Der mathematische Zahlbegriff und seine Entwicklungsformen.

Eine logische Untersuchung.

Von

Walter Brix.

(Fortsetzung.)

Drittes Kapitel.

Die erkenntnisstheoretischen Formen des Zahlbegriffs.

1. Die Zahlbegriffe des mathematischen Realismus.

Schon die Zahlbezeichnung als solche bedingt eine gewisse logische Arbeit, da mit der Nennung einer Menge in der Regel auch zugleich eine Einordnung derselben in die bereits bekannten Objecte des Denkens verbunden zu sein pflegt. So geben die Eins, Zwei, Drei u. s. w., die ihr psychologischer Charakter zu Cardinalzahlen stempelte, sofort Anlass zu einer Ordnung im Bewusstsein, welche nach ihrer Größe, d. h. nach der Menge der zu ihrer Bildung erforderlichen Denkacte vorgenommen zu werden pflegt. Auf diese Weise erzeugt die erste logische Behandlung des Begriffes die Ordinalzahlen; und das ist in der That die Form, welche zuerst die Eigenschaften der Zahlen näher kennen gelehrt hat.

Wo man nun aber immer die Anfänge der Zahlenlehre verfolgen mag, überall tritt dem Beobachter zunächst, wie es ja auch nicht anders sein kann, ein naiver Realismus entgegen, der in der Zahl die subjectiven, psychologischen Momente vollständig übersah und sie schlechtweg auf irgend welche concreten Einheiten der Außenwelt bezog. In der höchsten Entwicklung dieser Periode, in der griechischen Mathematik tritt dann an die Stelle der äußeren Beziehungssubstrate der allgemeinere, stellvertretende Begriff der Größe. Allerdings scheinen die Definitionen Euklid's von Einheit und Zahl [1]) schon einen mehr formalen Charakter an sich zu tragen. Erwägt man indessen, dass in seiner ganzen (im siebenten Buch der Elemente enthaltenen) Arithmetik die Zahl niemals selbständig auftritt, sondern überall geometrisch, in der Regel als Strecke interpretirt wird, bedenkt man ferner, dass diese Anlehnung an geometrische Vorstellungen sogar zu zwei verschiedenen Arten der Multiplication führt, deren erste als die Vervielfachung einer Strecke erscheint [2]), während die zweite, das Product von zwei und drei Strecken, als Rechteck, resp. senkrechtes gerades Parallelepiped gedeutet wird [3]), und berücksichtigt man endlich den Umstand, dass alle Beweise des Buches sich niemals der formalen Rechnungsvorschriften ernstlich bedienen, sondern immer mit Strecken operiren, so muss man nothwendig zu dem Schlusse gelangen, dass die Zahl bei Euklid — und seinen Standpunkt darf man ja auch für den des Alterthums ansehen — noch nicht formal, sondern nur in Begleitung des Größenbegriffs vorkommt. Freilich deckt sie sich nicht unmittelbar mit diesem, aber sie ist doch durchaus von ihm abhängig, mit anderen Worten: sie ist nichts weiter, als das Maß der Größe. Euklid's Einheit bedeutet daher in Wahrheit doch immer nur eine Größeneinheit, welche der Rechnung zu Grunde gelegt wird und in einer anderen Größe, wenn diese eine Zahl darstellen soll, vollständig aufgehen muss. In der That sind denn auch alle Rechenoperationen, wie sie Euklid im siebenten Buch der Elemente entwickelt, lediglich basirt auf die Idee der Messung von Größen aneinander und auf die dabei auftretenden Zahl-, d. h. Maßbeziehungen, wie ja überhaupt dieses Buch im wesentlichen eine

1) Μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται. Elementa VII α' und Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος, ebenda β'.

2) Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν, ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος καὶ γένηταί τις ebenda ις'.

3) Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί und: Ὅταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεός ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί. Diese beiden Definitionen stehen ebenfalls im siebenten Buch als ιζ' und ιη'.

Wiederholung der allgemeinen Größenlehre des fünften Buches im arithmetischen Gewande darstellt.

