3}\frac{i^3}{8}\sum (a_\varkappa - b)^{\nu-3}\frac{\beta_\varkappa}{2 \cdot 5} \\ & + \binom{\nu}{4}\frac{i^4}{16}\sum (a_\varkappa - b)^{\nu-4}\left(\frac{\alpha_\varkappa}{5} + \frac{\gamma_\varkappa}{4 \cdot 7}\right) + \binom{\nu}{5}\frac{i^5}{32}\sum (a_\varkappa - b)^{\nu-5}\frac{\beta_\varkappa}{2 \cdot 7} \\ & + \cdots\cdots \end{aligned}$$

Man erhält daher

1) auf Grund von (21), wenn $\alpha_\varkappa = z_\varkappa$; $\beta_\varkappa = \gamma_\varkappa = 0$:

$$\frac{1}{m}\, s_\nu = \varepsilon_\nu^\nu + \binom{\nu}{2}\frac{i^2}{12}\,\varepsilon_{\nu-2}^{\nu-2} + \binom{\nu}{4}\frac{i^4}{80}\,\varepsilon_{\nu-4}^{\nu-4} + \cdots \tag{24}$$

2) auf Grund von (22) und (22a), wenn $\alpha_\varkappa = z_\varkappa$; $\beta_\varkappa = z_\varkappa - z_{\varkappa-1}$ oder $z_{\varkappa+1} - z_\varkappa$ oder $\frac{1}{2}(z_{\varkappa+1} - z_{\varkappa-1})$; $\gamma_\varkappa = 0$, der Reihe nach[1]):

---

1) Bei der Ableitung dieser Formeln ist zu beachten, dass z. B.

$$\begin{aligned} \frac{1}{m}\sum (z_\varkappa - z_{\varkappa-1})(a_\varkappa - b)^\mu = \frac{1}{m}\sum z_\varkappa (a_\varkappa - b)^\mu - \frac{1}{m}\sum z_{\varkappa-1}(a_{\varkappa-1} - b + i)^\mu \\ = -\binom{\mu}{1}\, i\, \varepsilon_{\mu-1}^{\mu-1} - \binom{\mu}{2}\, i^2 \varepsilon_{\mu-2}^{\mu-2} - \binom{\mu}{3}\, i^3 \varepsilon_{\mu-3}^{\mu-3} - \cdots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{m} s_\nu = \varepsilon_\nu^\nu - \binom{\nu}{2}\frac{i^2}{12}\varepsilon_{\nu-2}^{\nu-2} - \binom{\nu}{3}\frac{i^3}{4}\varepsilon_{\nu-3}^{\nu-3} - \binom{\nu}{4}\frac{89\cdot i^4}{240}\varepsilon_{\nu-4}^{\nu-4} - \cdots \tag{25a}$$

$$\frac{1}{m} s_\nu = \varepsilon_\nu^\nu - \binom{\nu}{2}\frac{i^2}{12}\varepsilon_{\nu-2}^{\nu-2} + \binom{\nu}{3}\frac{i^3}{4}\varepsilon_{\nu-3}^{\nu-3} - \binom{\nu}{4}\frac{89\cdot i^4}{240}\varepsilon_{\nu-4}^{\nu-4} \pm \cdots \tag{25b}$$

$$\frac{1}{m} s_\nu = \varepsilon_\nu^\nu - \binom{\nu}{2}\frac{i^2}{12}\varepsilon_{\nu-2}^{\nu-2} - \binom{\nu}{4}\frac{89\cdot i^4}{240}\varepsilon_{\nu-4}^{\nu-4} - \binom{\nu}{6}\frac{341\cdot i^6}{448}\varepsilon_{\nu-6}^{\nu-6} - \cdots \tag{25c}$$

3) auf Grund von (23), wenn $\alpha_\varkappa = z_\varkappa - \frac{1}{24}(z_{\varkappa+1} - 2z_\varkappa + z_{\varkappa-1})$; $\beta_\varkappa = \frac{1}{2}(z_{\varkappa+1} - z_{\varkappa-1})$; $\gamma_\varkappa = \frac{1}{2}(z_{\varkappa+1} - 2z_\varkappa + z_{\varkappa-1})$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{m} s_\nu = \varepsilon_\nu^\nu &- \binom{\nu}{2}\frac{i^2}{12}\varepsilon_{\nu-2}^{\nu-2} - \binom{\nu}{4}\frac{27\cdot i^4}{80}\varepsilon_{\nu-4}^{\nu-4} - \binom{\nu}{6}\frac{887\cdot i^6}{1344}\varepsilon_{\nu-6}^{\nu-6}\\ &- \binom{\nu}{8}\frac{19\cdot i^8}{15}\varepsilon_{\nu-8}^{\nu-8} - \cdots\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Hiernach resultiren die Integralwerthe aus den Summenwerthen, indem an den letzteren die durch (24) oder (25) oder (26) angegebene Correction angebracht wird. Nun führt diese Correction zu entgegengesetzten Werthen, je nachdem die $z_\varkappa$ nach (21) gleichmäßig oder nach (22) oder (23) mit Rücksicht auf die z-Werthe der Nachbarintervalle auf die zugehörigen Intervalle vertheilt werden. Sofern nach den Regeln der Interpolationsrechnung die Formeln (22) und (23) für genauer als (21) zu gelten haben, verdient (25) und um so mehr (26) den Vorzug vor (24). Indessen hat auch (24) als Correctionsformel zu gelten. Ueberdies ist zu beachten, dass die Correction stets das gleiche Vorzeichen wie in (24) erhält, falls nur jeder z-Werth symmetrisch, im übrigen aber beliebig auf das zugehörige Intervall vertheilt wird[1]).

Da somit die Correction je nach der Annahme, die bezüglich der Vertheilung der z auf die Intervalle gemacht wird, ebenso wohl positiv wie negativ ausfallen kann, so wird es wohl als zulässig

---

1) Werden die aus der Vertheilung der $z_\varkappa$ auf die Intervalle $a_\varkappa \pm \frac{1}{2} i$ resultirenden, auf $a_\varkappa$ als Ausgangswerth bezogenen Mittelwerthe durch $\eta_{\varkappa,1}$; $\eta_{\varkappa,2}$; $\eta_{\varkappa,3}\cdots$ bezeichnet, so tritt an Stelle von $z_\varkappa(a_\varkappa - b)^\nu$ die Summe

$$z_\varkappa(a_\varkappa - b)^\nu + \binom{\nu}{1} z_\varkappa(a_\varkappa - b)^{\nu-1}\eta_{\varkappa,1} + \binom{\nu}{2} z_\varkappa(a_\varkappa - b)^{\nu-2}\eta_{\varkappa,2}^2 + \cdots$$

Da nun $\eta_{\varkappa,2}^2$, $\eta_{\varkappa,4}^4\ldots$ wesentlich positiv sind und bei symmetrischer Vertheilung $\eta_{\varkappa,1} = \eta_{\varkappa,3} = \cdots = 0$, so erhellt die Gleichartigkeit der Correction mit (24).

angesehen werden müssen, auf jede Correction zu verzichten und ε_ν^ν ohne weiteres als Näherungswerth für $\frac{1}{m} s_\nu$ zu benutzen.

Construirt man beispielsweise auf Grund des gewöhnlichen Fehlergesetzes [1])

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2)$$

die Vertheilungstafel

−3	−2	−1	0	1	2	3
4	335	4456	10410	4456	325	4,

so erhält man $\varepsilon_2^2 = 0{,}5832$; $\varepsilon_4^4 = 1{,}0140$; $\varepsilon_6^6 = 2{,}8812$. Diese Werthe sind allerdings größer als die von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckten Integrale

$$\int t^2 \varphi(t) dt = 0{,}5; \quad \int t^4 \varphi(t) dt = 0{,}75; \quad \int t^6 \varphi(t) dt = 1{,}875.$$

Die Correction mittelst (26) ergibt aber als entsprechende Werthe

$$0{,}4999; \quad 0{,}3849; \quad -1{,}7,$$

so dass sie nur für ε_2^2 zu einer Berichtigung, für ε_6^6 hingegen zu einem völlig unbrauchbaren Werthe führt.

