Ueber die Bedingungen und den Beginn der Ablösung der Fersen vom Boden.

Von

Otto Fischer.

Leipzig.

Mit 4 Figuren.

Für eine zu Ehren des Herrn Geheimen Raths Professor W. Wundt veranstaltete Festschrift ein Thema zu finden, welches zu den Leistungen des hochverehrten Jubilars in Beziehung steht, fällt dank der bewunderungswürdigen Vielseitigkeit desselben auch denjenigen unter seinen Schülern nicht schwer, welche nicht mit der Philosophie in enger Berührung geblieben sind. So möge denn der folgende Beitrag zur Muskelmechanik in erster Linie dem Verfasser der »Lehre von der Muskelbewegung« [1]) und des »Handbuchs der medicinischen Physik« [2]) zu seinem 70. Geburtstage als Zeichen der dauernden Verehrung und Dankbarkeit ehrerbietigst gewidmet sein.

Durch die zahlreichen Schriften, welche seit mehreren Jahren im Anschluss an den bekannten Weber'schen Versuch zur Bestimmung der absoluten Muskelkraft über die Frage des Ablösens der Ferse vom Boden veröffentlicht worden sind, kann das rein statische Problem des Stehens auf den Zehen als gelöst angesehen werden, soweit bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen nicht auch der Beweglichkeit in den Knie- und Hüftgelenken Rechnung getragen werden soll. Wenn auch noch Verschiedenheiten in der Auffassung

1) Braunschweig, Verlag von Friedrich Vieweg u. Sohn. 1858.
2) Erlangen, Verlag von Friedrich Enke. 1867.

des ganzen Mechanismus vorhanden sind, so besteht doch hinsichtlich der, ursprünglich von Ed. Weber falsch angegebenen Bedingungen des Gleichgewichts jetzt im wesentlichen Uebereinstimmung. Bei der Discussion des statischen Problems sind nun auch von verschiedenen Seiten kinetische Fragen gestreift worden, ohne dass über dieselben bis jetzt vollkommene Einigung erzielt wäre.

Es soll daher im Folgenden das Zustandekommen der Ablösungsbewegung klargelegt und insbesondere untersucht werden, unter welchen Bedingungen ein, wenn auch noch so minimales Ablösen der Fersen vom Boden überhaupt eintreten kann.

So einfach vom Standpunkte der Mechanik aus das Gleichgewichtsproblem des Stehens mit erhobenen Fersen erscheint, so lässt sich von vornherein nicht verkennen, dass man es bei der Untersuchung des Ablösungsvorganges mit complicirteren Verhältnissen zu thun hat. Während in jenem Falle die Massen der beiden Abschnitte des Körpers nur insofern eine Rolle spielen, als sie die Lage der Schwerpunkte und die in ihnen angreifenden Gewichtskräfte bestimmen, kommt für die Bewegung auch die Vertheilung der Masse innerhalb der beiden Abschnitte in Frage, soweit dieselbe in der Größe der Trägheitsmomente ihren Ausdruck findet. Außerdem ist dabei vor allen Dingen der Einfluss in Rücksicht zu ziehen, welchen die einem Körpertheil ertheilte Beschleunigung auf den anderen ausübt. Es wird sich auch zeigen, dass die Kenntniss des Hebelgesetzes, etwa verbunden mit einem gewissen Gefühl für mechanische Wahrheiten, nicht ausreicht, um das kinetische Problem in allen Theilen exact zu lösen. Die Verhältnisse sind jedoch immer noch einfach genug, dass die Lösung sich in elementarer und anschaulicher Weise darstellen lässt.

Es mögen nun zunächst diejenigen Sätze der Mechanik kurz angeführt werden, deren Kenntniss zum Verständniss der folgenden Auseinandersetzungen erforderlich ist.

Wenn ein starrer Körper sich nur um eine im Raume feststehende Axe drehen kann, so wird jede Kraft, deren Richtung nicht gerade durch die Axe hindurchgeht oder derselben parallel läuft, wenn sie allein wirkt, den Körper in Drehung versetzen. Für die Größe dieser Drehung kommt nur dann die ganze Kraft in Betracht, wenn sie zu der Axe senkrecht gerichtet oder, mit anderen Worten, einer Ebene parallel ist, welche auf der Drehungsaxe senkrecht steht. Ist das letztere nicht der Fall, so hat man sich die Kraft in zwei rechtwinklige Componenten zerlegt zu denken, von denen die eine in der Richtung der Axe verläuft, dann ist die andere zu derselben senkrecht gerichtet. Nur die letztere Componente kann auf den Körper drehend einwirken; ist ihre Größe K und der kürzeste Abstand ihrer Richtung von der der Drehungsaxe k, so wird das von der Kraft in Bezug auf die feste Axe ausgeübte Drehungsmoment D durch das Product Kk gemessen. Die Größe der eintretenden Drehung hängt nun außerdem von der Massenvertheilung im Körper um die Drehungsaxe ab, soweit dieselbe in dem Trägheitsmoment in Bezug auf die Axe ihren Ausdruck findet. Besitzt dieses Trägheitsmoment die Größe M, so wird die von der Kraft dem Körper mitgetheilte Winkelbeschleunigung ω um die feste Drehungsaxe durch den Quotient $D:M$ bestimmt. Das Drehungsmoment D selbst ist also gleich dem Product $M\omega$. Greifen zugleich mehrere Kräfte an dem Körper an, so gilt dieselbe Beziehung, wenn man unter D das resultirende Drehungsmoment aller Kräfte K versteht. Von besonderer Bedeutung für das Problem der Fersenablösung ist der Fall, dass an dem Körper an verschiedenen Punkten in einer zur Drehungsaxe senkrechten Ebene zwei Kräfte von gleicher Größe, aber genau entgegengesetzter Richtung angreifen. Zwei solche Kräfte kann man nach dem Vorgang von Poinsot als zusammengehörig auffassen; man nennt sie dann ein Kräftepaar. Das resultirende Drehungsmoment der beiden Kräfte eines Kräftepaares wird, wovon man sich leicht überzeugen kann, durch das Product aus der Größe einer der beiden Kräfte und dem Arm des Paares, d. h. dem Abstand der beiden Kraftrichtungen, gemessen. Jedem Kräftepaar kommt dabei ein bestimmter Drehungssinn zu.

Ist die Axe, um welche sich der starre Körper drehen kann, nicht im Raume fest, sodass sie während der Drehung selbst eine Bewegung ausführt, oder besitzt der Körper überhaupt viel größere Freiheit in seiner Bewegung, so kann man sich die Wirkung einer Kraft am besten dadurch veranschaulichen, dass man die Bewegung, welche die Kraft dem Schwerpunkte des starren Körpers ertheilt, und die Drehung, welche der Körper um den Schwerpunkt erleidet, gesondert in Betracht zieht.

Es stellt sich nämlich heraus, dass die Bewegung des Schwerpunktes gerade so ausfällt, als ob die ganze Masse des Körpers in ihm vereinigt wäre, und auch die Kraft direct an ihm angriffe. Ist

K die Größe der Kraft und m die Masse des Körpers, so erfährt demnach der Schwerpunkt eine Beschleunigung γ, welche durch den Quotient $K:m$ gemessen wird. Die Kraft K muss daher gleich dem Product $m\gamma$ sein, welches man als die Effectivkraft des Schwerpunktes bezeichnet. Greifen zugleich mehrere Kräfte an dem starren Körper an, so gilt wiederum dieselbe Beziehung, wenn man unter K die Resultante sämmtlicher nach dem Schwerpunkt verlegt gedachter Kräfte versteht.

Weiterhin ergibt sich, dass die Drehung des starren Körpers um den Schwerpunkt gerade so stattfindet, als wenn der Schwerpunkt festgehalten wäre. Die Kraft übt dann ein Drehungsmoment D_0 um den Schwerpunkt aus, welches durch das Product Kk_0 gemessen wird, unter k_0 den Abstand der Kraftrichtung vom Schwerpunkt verstanden. Die Axe, um welche dabei die Kraft den Körper zu drehen sucht, steht im Schwerpunkt senkrecht auf der Ebene, die den Schwerpunkt mit der Kraftrichtung verbindet; sie soll kurz die »Axe des Drehungsmoments« heißen. Die Drehung selbst findet nun, was wohl zu beachten ist, im allgemeinen nicht um die Axe des Drehungsmomentes statt. Dies ist bei vollkommen freier Bewegung des Körpers nur der Fall, wenn die Axe des Drehungsmomentes mit einer Hauptträgheitsaxe oder, wie man sie auch nennt, einer freien Axe des starren Körpers zusammenfällt. Da diese Voraussetzung bei der Bewegung des Ablösens der Ferse für die beiden Abschnitte des Körpers genügend genau erfüllt ist, so braucht also hier nur der specielle Fall in Betracht gezogen zu werden, dass die Drehung des Körpers thatsächlich um die Axe des Drehungsmomentes stattfindet. Besitzt der starre Körper in Bezug auf diese Axe durch den Schwerpunkt das Trägheitsmoment M_0, so wird wiederum die Winkelbeschleunigung ω_0, welche von der Kraft dem Körper um die betreffende Schwerpunktsaxe mitgetheilt wird, durch den Quotient $D_0 : M_0$ gemessen. Demnach ist das Drehungsmoment D_0 selbst wieder gleich dem Product $M_0\omega_0$. Bei mehreren Kräften bedeutet D_0 das resultirende Drehungsmoment sämmtlicher Kräfte.

Man könnte natürlich auch bei einem um eine im Raume feste Axe drehbaren Körper, sofern die Axe nicht durch den Schwerpunkt hindurchgeht, nach der Bewegung des Schwerpunktes und der Drehung um den Schwerpunkt fragen, und auf diese Weise den

Bewegungseffect der einwirkenden Kraft ableiten. Man würde dann ebenfalls zum Ziele gelangen. Der Umstand, dass in diesem Falle die Bewegung des Schwerpunktes in enger Beziehung zu der Drehung um die feste Axe steht, lässt es jedoch als zweckmäßiger erscheinen, gleich die Drehung um diese Axe in Betracht zu ziehen, denn man gewinnt dadurch den Vortheil, die an der fixirten Axe selbst angreifenden Kräfte unberücksichtigt lassen zu können. Dagegen würde man zu absolut falschen Resultaten gelangen, wenn man bei einem Körper, der sich um eine zwar im Körper feste, aber in Bezug auf den ruhenden Raum in Bewegung begriffene Axe dreht, die drehende Einwirkung einer Kraft so auffassen wollte, als ob die Axe auch im Raume fest wäre. Denn durch jede Beschleunigung, welche die Axe erfährt, wird im allgemeinen auch die Drehung des Körpers um diese Axe modificirt. Dies kommt beim Problem der Fersenablösung vor allen Dingen für die Bewegung des um die obere Sprunggelenkaxe drehbaren Körperabschnittes in Betracht.

Die angeführten Sätze beziehen sich zunächst zwar nur auf die Bewegung eines einzigen starren Körpers. Es zeigt sich aber, dass mit ihrer Hülfe auch die Abhängigkeit der Bewegungen der einzelnen Theile eines Gelenksystems von den einwirkenden Kräften in verhältnissmäßig einfacher Weise dargestellt werden kann. Man hat sich zu diesem Zwecke nur darüber Rechenschaft zu geben, in welcher Weise ein jeder von zwei durch ein Gelenk verbundenen Körpertheilen durch Vermittelung des Gelenkes auf den anderen einwirkt. Rechnet man alle diese als Druck oder Zug in einem Gelenk sich äußernden Einwirkungen den übrigen am Körpertheil angreifenden Kräften hinzu, so braucht man dann keine Rücksicht mehr auf den Zusammenhang mit den übrigen Körpertheilen zu nehmen, und kann also direct die für einen einzigen starren Körper geltenden Gesetze zur Verwendung bringen. —

Nach diesen allgemeinen Auseinandersetzungen, welche geeignet sein dürften, die folgende Untersuchung ganz allgemein verständlich zu machen, soll nun auf das specielle Problem des Ablösens der Ferse vom Boden selbst eingegangen sein.