Wie aber im Laufe der Untersuchung schon mehrfach angedeutet wurde, blieb dieser absolute Realismus für die Arithmetik völlig unfruchtbar. Die Zahl, als das Maß der Größe betrachtet, war eben einer selbständigen Entwicklung nicht fähig. Die Ausbildung der Mathematik betraf vielmehr ganz die allein maßgebende Größenlehre, die auch bereits zum Begriff des Irrationalen, des Unmessbaren vorgeschritten war, während die Arithmetik als der quantitative Ausdruck der allgemeinen Größenbeziehungen, soweit diese der Messung überhaupt zugänglich waren, eigentlich nur als eine bestimmte methodische Behandlung eines ganz speciellen Gebietes der Größenlehre erschien.

Dieselbe Auffassung hat sich auch beinahe durch die ganze griechische Mathematik unverändert erhalten. Denn sieht man ab von den nominalistischen Lehren der Sophistik, die übrigens in Bezug auf die Mathematik niemals in dem plastischen Geist der Hellenen Boden zu gewinnen vermochten, und nimmt man den Skepticismus aus, dessen thatsächlicher Einfluss auf die mathematischen Anschauungen ebenfalls ein sehr geringer war, so konnten selbst weitergehende erkenntnisstheoretische Richtungen diesen unmittelbaren Realismus, der in der Uebereinstimmung mit der Außenwelt oder mit einem von ihr construirten Ideal seine Wirklichkeit suchte, nur unwesentlich modificiren. Und wenn Plato, selbst einer der bedeutendsten Mathematiker seiner Zeit, die mathematischen Anschauungen in die Ideenwelt verlegte und auf diese Weise einen transcendenten Realismus in's Leben rief, so mochte das wohl einen Anstoß zur Weiterforschung bieten und durch das Hineintragen gewisser ästhetischer Principien bestimmte Disciplinen, wie die Lehre von den regelmäßigen Körpern, erheblich fördern, für die mathematischen Grundanschauungen aber war die Verlegung in's Transcendente eigentlich überflüssig. Denn die apriorischen Grössenbeziehungen fanden sich ja doch alle in der Welt der Erscheinungen wieder; es war eben nur ein doppelter Realismus erzeugt, dessen entbehrliche Trennung denn auch im wesentlichen in der Aristotelischen Immanenztheorie wieder beseitigt wurde. Mag ferner auch die Zahlsymbolik der Pythagoreer einer mehr nominalistischen

Auffassung des Gegenstandes das Wort reden, mag auch der Umstand, dass sie der gewöhnlichen Rechenkunst oder Logistik eine wissenschaftlich ausgebildete Zahlenlehre oder Arithmetik gegenüberstellten, auf eine klare Erkenntniss des formalen Charakters der Zahl hinweisen, in Wahrheit lässt sich auch diese Ansicht nicht halten. Denn wenn man bedenkt, wie das Bestreben dieser Schule allein auf die Entdeckung von Maßbeziehungen gerichtet war, wie sie die Arithmetik nicht um ihrer selbst willen pflegte, sondern allein wegen der möglichen mystischen Beziehungen, die man aus den abstracten Formeln für die Erklärung der Außenwelt gewinnen könnte, so muss man nothwendig zu dem Schlusse gelangen, dass auch ihre Grundansicht sich noch nicht allzuweit von dem oben charakterisirten, wesentlich concreten Standpunkt entfernte, nur dass sie, durch mystische Elemente verunreinigt, die Zahl nicht allein als Maß der Größe, sondern überhaupt als Grundlage aller Erscheinungen nachweisen zu können meinte. Der Pythagoreismus ist daher im günstigsten Falle als eine begriffliche Vertiefung des empirischen Realismus zu bezeichnen, der, wenn auch nicht der Philosophie der Griechen, so doch ihrer gesammten Mathematik eigen war. Je ernster er aufgefasst, je strenger er durchgeführt wurde, um so enger blieb das Gebiet, das er der Zahl und ihren Operationen zuweisen konnte, so dass diese allein bestimmt waren, die Beziehungen der Objecte begrifflich zu spiegeln. Daher blieb der Zahlbegriff auf den der ganzen Zahl, die Arithmetik auf die Anfänge der Zahlentheorie, die Formenlehre auf die einfachsten Fälle der anschaulichen vier Species beschränkt.