§ 3. Die Berechnung der Summenwerthe

$$S_\nu = \sum \binom{\alpha}{\nu} \cdot z_\alpha .$$

Will man die Vertheilungstafel

$$\frac{0, \quad 1, \quad 2 \; . \; . \; . \; n}{z_0, \quad z_1, \quad z_2 \; . \; . \; . \; z_n} \tag{27}$$

nach der im II. Capitel, § 4, c, entwickelten Methode durch die mittelst der Hülfsfunction

$$\varphi(\alpha) = \frac{\lambda^\alpha}{\Pi(\alpha)}$$

gebildete Function

$$\Phi(\alpha) = \gamma_0 \cdot \varphi(\alpha) + \gamma_1 \cdot \varphi_1(\alpha) + \gamma_2 \cdot \varphi_2(\alpha) + \cdots \tag{28}$$

darstellen, so sind — wie im III. Capitel, § 5 gezeigt wurde — die Summenwerthe

---

1) Mittelst der t-Tabelle im Anhang zu Fechner's Collectivmaßlehre.

$$S_\nu = \sum \binom{\alpha}{\nu} \cdot z_\alpha \tag{29}$$

für $\nu = 0, 1, 2 \ldots$ zu berechnen, um, nach Bestimmung des Parameters λ, zur Kenntniss der Coefficienten γ_ν auf Grund von III, (79) zu gelangen.

Diese Berechnung kann durch successives Aufsummiren nach dem Schema (6) in § 1 geleistet werden, wenn der dort vorausgesetzten Reihe von n Gliedern das Glied 0 hinzugefügt wird. Es resultirt alsdann:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
n & z_n & s_1^{(1)} & s_1^{(2)} & s_1^{(3)} & \cdots \\
n-1 & z_{n-1} & s_2^{(1)} & s_2^{(2)} & s_2^{(3)} & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
3 & z_3 & s_{n-2}^{(1)} & s_{n-2}^{(2)} & s_{n-2}^{(3)} & \cdots \\ \cline{5-5}
2 & z_2 & s_{n-1}^{(1)} & s_{n-1}^{(2)} & S_3 & \\ \cline{4-4}
1 & z_1 & s_n^{(1)} & S_2 & & \\ \cline{3-3}
0 & z_0 & S_1 & & & \\ \cline{2-2}
 & S_0 & & & &
\end{array}$$

wo

$$S_0 = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_n ;$$

$$\begin{aligned} S_1 &= s_n^{(1)} + s_{n-1}^{(1)} + s_{n-2}^{(1)} + \cdots + s_1^{(1)} \\ &= 1 \cdot z_1 + 2 \cdot z_2 + 3 \cdot z_3 + \cdots + n \cdot z_n ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= s_{n-1}^{(2)} + s_{n-2}^{(2)} + \cdots + s_1^{(2)} \\ &= \frac{2 \cdot 1}{2} z_2 + \frac{3 \cdot 2}{2} z_3 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2} z_n ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= s_{n-2}^{(3)} + s_{n-3}^{(3)} + \cdots + s_1^{(3)} \\ &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6} z_3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{6} z_4 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} z_n ; \end{aligned}$$

und allgemein

$$\left.\begin{aligned} S_\nu &= s_{n-\nu+1}^{(\nu)} + s_{n-\nu+2}^{(\nu)} + \cdots + s_1^{(\nu)} \\ &= \binom{\nu}{\nu} \cdot z_\nu + \binom{\nu+1}{\nu} \cdot z_{\nu+1} + \cdots + \binom{n}{\nu} \cdot z_n . \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Beispielsweise erhält man für die Vertheilungstafel[1])

0	1	2	3
850	129	74	5

aus

3	5	5	5	5	0
2	74	79	84	5	
1	129	208	89		
0	850	292			
	1058				

die Werthe $S_0 = 1058$; $S_1 = 292$; $S_2 = 89$; $S_3 = 5$; $S_4 = 0$; ... Setzt man nun

$$\Phi(\alpha) = \gamma_0 \cdot \varphi(\alpha) + \gamma_1 \cdot \varphi_1(\alpha) + \gamma_2 \cdot \varphi_2(\alpha) + \cdots$$

als darstellende Function voraus, wo

$$\gamma_0 = \exp(-\lambda) \cdot S_0\,; \qquad \gamma_1 = \exp(-\lambda)\{\lambda S_0 - S_1\}\,;$$

$$\gamma_2 = \exp(-\lambda)\left\{\frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} S_0 - \lambda S_1 + S_2\right\};$$

$$\gamma_3 = \exp(-\lambda)\left\{\frac{\lambda^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} S_0 - \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} S_1 + \lambda S_2 - S_3\right\};$$

. . . .

und wählt man für λ den Werth 0,3, so wird $\exp(-\lambda) = 0{,}7408$; $\gamma_0 = 783{,}8$; $\gamma_1 = 18{,}8$; $\gamma_2 = 36{,}3$; $\gamma_3 = 9{,}9$; $\gamma_4 = 1{,}2$; und man erhält

$$\Phi(0) = 850; \quad \Phi(1) = 129; \quad \Phi(2) = 74; \quad \Phi(3) = 5; \quad \Phi(4) = 0.$$

Wählt man hingegen für λ den Werth 0,2, so wird $\exp(-\lambda) = 0{,}8187$; $\gamma_0 = 866{,}2$; $\gamma_1 = -65{,}8$; $\gamma_2 = 42{,}4$; $\gamma_3 = 6{,}8$; $\gamma_4 = 0{,}4$; und es wird wiederum eine vollständige Uebereinstimmung mit den Werthen der Vertheilungstafel erzielt.

Es wird ferner die Vertheilungstafel

0	1	2	3	4	5	6	7
126	115	208	308	190	58	8	2

1) Entnommen aus: G. Duncker, »Variation und Asymmetrie bei Pleuronectes flesus L.« Die Varianten 0, 1, 2, 3 bezeichnen die Anzahlen der Theilstrahlen in der linken Bauchflosse bei 1058 (561 männlichen und 497 weiblichen) Individuen. — Die Varianten 0 bis 7 der folgenden Vertheilungstafel geben die Anzahlen der Theilstrahlen in der linken Brustflosse für 1015 (528 männliche und 487 weibliche) Individuen an.

durch die Function

$$\Phi(\alpha) = 137{,}4 \cdot \varphi(\alpha) - 72{,}7 \cdot \varphi_1(\alpha) - 12{,}2 \cdot \varphi_2(\alpha) + 50{,}0 \cdot \varphi_3(\alpha) \\ + 26{,}5 \cdot \varphi_4(\alpha) + 1{,}9 \cdot \varphi_5(\alpha) - 3{,}1 \cdot \varphi_6(\alpha) - 1{,}5 \cdot \varphi_7(\alpha),$$

für welche

$$\varphi(\alpha) = \frac{2^\alpha}{\Pi(\alpha)},$$

insoweit dargestellt, als die Werthe

α	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Phi(\alpha)$	126	113	211	305	190	59	9	1	0,5

resultiren.

Will man den Parameter λ nach einer festen Regel bestimmen, so kann man $\lambda = S_1 : S_0$ setzen, so dass $\gamma_1 = 0$ wird.