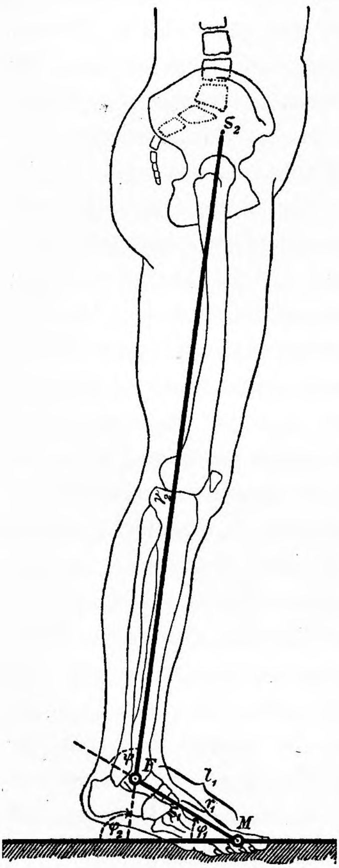
Um die mechanischen Verhältnisse möglichst einfach zu gestalten, sei angenommen, dass die beiden Füße mit ihren Längsaxen parallel stehen und sich beim Ablösen der Fersen gleichzeitig um eine gemeinsame feste Axe durch das Köpfchen des I. Metatarsus jeder Seite drehen. Der Umstand, dass in Wirklichkeit die Drehungsaxe beim Erheben auf die Zehen etwas nach vorn wandert [1]), fällt in Anbetracht der sonstigen vereinfachenden Voraussetzungen für den Beginn des Ablösens der Fersen nicht ins Gewicht. Da die beiden Füße identische Bewegungen ausführen sollen, so können sie zusammen als einziger starrer Körper behandelt werden; die Masse desselben sei mit m_1 bezeichnet. In gleicher Weise soll der ganze übrige Körper mit Ausnahme der Füße als starrer Körper aufgefasst werden, der sich nur um die gemeinsame Axe der oberen Sprunggelenke beider Seiten drehen kann; die Masse desselben sei m_2. Unter diesen Voraussetzungen erscheint also der ganze Körper als aus zwei starren Abschnitten zusammengesetzt, von denen der erste sich gegen den Fußboden um die durch die I. Metatarsusköpfchen gehende Axe, dagegen der zweite sich gegen den ersten um die Axe der oberen Sprunggelenke drehen kann. Beide Axen stehen auf der Medianebene des Körpers senkrecht; ihre Schnittpunkte mit dieser Ebene seien M und F (Fig. 1). In die Medianebene fallen auch die Schwerpunkte S_1 und S_2 beider Abschnitte; dabei liegt der Schwerpunkt S_1 des ersten Abschnittes nahezu in der Verbindungslinie der beiden Axenpunkte M und F. Macht man noch die annähernd verwirklichte Annahme, dass alle auf die beiden Abschnitte einwirkenden Kräfte der Medianebene parallel laufen, und beachtet, dass auch die Bewegung des Ablösens der Füße parallel dieser Ebene stattfindet, so genügt es, den ganzen Körper mit allen Kräften auf diese Ebene projicirt zu denken, und nur die Bewegungen in dieser Projection zu untersuchen. Die Verbindungsstrecken MF und FS_2 sollen kurz die Längsaxen der beiden Abschnitte heißen; die erstere bilde mit der nach hinten gerichteten Horizontalen den Winkel φ_1, die letztere den Winkel φ_2. Durch diese beiden Winkel ist dann die Haltung, und durch die Aenderungen derselben die Bewegung des ganzen Körpers eindeutig bestimmt. Insbesondere bildet die Längsaxe des zweiten Abschnittes mit der Verlängerung der Längsaxe des ersten Abschnittes über F hinaus den Winkel $\varphi_2 - \varphi_1$, welcher mit ψ bezeichnet sein

1) Vgl. Grützner, Ueber den Mechanismus des Zehenstandes. Archiv f. d. ges. Physiologie. Bd. LXXIII, S. 631.

soll; der Winkel zwischen den beiden Längsaxen selbst ist der Supplementswinkel von ψ.

Auf den ersten Abschnitt wirken nun folgende Kräfte ein, die ihn zu drehen suchen. Erstens im Schwerpunkt S_1 das vertical nach unten ziehende Gewicht G_1 beider Füße. Zweitens an den Ansatzstellen der über die Sprunggelenke hinwegziehenden Muskeln, die durch active Contraction oder auch nur durch die elastische Spannung derselben hervorgerufenen Muskelkräfte in der Richtung nach dem zweiten Abschnitt hin. Drittens in F der Druck, welchen der zweite Abschnitt infolge des Gelenkzusammenhanges auf den ersten ausübt. Dieser ist nach dem Newtonschen Princip der Gleichheit von Action und Reaction genau entgegengesetzt gleich der Einwirkung, die der zweite Abschnitt in F von Seiten des ersten erfährt. Die Kraft, mit welcher der erste Abschnitt in F auf den zweiten einwirkt, muss aber nach den früheren Auseinandersetzungen nach Größe und Richtung gerade so beschaffen sein, dass sie im Verein mit den übrigen am zweiten Abschnitt angreifenden äußeren Kräften dem Schwerpunkte S_2 seine Beschleunigung ertheilt. Es ist daher nöthig, gleichzeitig näher auf die Bewegung des zweiten Abschnitts einzugehen.

Fig. 1.



Bleibt insbesondere S_2 in Ruhe, oder führt derselbe eine gleichförmige geradlinige Bewegung aus, bei welcher also die Beschleunigung den Werth Null besitzt, so muss zwischen den genannten Kräften Gleichgewicht bestehen, wenn man sie nach einem Punkte verlegt. Daraus ergibt sich nach dem Princip der Gleichheit von Action und Reaction unmittelbar, dass bei ruhendem S_2 der rückwärts von Seiten des zweiten Abschnitts in F auf den ersten Abschnitt ausgeübte Druck sich als die Resultante sämmtlicher am zweiten Abschnitt angreifenden Kräfte darstellt, nachdem dieselben alle nach F verlegt worden sind.

Zu Beginn des Ablösens der Fersen aus der Ruhe erfährt nun aber im allgemeinen S_2 eine Beschleunigung. Diese wird hier, wo noch keine Winkelgeschwindigkeiten vorhanden sind, allein durch die Winkelbeschleunigungen φ_1'' und φ_2'' bestimmt, mit denen bei der Bewegung die beiden Längsaxen MF und FS_2 ihre Neigung gegen die Horizontalebene verändern. Man kann die Beschleunigung von S_2 auffassen als die Resultante aus der Beschleunigung des Punktes F und der zu diesem Punkte relativen Beschleunigung von S_2. Der Punkt F beschreibt bei allen Bewegungen einen Kreis um M; seine Beschleunigung aus der Ruhe besitzt daher die Richtung der Tangente an die Kreisbahn und die Größe $l_1\varphi_1''$, unter l_1 den Abstand des Punktes F von M verstanden. Denn die Winkelbeschleunigung φ_1'' wird durch die Tangentialbeschleunigung eines Punktes in der Entfernung 1 von M gemessen. Wenn der Körper schon in Bewegung ist, so liefert zwar auch die Winkelgeschwindigkeit des ersten Abschnittes einen Beitrag zur Beschleunigung des Punktes F, welcher unter dem Namen der Centripetal- oder Normalbeschleunigung bekannt ist. Diese Beschleunigungscomponente kommt aber natürlich nicht in Frage, wenn es sich um den Beginn der Bewegung aus der Ruhe handelt. Wie F bei der Bewegung des ganzen Körpers einen Kreis um M beschreibt, so bewegt sich auch S_2 relativ zu F auf einer Kreisbahn, dessen Mittelpunkt F ist; ein Unterschied besteht zwischen beiden Bewegungen nur insofern, als F selbst in Bewegung ist, während M fest bleibt. Die Beschleunigung von S_2 relativ zu F besitzt daher ebenfalls die Richtung der Tangente an die Kreisbahn um F und die Größe $r_2\varphi_2''$, wenn unter r_2 der Abstand des Schwerpunktes S_2 von F verstanden wird. Es setzt sich also die Beschleunigung γ_2 des Schwerpunktes S_2 im Ganzen aus zwei Componenten zusammen, von denen die eine senkrecht zur Längsaxe des ersten, und die andere senkrecht zur Längsaxe des zweiten Abschnittes gerichtet ist. Die Zusammensetzung dieser beiden Componenten geschieht auf ganz die gleiche Weise wie die Zusammensetzung von zwei an einem Punkte angreifenden Kräften zu einer Resultante.

Multiplicirt man die resultirende Beschleunigung γ_2 des Schwerpunktes S_2 mit der Masse m_2 des zweiten Abschnittes, so erhält man die zugehörige Effectivkraft. Diese muss aber nach den früheren Auseinandersetzungen gleich der Resultante der sämmtlichen am zweiten Abschnitte angreifenden Kräfte, d. h. also der direct angreifenden Kräfte und des in F auf den zweiten Abschnitt ausgeübten Druckes sein. Daraus geht hervor, dass der Druck in F als Resultante aus der Effectivkraft des Punktes S_2 und der sämmtlichen in entgegengesetzter Richtung genommenen, direct an dem zweiten Abschnitt angreifenden Kräfte aufgefasst werden kann. Da nun dieser Druck nach dem Princip der Gleichheit von Action und Reaction entgegengesetzt gleich dem in F auf den ersten Abschnitt ausgeübten Druck sein muss, so stellt sich demnach der letztere als die Resultante aus der in entgegengesetzter Richtung genommenen Effectivkraft des Schwerpunktes S_2 und der sämmtlichen an dem zweiten Abschnitt direct angreifenden, in ihrer wahren Richtung genommenen Kräfte dar. Es kommt also bei bewegtem Schwerpunkt S_2 zu den schon in der Ruhe vorhandenen Druckcomponenten in F nur noch eine Componente hinzu, welche gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtung wie die Effectivkraft $m_2\gamma_2$ des Schwerpunktes S_2 besitzt.

Sieht man von dem Einfluss des Luftwiderstandes ab, so wirken auf den zweiten Abschnitt direct die Schwere und die Spannungen der über das Fußgelenk hinwegziehenden Muskeln ein. Die Wirkung der Schwere ist gleich der einer im Schwerpunkt S_2 angreifenden und vertical nach unten ziehenden Kraft, deren Größe durch das Gewicht G_2 des zweiten Abschnittes gemessen wird. Ferner kommen für den zweiten Abschnitt genau die gleichen Muskeln wie beim ersten Abschnitt in Betracht. Die Kräfte, mit denen sie einwirken, sind an Größe den am ersten Abschnitt angreifenden gleich, sie besitzen aber entgegengesetzte Richtung.

Daraus geht also hervor, dass zu jeder am ersten Abschnitt direct angreifenden Muskelkraft eine entgegengesetzt gleiche im Gelenkpunkte F hinzukommt, welche mit ihr zusammen ein Kräftepaar bildet. Man kann leicht einsehen, dass ein jeder dieser Muskeln rückwärts auf den zweiten Abschnitt ebenfalls mit einem Kräftepaar einwirken muss, welches sich nur in der Richtung der beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte von dem für den ersten Abschnitt in Betracht kommenden unterscheidet, und daher eine Drehung im genau entgegengesetzten Drehungssinne hervorzubringen sucht. Die eine Kraft dieses Paares ist nämlich die im Muskelursprung angreifende Kraft und die andere eine ihr genau entgegengesetzt gleiche Componente des in F auf den zweiten Abschnitt ausgeübten Druckes. Der Arm h beider Kräftepaare für ist jeden Muskel der Abstand der gemeinsamen Drehungsaxe F der beiden oberen Sprunggelenke von der Richtung des resultirenden Muskelzuges, bezüglich des Theiles, welcher sich ungehindert zwischen beiden Abschnitten ausspannen kann. Die absolute Größe des Drehungsmomentes eines jeden der beiden Kräftepaare ist daher Kh, unter K die Gesammtspannung des Muskels verstanden.