So war die Zahl bei den Griechen als Maß der Größe zwar nicht direct mit der letzteren identificirt, aber doch begrifflich fest mit ihr verbunden, obschon andererseits nicht eng genug, um zu der Bildung von gebrochenen Zahlen Anlass zu geben. Diese, von den Griechen mühsam durch Proportionen umschrieben, konnten erst durch eine weitergehende Verschmelzung der Zahl mit der Größe eingeführt werden, wie sie, nach den spärlichen Ueberlieferungen zu urtheilen, wenigstens bis zu einem gewissen Grade die ägyptische Mathematik vorgenommen zu haben scheint. Der letztere Schritt ist um so bemerkenswerther, als dies das einzige Mal ist, wo der Realismus zu einer Erweiterung des Zahlbegriffs Veranlassung gegeben hat, wenn auch, wie es nicht anders sein konnte, auf Kosten der logischen Strenge. Denn jene Vermengung, wie sie in der ägyptischen Mathematik vorgenommen zu sein scheint, ist sehr undurchsichtig, und Zahl und Größe sind hier beide so mit einander vermischt, dass man für sie überhaupt kein festes Kriterium mehr entdecken kann. Daher müssen wir auch der ägyptischen Arithmetik, soweit sie überhaupt der Forschung zugänglich ist, in der Hauptsache noch jenen unmittelbaren empirischen Realismus zusprechen, welcher die griechische charakterisirte.

Wir haben aber gesehen, wie diese Auffassung, deren Hauptmangel ihre Unselbständigkeit ist, in sich selbst die Nothwendigkeit ihrer Beschränkung trug. Eine Ausdehnung des Zahlbegriffs war daher von ihr nicht mehr zu erwarten, sondern konnte erst durch eine Loslösung desselben von der Größe geleistet werden, welche geeignet war, einmal seine formale Natur zum klaren Ausdruck zu bringen, dann aber auch die Rechenoperationen in einer Weise zu vervollkommnen, wie es die bloße Abstraction aus den Größenbeziehungen niemals hätte erreichen können. Diesen gewaltigen Fortschritt finden wir aber bei den Indern verwirklicht, welche die formale Ausbildung der Arithmetik dementsprechend in der That zu einer solchen Vollendung trieben, dass sie bei ihren mechanisch ausgeführten Rechnungen an Größenbeziehungen überhaupt nicht mehr dachten.

War aber auf diese Art die Trennung der Methodik von der Anschauung durchaus gelungen, so machte die abstracte Nominalauffassung der Zahlbegriffe selbst doch bedeutend mehr Schwierigkeiten. Denn das Zahlgebiet der Inder umfasste ja, wie wir gesehen haben, außer den gewöhnlichen absoluten Zahlen noch die negativen, gebrochenen, irrationalen und als eine singuläre Form die Null; und zwar waren alle diese neuen Begriffe gewonnen durch eine Verallgemeinerung der sogenannten lytischen Operationen, Subtraction, Division und Radicirung über Grenzen hinaus, wo sie gar nicht mehr durch anschauliche Beziehungen versinnlicht werden konnten. Hierin lag nun aber offenbar eine Willkür, die sich wohl durch die Möglichkeit ihrer Durchführung rechtfertigen, in keiner Weise aber fortleugnen ließ. Die neuen Zahlen waren — das konnte unmöglich bestritten werden — eine rein nominalistische Schöpfung, eine gegenüber dem primären realen Zahlbegriff völlig incommensurable Neuschaffung, sobald man ihre erkenntnisstheoretische Bedeutung in's Auge fasste. In der formalen Algebra hatten sie sich glänzend bewährt; deshalb mochte man sie auch dort nicht missen. Wie aber konnten sie der Ordnung der bisherigen, ganz andersartigen Begriffe eingereiht werden? Von der Lösung dieser Frage hing ja ihre ganze logische Lebensfähigkeit ab. Jene waren alle durch einen längeren oder kürzeren Abstractionsprocess aus der Erfahrung gewonnen und zum größten Theil Gattungsbegriffe, diese aber das Resultat einer Nominaldefinition auf Grund eines Analogieverfahrens, dem ein anschauliches Substrat nicht mehr entsprach. Man hatte es hier also in der That mit einer ganz neuen Art von Begriffen zu thun, deren rein willkürliche Festsetzung ihre erkenntnisstheoretische Bedeutung sehr hypothetisch, die aus ihnen gezogenen Resultate aber illusorisch zu machen drohte. Andererseits jedoch wollte man sie auch wieder in der Algebra nicht entbehren. Es wäre also scheinbar kein anderer Ausweg geblieben, als der Entschluss, sie mit dem vollen Bewusstsein ihres rein nominalistischen Charakters bestehen zu lassen, wenn nicht die im Grunde doch völlig reale Anschauung der Inder vor einer derartigen Schematisirung zurückgeschreckt wäre.