§ 4. Die Berechnung der Mittelwerthe $\varepsilon_{\varrho,\sigma}$.

Die auf ein beliebiges Werthenpaar (c, d) bezogenen und durch

$$m \cdot \varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} z_{\varkappa,\lambda} (a_\varkappa - c)^\varrho (b_\lambda - d)^\sigma \tag{31}$$

für $\varrho = 0, 1, 2 \ldots$; $\sigma = 0, 1, 2 \ldots$ definirten Mittelwerthe der doppelreihigen Vertheilungstafel

$$\begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & \ldots & a_r \\ \hline b_1 & z_{11} & z_{21} & \ldots & z_{r1} \\ b_2 & z_{12} & z_{22} & \ldots & z_{r2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_s & z_{1s} & z_{2s} & \ldots & z_{rs} \end{array} \tag{32}$$

lassen sich nach der in § 1 entwickelten Methode berechnen, wenn sowohl die Reihe $a_1, a_2 \ldots a_r$ als auch die Reihe $b_1, b_2 \ldots b_s$ äquidistant ist.

Ist das constante Intervall der a-Werthe gleich i, der b-Werthe gleich j und wird vorläufig eines der $r \cdot s$ Werthenpaare $(a_\varkappa, b_\lambda)$, das durch (a_0, b_0) bezeichnet werden soll, zur Bestimmung der Abweichungen gewählt, um nachträglich zu den als Norm geforderten Bezugswerthen (c, d) überzugehen, so stellt sich die Vertheilungstafel (32), wenn die

Abweichungen $a_\varkappa - a_0$ und $b_\lambda - b_0$ an Stelle von $a_\varkappa$ und b_λ treten, in folgender Form dar:

	$-ti$	..	$-2i$	$-i$	0	i	$2i$	..	ui
$-vj$	$z_{-t,-v}$	..	$z_{-2,-v}$	$z_{-1,-v}$	$z_{0,-v}$	$z_{1,-v}$	$z_{2,-v}$	..	$z_{u,-v}$
.	.		.	.	.	.	.		.
.	.		.	.	.	.	.		.
$-2j$	$z_{-t,-2}$	..	$z_{-2,-2}$	$z_{-1,-2}$	$z_{0,-2}$	$z_{1,-2}$	$z_{2,-2}$	..	$z_{u,-2}$
$-j$	$z_{-t,-1}$	..	$z_{-2,-1}$	$z_{-1,-1}$	$z_{0,-1}$	$z_{1,-1}$	$z_{2,-1}$	..	$z_{u,-1}$
0	$z_{-t,-0}$	..	$z_{-2,0}$	$z_{-1,0}$	$z_{0,0}$	$z_{1,0}$	$z_{2,0}$	..	$z_{u,0}$
j	$z_{-t,1}$	..	$z_{-2,1}$	$z_{-1,1}$	$z_{0,1}$	$z_{1,1}$	$z_{2,1}$	..	$z_{u,1}$
$2j$	$z_{-t,2}$	..	$z_{-2,2}$	$z_{-1,2}$	$z_{0,2}$	$z_{1,2}$	$z_{2,2}$	..	$z_{u,2}$
.	.		.	.	.	.	.		.
.	.		.	.	.	.	.		.
wj	$z_{-t,w}$	..	$z_{-2,w}$	$z_{-1,w}$	$z_{0,w}$	$z_{1,w}$	$z_{2,w}$	..	$z_{u,w}$

(33)

Sie zerfällt nach Abscheidung der zu $z_{0,0}$ gehörenden Vertical- und Horizontalreihe in vier Quadranten, die durch $v \cdot t$, $v \cdot u$, $w \cdot t$ und $w \cdot u$ Werte ausgefüllt werden.

Die auf $(0, 0)$ bezogenen Mittelwerthpotenzen, die zur Unterscheidung von den auf (c, d) bezogenen Werthen $\varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma}$ durch $\eta_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma}$ bezeichnet werden sollen, werden alsdann durch die Abweichungssummen

$$\begin{aligned}
\eta_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} = (-i)^\varrho \cdot (-j)^\sigma \cdot \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=t}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=v} \varkappa^\varrho \cdot \lambda \cdot z_{-\varkappa,-\lambda} + i^\varrho \cdot (-j)^\sigma \cdot \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=u}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=v} \varkappa^\varrho \cdot \lambda^\sigma \cdot z_{\varkappa,-\lambda} \\
+ (-i)^\varrho \cdot j^\sigma \cdot \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=t}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=w} \varkappa^\varrho \cdot \lambda^\sigma \cdot z_{-\varkappa,\lambda} + i^\varrho \cdot j^\sigma \cdot \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=u}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=w} \varkappa^\varrho \cdot \lambda^\sigma \cdot z_{\varkappa,\lambda} \\
+ (-i)^\varrho \cdot \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=t} \varkappa^\varrho \cdot 0^\sigma \cdot z_{-\varkappa,0} + i^\varrho \cdot \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=u} \varkappa^\varrho \cdot 0^\sigma \cdot z_{\varkappa,0} \\
+ (-j)^\sigma \cdot \sum_{\lambda=1}^{\lambda=v} 0^\varrho \cdot \lambda^\sigma \cdot z_{0,-\lambda} + j^\sigma \cdot \sum_{\lambda=1}^{\lambda=w} 0^\varrho \cdot \lambda^\sigma \cdot z_{0,\lambda} \\
+ 0^\varrho \cdot 0^\sigma \cdot z_{0,0}
\end{aligned} \tag{34}$$

für $\varrho = 0, 1, 2 \ldots$; $\sigma = 0, 1, 2 \ldots$ bestimmt, wenn 0^ϱ und 0^σ für $\varrho = 0$ und $\sigma = 0$ gleich 1 gesetzt wird.

Es handelt sich somit wesentlich um die Berechnung von Summen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \varkappa^{\varrho}\cdot\lambda^{\sigma}\cdot z_{\varkappa,\lambda}$$

$$\begin{aligned} &= 1^{\varrho}\cdot 1^{\sigma}\cdot z_{11} + 2^{\varrho}\cdot 1^{\sigma}\cdot z_{21} + 3^{\varrho}\cdot 1^{\sigma}\cdot z_{31} + \cdots \\ &+ 1^{\varrho}\cdot 2^{\sigma}\cdot z_{12} + 2^{\varrho}\cdot 2^{\sigma}\cdot z_{22} + 3^{\varrho}\cdot 2^{\sigma}\cdot z_{32} + \cdots \\ &+ 1^{\varrho}\cdot 3^{\sigma}\cdot z_{13} + 2^{\varrho}\cdot 3^{\sigma}\cdot z_{23} + 3^{\varrho}\cdot 3^{\sigma}\cdot z_{33} + \cdots \\ &+ \cdots\cdots \end{aligned} \tag{35}$$

aus einer gegebenen Doppelreihe von $n\cdot m$ Werthen $z_{\varkappa,\lambda}$, die in der Form

$$\begin{array}{c|cccc} & n & n-1 & \ldots & 1 \\ \hline m & z_{n,m} & z_{n-1,m} & \ldots & z_{1,m} \\ m-1 & z_{n,m-1} & z_{n-1,m-1} & \ldots & z_{1,m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & z_{n,1} & z_{n-1,1} & \ldots & z_{1,1} \end{array} \tag{36}$$

vorausgesetzt werden kann, in welcher n die Werthe t und u, m die Werthe v und w repräsentirt.