Es ist leicht einzusehen, dass die hinter der Axe der oberen Sprunggelenke hinwegziehenden Muskeln mit ihren Kräftepaaren den ersten Abschnitt von der rechten Seite aus gesehen im Sinne des Uhrzeigers zu drehen suchen, also die Fersen vom Boden ablösen wollen, und dass sie den zweiten Abschnitt im umgekehrten Sinne zu drehen suchen, also den übrigen Körper nach hinten umkippen wollen. Die vor der Axe der oberen Sprunggelenke hinwegziehenden Muskeln haben dagegen das Bestreben, beiden Abschnitten Drehungen im gerade entgegengesetzten Sinne zu ertheilen. Die beiden Arten von Muskeln suchen sich also entgegen zu arbeiten. Rechnet man eine Drehung eines der beiden Abschnitte, welche von der rechten Seite aus im Sinne des Uhrzeigers stattfindet, sodass also der Winkel φ_1 bezüglich φ_2 vergrößert wird, als positiv, so muss man auch den Momenten der Kräftepaare, wenn sie in diesem Sinne drehend einwirken, das positive Vorzeichen beilegen. Die entgegengesetzten Drehungen und zugehörigen Kräftepaare sind dann natürlich negativ zu rechnen. Nach dieser Festsetzung wirken die hinteren Muskeln mit positivem Drehungsmoment auf den ersten, und mit negativem Drehungsmoment auf den zweiten Abschnitt ein. Die Drehungsmomente der vorderen Muskeln sind dagegen beim ersten Abschnitt negativ, beim zweiten positiv in Rechnung zu ziehen. Das resultirende Drehungsmoment, mit welchem alle über die Sprunggelenke hinwegziehenden Muskeln, sei es bei activer Contraction, sei es auch nur durch ihre rein elastische Spannung, auf jeden der beiden Abschnitte einwirken, ist dann einfach gleich der algebraischen Summe aller einzelnen Drehungsmomente. Dabei ist das resultirende Drehungsmoment aller über das Sprunggelenk hinwegziehenden Muskeln für den zweiten Abschnitt an Größe gleich dem für den ersten und unterscheidet sich von diesem nur durch das Vorzeichen. Bezeichnet man die absolute Größe desselben mit D, so ist das eine $+D$, das andere $-D$.

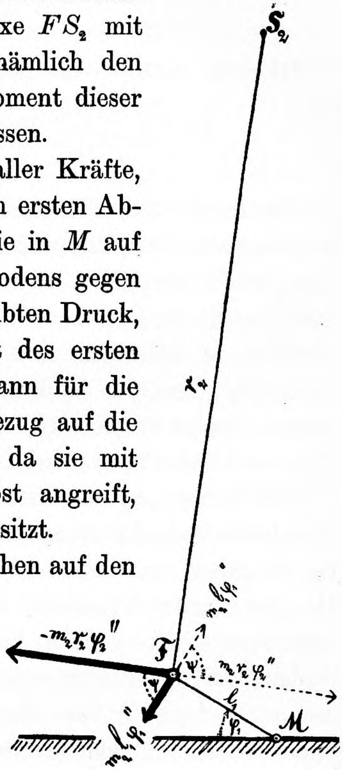
Die Schwere wirkt mit zwei vertical nach unten gerichteten Componenten drehend auf den ersten Abschnitt ein. Die eine Componente greift in S_1 an und besitzt die Größe G_1; die andere findet sich unter den Componenten des in F auf den ersten Abschnitt ausgeübten Druckes vor und besitzt nach den obigen Auseinandersetzungen die Größe G_2. Bezeichnet man den Abstand des auf der Längsaxe MF liegenden Schwerpunktes S_1 von M mit r_1, so übt die erste Componente in Bezug auf die Metatarsalaxe M ein Drehungsmoment von der Größe $G_1\, r_1 \cos \varphi_1$ aus und sucht dabei den ersten Abschnitt im negativen Drehungssinne um M zu drehen. Die zweite Componente übt dagegen auf den ersten Abschnitt in Bezug auf die Axe M ein Drehungsmoment von der Größe $G_2\, l_1 \cos \varphi_1$ aus, welches ebenfalls negativ in Rechnung zu ziehen ist.

Endlich bleibt noch das Drehungsmoment festzustellen, mit welchem die der Effectivkraft des Schwerpunktes S_2 entgegengesetzt gleiche Druckcomponente in F auf die Drehung des ersten Abschnittes um die Metatarsalaxe einwirkt. Wie diese Effectivkraft in den zwei getrennten Componenten $m_2\, l_1\, \varphi_1''$ und $m_2\, r_2\, \varphi_2''$ zur Darstellung gebracht wurde, so erweist es sich auch als zweckmäßig, das Drehungsmoment der ihr entgegengesetzt gleichen Kraft in zwei Componenten zu zerlegen. Fasst man zunächst den Fall ins Auge, dass bei einer Bewegung des ganzen Körpers beide Winkelbeschleunigungen φ_1'' und φ_2'' das positive Vorzeichen besitzen, so ist die zur Längsaxe MF senkrechte Druckcomponente $-m_2\, l_1\, \varphi_1''$, und die zur Längsaxe FS_2 senkrechte Druckcomponente $-m_2\, r_2\, \varphi_2''$. Dabei tragen die negativen Vorzeichen dem Umstande Rechnung, dass die beiden in F auf den ersten Abschnitt ausgeübten Druckcomponenten die entgegengesetzte Richtung wie die Componenten der Effectivkraft von S_2 besitzen; die erste ist bei der in Fig. 1 gezeichneten Projection des Körpers nach links unten, die zweite nach links und etwas nach oben gerichtet, so wie es in der folgenden Fig. 2 dargestellt ist.

Für die Drehungsmomente in Bezug auf die Axe durch M kommen nun wiederum nur diejenigen Componenten der beiden genannten

Druckcomponenten in Betracht, welche zu der Längsaxe MF senkrecht gerichtet sind. Demnach wirkt die Druckcomponente $-m_2\, l_1\, \varphi_1''$ in ganzer Stärke drehend ein; ihr Drehungsmoment in Bezug auf die Axe durch M ist $-m_2\, l_1\, \varphi_1'' \cdot l_1$, wobei das negative Vorzeichen damit übereinstimmt, dass die Kraft den ersten Abschnitt im negativen Sinne zu drehen sucht. Die Druckcomponente $-m_2\, r_2\, \varphi_2''$ bildet mit der zu MF senkrechten Richtung denselben Winkel wie die Längsaxe FS_2 mit der Verlängerung der Längsaxe MF, nämlich den Winkel ψ; daher wird das Drehungsmoment dieser Kraft durch $-m_2\, r_2\, \varphi_2'' \cdot \cos\psi \cdot l_1$ gemessen.

Fig. 2.



Damit sind die drehenden Einflüsse aller Kräfte, welche zu Beginn der Fersenablösung am ersten Abschnitt angreifen, festgestellt. Denn die in M auf die Füße einwirkende Reaction des Fußbodens gegen den von Seiten der Füße auf ihn ausgeübten Druck, welche ebenfalls als eine äußere Kraft des ersten Abschnittes aufgefasst werden muss, kann für die Bestimmung der Drehungsmomente in Bezug auf die Metatarsalaxe außer Betracht bleiben, da sie mit großer Annäherung an dieser Axe selbst angreift, also kein Drehungsmoment für dieselbe besitzt.

Die algebraische Summe der sämmtlichen auf den ersten Abschnitt einwirkenden Drehungsmomente, welche das totale resultirende Drehungsmoment darstellt, hängt nun nach den früheren Auseinandersetzungen mit der Winkelbeschleunigung φ_1'' in der Weise zusammen, dass sie gleich dem Product aus φ_1'' und dem Trägheitsmoment des ersten Abschnittes in Bezug auf die Metatarsalaxe ist. Bezeichnet $\varkappa_1$ den Trägheitsradius des ersten Abschnittes in Bezug auf die zur Metatarsalaxe parallele Axe durch den Schwerpunkt S_1, so ist das Trägheitsmoment um die letztere Axe $m_1\, \varkappa_1^2$. Nach einem bekannten Satze wird dann das Trägheitsmoment um die in der Entfernung r_1 vom Schwerpunkt verlaufende Metatarsalaxe selbst durch $m_1\,(\varkappa_1^2 + r_1^2)$ dargestellt. Nimmt man zunächst an, dass das Drehungsmoment der hinteren Muskeln über das der vorderen überwiegt, so hat das resultirende Drehungsmoment D aller auf den ersten Abschnitt einwirkenden Muskeln einen positiven Werth. Es besteht dann also zwischen der algebraischen Summe der sämmtlichen Drehungsmomente und der Winkelbeschleunigung φ_1'' die Beziehung

$$D - G_1\, r_1 \cos\varphi_1 - G_2\, l_1 \cos\varphi_1 - m_2\, l_1\, \varphi_1'' \cdot l_1 - m_2\, r_2\, \varphi_2'' \cos\psi \cdot l_1$$
$$= m_1\,(\varkappa_1^2 + r_1^2) \cdot \varphi_1''.$$

Dieselbe geht bei geeigneter Zusammenfassung in die Form über

$$[m_1\,(\varkappa_1^2 + r_1^2) + m_2\, l_1^2] \cdot \varphi_1'' + m_2\, l_1\, r_2 \cos\psi \cdot \varphi_2''$$
$$= D - G_1\, r_1 \cos\varphi_1 - G_2\, l_1 \cos\varphi_1.$$

Trotzdem diese Relation in erster Linie ein Ausdruck für die Abhängigkeit der Winkelbeschleunigung des ersten Abschnittes, d. h. also der beiden Füße, von den einwirkenden Kräften ist, so treten doch auch die Masse und Winkelbeschleunigung des zweiten Abschnittes in derselben auf. Daraus ist deutlich zu erkennen, dass überhaupt, und in welcher Weise schon die Anfangsbewegung des ersten Abschnittes infolge des Gelenkzusammenhangs von dem zweiten Abschnitt beeinflusst wird. —

Die Kräfte, welche auf den zweiten Abschnitt einwirken, sind in den bisherigen Auseinandersetzungen schon alle angeführt worden. Es ist daher nur noch nöthig, ihre Drehungsmomente zu bestimmen, Da der zweite Abschnitt sich nicht bei den Bewegungen um eine feste Axe dreht, so muss man hier die Drehung um die zur Axe der beiden oberen Sprunggelenke parallele Axe durch den Schwerpunkt S_2 ins Auge fassen. Die Beschleunigung dieses Schwerpunktes selbst und ihre Abhängigkeit von den auf den zweiten Abschnitt einwirkenden Kräften ist schon früher bei der Ableitung des Druckes in F in Betracht gezogen worden.

Die Untersuchung hatte, so weit sie sich auf den zweiten Abschnitt bezog, folgendes ergeben. Im Schwerpunkte S_2 greift das Gewicht G_2 an und wirkt vertical nach unten. An den Ursprungsstellen der Muskeln ziehen dieselben nach dem ersten Abschnitt hin. In F übt der erste Abschnitt auf den zweiten einen Druck aus, von welchem eine Componente gleich der Effectivkraft $m_2\,\gamma_2$ des Schwerpunktes S_2 ist, während die übrigen den am zweiten Abschnitt direct angreifenden

Muskelkräften und der in S_2 angreifenden Gewichtskraft G_2 zwar an Größe gleich sind, aber die entgegengesetzte Richtung besitzen.

Es ist weiterhin auch schon auseinandergesetzt worden, dass die direct an den Ursprungsstellen angreifenden Muskelkräfte sich mit den ihnen entgegengesetzt gleichen, von denselben Muskeln herrührenden Druckcomponenten in F zu Kräftepaaren zusammensetzen. Das resultirende Drehungsmoment aller dieser Kräftepaare ist entgegengesetzt gleich dem resultirenden Drehungsmoment, mit welchem die Muskeln auf den ersten Abschnitt einwirkten. Da das letztere mit $+D$ bezeichnet wurde, so üben also die sämmtlichen Muskeln auf den zweiten Abschnitt das resultirende Drehungsmoment $-D$ aus.