In dieser Schwierigkeit, die allerdings den Indern kaum völlig zum Bewusstsein gekommen sein dürfte, erfand man nun ein Auskunftsmittel, das als solches freilich nicht erkannt wurde, der consequenten Kritik aber doch in keinem andern Lichte erscheinen kann. Man legte nämlich den nominalistisch gewonnenen Begriffen nachträglich anschauliche Bedeutungen unter, man stempelte sie gewaltsam zu Realbegriffen. Die Null konnte ja in dieser Beziehung keine Schwierigkeiten machen, und ebenso wenig die Brüche. Wiewohl rein formal erzeugt, durch Anwendung der Division auf Fälle, wo sie nicht mehr definirt war, und in ihren Eigenschaften rein schematisch bestimmt, wurden die letzteren doch ungeachtet ihrer nominalistischen Entstehungsweise stets als reale Größen behandelt, streng genommen ohne jede Berechtigung. Denn es musste doch vor allen Dingen der Nachweis geführt werden, dass diese Schemata auch wirklich mit den durch die Theilbarkeit der Materie gegebenen realen Bruchverhältnissen zu identificiren waren. Der analoge Nachweis, der in diesem Falle übrigens noch leicht beizubringen ist — denn man braucht ja nur zu zeigen, dass die formalen Gesetze der messenden Größenverknüpfung mit denen der Bruchrechnung übereinstimmen — fehlt vollends bei den Irrationalitäten. Diese waren ebenfalls rein formal durch unanschauliche Radicirungen gewonnen, erlangten aber trotzdem ziemlich schnell das Bürgerrecht. Denn die Inder kannten dieselben nur in der Form von Quadrat- und höchstens Cubikwurzeln, und diese waren ja immer leicht geometrisch als Seiten von Quadraten oder Cuben zu interpretiren.

So blieb den Indern der Gegensatz zwischen nominalistischer Entstehungsweise und unbewusst postulirter realer Bedeutung bei den Brüchen und Irrationalzahlen völlig verborgen. Ein glücklicher logischer Leichtsinn brachte es mit sich, dass eine weitausgebildete Rechnungsart, angewandt auf Gebiete, für welche sie eigentlich gar nicht definirt war, Resultate zeitigen konnte, die in ihrer Fruchtbarkeit und Allgemeinheit weit über den Kreis der construirenden griechischen Mathematik hinausgingen. Um so unsicherer blieb dagegen der Begriff der negativen Zahlen. Denn diese treten von Anfang an als etwas ganz heterogenes auf. Zwar gelang es schließlich in speciellen Fällen, negative Zahlenverhältnisse auch in der Welt der Anschauung nachzuweisen, wie z. B. in dem Gegensatz von Vermögen und Schulden oder in der zweifachen Richtung einer Geraden — denn auch diese Interpretation war den Indern schon bekannt — aber solche Beziehungen ergaben sich nicht aus der Natur der Sache und mussten erst mühsam gesucht werden. Deshalb werden in der Regel die negativen Lösungen einfach verworfen, häufig genug mit einer so mangelhaften Motivirung, wie der Bhâskara's: »gewöhnlich lässt man keine negativen Lösungen zu«[1]).

Dieses Schwanken zwischen Dulden und Wegwerfen der negativen Zahlen, die außerordentliche Unsicherheit in der begrifflichen Handhabung derselben im Gegensatz zu der hohen Ausbildung der algebraischen Rechnung, das unverkennbare Misstrauen gegen alles Negative, das sich deutlich der indischen und der ganzen, von ihr abhängigen arabischen und christlich-mittelalterlichen Arithmetik

---

1) Vgl. Hankel, Geschichte der Mathematik S. 194.