Aus dieser Doppelreihe leite man weitere ab, indem man sowohl das System der Horizontalreihen als auch das System der Verticalreihen dem Summationsprocess (6) [§ 1, b] unterwirft und jede neu entstehende Doppelreihe ebenso behandelt. Auf diese Weise entsteht ein System von Doppelreihen, das durch folgendes Schema angedeutet wird:

$z_{n,m}$	..	$z_{3,m}$	$z_{2,m}$	$z_{1,m}$	$s_{1,1}^{(1,0)}$	..	$s_{n-2,1}^{(1,0)}$	$s_{n-1,1}^{(1,0)}$	$s_{1,1}^{(2,0)}$	..	$s_{n-2,1}^{(2,0)}$
.		.	.	.	.		.	.	.		.
.		.	.	.	.		.	.	.		.
$z_{n,3}$	..	$z_{3,3}$	$z_{2,3}$	$z_{1,3}$	$s_{1,m-2}^{(1,0)}$	..	$s_{n-2,m-2}^{(1,0)}$	$s_{n-1,m-2}^{(1,0)}$	$s_{1,m-2}^{(2,0)}$	..	$s_{n-2,m-2}^{(2,0)}$
$z_{n,2}$	..	$z_{3,2}$	$z_{2,2}$	$z_{1,2}$	$s_{1,m-1}^{(1,0)}$	..	$s_{n-2,m-1}^{(1,0)}$	$s_{n-1,m-1}^{(1,0)}$	$s_{1,m-1}^{(2,0)}$	..	$s_{n-2,m-1}^{(2,0)}$
$z_{n,1}$	..	$z_{3,1}$	$z_{2,1}$	$z_{1,1}$	$s_{1,m}^{(1,0)}$	..	$s_{n-2,m}^{(1,0)}$	$s_{n-1,m}^{(1,0)}$	$s_{1,m}^{(2,0)}$	..	$s_{n-2,m}^{(2,0)}$
$s_{1,1}^{(0,1)}$	..	$s_{n-2,1}^{(0,1)}$	$s_{n-1,1}^{(0,1)}$	$s_{n,1}^{(0,1)}$	$s_{1,1}^{(1,1)}$	..	$s_{n-2,1}^{(1,1)}$	$s_{n-1,1}^{(1,1)}$	$s_{1,1}^{(2,1)}$	..	$s_{n-2,1}^{(2,1)}$
.		.	.	.	.		.	.	.		.
.		.	.	.	.		.	.	.		.
$s_{1,m-2}^{(0,1)}$	..	$s_{n-2,m-2}^{(0,1)}$	$s_{n-1,m-2}^{(0,1)}$	$s_{n,m-2}^{(0,1)}$	$s_{1,m-2}^{(1,1)}$	..	$s_{n-2,m-2}^{(1,1)}$	$s_{n-1,m-2}^{(1,1)}$	$s_{1,m-2}^{(2,1)}$	..	$s_{n-2,m-2}^{(2,1)}$
$s_{1,m-1}^{(0,1)}$	..	$s_{n-2,m-1}^{(0,1)}$	$s_{n-1,m-1}^{(0,1)}$	$s_{n,m-1}^{(0,1)}$	$s_{1,m-1}^{(1,1)}$	..	$s_{n-2,m-1}^{(1,1)}$	$s_{n-1,m-1}^{(1,1)}$	$s_{1,m-1}^{(2,1)}$	..	$s_{n-2,m-1}^{(2,1)}$
$s_{1,1}^{(0,2)}$	..	$s_{n-2,1}^{(0,2)}$	$s_{n-1,1}^{(0,2)}$	$s_{n,1}^{(0,2)}$	$s_{1,1}^{(1,2)}$	..	$s_{n-2,1}^{(1,2)}$	$s_{n-1,1}^{(1,2)}$	$s_{1,1}^{(2,2)}$	..	$s_{n-2,1}^{(2,2)}$
.		.	.	.	.		.	.	.		.
.		.	.	.	.		.	.	.		.
$s_{1,m-2}^{(0,2)}$	..	$s_{n-2,m-2}^{(0,2)}$	$s_{n-1,m-2}^{(0,2)}$	$s_{n,m-2}^{(0,2)}$	$s_{1,m-2}^{(1,2)}$	..	$s_{n-2,m-2}^{(1,2)}$	$s_{n-1,m-2}^{(1,2)}$	$s_{1,m-2}^{(2,2)}$	..	$s_{n-2,m-2}^{(2,2)}$

u. s. w.

u. s. w.

Es ist hier für $\mu = 1, 2 \ldots;\ \nu = 0, 1, 2 \ldots$

$$s_{\varkappa,\lambda}^{(\mu,\nu)} = s_{1,\lambda}^{(\mu-1,\nu)} + s_{2,\lambda}^{(\mu-1,\nu)} + \cdots + s_{\varkappa,\lambda}^{(\mu-1,\nu)},$$

und für $\nu = 1, 2 \ldots;\ \mu = 0, 1, 2 \ldots$

$$s_{\varkappa,\lambda}^{(\mu,\nu)} = s_{\varkappa,1}^{(\mu,\nu-1)} + s_{\varkappa,2}^{(\mu,\nu-1)} + \cdots + s_{\varkappa,\lambda}^{(\mu,\nu-1)},$$

wenn $s_{\varkappa,\lambda}^{(0,0)} = z_{n-\varkappa+1,\,m-\lambda+1}$ gesetzt wird. Insbesondere ist

$$s_{1,\lambda}^{(\mu,\nu)} = s_{1,\lambda}^{(\mu-1,\nu)} = \cdots = s_{1,\lambda}^{(0,\nu)}; \quad s_{1,\lambda}^{(\mu,0)} = z_{n,\,m-\lambda+1};$$
$$s_{\varkappa,1}^{(\mu,\nu)} = s_{\varkappa,1}^{(\mu,\nu-1)} = \cdots = s_{\varkappa,1}^{(\mu,0)}; \quad s_{\varkappa,1}^{(0,\nu)} = z_{n-\varkappa+1,\,m}.$$

Berechnet man nun für jede Doppelreihe den Werth

$$S_{\mu,\nu} = \sum s_{\varkappa,\lambda}^{(\mu,\nu)},$$

indem man über $\varkappa = 1, 2 \ldots n-\mu$, $\lambda = 1, 2 \ldots m-\nu$ summirt, so erhält man

$$S_{0,0} = \sum s_{\varkappa,\lambda}^{(0,0)} = \sum z_{\varkappa,\lambda};$$
$$S_{10} = \sum s_{\varkappa,\lambda}^{(1,0)} = \sum (\varkappa-1)\cdot z_{\varkappa,\lambda};$$
$$S_{01} = \sum s_{\varkappa,\lambda}^{(0,1)} = \sum (\lambda-1)\cdot z_{\varkappa,\lambda};$$
$$S_{11} = \sum s_{\varkappa,\lambda}^{(1,1)} = \sum (\varkappa-1)\cdot(\lambda-1)\cdot z_{\varkappa,\lambda};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und allgemein

$$S_{\mu,\nu} = \sum \frac{(\varkappa-1)(\varkappa-2)\cdots(\varkappa-\mu)}{1\cdot 2\cdots\mu}\cdot\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-\nu)}{1\cdot 2\cdots\nu}\cdot z_{\varkappa,\lambda}, \tag{37}$$

wo die Summation bezüglich der $z_{\varkappa,\lambda}$ über den ganzen Bereich von (36) sich erstreckt.