Zu dem vertical nach unten ziehenden Gewicht G_2 im Schwerpunkte S_2 findet sich unter den Druckcomponenten in F eine, welche der Gewichtskraft G_2 entgegengesetzt gleich ist, also vertical nach oben zieht. Beide bilden daher wieder zusammen ein Kräftepaar. Der Arm desselben ist, wie man leicht sieht, der Abstand des Punktes F von der Verticalen durch S_2, die man auch als Schwerlinie bezeichnei. Derselbe wird durch $r_2 \cos (180^\circ - \varphi_2)$ oder $-r_2 \cos \varphi_2$ gemessen. Das Drehungsmoment, mit welchem die Schwere auf den zweiten Abschnitt einwirkt, ist daher $-G_2\, r_2 \cos \varphi_2$, wobei durch das Vorzeichen auf alle Fälle der richtige Drehungssinn angedeutet wird. Denn geht die Schwerlinie durch S_2 vor dem Punkte F vorbei, so ist φ_2 größer als 90°, sein Cosinus also negativ, und infolgedessen der Ausdruck für das Drehungsmoment positiv. Liegt dagegen F vor der Schwerlinie, so ist φ_2 kleiner als 90° und der Werth des Drehungsmomentes negativ; das Kräftepaar sucht aber dann den zweiten Abschnitt im negativen Sinne zu drehen.

Endlich ist noch für diejenige Druckcomponente das Drehungsmoment abzuleiten, welche der Effectivkraft von S_2 gleich ist. Zu diesem Zwecke empfiehlt es sich wieder, für jede der beiden Componenten der Effectivkraft das Drehungsmoment gesondert aufzustellen. Aus Fig. 2 erkennt man, dass die Componente $m_2\, l_1\, \varphi_1''$, welche dort, ebenso wie die Componente $m_2\, r_2\, \varphi_2''$, punktirt angedeutet ist, mit der zur Längsaxe FS_2 senkrechten Richtung den Winkel ψ bildet. Da dieselbe den zweiten Abschnitt in negativem Sinne um die Axe durch S_2 zu drehen sucht, so beträgt das von ihr ausgeübte Drehungsmoment $-m_2\, l_1\, \varphi_1'' \cos \psi \cdot r_2$. Die Componente

$m_2 r_2 \varphi_2''$ ist schon an und für sich senkrecht zur Längsaxe FS_2 gerichtet und sucht ebenfalls eine negative Drehung hervorzubringen; daher ist ihr Drehungsmoment $-m_2 r_2 \varphi_2'' \cdot r_2$.

Bezeichnet man den Trägheitsradius des zweiten Abschnittes in Bezug auf die zur Sprunggelenkaxe parallele Axe durch S_2 mit $\varkappa_2$, so ist das zugehörige Trägheitsmoment $m_2 \varkappa_2^2$. Man hat daher zwischen der algebraischen Summe der auf den zweiten Abschnitt einwirkenden Drehungsmomente und der Winkelbeschleunigung φ_2'' die Beziehung

$$-D - G_2 r_2 \cos \varphi_2 - m_2 l_1 \varphi_1'' \cos \psi \cdot r_2 - m_2 r_2 \varphi_2'' \cdot r_2 = m_2 \varkappa_2^2 \cdot \varphi_2''.$$

Bei geeigneter Zusammenfassung und Anordnung der einzelnen Glieder geht dieselbe in die Form über

$$m_2 l_1 r_2 \cos \psi \cdot \varphi_1'' + m_2 (\varkappa_2^2 + r_2^2) \cdot \varphi_2'' = -D - G_2 r_2 \cos \varphi_2.$$

Auch diese Relation, welche in erster Linie ein Ausdruck für die Abhängigkeit der Beschleunigung des zweiten Abschnittes von den einwirkenden Kräften ist, enthält außer der Winkelbeschleunigung des zweiten Abschnittes auch die Winkelbeschleunigung des ersten Abschnittes. Dagegen tritt in derselben die Masse m_1 der beiden Füße nicht auf; die letztere hat also keinen Einfluss auf die Bewegung des um die Sprunggelenkaxen drehbaren Abschnittes des ganzen Körpers. Gleichzeitig bestätigt sich die schon früher ausgesprochene Thatsache, dass die Drehung des zweiten Abschnittes nicht in derselben Weise stattfindet, als wenn die gemeinsame Axe der Sprunggelenke im Raume fest ist. Wäre dies der Fall, so dürfte das erste, mit φ_1'' behaftete Glied auf der linken Seite der zuletzt angeführten Relation nicht vorhanden sein. Es ist nach den früheren Erörterungen nicht schwer, sich davon zu überzeugen, dass die nach dem Wegfallen dieses Gliedes noch übrig bleibende Relation zu der Drehung des zweiten Abschnittes um die im Raume feststehende Axe der oberen Sprunggelenke gehören würde; man hat dabei nur zu beachten, dass $m_2 (\varkappa_2^2 + r_2^2)$ das Trägheitsmoment des zweiten Abschnittes in Bezug auf diese Axe darstellt, und dass die von den Muskeln und der Schwere für dieselbe Axe ausgeübten Drehungsmomente ebenfalls durch $-D$ und $-G_2 r_2 \cos \varphi_2$ gemessen werden.

Die beiden Relationen, welche sich ausschließlich auf den Anfang der Bewegung beziehen, bilden nun die Grundlage für eine exacte Untersuchung der Bedingungen, unter welchen ein Ablösen der Fersen stattfinden kann. Man gelangt dabei zu absolut sicheren und einwurfsfreien Resultaten, so weit die Voraussetzungen zutreffen, die im Interesse möglichster Vereinfachung der Untersuchung gemacht wurden. Die Gleichungen können aber natürlich keinen Aufschluss über die Betheiligung von Muskeln geben, welche ganz in einen der beiden Abschnitte hineinfallen, oder doch wenigstens gestaltverändernd auf einen derselben einwirken. Die Formeln entsprechen zunächst nur dem, immerhin annähernd realisirbaren Falle, dass die Füße vorn auf der direct unterhalb der Metatarsalaxe befindlichen Kante eines dreiseitigen Klotzes aufruhen, und sich um dieselbe beim Ablösen der zunächst auch durch einen Klotz unterstützten Fersen drehen, und dass sowohl die beiden Füße als auch der ganze übrige Körper je einen gut abgesteiften Abschnitt des ganzen Körpers darstellen. Unter diesen Verhältnissen üben bei der Ablösung der Fersen in der That nur die über die Sprunggelenke hinwegziehenden Muskeln einen Einfluss auf die Bewegung aus. Alle anderen im Contractionszustand oder im Zustande elastischer Spannung befindlichen Muskeln können nur dazu dienen, die beiden Abschnitte des Körpers zu versteifen. Löst dagegen der Körper aus dem gewöhnlichen Stand auf ebenem, horizontalem Fußboden die Fersen ab, so können, wie schon René du Bois-Reymond[1]) bemerkt, auch noch andere Muskeln, z. B. die Zehenbeuger, helfend in den Bewegungsvorgang eingreifen; dann ist aber auch die Voraussetzung, dass die beiden Füße sich beim Erheben auf die Zehen wie ein einziger starrer Körper verhalten, nicht mehr streng erfüllt; denn es werden dabei die Zehen jedes Fußes gegen den Mittelfuß gestreckt.

Den das Problem vereinfachenden Voraussetzungen lässt sich nun ohne wesentliche Verminderung der erreichbaren Genauigkeit noch eine Annahme hinzufügen, welche schon von den meisten Bearbeitern des Gleichgewichtsproblems beim Stehen mit erhobenen Fersen entweder stillschweigend oder ausgesprochenermaßen gemacht worden ist. Es ist dies die Annahme, dass das Gewicht des ersten Abschnittes, d. h. also das Gewicht beider Füße, gegenüber dem Gewicht des

1) R. du Bois-Reymond, Ueber antagonistische Coordination der Waden- und Sohlenmuskulatur. Verhandl. d. physiolog. Gesellsch. zu Berlin. Heft vom 12. Juli 1900. S. 87.

zweiten Abschnittes vernachlässigt werden kann, und dass infolgedessen der zweite Abschnitt direct das Gewicht G des ganzen menschlichen Körpers besitzt. Der Schwerpunkt S_2 des zweiten Abschnitts stellt dann zugleich den Schwerpunkt S des ganzen Körpers dar. Man hat also dieser Annahme entsprechend in den obigen Gleichungen sowohl G_1 als m_1 gleich Null, und G_2 gleich G, bezüglich m_2 gleich m zu setzen, unter m die Masse des ganzen Körpers verstanden. Dann nehmen dieselben die Form an

$$m\, l_1^2 \cdot \varphi_1'' + m\, l_1\, r_2 \cos\psi \cdot \varphi_2'' = D - G\, l_1 \cos\varphi_1,$$

$$m\, l_1\, r_2 \cos\psi \cdot \varphi_1'' + m\,(\varkappa_2^2 + r_2^2) \cdot \varphi_2'' = -D - G\, r_2 \cos\varphi_2.$$

Man bemerkt, dass die Anzahl der Glieder in den Formeln sich nicht verringert hat; denn die beiden Drehungsmomente der Schwere auf der rechten Seite der ersten Gleichung hätte man auch ohne Vernachlässigung von G_1 in das Drehungsmoment $-Gc_1 \cos\varphi_1$ des im Hauptpunkte des ersten Abschnittes angreifenden Gesammtgewichts G zusammenfassen können, unter c_1 den Abstand dieses Hauptpunktes von der Metatarsalaxe verstanden. Dies habe ich schon in meiner früheren Schrift über »die Hebelwirkung des Fußes, wenn man sich auf die Zehen erhebt«[1]) genauer auseinander gesetzt. Es würde also die Berücksichtigung des Fußgewichts die Lösung des Problems durchaus nicht erschweren. Man kann daher die folgenden an die beiden obigen Formeln angeknüpften Betrachtungen mutatis mutandis auf jedes andere, aus zwei gelenkig verbundenen Abschnitten bestehende System, bei welchem das Gewicht des einen Abschnittes sich nicht vernachlässigen lässt, übertragen.

Da das Stehen mit erhobenen Fersen als ein specieller Fall des allgemeinen Bewegungsproblems aufgefasst werden kann, so müssen die aufgestellten Formeln auch die Bedingungen des Gleichgewichts in sich fassen. In der That braucht man nur die beiden Winkelbeschleunigungen gleich Null zu setzen, wie es dem Fall des Verharrens in einer bestimmten Stellung bei erhobenen Fersen entspricht, um aus den Formeln die richtigen Gleichgewichtsbedingungen zu erhalten. Es ergeben sich nämlich, wie man sieht, die beiden Relationen

$$D = G\, l_1 \cos\varphi_1 \quad \text{und} \quad D = -G\, r_2 \cos\varphi_2,$$

1) Archiv für Anatomie und Physiologie. Anatom. Abth. 1895. S. 110.

welche nur neben einander bestehen können, wenn

$$l_1 \cos \varphi_1 = -r_2 \cos \varphi_2$$

ist. Da $l_1 \cos \varphi_1$ den horizontalen Abstand der durch F gehenden Verticalen von M (Fig. 1), und $-r_2 \cos \varphi_2$ den horizontalen Abstand der durch S_2 gehenden Schwerlinie von F ausdrückt, und ferner φ_2 ein stumpfer Winkel sein muss, damit $-r_2 \cos \varphi_2$ einen positiven Werth bekommt, so erkennt man aus der letzten Relation ohne weiteres, dass der Schwerpunkt des ganzen Körpers bei freiem Erheben auf die Zehen nothwendig vertical über M liegen muss, wenn der Körper in der erhobenen Stellung verharren soll. Aus $D = G\, l_1 \cos \varphi_1$ geht dann weiter hervor, dass die Muskeln dabei so gespannt sein müssen, dass ihr resultirendes Drehungsmoment an Größe gleich dem Drehungsmoment sein muss, welches das in F auf den ersten Abschnitt drückende Gewicht des Körpers in Bezug auf die Metatarsalaxe ausübt. Wirkt nur die Wadenmuskulatur, so ist nach dem Früheren D gleich dem Product aus der Spannung und dem Abstand des resultirenden Muskelzuges von F, d. h. also von der Achse des oberen Sprunggelenks. Man wird also auf die bekannten Bedingungsgleichungen für das Stehen mit erhobenen Fersen geführt.