Hieraus findet man die von $\varkappa = 1$ bis $\varkappa = n$ und von $\lambda = 1$ bis $\lambda = m$ erstreckten Doppelsummen bestimmt durch:

$$\sum z_{\varkappa,\lambda} = S_{00};$$
$$\sum \varkappa\cdot z_{\varkappa,\lambda} = S_{10} + S_{00};$$
$$\sum \lambda\cdot z_{\varkappa,\lambda} = S_{01} + S_{00};$$
$$\sum \varkappa\cdot\lambda\cdot z_{\varkappa,\lambda} = S_{11} + S_{10} + S_{01} + S_{00};$$
$$\sum \varkappa^2\cdot z_{\varkappa,\lambda} = 2\cdot S_{20} + 3\cdot S_{10} + S_{00};$$
$$\sum \lambda^2\cdot z_{\varkappa,\lambda} = 2\cdot S_{02} + 3\cdot S_{01} + S_{00};$$
$$\sum \varkappa^2\lambda\cdot z_{\varkappa,\lambda} = 2\cdot S_{21} + 2\cdot S_{20} + 3\cdot S_{11} + 3\cdot S_{10} + S_{01} + S_{00};$$

$$\sum \varkappa \lambda^2 \cdot z_{\varkappa,\lambda} = 2 \cdot S_{12} + 2 \cdot S_{02} + 3 \cdot S_{11} + 3 \cdot S_{01} + S_{10} + S_{00};$$

$$\sum \varkappa^2 \lambda^2 \cdot z_{\varkappa,\lambda} = 4 \cdot S_{22} + 6 \cdot S_{21} + 6 \cdot S_{12} + 2 \cdot S_{20} + 2 \cdot S_{02} + 9 \cdot S_{11} + 3 \cdot S_{10} + 3 \cdot S_{01} + S_{00};$$

. . . .

Das Bildungsgesetz für diese Summenwerthe erhellt aus

$$\left.\begin{aligned}\sum \varkappa^{\mu} \cdot \lambda^{\nu} \cdot z_{\varkappa,\lambda} = \mu!\,\nu!\,S_{\mu,\nu} + c_{\mu}^{(1)}(\mu-1)!\,\nu!\,S_{\mu-1,\nu} + c_{\nu}^{(1)} \cdot \mu!(\nu-1)!\,S_{\mu,\nu-1} \\ + c_{\mu}^{(1)} \cdot c_{\nu}^{(1)} (\mu-1)!\,(\nu-1)!\,S_{\mu-1,\nu-1} + \cdots + S_{0,0},\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

wo die Werthe $c_{\mu}^{(1)}$, $c_{\mu}^{(2)}$ . . . $c_{\nu}^{(1)}$, $c_{\nu}^{(2)}$ . . . der Tabelle (14) in § 1, b zu entnehmen sind.

Da jeder der vier Quadranten von (33) dem an (36) skizzirten Rechenverfahren zu unterwerfen ist, so ergeben sich je vier Werthe $S_{\mu,\nu}$. Um dieselben zu unterscheiden, mögen die S-Werthe für den Quadranten der $u \cdot w$ Werthe $z_{\varkappa,\lambda}$ durch $S_{\mu,\nu}^{++}$, für den Quadranten der $u \cdot v$ Werthe $z_{\varkappa,-\lambda}$ durch $S_{\mu,\nu}^{+-}$, für den Quadranten der $t \cdot w$ Werthe $z_{-\varkappa,\lambda}$ durch $S_{\mu,\nu}^{-+}$ und für den Quadranten der $t \cdot v$ Werthe $z_{-\varkappa,-\lambda}$ durch $S_{\mu,\nu}^{--}$ bezeichnet werden.

Es finden sich ferner in (33) noch die vier Reihen der u Werthe $z_{\varkappa,0}$, der t Werthe $z_{-\varkappa,0}$, der w Werthe $z_{0,\lambda}$ und der v Werthe $z_{0,-\lambda}$ neben dem Werthe $z_{0,0}$. Auf jede dieser vier Reihen ist der Summationsprocess (6) [§ 1, b] unmittelbar anzuwenden, um aus den S-Werthen die Summen

$$\sum \varkappa^{\varrho} \cdot z_{\varkappa,0}; \qquad \sum \varkappa^{\varrho} \cdot z_{-\varkappa,0}; \qquad \sum \lambda^{\sigma} \cdot z_{0,\lambda}; \qquad \sum \lambda^{\sigma} \cdot z_{0,-\lambda}$$

zu finden. Von diesen S-Werthen mögen die aus den $z_{\varkappa,0}$ gebildeten durch S_{μ}^{+0}, die aus den $z_{-\varkappa,0}$ berechneten durch S_{μ}^{-0} und entsprechend die aus den $z_{0,\lambda}$ und $z_{0,-\lambda}$ abgeleiteten durch S_{ν}^{0+} und S_{ν}^{0-} angedeutet werden, so dass beispielsweise

$$\sum \varkappa \cdot z_{\varkappa,0} = S_1^{+0} + S_0^{+0}; \qquad \sum \varkappa \cdot z_{-\varkappa,0} = S_1^{-0} + S_0^{-0};$$

$$\sum \lambda \cdot z_{0,\lambda} = S_1^{0+} + S_0^{0+}; \qquad \sum \lambda \cdot z_{0,-\lambda} = S_1^{0-} + S_0^{0-}.$$

Demgemäß resultirt durch Einsetzen der S-Werthe in (34):

$$m = S_{00}^{++} + S_{00}^{+-} + S_{00}^{-+} + S_{00}^{--} + S_0^{+0} + S_0^{-0} + S_0^{0+} + S_0^{0-} + z_{00};$$

$$m\eta_{10} = i\{(S_{10}^{++} + S_{10}^{+-} - S_{10}^{-+} - S_{10}^{--}) + (S_{00}^{++} + S_{00}^{+-} - S_{00}^{-+} - S_{00}^{--}) + (S_1^{+0} - S_1^{-0}) + (S_0^{+0} - S_0^{-0})\};$$

$$m\eta_{01} = j\{(S_{01}^{++} - S_{01}^{+-} + S_{01}^{-+} - S_{01}^{--}) + (S_{00}^{++} - S_{00}^{+-} + S_{00}^{-+} - S_{00}^{--}) + (S_1^{0+} - S_1^{0-}) + (S_0^{0+} - S_0^{0-})\};$$

$$m\eta_{11}^2 = ij\{(S_{11}^{++} - S_{11}^{+-} - S_{11}^{-+} + S_{11}^{--}) + (S_{10}^{++} - S_{10}^{+-} - S_{10}^{-+} + S_{10}^{--}) + (S_{01}^{++} - S_{01}^{+-} - S_{01}^{-+} + S_{01}^{--}) + (S_{00}^{++} - S_{00}^{+-} - S_{00}^{-+} + S_{00}^{--})\};$$

$$m\eta_{20}^2 = i^2\{2(S_{20}^{++} + S_{20}^{+-} + S_{20}^{-+} + S_{20}^{--}) + 3(S_{10}^{++} + S_{10}^{+-} + S_{10}^{-+} + S_{10}^{--}) + (S_{00}^{++} + S_{00}^{+-} + S_{00}^{-+} + S_{00}^{--}) + 2(S_2^{+0} + S_2^{-0}) + 3(S_1^{+0} + S_1^{-0}) + (S_0^{+0} + S_0^{-0})\};$$

$$m\eta_{02}^2 = j^2\{2(S_{02}^{++} + S_{02}^{+-} + S_{02}^{-+} + S_{02}^{--}) + 3(S_{01}^{++} + S_{01}^{+-} + S_{01}^{-+} + S_{01}^{--}) + (S_{00}^{++} + S_{00}^{+-} + S_{00}^{-+} + S_{00}^{--}) + 2(S_2^{0+} + S_2^{0-}) + 3(S_1^{0+} + S_1^{0-}) + (S_0^{0+} + S_0^{0-})\};$$

$$m\eta_{21}^3 = i^2j\{2(S_{21}^{++} - S_{21}^{+-} + S_{21}^{-+} - S_{21}^{--}) + 2(S_{20}^{++} - S_{20}^{+-} + S_{20}^{-+} - S_{20}^{--}) + 3(S_{11}^{++} - S_{11}^{+-} + S_{11}^{-+} - S_{11}^{--}) + 3(S_{10}^{++} - S_{10}^{+-} + S_{10}^{-+} - S_{10}^{--}) + (S_{01}^{++} - S_{01}^{+-} + S_{01}^{-+} - S_{01}^{--}) + (S_{00}^{++} - S_{00}^{+-} + S_{00}^{-+} - S_{00}^{--})\};$$

$$m\eta_{12}^3 = ij^2\{2(S_{12}^{++} + S_{12}^{+-} - S_{12}^{-+} - S_{12}^{--}) + 2(S_{02}^{++} + S_{02}^{+-} - S_{02}^{-+} - S_{02}^{--}) + 3(S_{11}^{++} + S_{11}^{+-} - S_{11}^{-+} - S_{11}^{--}) + 3(S_{01}^{++} + S_{01}^{+-} - S_{01}^{-+} - S_{01}^{--}) + (S_{10}^{++} + S_{10}^{+-} - S_{10}^{-+} - S_{10}^{--}) + (S_{00}^{++} + S_{00}^{+-} - S_{00}^{-+} - S_{00}^{--})\};$$

$$m\eta_{22}^4 = i^2j^2\{4(S_{22}^{++} + S_{22}^{+-} + S_{22}^{-+} + S_{22}^{--}) + 6(S_{21}^{++} + S_{21}^{+-} + S_{21}^{-+} + S_{21}^{--}) + 6(S_{12}^{++} + S_{12}^{+-} + S_{12}^{-+} + S_{12}^{--}) + 2(S_{20}^{++} + S_{20}^{+-} + S_{20}^{-+} + S_{20}^{--}) + 2(S_{02}^{++} + S_{02}^{+-} + S_{02}^{-+} + S_{02}^{--}) + 9(S_{11}^{++} + S_{11}^{+-} + S_{11}^{-+} + S_{11}^{--}) + 3(S_{10}^{++} + S_{10}^{+-} + S_{10}^{-+} + S_{10}^{--}) + 3(S_{01}^{++} + S_{01}^{+-} + S_{01}^{-+} + S_{01}^{--}) + (S_{00}^{++} + S_{00}^{+-} + S_{00}^{-+} + S_{00}^{--})\};$$

. . . .

Setzt man für $\mu = 0, 1, 2 \ldots \varrho$; $\nu = 0, 1, 2 \ldots \sigma$, wenn ϱ und σ beliebig aber fest gewählte positive ganze Zahlen bezeichnen, zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
[S_{\varrho-\mu,\sigma-\nu}] &= S_{\varrho-\mu,\sigma-\nu}^{++} + (-1)^\sigma \cdot S_{\varrho-\mu,\sigma-\nu}^{+-} + (-1)^\varrho \cdot S_{\varrho-\mu,\sigma-\nu}^{-+} \\ &\quad + (-1)^{\varrho+\sigma} \cdot S_{\varrho-\mu,\sigma-\nu}^{--};\\
[S_{\varrho-\mu}] &= S_{\varrho-\mu,0}^{++} + S_{\varrho-\mu,0}^{+-} + (-1)^\varrho S_{\varrho-\mu,0}^{-+} + (-1)^\varrho S_{\varrho-\mu,0}^{--} \\ &\quad + S_{\varrho-\mu}^{+0} + (-1)^\varrho S_{\varrho-\mu}^{-0};\\
[S_{\sigma-\nu}] &= S_{0,\sigma-\nu}^{++} + (-1)^\sigma \cdot S_{0,\sigma-\nu}^{+-} + S_{0,\sigma-\nu}^{-+} + (-1)^\sigma \cdot S_{0,\sigma-\nu}^{--} \\ &\quad + S_{\sigma-\nu}^{0+} + (-1)^\sigma \cdot S_{\sigma-\nu}^{0-},
\end{aligned}\right\} \quad (39a)$$

so kann der Zusammenhang von $\eta_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma}$ mit den S-Werthen allgemein durch folgende, für $\varrho = 1, 2, 3 \ldots ;\ \sigma = 1, 2, 3 \ldots$ gültige Formeln vor Augen gestellt werden:

$$\left.\begin{aligned} m\eta_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} &= i^{\varrho} j^{\sigma}\big\{\varrho!\,\sigma!\,[S_{\varrho,\sigma}] + c_{\varrho}^{(1)}(\varrho-1)!\,\sigma!\,[S_{\varrho-1,\sigma}] + c_{\sigma}^{(1)}\varrho!\,(\sigma-1)!\,[S_{\varrho,\sigma-1}] \\ &\quad + c_{\varrho}^{(1)}\cdot c_{\sigma}^{(1)}(\varrho-1)!\,(\sigma-1)!\,[S_{\varrho-1,\sigma-1}] + \cdots + [S_{0,0}]\big\}; \\ m\eta_{\varrho,0}^{\varrho} &= i^{\varrho}\big\{\varrho!\,[S_{\varrho}] + c_{\varrho}^{(1)}(\varrho-1)!\,[S_{\varrho-1}] + \cdots + [S_0]\big\}; \\ m\eta_{0,\sigma}^{\sigma} &= j^{\sigma}\big\{\sigma!\,[S_{\sigma}] + c_{\sigma}^{(1)}(\sigma-1)!\,[S_{\sigma-1}] + \cdots + [S_0]\big\}. \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Soll nun schließlich an Stelle der vorläufig gewählten Ausgangswerthe a_0, b_0 das als Norm geforderte Werthenpaar (c, d) treten, für welches $c = a_0 + \gamma$, $d = b_0 + \delta$ sein möge, so hat der Uebergang zu den auf (c, d) bezogenen Mittelwerthen $\varepsilon_{\varrho,\sigma}$ mittelst

$$\varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} = \eta_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} - \binom{\varrho}{1}\gamma\cdot\eta_{\varrho-1,\sigma}^{\varrho+\sigma-1} - \binom{\sigma}{1}\delta\cdot\eta_{\varrho,\sigma-1}^{\varrho+\sigma-1} + \binom{\varrho}{1}\binom{\sigma}{1}\gamma\delta\cdot\eta_{\varrho-1,\sigma-1}^{\varrho+\sigma-2} \pm \cdots \quad (40)$$

zu erfolgen. Es ist somit

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{10} = \eta_{10} - \gamma; \quad \varepsilon_{01} = \eta_{01} - \delta; \quad \varepsilon_{11}^{2} = \eta_{11}^{2} - \gamma\eta_{01} - \delta\eta_{10} + \gamma\delta; \\ &\varepsilon_{20}^{2} = \eta_{20}^{2} - 2\gamma\eta_{10} + \gamma^2; \quad \varepsilon_{02}^{2} = \eta_{02}^{2} - 2\delta\eta_{01} + \delta^2; \\ &\varepsilon_{21}^{3} = \eta_{21}^{3} - \delta\eta_{20}^{2} - 2\gamma\eta_{11}^{2} + 2\gamma\delta\eta_{10} + \gamma^2\eta_{01} - \gamma^2\delta; \\ &\varepsilon_{12}^{3} = \eta_{12}^{3} - \gamma\eta_{02}^{2} - 2\delta\eta_{11}^{2} + 2\gamma\delta\eta_{01} + \delta^2\eta_{10} - \gamma\delta^2; \\ &\varepsilon_{22}^{4} = \eta_{22}^{4} - 2\gamma\eta_{12}^{3} - 2\delta\eta_{21}^{3} + \gamma^2\eta_{02}^{2} + \delta^2\eta_{20}^{2} + 4\gamma\delta\eta_{11}^{2} - 2\gamma^2\delta\eta_{01} \\ &\qquad - 2\gamma\delta^2\eta_{10} + \gamma^2\delta^2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Wählt man, wie als Regel anzunehmen, (c, d) so, dass $\varepsilon_{10} = \varepsilon_{01} = 0$, so wird $\gamma = \eta_{10}$; $\delta = \eta_{01}$ und man gelangt zu dem Mittelwerthe $\varepsilon_{\varrho,\sigma}$ auf Grund der Formel