Die beiden Formeln geben nun aber vor allen Dingen einen Einblick in den Anfang der Bewegung selbst, welche die beiden Abschnitte des Körpers annehmen, wenn die für das Gleichgewicht erforderliche Beziehung zwischen dem resultirenden Drehungsmoment D der Muskeln und dem Gewicht G des Körpers nicht stattfindet.

Handelt es sich ganz allgemein um den Fall, dass der Körper aus irgend einer Ruhehaltung, bei der die Fersen entweder unterstützt oder auch schon vom Boden abgelöst sind, durch Veränderung des Contractionszustandes der Muskeln in Bewegung gesetzt wird, so erfahren im allgemeinen beide Abschnitte eine bestimmte Winkelbeschleunigung, während Winkelgeschwindigkeiten natürlich im ersten Moment noch nicht vorhanden sind. Die Drehungen, welche im Anfang der Bewegung die beiden Abschnitte thatsächlich ausführen, finden dann gerade in dem durch das Vorzeichen der Winkelbeschleunigung angedeuteten Drehungssinne statt; die Größe derselben ist sogar während einer genügend kleinen Zeit der Größe der Winkelbeschleunigungen direct proportional.

Aus den beiden Formeln lässt sich nun die Größe einer jeden der beiden Winkelbeschleunigungen φ_1'' und φ_2'' in ihrer Abhängigkeit von den Drehungsmomenten der Muskelkräfte und der Schwerkraft für den Anfang der Bewegung ableiten. Man braucht die beiden Winkelbeschleunigungen nur als zwei Unbekannte aufzufassen und die Gleichungen nach denselben aufzulösen.

Um diese Rechnung möglichst zu vereinfachen, mögen zunächst noch einige kürzere Bezeichnungen eingeführt werden. $m(\varkappa_2^2 + r_2^2)$ bedeutet das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die gemeinsame Achse der oberen Sprunggelenke; dasselbe möge durch M_2 bezeichnet sein. Auch das Product ml_1^2 kann als ein Trägheitsmoment aufgefasst werden, nämlich als dasjenige, welches der Körper in Bezug auf die Metatarsalachse besitzen würde, wenn seine ganze Masse im Punkte F, oder wenigstens in der Achse der Sprunggelenke concentrirt wäre; für dieses Product sei daher kurz M_1 geschrieben. Endlich mag das wiederholt auftretende Product ml_1r_2 abgekürzt durch $M_{1,2}$ bezeichnet sein. Ferner bedeutet, wie schon oben angegeben wurde, $l_1 \cos\varphi_1$ den horizontalen Abstand der Verticalen durch F von der Metatarsalaxe M, und $-r_2 \cos\varphi_2$ den horizontalen Abstand der Schwerlinie durch S_2 von der Sprunggelenkaxe F. Für den ersteren mag die Bezeichnung f und für den letzteren die Bezeichnung s eingeführt sein; dabei besitzt f einen positiven Werth, wenn, wie es in der Regel der Fall ist, F hinter der Metatarsalaxe M liegt, dagegen hat s einen positiven Werth, wenn die Schwerlinie durch S_2 vor der Sprunggelenkaxe F vorbeizieht. Sind insbesondere f und s gleich groß und beide positiv, so geht die Schwerlinie durch die Metatarsalaxe, d. h. der Schwerpunkt befindet sich genau vertical über derselben. Ist dagegen s von f verschieden, so liegt der Schwerpunkt S_2 entweder vor oder hinter der durch die Metatarsalaxe gelegten Frontalebene, je nachdem s größer oder kleiner als f ist. In jedem Falle wird der Abstand des Körperschwerpunktes von dieser Frontalebene durch die Differenz der beiden Größen s und f gemessen.

Führt man die angegebenen Bezeichnungen ein, so erhalten dadurch die beiden Gleichungen die einfachere Form:

$$M_1 \cdot \varphi_1'' + M_{1,2} \cos\psi \cdot \varphi_2'' = D - Gf,$$

$$M_{1,2} \cos\psi \cdot \varphi_1'' + M_2 \cdot \varphi_2'' = -D + Gs.$$

Die Auflösung der Gleichungen nach den Unbekannten φ_1'' und φ_2'' ergibt nun das Resultat:

$$\varphi_1'' = \frac{D(M_2 + M_{1,2}\cos\psi) - G(f \cdot M_2 + s \cdot M_{1,2}\cos\psi)}{M_1 M_2 - M_{1,2}^2 \cos^2\psi},$$

$$\varphi_2'' = \frac{-D(M_1 + M_{1,2}\cos\psi) + G(s \cdot M_1 + f \cdot M_{1,2}\cos\psi)}{M_1 M_2 - M_{1,2}^2 \cos^2\psi}.$$

Da $\cos\psi$ höchstens den Werth $+1$ annehmen kann, so besitzt in diesen beiden Formeln der Nenner stets einen positiven Werth; davon kann man sich leicht durch Einsetzen der Producte ml_1^2, $m(\varkappa_2^2 + r_2^2)$ und $ml_1 r_2$ für M_1, M_2 und $M_{1,2}$ überzeugen. Das Vorzeichen der Winkelbeschleunigungen φ_1'' und φ_2'' richtet sich also ausschließlich nach dem Vorzeichen des Zählers in den Formeln. Man erhält daher für jede Bewegung aus einer Ruhehaltung folgendes allgemein gültige Kriterium über die Richtung der eintretenden Drehungen: Die Winkelbeschleunigung φ_1'' des ersten Abschnittes ist positiv, null oder negativ, je nachdem das resultirende Drehungsmoment D der Muskeln größer, gleich oder kleiner als der Ausdruck

$$G\,\frac{f \cdot M_2 + s \cdot M_{1,2}\cos\psi}{M_2 + M_{1,2}\cos\psi}$$

ist. Dagegen ist die Winkelbeschleunigung φ_2'' des zweiten Abschnittes positiv, null oder negativ, je nachdem das resultirende Drehungsmoment D der Muskeln kleiner, gleich oder größer als der Ausdruck

$$G\,\frac{s \cdot M_1 + f \cdot M_{1,2}\cos\psi}{M_1 + M_{1,2}\cos\psi}$$

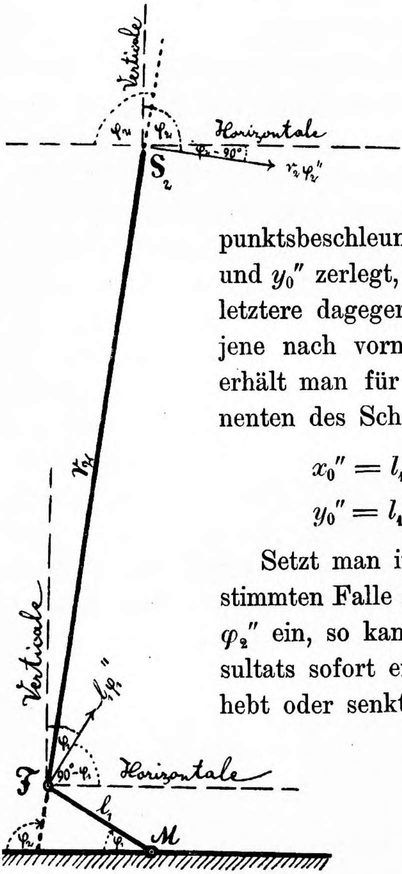
ist.

Eine Drehung und Winkelbeschleunigung wurde positiv oder negativ genannt, je nachdem sie von der rechten Körperseite aus gesehen im Sinne oder im umgekehrten Sinne wie die Drehung des Uhrzeigers stattfindet.

Die Formeln für die beiden Winkelbeschleunigungen ermöglichen nun auch die Berechnung der Beschleunigung γ, welche der Schwerpunkt S des Körpers von einer beliebigen Ruhehaltung aus erfährt.

Die Beschleunigung γ setzt sich in diesem Falle nur aus den beiden Tangentialbeschleunigungen $l_1\varphi_1''$ und $r_2\varphi_2''$ zusammen, von denen die erste senkrecht zur Längsaxe MF des ersten, und die zweite senkrecht zur Längsaxe FS des zweiten Abschnittes gerichtet ist. Gegen die nach vorn gerichtete Horizontale ist daher die erstere um den Winkel $90^\circ - \varphi_1$, die letztere um den Winkel $\varphi_2 - 90^\circ$, bezw. bei spitzem Winkel φ_2 um $90^\circ - \varphi_2$ geneigt; mit der nach oben gerichteten Verticalen bildet dagegen die erstere den Winkel φ_1 und die letztere den Winkel φ_2 (Fig. 3). Denkt man sich daher die Schwerpunktsbeschleunigung γ in zwei Componenten x_0'' und y_0'' zerlegt, von denen die erste horizontal, die letztere dagegen vertical gerichtet ist, und rechnet jene nach vorn und diese nach oben positiv, so erhält man für die beiden Beschleunigungscomponenten des Schwerpunktes die Werthe

Fig. 3.



$$x_0'' = l_1\varphi_1'' \cdot \sin\varphi_1 + r_2\varphi_2'' \cdot \sin\varphi_2,$$
$$y_0'' = l_1\varphi_1'' \cdot \cos\varphi_1 + r_2\varphi_2'' \cdot \cos\varphi_2.$$

Setzt man in diesen Formeln die in einem bestimmten Falle ausgerechneten Werthe von φ_1'' und φ_2'' ein, so kann man aus dem Vorzeichen des Resultats sofort entscheiden, ob der Schwerpunkt sich hebt oder senkt, und ob er dabei gleichzeitig nach vorn oder hinten wandert. Bei reiner Erhebung des Schwerpunktes ohne Bewegung nach vorn oder hinten muss sich beispielsweise für y_0'' ein positiver Werth, dagegen für x_0'' der Werth Null ergeben u. s. w.

Man kann schließlich auch mit Hülfe der beiden Beschleunigungscomponenten die genaue Richtung angeben, in welcher sich der Schwerpunkt aus einer Ruhehaltung heraus im Anfang fortbewegt. Bezeichnet man den Winkel, welchen diese Bewegungsrichtung mit der nach vorn gerichteten Horizontalen bildet, mit ε, so hat man ohne weiteres $tg\,\varepsilon = \frac{y_0''}{x_0''}$. Dieser Quotient lässt sich nach dem Einsetzen der Werthe für x_0'' und y_0'' auf die Form bringen

$$tg\,\varepsilon = \frac{l_1 \frac{\varphi_1''}{\varphi_2''} \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2}{l_1 \frac{\varphi_1''}{\varphi_2''} \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2},$$

woraus zu erkennen ist, dass der Winkel ε nur von dem Verhältniss der beiden Winkelbeschleunigungen abhängt.

Durch die bisher angeführten Formeln wird man also in den Stand gesetzt, für jede Ruhehaltung des menschlichen Körpers einerseits anzugeben, in welcher Weise sich das Drehungsmoment der Muskeln verändern muss, damit Bewegung der beiden Abschnitte in einem bestimmten Drehungssinne erfolgt, und anderseits zu entscheiden, welche Bewegung der beiden Abschnitte und des Körperschwerpunktes eintritt, wenn ein bestimmter Muskel sich contrahirt. Insbesondere lässt sich sofort die Frage beantworten, ob bei einer bestimmten Haltung des Körpers die Fersen durch Contraction geeigneter Muskeln vom Boden gelöst werden können oder nicht; denn hierzu ist ja nur erforderlich, dass die Winkelbeschleunigung φ_1'' einen positiven Werth annimmt. Wie lange es danach dauert, bis sich die Fersen wieder auf den Boden aufsetzen, kommt dabei gar nicht in Betracht.

Um diese und andere Fragen zu entscheiden, hat man nur noch nöthig, die Werthe von M_1, M_2 und $M_{1,2}$ zu berechnen. Unter Zugrundelegung der Resultate früherer Messungen, welche sich auf die Dimensionen, Gewichte, Schwerpunktslagen und Trägheitsmomente[1]) der einzelnen Körpertheile des Menschen beziehen, erhält man die umstehende Tabelle.