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} &= \eta_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma} - \binom{\varrho}{1}\eta_{\varrho-1,\sigma}^{\varrho+\sigma-1}\cdot\eta_{10} - \binom{\sigma}{1}\eta_{\varrho,\sigma-1}^{\varrho+\sigma-1}\cdot\eta_{01}\,. \\ &\quad + \binom{\varrho}{1}\binom{\sigma}{1}\eta_{\varrho-1,\sigma-1}^{\varrho+\sigma-2}\cdot\eta_{10}\cdot\eta_{01} \pm \cdots \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{10} = \varepsilon_{01} = 0; \quad \varepsilon_{11}^{2} = \eta_{11}^{2} - \eta_{10}\cdot\eta_{01}; \\ &\varepsilon_{20}^{2} = \eta_{20}^{2} - \eta_{10}^{2}; \quad \varepsilon_{02}^{2} = \eta_{02}^{2} - \eta_{01}^{2}; \\ &\varepsilon_{21}^{3} = \eta_{21}^{3} - \eta_{20}^{2}\eta_{01} - 2\eta_{11}^{2}\eta_{10} + 2\eta_{10}^{2}\eta_{01}; \\ &\varepsilon_{12}^{3} = \eta_{12}^{3} - \eta_{02}^{2}\eta_{10} - 2\eta_{11}^{2}\eta_{01} + 2\eta_{10}\eta_{01}^{2}; \\ &\varepsilon_{22}^{4} = \eta_{22}^{4} - 2\eta_{12}^{3}\eta_{10} - 2\eta_{21}^{3}\eta_{01} + \eta_{02}^{2}\eta_{10}^{2} + \eta_{20}^{2}\eta_{01}^{2} + 4\eta_{11}^{2}\eta_{10}\eta_{01} - 3\eta_{10}^{2}\eta_{01}^{2}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Schließlich ist noch die Correction wegen der Endlichkeit der Anzahl m der Werthenpaare, die zur Ableitung von $\varepsilon_{\varrho,\sigma}^{\varrho+\sigma}$ dienten, nach II, (62a) anzubringen und der mittlere Fehler nach II, (60) zu berechnen, um in den nach Möglichkeit berichtigten und gesicherten Werthen $\varepsilon_{\varrho,\sigma}$ die Bestimmungsstücke der Vertheilungstafel (32) zu erhalten.

Um die einfache Anwendungsweise der obigen Rechnungsregeln an einem Beispiele zu zeigen, wähle ich die Vertheilungstafel für die beiderseitigen Anzahlen Müller'scher Drüsen bei 2000 männlichen Schweinen[1]):

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	8	5	2	.	.						
1	4	151	58	9	3						
2	2	65	154	96	28	7	1				
3		14	88	173	128	28	6				
4		5	27	119	153	77	26	3	1		
5		1	7	24	92	101	52	11	9		
6				8	16	58	48	16	7	.	2
7				1	8	20	18	17	9	5	.
8					1	3	5	3	2	2	.
9						1	3	3	2	2	1
10						.				1	.

Werden hier die Varianten $a_0 = 3$, $b_0 = 3$ mit $z_{00} = 173$ als vorläufige Ausgangswerthe bestimmt, so ergeben sich als Summen der z für die einzelnen Felder

$$S_{00}^{++} = 778; \quad S_{00}^{+-} = 39; \quad S_{00}^{-+} = 40; \quad S_{00}^{--} = 449; \quad S_0^{+0} = 162;$$
$$S_0^{-0} = 102; \quad S_0^{0+} = 152; \quad S_0^{0-} = 105;$$
$$z_{00} = 173 \text{ mit der Gesammtsumme } m = 2000.$$

1) Ich entnehme dieselbe der Abhandlung von G. Duncker »Die Methode der Variationsstatistik« (Archiv für Entwicklungsgeschichte der Organismen, VIII, S. 180), wo sie zur Berechnung des Correlationscoefficienten nach Galton und Pearson dient. Die Varianten 0 bis 10 der Horizontalreihe bezeichnen die linksseitigen Drüsen; die Varianten 0 bis 10 der Verticalreihe geben die rechtsseitigen Drüsen an. Es fanden sich also z. B. 119 Individuen mit 3 Drüsen links und 4 Drüsen rechts.

Indem man sodann in jeder Horizontal- und Verticalreihe in der Richtung von den größeren Abweichungswerthen nach den kleineren aufsummirt, erhält man folgendes System von Tabellen mit den zugehörigen S-Werthen:

8	13							
4	155							
2	67		8	1				
	14		34	6				
	5		107	30	4	1		
	1		173	72	20	9		
			131	73	25	9	2	2
			69	49	31	14	5	
			15	12	7	4	2	
			12	11	8	5	3	1
			1	1	1	1	1	

$S_{10}^{++} = 911$
$S_{10}^{+-} = 9$
$S_{10}^{-+} = 6$
$S_{10}^{--} = 249$
$S_{1}^{+0} = 40$
$S_{1}^{-0} = 14$

8	5	2								
12	156	60	9	3						
	1	7	33	117	183	126	50	29	10	3
			9	25	82	74	39	20	10	3
			1	9	24	26	23	13	10	1
				1	4	8	6	4	5	1
					1	3	3	2	3	1
									1	

$S_{01}^{++} = 920$
$S_{01}^{+-} = 3$
$S_{01}^{-+} = 8$
$S_{01}^{--} = 243$
$S_{1}^{0+} = 43$
$S_{1}^{0-} = 9$

8	13							
12	168							
	1		401	218	92	42	13	3
			228	146	72	33	13	3
			97	73	47	24	11	1
			28	24	16	10	6	1
			13	12	9	6	4	1
			1	1	1	1	1	

$S_{11}^{++} = 1652$
$S_{11}^{+-} = 0$
$S_{11}^{-+} = 1$
$S_{11}^{--} = 201$

u. s. w.

Von diesen Tabellen schließt sich die erste unmittelbar rechts, die zweite unmittelbar unten an die gegebene Vertheilungstafel an, während die dritte in diagonaler Richtung nach rechts und unten folgt, woraus die Anordnung der weiterhin nach rechts und nach unten sich anheftenden Tabellen ersichtlich wird. Für dieselben findet sich

$$S_{20}^{++}=636;\quad S_{20}^{+-}=1;\quad S_{20}^{-+}=0;\quad S_{20}^{--}=14;\quad S_{2}^{+0}=6;\quad S_{2}^{-0}=0;$$
$$S_{02}^{++}=609;\quad S_{02}^{+-}=S_{02}^{-+}=0;\quad S_{02}^{--}=15;\quad S_{2}^{0+}=11;\quad S_{2}^{0-}=0;$$
$$S_{21}^{++}=1533;\quad S_{21}^{+-}=S_{21}^{-+}=0;\quad S_{21}^{--}=20;$$
$$S_{12}^{++}=1461;\quad S_{12}^{+-}=S_{12}^{-+}=0;\quad S_{12}^{--}=21;$$
$$S_{22}^{++}=1703;\quad S_{22}^{+-}=S_{22}^{-+}=0;\quad S_{22}^{--}=8; \text{ u. s. w.}$$