Zur Erläuterung derselben diene folgendes. Die Gewichte sind im terrestrischen Maßsystem in Gramm ausgedrückt. Aus den Gewichtszahlen erhält man die zugehörigen Massenzahlen, wenn man die ersteren durch die Zahl 981,11 für die Schwerebeschleunigung dividirt. Auf diese Weise sind die Zahlen in der zweiten Spalte entstanden.

---

1) Abhandl. d. mathem.-phys. Classe der Kgl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Bd. XV, Nr. VII und Bd. XVIII, Nr. VIII.

Körpertheile	Gewicht in g	Massenzahl	Trägheitsradius i. B. a. die zur Medianebene senkrechte Axe durch d. Schwerpunkt d. Körpertheils in cm	Abstand des Schwerpunktes des Körpertheils von der Axe des oberen Sprunggelenks in cm	Trägheitsmoment d. Körpertheils i. B. a. d. Axe d. oberen Sprunggelenks
Rumpf mit Kopf	27710	28,24	23,4	113,5	379258
Ganze obere Extremität	3615	3,68	21,2	98,5	37358
Oberschenkel	6450	6,57	12,4	65,3	29025
Unterschenkel	2935	2,99	10,4	24,3	2089

Aus dem Trägheitsradius $\varkappa$ eines Körpertheils in Bezug auf die zur Medianebene senkrechte Axe durch den Schwerpunkt des Körpertheils, und aus dem Abstand r dieses Schwerpunktes von der Sprunggelenkaxe F erhält man das Trägheitsmoment des Körpertheils in Bezug auf die gleiche Axe, indem man die Masse des Körpertheils mit der Summe der Quadrate von $\varkappa$ und r multiplicirt. Die Resultate dieser Berechnung sind in der letzten Spalte der Tabelle niedergelegt worden.

Das Trägheitsmoment M_2 des ganzen Körpers ohne Füße gewinnt man hieraus durch Addition der Trägheitsmomente für die einzelnen Körpertheile, wobei natürlich die Trägheitsmomente der oberen Extremität und des Ober- und Unterschenkels zweimal in Rechnung zu ziehen sind. Auf diese Weise erhält man für M_2 den Werth 516202.

Zur Berechnung des Products ml_1^2, welches durch M_1 bezeichnet wurde, hat man zu beachten, dass der Abstand l_1 zwischen der Sprunggelenk- und der Metatarsalaxe bei dem zu Grunde gelegten Individuum 15 cm betrug. Als Massenzahl des Gesammtkörpers erhält man aus der obigen Tabelle, unter Vernachlässigung der Masse der Füße, 54,72. Demnach ergibt sich für M_1 der Werth 12312.

Der Abstand r_2 des Gesammtschwerpunktes des Körpers von der Sprunggelenkaxe F betrug bei dem betreffenden Individuum 86 cm. Demnach besitzt das durch $M_{1,2}$ bezeichnete Product ml_1r_2 den Werth 70589.

Setzt man diese Zahlenwerthe in den für das Vorzeichen von φ_1'' maßgebenden Ausdruck ein und kürzt zur Vereinfachung den Quotient mit $M_{1,2}$, so erhält man das bestimmte Resultat, dass die Fersen vom Boden abgelöst werden, sobald das resultirende

Drehungsmoment D der Muskeln einen größeren Werth besitzt als der Ausdruck

$$G\,\frac{f \cdot 7{,}312 + s \cdot \cos\psi}{7{,}312 + \cos\psi}.$$

Dabei bedeutet G das Gewicht des Körpers, f den Abstand der durch die Sprunggelenkaxe gehenden Frontalebene von der Metatarsalaxe, s den nach vorn positiv gerechneten Abstand des Körperschwerpunktes von der Frontalebene durch die Sprunggelenkaxe und ψ den Winkel, welchen die durch den Körperschwerpunkt und die Sprunggelenkaxe gehende Ebene mit der Rückwärtsverlängerung der die Sprunggelenk- und die Metatarsalaxe verbindenden Ebene bildet.

Es soll gleich an dieser Stelle die principiell wichtige Thatsache hervorgehoben werden, dass, wenn die obige Bedingung erfüllt ist, die Ablösung der Fersen ausschließlich als Wirkung der Contraction von Muskeln, die über das Sprunggelenk hinwegziehen, eintritt, und nicht etwa eine Folge von Schleuderungen ist, da ja Winkelgeschwindigkeiten zuerst noch gar nicht vorhanden sind. Auch kann man sich fernerhin leicht davon überzeugen, dass der Factor von G für alle in Frage kommenden Ruhehaltungen des Körpers einen positiven Werth besitzt; denn selbst bei negativem s oder $\cos\psi$ wird doch immer das erste Glied sowohl im Zähler als auch im Nenner an Größe das zweite übertreffen. Daraus geht aber hervor, dass in jedem Falle das resultirende Drehungsmoment D der Muskeln einen positiven Werth besitzen muss. Befinden sich außer der Wadenmuskulatur beim Ablösen der Fersen auch vordere Muskeln, wie der M. tibialis anterior, in Contraction, so muss also das Drehungsmoment der ersteren das der letzteren an Größe um D übertreffen.

Soll gleichzeitig die Anfangsbewegung des zweiten Abschnittes angegeben werden, so erhält man beim Einsetzen der Zahlenwerthe für M_1 und $M_{1,2}$ das bestimmte Resultat, dass der um die gemeinsame Sprunggelenkaxe drehbare Abschnitt, d. h. also der Körper ohne die Füße, sich relativ zum Sprunggelenk nach vorn oder hinten neigt, je nachdem das resultirende Drehungsmoment D der Muskeln kleiner oder größer als

$$G\,\frac{s \cdot 0{,}174 + f \cdot \cos\psi}{0{,}174 + \cos\psi}$$

ist. Besteht dagegen Gleichheit beider Größen, so führt der ganze zweite Abschnitt eine Translationsbewegung nach Maßgabe der Bewegung der Sprunggelenkaxe aus, ohne dass dabei die Längsaxe desselben ihre Richtung im Raume änderte.

Endlich erhält man für das Größenverhältniss der beiden Winkelbeschleunigungen, welches auch bei der Beurtheilung der Beschleunigungsrichtung des Körperschwerpunktes in Frage kommt, die bestimmte Formel

$$\frac{\varphi_1''}{\varphi_2''} = \frac{D(7{,}312 + \cos\psi) - G(f \cdot 7{,}312 + s \cdot \cos\psi)}{-D(0{,}174 + \cos\psi) + G(s \cdot 0{,}174 + f \cdot \cos\psi)}.$$

Es sollen nun einige specielle Fälle in Betracht gezogen werden.

I. Fall: Der Körperschwerpunkt liege vertical über der Metatarsalaxe. In diesem Falle sind die Strecken f und s beide positiv und gleich lang; man kann also s durch f ersetzen. Zum Ablösen der Fersen ist dann nach dem angegebenen Kriterium nur nöthig, dass $D > Gf$ ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so heben sich nicht nur die Fersen vom Boden ab, sondern es dreht sich auch der zweite Abschnitt in negativem Sinne, d. h. der Oberkörper bewegt sich relativ zur Axe des Sprunggelenks gleichzeitig nach hinten; es richtet sich also der ursprünglich nach vorn geneigte Körper auf. Dies bestätigen auch die photographischen Aufnahmen des Ablösungsvorganges von Grützner[1]). Damit ist natürlich noch nicht gesagt, dass auch der Körperschwerpunkt im Raume nach hinten wandert; denn die Sprunggelenkaxe erfährt ja beim Ablösen der Ferse eine Bewegung, die nicht nur nach oben, sondern auch etwas nach vorn gerichtet ist. Soviel ist aber a priori klar, dass der Schwerpunkt sich hebt, denn sowohl die Drehung der Füße im Sinne des Uhrzeigers, als auch die entgegengesetzte Drehung des übrigen Körpers tragen zu einer anfänglichen Hebung des Schwerpunktes bei. Es wäre nur noch zu untersuchen, ob die horizontale Beschleunigungscomponente x_0'' des Schwerpunktes dabei verschwindet, so dass der Winkel ε ein rechter Winkel ist, oder ob ε einen von 90^0 verschiedenen Werth annimmt.

Zur Beurtheilung dieser Frage ist zunächst der Werth des

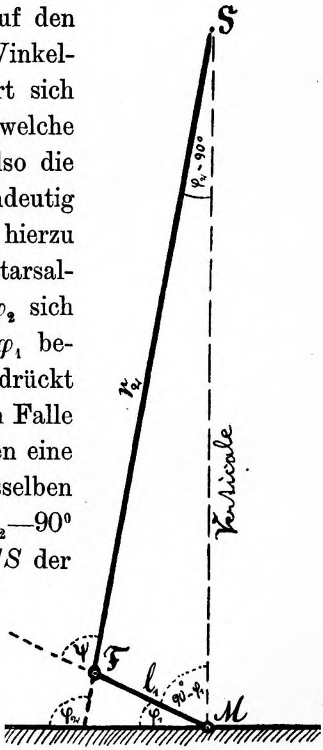
1) A. a. O., Fig. 10, S. 630.

Verhältnisses der beiden Winkelbeschleunigungen zu bestimmen. Die in Betracht kommende, oben allgemein angegebene Formel vereinfacht sich infolge der Gleichheit von s und f sehr wesentlich, da im Zähler und Nenner die Differenz $D - Gf$, welche ja einen von Null verschiedenen Werth besitzen muss, als Factor auftritt und sich daher fortkürzt. Man erhält auf diese Weise die einfache Formel

$$\frac{\varphi_1''}{\varphi_2''} = - \frac{7{,}312 + \cos\psi}{0{,}174 + \cos\psi},$$

die für die Bewegung aus irgend einer Ruhehaltung, bei welcher der Körperschwerpunkt vertical über der Metatarsalaxe liegt, Gültigkeit hat. Es ist insbesondere zu beachten, dass in diesem Falle die Größe des resultirenden Drehungsmomentes der Muskeln keinen Einfluss auf den Werth des Verhältnisses der beiden Winkelbeschleunigungen besitzt. Dagegen ändert sich dieses Verhältniss mit der Ausgangsstellung, welche jetzt schon durch den Winkel ψ, d. h. also die Differenz der beiden Winkel φ_2 und φ_1 eindeutig charakterisirt wird. Der Winkel ψ reicht hierzu allein aus, weil bei vertical über der Metatarsalaxe stehendem Schwerpunkt der Winkel φ_2 sich in enger Abhängigkeit von dem Winkel φ_1 befindet, und daher durch denselben ausgedrückt werden kann. Es bilden nämlich in diesem Falle die drei Punkte M, F, S ein Dreieck, dessen eine Seite vertical steht, so dass zwei Winkel desselben direct gleich den Winkeln $90^0 - \varphi_1$ und $\varphi_2 - 90^0$ sind, um welche die Längsaxen MF und FS der beiden Abschnitte gegen die Verticale geneigt sind (Fig. 4). Dem ersteren liegt die Seite r_2, dem letzteren dagegen die Seite l_1 gegenüber, so dass man nach dem Sinussatze zwischen den Winkeln φ_1 und φ_2 die Beziehung hat:

Fig. 4.



$$\cos\varphi_1 : -\cos\varphi_2 = r_2 : l_1.$$

Da $l_1 = 15$ cm und $r_2 = 86$ cm, so folgt hieraus zur Berechnung von φ_2 die Formel

$$\cos\varphi_2 = -0{,}174 \cdot \cos\varphi_1.$$

In dem gewöhnlichen Falle, wo die Fersen zunächst auf dem Boden aufstehen und bei der Bewegung abgelöst werden, beträgt der Winkel φ_1, den die Längsaxe MF des Fußes mit der Horizontalebene bildet, nach Messungen am Lebenden angenähert 25^0. Mit Hülfe der obigen Formel ergibt sich daher für φ_2 der Werth 97^0, und hieraus für ψ der Werth 72^0. Da $\cos 72^0 = 0{,}309$, so ergibt sich weiter nach der Formel für das Verhältniss der beiden Winkelbeschleunigungen φ_1'' und φ_2'' im Moment des Ablösens der Fersen vom Boden der Werth $-15{,}8$. Das heißt also: die Winkelbeschleunigung der beiden Füße, welche im positiven Drehungssinne stattfindet, ist rund 15 mal so groß als die im entgegengesetzten Sinne stattfindende Winkelbeschleunigung des übrigen Körpers. Der letztere dreht sich also im Anfang des Ablösens um einen kleinen Winkel nach hinten, welcher nur 6 % von dem Winkel beträgt, den gleichzeitig die Füße bei ihrer Drehung um die Metatarsalaxe beschreiben.

Setzt man den Werth $-15{,}8$ des Verhältnisses der Winkelbeschleunigungen in die Formel für $\operatorname{tg}\varepsilon$ ein und beachtet, dass $\cos 25^0 = 0{,}906$; $\cos 97^0 = -0{,}122$; $\sin 25^0 = 0{,}423$ und $\sin 97^0 = 0{,}993$ ist, so erhält man schließlich für $\operatorname{tg}\varepsilon$ abgerundet den positiven Werth $+15$. Daraus geht also hervor, dass die Beschleunigung, welche der Körperschwerpunkt beim Ablösen der Fersen im Anfang erhält, nicht genau vertical nach oben, sondern zugleich etwas nach vorn gerichtet ist. Der Winkel, um welchen die Richtung der Schwerpunktsbeschleunigung gegen den horizontalen Fußboden geneigt ist, beträgt abgerundet 86^0, und daher der Winkel, um welchen dieselbe von der Verticalen nach vorn abweicht, nur 4^0.

Es wird also beim Erheben auf die Zehen aus einer Haltung des Körpers, bei welcher der Schwerpuukt senkrecht über der Metatarsalaxe liegt, die Schwerlinie gleich zu Anfang etwas vor die Metatarsalaxe gebracht, vorausgesetzt, dass die beiden Abschnitte des Körpers sich während der Bewegung wie starre Massen verhalten. Dieses Wandern der Schwerlinie nach vorn hat schon Grützner[1]) mit Hülfe

1) A. a. O., S. 634 u. 635.

einer sehr sinnreichen Methode empirisch gefunden. Da der Schwerpunkt beim Stehen auf dem ebenen Fußboden dann immer noch durch die Zehen unterstützt ist, so fällt der Körper deshalb nicht nach vorn über; denn er kommt ja zunächst immer noch durch Gleichgewichtslagen hindurch. In diesem Sinne hat R. du Bois-Reymond[1]) Recht, wenn er angibt, dass es sich bei dem Stehen mit erhobenen Fersen nicht um labile, sondern um stabile Gleichgewichtslagen handelt.

Anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn die Fußballen auf der Kante eines dreiseitigen Klotzes ausruhen. In diesem Falle wird beim Ablösen der Fersen die Schwerlinie gleich zu Anfang aus der Unterstützungsfläche heraus nach vorn treten, und der Körper müsste daher unfehlbar nach vorn überfallen, wenn nicht auf andere Weise dafür gesorgt würde, dass der Schwerpunkt wieder eine geringe Beschleunigung nach rückwärts erfährt, welche die nach vorn gerichtete horizontale Beschleunigungscomponente x_0'' gerade ausgleicht. Dies kann nur durch Muskeln geschehen, die auf einen der beiden zunächst als starr aufgefassten Abschnitte des Körpers deformirend einwirken, also z. B. eine Veränderung der Gelenkstellung in einem Gelenk hervorrufen, das in das Innere eines der beiden Abschnitte hineinfällt. Ob dabei die Zehenbeuger in Action treten, wie R. du Bois-Reymond annimmt, ist freilich eine andere Frage, die ich vorläufig nicht zu entscheiden wage. Eine Rückwärtsbeschleunigung des Körperschwerpunktes könnte jedenfalls auch durch die Contraction von über das Kniegelenk, das Hüftgelenk oder z. B. auch das Schultergelenk hinwegziehenden Muskeln hervorgebracht werden. Wie dem auch sei, so viel ist sicher, dass in dem Falle, wo die beiden Abschnitte des Körpers sich vollkommen steif verhalten und die Fußballen auf einer vertical unter dem Schwerpunkt befindlichen Kante aufruhen, die Ablösung der Fersen vom Boden ein Vornüberfallen des ganzen Körpers zur Folge hat. Man braucht nur den Versuch zu machen, mit steifem Körper auf der Kante eines dreiseitigen Klotzes die Fersen zu erheben, um sich von dem Bestreben des Körpers, nach vorn überzufallen, sofort zu überzeugen. Dieselbe Beobachtung kann man auch machen, wenn man beim Stehen auf dem ebenen Fußboden zunächst den Körper so weit nach vorn neigt, bis der Schwerpunkt gerade

1) A. a. O., S. 87.

noch durch die vorderen Partien der Zehen unterstützt ist, und dann die Fersen vom Boden ablöst.

Mit Hülfe der aufgestellten Formeln lässt sich in ganz gleicher Weise der Fall behandeln, dass der Körper aus irgend einer Ruhehaltung mit schon erhobenen Fersen, bei welcher naturgemäß der Schwerpunkt vertical über der Metatarsalaxe liegt, in Bewegung gesetzt werden soll. Man kann dann sowohl nach den Bedingungen des weiteren Erhebens, als auch nach denen des Senkens der Fersen fragen. In den Formeln ist dabei der Werth von ψ einzusetzen, durch welchen die betreffende Ausgangshaltung charakterisirt ist. Die Durchführung specieller Beispiele kann aus Mangel an Raum hier nicht gegeben werden; sie unterliegt aber nach der Behandlung des Falles $\psi = 72^\circ$ durchaus keinen Schwierigkeiten.

II. Fall: Der Körperschwerpunkt liege vertical über der gemeinsamen Axe der oberen Sprunggelenke. Dieser Fall ist dadurch charakterisirt, dass die Strecke s den Werth Null besitzt. Zum Ablösen der Fersen ist dann nach dem früher angegebenen Kriterium erforderlich, dass $D > Gf \dfrac{7{,}312}{7{,}312 + \cos\psi}$ ist. Wenn, wie es ja in diesem Falle vorausgesetzt wird, die Längsaxe FS des zweiten Abschnittes vertical steht, so ist, wie man leicht erkennt, der Winkel ψ das Complement zu φ_1 und also $\cos\psi = \sin\varphi_1$. Da beim Aufstehen mit der ganzen Sohle auf horizontalem Boden $\varphi_1 = 25^\circ$ ist, so hat man also hier $\psi = 65^\circ$, und als Bedingung für das Ablösen der Fersen: $D > Gf \cdot 0{,}945$. Dagegen erfährt nach dem früheren Kriterium der zweite Abschnitt eine positive oder negative Winkelbeschleunigung, je nachem D kleiner oder größer als $Gf \dfrac{\cos\psi}{0{,}174 + \cos\psi}$, d. h. also im vorliegenden Falle als $Gf \cdot 0{,}709$ ist. Wenn nun D größer als $Gf \cdot 0{,}945$ ist, so wird nothwendiger Weise die Ferse vom Boden abgelöst. Da aber gleichzeitig dann D auch größer als $Gf \cdot 0{,}709$ ist, so erfährt dabei der zweite Abschnitt eine negative Winkelbeschleunigung, d. h. der Körper neigt sich nach hinten. Man sieht also, dass nicht nur ein Ablösen der Fersen möglich ist, sondern dass hierzu sogar ein kleineres resultirendes Drehungsmoment, und damit eine etwas geringere Spannung der betheiligten Muskeln gehört als im Falle des Fersen-ablösens bei vertical über der Metatarsalaxe liegendem Schwerpunkt.

Dass die Fersen auch bei vertical über der Sprunggelenkaxe befindlichem Schwerpunkt etwas abgehoben werden können, hat schon Ewald[1]) richtig erkannt.

Ferner gibt auch R. du Bois-Reymond[2]) an, dass er schon von Gad auf die Möglichkeit des momentanen Lüftens der Fersen vom Boden in einer Stellung, bei welcher die Schwerlinie hinter der Metatarsalaxe die Unterstützungsfläche trifft, hingewiesen worden ist. Es wäre daher gar nicht nöthig, diese Thatsache so besonders hervorzuheben, wenn sie nicht unterdess von L. Hermann direct in Abrede gestellt worden wäre. Hermann stellt den Satz[3]) auf: »Ein System, welches eine Drehaxe hat (hier die Capitula metatarsi) und dessen Schwerpunkt nicht über der Drehaxe liegt, aber unterstützt ist (hier durch die Fersen), kann unmöglich durch eigene Kräfte sich resp. seinen Schwerpunkt auch nur im Geringsten aus seiner Lage erheben.« Es bedarf wohl nach den bisherigen Auseinandersetzungen keines weiteren Beweises dafür, dass in dieser Form der Satz keine Geltung beanspruchen kann. Es waren daher Grützner und A. Fick vollkommen im Rechte, als sie gegen denselben Einspruch erhoben. Grützner ersetzt das letzte Wort des Hermann'schen Satzes durch die Worte[4]): »langsam erheben, so dass es in den verschiedenen Stellungen stehen bleiben kann« und macht dadurch den Satz einwandsfrei. A. Fick[5]) weist außerdem nach, dass auch in dem Falle, wo der Schwerpunkt vertical über dem Sprunggelenk liegt, der Zug der Wadenmuskeln sehr wohl ein größeres Drehungsmoment am Fuße ausüben kann als das Körpergewicht im entgegengesetzen Sinne, und gibt an, dass dann der Fuß sich durch Drehung um die Metatarsusköpfchen hebt. Unter Anwendung der bisher verwendeten Bezeichnungen werden also nach A. Fick erst dann die,

1) J. R. Ewald, Die Hebelwirkung des Fußes, wenn man sich auf die Zehen erhebt. Archiv f. d. ges. Physiol., Bd. LIX, S. 251.

2) R. du Bois-Reymond, Die Hebelwirkung des Fußes, wenn man sich auf die Zehen erhebt. Archiv f. Anatomie u. Physiologie. Physiol. Abth., 1895, S. 279.

3) L. Hermann, Die Ablösung der Ferse vom Boden. Archiv. f. d. ges. Physiol. Bd. LXII. S. 604.

4) A. a. O., S. 624.

5) A. Fick, Bemerkungen zur Mechanik zur Erhebung auf die Zehen. Archiv f. d. ges. Physiol. Bd. LXXV, S. 341.

Fersen vom Boden abgelöst werden, wenn $D > Gf$. In dieser Angabe könnte vielleicht ein Widerspruch mit der obigen Bedingung, dass D nur größer als $Gf.\,0{,}945$ zu sein braucht, gefunden werden. Ein solcher Widerspruch besteht aber nicht im Geringsten. Die Angabe von A. Fick ist für den von ihm in Betracht gezogenen Fall vollkommen correct. Er nimmt nämlich der Einfacheit halber an, dass die Längsaxe MF des Fußes horizontal gerichtet ist, so dass dem Winkel φ_1 der Werth Null und dem Winkel ψ der Werth 90^0 zukommen würde; dieser Fall ließe sich etwa so verwirklichen, dass man mit den Füßen auf einer um 25^0 gegen den Horizont ansteigenden schiefen Ebene steht, und bei vertical über der Sprunggelenkaxe befindlichem Schwerpunkt die Ferse vom Boden abzulösen sucht. Da hierbei $\cos\psi$ den Werth Null besitzt, so erhält man nach dem Früheren gerade als Bedingung für das Ablösen $D > Gf$.

Man könnte nun vielleicht im Zweifel sein, ob der Schwerpunkt im vorliegenden Falle beim Ablösen der Fersen gehoben wird. Dass dies wirklich stattfindet, davon kann man sich jedoch ohne alle Rechnung überzeugen. Die positive Winkelbeschleunigung des ersten Abschnittes theilt nämlich, wie man sofort erkennt, dem Schwerpunkt eine nach aufwärts gerichtete verticale Beschleunigungscomponente mit, welche durch keine andern ausgeglichen werden kann; denn die Winkelbeschleunigung des zweiten Abschnittes ertheilt infolge der verticalen Stellung der Längsaxe FS dem Schwerpunkte im Anfang nur eine Horizontalbeschleunigung.