Setzt man diese Werthe in die obigen Formeln ein, so wird, da $i=j=1$, $m\eta_{10}=1079$; $m\eta_{01}=1093$; $m\overset{2}{\eta}_{11}=5297$; $m\overset{2}{\eta}_{20}=6571$; $m\overset{2}{\eta}_{02}=6511$; $m\overset{3}{\eta}_{21}=11613$; $m\overset{3}{\eta}_{12}=11427$; $m\overset{4}{\eta}_{22}=52643$ oder $\eta_{10}=0{,}5395$; $\eta_{01}=0{,}5465$; $\overset{2}{\eta}_{11}=2{,}6485$; $\overset{2}{\eta}_{20}=3{,}2855$; $\overset{2}{\eta}_{02}=3{,}2555$; $\overset{3}{\eta}_{21}=5{,}8065$; $\overset{3}{\eta}_{12}=5{,}7135$; $\overset{4}{\eta}_{22}=26{,}3215$. Die als normale Ausgangswerthe (c, d) zu wählenden arithmetischen Mittel sind daher $c=3{,}5395$; $d=3{,}5465$ und die auf (c, d) bezogenen Mittelwerthe werden nach (41) durch

$$\varepsilon_{10}=\varepsilon_{01}=0;\quad \overset{2}{\varepsilon}_{11}=+\,2{,}354;\quad \overset{2}{\varepsilon}_{20}=2{,}994;\quad \overset{2}{\varepsilon}_{02}=2{,}957;$$
$$\overset{3}{\varepsilon}_{21}=+\,1{,}473;\quad \overset{3}{\varepsilon}_{12}=+\,1{,}385;\quad \overset{4}{\varepsilon}_{22}=18{,}602$$

bestimmt. Die Correction dieser Werthe wegen Endlichkeit der zu Grunde liegenden Anzahl m führt nach II, (62a) zu

$$(\varepsilon_{11})^2=+\,2{,}355;\quad (\varepsilon_{20})^2=2{,}995;\quad (\varepsilon_{02})^2=2{,}958;\quad (\varepsilon_{21})^3=+\,1{,}474;$$
$$(\varepsilon_{12})^3=+\,1{,}386;\quad (\varepsilon_{22})^4=18{,}631.$$

Die nach II, (60) berechneten mittleren Fehler $M_{\varrho,\sigma}$ sind

$$M_{10}=\pm\,0{,}039;\quad M_{01}=\pm\,0{,}038;\quad M_{11}=\pm\,0{,}081.$$

Um auch die Werthe von M_{20}, M_{02}, M_{21}, M_{12} und M_{22} abzuschätzen, bestimme ich aus der erheblich reducirten Vertheilungstafel

	−3	0	3	6
−3	168	72		
0	86	966	148	1
3	1	156	341	32
6		1	18	10

$\overset{4}{\eta}_{40} = 60$; $\overset{4}{\eta}_{04} = 50$; $\overset{6}{\eta}_{42} = 600$; $\overset{6}{\eta}_{24} = 600$; $\overset{8}{\eta}_{44} = 10000$,

und nehme diese offenbar zu großen Werthe als Annäherungen an $\overset{4}{\varepsilon}_{40}$, $\overset{4}{\varepsilon}_{04}$, $\overset{6}{\varepsilon}_{42}$, $\overset{6}{\varepsilon}_{24}$, $\overset{8}{\varepsilon}_{44}$. Es kann sonach angenähert

$M_{20} = \pm 0{,}15$; $M_{02} = \pm 0{,}15$; $M_{21} = \pm 0{,}5$; $M_{12} = \pm 0{,}5$; $M_{22} = \pm 2$

gesetzt werden. Geht man schließlich zu den Wurzelwerthen über, so ergibt sich folgendes System von Bestimmungsstücken:

$c = 3{,}54 \pm 0{,}04$; $d = 3{,}55 \pm 0{,}04$; $\varepsilon_{11} = 1{,}53\ (1{,}56;\ 1{,}51)$; $\varepsilon_{20} = 1{,}73\ (1{,}77;\ 1{,}69)$; $\varepsilon_{02} = 1{,}72\ (1{,}76;\ 1{,}68)$; $\varepsilon_{21} = +\ 1{,}14\ (1{,}25;\ 0{,}99)$; $\varepsilon_{12} = +\ 1{,}11\ (1{,}24;\ 0{,}96)$; $\varepsilon_{22} = 2{,}08\ (2{,}13;\ 2{,}02)$.

Die Correlation ist nach IV, § 2, (11) auf Grund der Werthe

$\varDelta_{11} = +\ 2{,}355$; $\varDelta_{21} = +\ 1{,}474$; $\varDelta_{12} = +\ 1{,}386$; $\varDelta_{22} = +\ 9{,}772$

zu beurtheilen. Diese Werthe müssten gleich Null sein, wenn keine Correlation vorhanden wäre. Es müsste ferner $\overset{2}{\varepsilon}_{11} = \overset{2}{\varepsilon}_{20} = \overset{2}{\varepsilon}_{02}$; $\overset{3}{\varepsilon}_{12} = \overset{3}{\varepsilon}_{30} = \overset{3}{\varepsilon}_{03} = \overset{3}{\varepsilon}_{21}$; $\overset{4}{\varepsilon}_{22} = \overset{4}{\varepsilon}_{40} = \overset{4}{\varepsilon}_{04}$ sein, wenn die Werthe der Vertheilungstafel sämmtlich in der Diagonalen liegen würden, um welche sie sich augenscheinlich gruppiren. Es ist aber $\overset{3}{\varepsilon}_{30} = 2{,}4$; $\overset{3}{\varepsilon}_{03} = 2{,}2$; $\overset{4}{\varepsilon}_{40} = 27$; $\overset{4}{\varepsilon}_{04} = 25$, wonach das Zurückbleiben hinter der vollendeten Correlation der angegebenen Art zu ermessen ist.

Anmerkung. Auf die »Berichtigung« Marbe's (S. 462 ds. Bds.) erwiedere ich, dass ich in der Fußnote zu I, § 6 (S. 116 ds. Bds.) nicht — wie Marbe anzunehmen scheint — eine ausführliche Kritik seiner Schrift beabsichtigt, sondern die an jener Stelle in Betracht kommende Behauptung bezüglich des Vorkommens der sog. reinen Gruppen wiedergegeben und auf den Mangel eines Beweises für diese Behauptung, sowie auf die Unmöglichkeit eines Beweises hingewiesen habe. Meine Bemerkungen wären daher nur dann zu berichtigen, wenn der Beweis von Marbe thatsächlich geführt worden wäre oder geführt werden könnte. Dass dies nicht der Fall ist, wird jeder zugeben, der mit der Behandlung von Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung vertraut ist. Ich muss somit die früheren Bemerkungen aufrecht erhalten und füge hier nur noch hinzu, dass jede empirische Wahrscheinlichkeitsbestimmung im allgemeinen bloß innerhalb gewisser Grenzen als zuverlässig gelten kann (vergl. S. 120 und 125). Demzufolge kann es sich beim Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung lediglich darum handeln, festzustellen, ob die theoretisch geforderten und empirisch gefundenen Werthe innerhalb gewisser (etwa durch mittlere oder wahrscheinliche Fehler bezeichneter) Grenzen mit einander übereinstimmen. In der Nichtbeachtung dieses Grundsatzes der empirischen Wahrscheinlichkeitslehre scheint mir der Grund für den Fehlschluss Marbe's bezüglich der reinen Gruppen ebenso wie für den ähnlichen Fehlschluss bezüglich der Begrenztheit der Variantenreihe und der extremen Werthe (vergl. S. 162) zu liegen. Ist aber die von Marbe behauptete Thatsache nicht erwiesen, so kommt auch die Hypothese, welche die vermeintlich bestehende Thatsache erklären soll, nicht in Betracht.