Um die genaue Richtung der resultirenden Schwerpunktsbeschleunigung abzuleiten, hat man zunächst wieder den Werth von $\frac{\varphi_1''}{\varphi_2''}$ festzustellen. Entsprechend $s = 0$ gilt jetzt für dieses Verhältniss die Formel

$$\frac{\varphi_1''}{\varphi_2''} = -\frac{D\,(7{,}312 + \cos\psi) - Gf\cdot 7{,}312}{D\,(0{,}174 + \cos\psi) - Gf\cdot\cos\psi}.$$

Da in derselben das resultirende Drehungsmoment D der Muskeln noch vorkommt, so kann man den Werth des Verhältnisses der Winkelbeschleunigungen durch Aenderung der Muskelspannungen in bestimmter Weise variiren. Für $\psi = 65^0$ geht die Formel über in

$$\frac{\varphi_1''}{\varphi_2''} = -\frac{D\cdot 7{,}735 - Gf\cdot 7{,}312}{D\cdot 0{,}597 - Gf\cdot 0{,}423}.$$

Um einen bestimmten Fall herauszugreifen, der sich leicht rechnerisch verfolgen lässt, sei angenommen, dass $D = Gf$. Dann wird nach dem obigen Kriterium die Ferse vom Boden abgelöst werden, da zum Ablösen nur erforderlich ist, dass $D > Gf \cdot 0{,}945$. Das Verhältniss der Winkelbeschleunigungen nimmt dabei den Werth $-2{,}4$ an. Beachtet man, dass φ_2 im vorliegenden Falle ein rechter Winkel ist, so erhält man weiterhin für $tg\,\varepsilon$ nach der Formel auf Seite 147 den Werth $-0{,}46$, und für ε selbst den abgerundeten Werth 155°. Die Beschleunigung, welche in diesem Falle der Schwerpunkt erfährt, ist also nach hinten und oben gerichtet, wobei sie allerdings den verhältnissmäßig großen Winkel von 65° mit der Verticalen bildet; ihre nach oben gerichtete verticale Componente beträgt etwa nur die Hälfte, genauer 46 % von der nach hinten gerichteten horizontalen Componente. Da im ersten Fall, wo der Schwerpunkt vertical über der Metatarsalaxe stand, auch keine genau verticale, sondern eine nach oben und vorn gerichtete Beschleunigung des Schwerpunktes vorhanden war, so besteht gar kein principieller Unterschied zwischen dem Beginn der Ablösung der Ferse in jenem Falle und dem eben betrachteten, wo der Schwerpunkt vertical über der Sprunggelenkaxe liegt. Ein wesentlich verschiedenes Verhalten zeigt der Körper erst im weiteren Verlauf der Bewegung; denn da die Schwerlinie nicht mehr unterstützt ist, sobald die Fersen sich etwas vom Boden abgelöst haben, so kann natürlich der Körper nicht in einer beliebigen Bewegungsphase zum Stillstand gebracht werden, wie es im ersten Fall möglich war. Dies ist aber auch meines Wissens von Niemand behauptet worden.

Es dürfte interessant sein, zu erfahren, wie sich die Richtung der Schwerpunktsbeschleunigung bei größeren Werthen des resultirenden Drehungsmomentes D der Muskeln stellt. Nimmt man z. B. an, dass das letztere doppelt so groß ist, als das Drehungsmoment Gf der Schwere, so wird $\frac{\varphi_1''}{\varphi_2''} = -10{,}6$, ferner $tg\,\varepsilon = -7{,}69$ und $\varepsilon = 97^1/_2$°. Die Beschleunigung des Schwerpunktes ist also jetzt nahezu vertical gerichtet; sie bildet nur noch einen Winkel von $7^1/_2$° mit der Verticalen. Würde man mit den Muskeln ein Drehungsmoment ausüben können, welches so groß ist, dass ihm gegenüber das Drehungsmoment der Schwere gar nicht in Betracht käme, so würde $\frac{\varphi_1''}{\varphi_2''}$ den

Werth —13 und $tg\,\varepsilon$ den Werth —50,3 annehmen. Der Winkel ε wäre dann abgerundet 91°, so dass die Richtung der Schwerpunktsbeschleunigung nur um den Winkel von 1° nach rückwärts gegen die Verticale geneigt wäre, also mit ihr ziemlich genau zusammenfiele. Wenn man auch natürlich nicht im Stande ist, diesen extremen Fall zu verwirklichen, so zeigt doch das gewonnene Resultat ganz evident die Unhaltbarkeit des Hermann'schen Satzes, welcher ja ohne alle Einschränkung für jedes System, welches eine Drehaxe hat, ausgesprochen, und dessen Gültigkeit für diesen extremen Fall noch besonders hervorgehoben worden ist. An einer anderen Stelle[1]) gibt nämlich Hermann auf Grund seines Satzes ausdrücklich an, dass in der Brust-Wandstellung des Körpers selbst Muskeln vom Tausendfachen der vorhandenen Kraft nicht im Stande wären, die Fersen auch nur um 1 mm zu erheben.

Nach der Untersuchung der beiden extremen Fälle, wo der Schwerpunkt entweder vertical über der Metatarsalaxe oder über der Sprunggelenkaxe steht, wird man es wohl ohne weiteres verstehen, dass auch in jedem anderen Falle, in dem die Schwerlinie die Unterstützungsfläche zwischen den beiden Gelenkaxen durchschneidet, durch bloße Action von über das Sprunggelenk hinwegziehenden Muskeln die Fersen vom Boden abgelöst werden können. Natürlich werden dabei jedes Mal die Fersen sehr bald wieder auf den Boden aufgesetzt. Verharren kann man in einer Stellung mit abgelösten Fersen eben nur, wenn die Schwerlinie auch dann noch durch die Unterstützungsfläche hindurchgeht.

Der beschränkte Raum, welcher dem einzelnen Beitrag zu einer großen Festschrift zugemessen ist, gestattet es nicht, noch weitere Beispiele des Ablösens der Fersen aus dem Stand mit ganzer Fußsohle durchzuführen. An den beiden herausgegriffenen Fällen ist aber wohl auch schon zur Genüge gezeigt worden, in welcher Weise man die ganz allgemein gültigen Formeln verwenden kann, um sich die Antwort auf bestimmte Fragen zu verschaffen. Die Formeln ermöglichen aber auch noch die Lösung vieler anderen Probleme. So kann man auf dem beschriebenen Wege auch einen Einblick in den Anfang der Bewegung gewinnen, welche der Körper aus irgend einer

1) A. a. O., S. 605.

beliebigen Ruhehaltung mit schon erhobenen Fersen ausführt, sobald der Contractionszustand der betheiligten Muskeln in bestimmter Weise geändert wird. Dagegen geben die Formeln natürlich noch nicht die Mittel an die Hand, sich ein Urtheil über den Einfluss zu bilden, welchen im weiteren Verlaufe der Bewegung auch die Winkelgeschwindigkeiten und die davon abhängende Geschwindigkeit des Schwerpunktes auf die Drehungen der beiden Abschnitte ausüben.

Man kann sich aber nach den bisherigen Auseinandersetzungen auch leicht die hierzu nöthigen allgemeineren Formeln verschaffen. Zu diesem Zwecke braucht man nur noch die aus der Centripetalbeschleunigung der beiden Abschnitte herrührenden Componenten der Effectivkraft des Schwerpunktes S_2 bei der Aufstellung der Formeln in Rücksicht zu ziehen. Diese beiden Componenten besitzen bezüglich die Größen $m_2 l_1 \varphi_1'^2$ und $m_2 r_2 \varphi_2'^2$, unter φ_1' und φ_2' die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Abschnitte verstanden; die erste Componente hat dieselbe Richtung wie die Längsaxe des ersten Abschnittes von F nach M, die zweite ist in der Längsaxe des zweiten Abschnittes von S_2 nach F gerichtet. Um den Umfang der Arbeit nicht noch wesentlich zu vergrößern, soll aber auf diese Bewegungsgleichungen nicht weiter eingegangen werden. Dieselben finden sich überdies für das allgemeine zweigliedrige System in einer früheren Arbeit[1]) von mir schon ausführlich abgeleitet. Es ist bei der vorliegenden Untersuchung grundsätzlich nur der Anfang der Bewegung in Betracht gezogen worden, wo von Geschwindigkeiten der beiden Abschnitte noch keine Rede ist, um a priori den Einwand zu entkräften, dass es sich beim Ablösen der Fersen aus der Ruhe um sogenannte »Schleuderungen« handele. Selbstverständlich kann man auch eine schleudernde Erhebung des Körpers hervorbringen: die hier angeführten Beispiele haben aber mit Schleuderungen nicht das Geringste zu thun. Es handelt sich vielmehr dabei um eine primäre Wirkung von Muskeln, die über das Sprunggelenk hinwegziehen, in erster Linie der Wadenmuskeln, sofern es sich um das Ablösen der

1) Beiträge zur Muskeldynamik. Erste Abhandlung: Ueber die Wirkungsweise eingelenkiger Muskeln. Abhandl. d. mathem.-phys. Classe d. Kgl. sächs. Gesellschaft d. Wissensch. Bd. XXII, Nr. 2. 1895.

Fersen vom Boden oder um das Weitererheben derselben aus einer Gleichgewichtsstellung handelt, bei welcher die Fersen schon vom Boden abgelöst waren.

Zum Schluss mag noch eine allgemeine, vielleicht nicht ganz überflüssige Bemerkung über das Ablösen der Fersen bei verticaler Führung des Schwerpunktes gestattet sein. Wenn der Schwerpunkt auf irgend welche Weise in verticale Bewegung gezwungen wird, sich aber im übrigen ganz ungehindert in der Verticalen bewegen kann, so besitzt der Körper beim Erheben auf die Zehen dann nicht mehr, wie im Falle freier Beweglichkeit der beiden Abschnitte, zwei Grade, sondern nur noch einen Grad von Bewegungsfreiheit. Zur eindeutigen Charakterisirung einer beliebigen Stellung des Körpers braucht man dann nicht mehr zwei Winkel, sondern es genügt z. B. schon der Winkel φ_1, weil der Winkel φ_2 in bestimmter Weise von demselben abhängt. Desgleichen werden auch die Winkelgeschwindigkeit φ_2' und die Winkelbeschleunigung φ_2'' von vornherein durch die Winkelgeschwindigkeit φ_1' und die Winkelbeschleunigung φ_1'' bestimmt sein, und die Bewegung lässt sich schon durch eine einzige Gleichung erschöpfend darstellen. Man kann nun aber auch bei der Untersuchung dieses einfacheren Falles von dem bisher behandelten allgemeineren Falle freier Beweglichkeit des Schwerpunktes ausgehen. Der Zwang für die verticale Bewegung des Schwerpunktes kann stets als eine aus der Reaction der Führungsflächen herrührende und in horizontaler Richtung wirkende Kraft aufgefasst werden, welche gerade so groß ist, dass sie die horizontale Beschleunigung des Schwerpunktes verhindert. Da die letztere früher mit x_0'' bezeichnet wurde, so muss diese Kraft die Größe mx_0'', aber die entgegengesetzte Richtung wie x_0'' besitzen. Durch eine solche horizontale Kraft kann nun aber die verticale Beschleunigung y_0'' des Schwerpunktes in keiner Weise beeinflusst werden. Besitzt der Schwerpunkt im Falle freier Beweglichkeit eine vertical nach oben gerichtete Beschleunigungscomponente, so wird derselbe sich nach oben, und zwar mit dieser Beschleunigung, bewegen, sobald allein seine horizontale Bewegung durch eine Führung verhindert wird. Zeigt sich umgekehrt, dass unter gewissen Verhältnissen der Schwerpunkt des lebenden Körpers oder eines denselben darstellenden Modells bei verticaler Führung nach oben wandert, so wird er sich nothwendiger Weise ebenfalls nach oben, und dabei vielleicht gleichzeitig nach vorn oder hinten bewegen, wenn der Zwang zur Verticalbewegung wegfällt, im übrigen aber die Verhältnisse sich nicht geändert haben. Man kann daher sehr wohl an einem Modell des Körpers mit verticaler Führung des Schwerpunktes nachweisen, ob unter gewissen Umständen der Schwerpunkt gehoben wird oder nicht.