aufgeprägt hat, wäre aber an sich unerklärlich, hätte sich eben nicht in den klaren Formalbegriff der Zahl wieder der Begriff der Größe eingedrängt und auf die Beseitigung solcher Zahlformen gedrungen, die nicht mit ihm übereinstimmten. Da sich nun in sehr vielen Fällen eine Größendeutung für negative Lösungen nicht finden ließ, so wurden diese einfach verworfen und zwar häufig genug auch zugleich als Wurzeln der betreffenden Gleichung. Eine klare Sonderung der Begriffe hätte sie aber, wie es in anderen Fällen vorkam, als Wurzeln der algebraischen Gleichung bestehen lassen und nur hervorheben müssen, dass für das gerade vorliegende concrete Problem, dessen Lösung auf die betreffende Gleichung hinauskam, eine Deutung nicht zu gewinnen war. Denn die Gleichung als solche fällt in die allein den formalen Rechenoperationen unterworfene Algebra, in welcher negative Zahlen ebenso wohl definirt sind wie positive. Jede nicht rein algebraische Aufgabe dagegen operirt in der Regel mit Größenverhältnissen, welche nur äußerlich auf Zahlbeziehungen reducirt werden können, darf also auch nur solche Lösungen in Betracht ziehen, die einer Deutung in den fraglichen Größenverhältnissen fähig sind.

Sieht man aber von der sehr heiklen Auffassung des Negativen ab, so muss man bekennen, dass es der indischen Mathematik doch verhältnissmäßig leicht gelungen war, ihren ursprünglich rein formalen Zahlen anschauliche und in diesem Sinn reale Deutungen zu geben. Dass indessen diese Beziehungen selbst keineswegs real, sondern lediglich formal und künstlich waren, — denn jene Begriffe waren ja nicht aus ihren Veranschaulichungen abstrahirt, sondern erst nachträglich diesen untergeschoben — das übersah man vollständig; und froh, überhaupt eine reale Deutung gefunden zu haben, welche das erkenntnisstheoretische Gewissen nicht mehr belästigte, glaubte man jene tiefe begriffliche Kluft zwischen Nominaldefinition und anschaulicher Größe durch einen neuen, real aussehenden, in Wirklichkeit aber doch nur formal bestimmten Begriff überbrückt zu haben. Der Begriff, welcher dazu ausersehen war, diesen logischen Betrug zu verdecken, und unter dessen Form sich der sonst so unthätige Realismus den nominalistischen Zahlbegriff dienstbar machte, ist die Zahlgröße, deren Name schon die willkürliche Vereinigung zweier heterogener Elemente bezeichnet.

Indem man sich aber daran gewöhnte, jede Zahlform zugleich anschaulich als Größe zu denken, verschwanden allmählich die befremdenden unvorstellbaren Momente derselben, und man gelangte schließlich dazu, selbst von extrem realistischen Anschauungen ausgehend, keinen Widerspruch mehr in ihnen zu entdecken. Wo daher immer neue Zahlbegriffe gewonnen werden — und dies konnte, wie wir bereits zu bemerken Gelegenheit hatten, immer nur durch eine Nominaldefinition geschehen — beginnt auch sofort der Realismus durch unausgesetzte Veranschaulichungsversuche an ihrer Unterwerfung zu arbeiten. Die letztere gelang den Indern schon vollständig bei den Brüchen und algebraischen Irrationalitäten, das Negative hingegen, allein durch den Gegensatz von Vermögen und Schulden oder die beiden Richtungen einer Geraden der anschaulichen Darstellung zugänglich, erweckte immer noch unbeschwichtigte Bedenken gegen seine Existenzfähigkeit.

Auf demselben Standpunkt blieben auch die Araber und die von ihnen abhängigen christlichen Mathematiker; und erst nach der Zeit Descartes', der ja Algebra und Geometrie in eine einzige Größenlehre zusammenfasste, hatte man sich an den fragwürdigen Begriff so gewöhnt, dass man schließlich in der Veranschaulichung auf der Geraden nur den natürlichen Ausdruck des Negativen sah.

Ganz denselben Weg mussten später die imaginären und complexen Zahlen zurücklegen. In die Algebra eingeführt von Cardan, mehr durch eine nominalistische Spielerei, über deren Werth er sich selbst nicht recht klar war, als auf Grund wissenschaftlicher Motive, erkenntnisstheoretisch fortwährend angefochten, in der Analysis jedoch mit Vortheil und großem Nutzen verwendet, führten sie, schon in der Benennung räthselhaft, als »unmögliche Größen« ein eigenartiges Zwitterdasein, aus welchem sie erst durch die geometrische Veranschaulichung und durch die Autorität eines Gauß befreit wurden.

Die praktische Bedeutung dieser geometrischen Darstellung war also eine außerordentliche, da sie die definitive Aufnahme der bisher nur sehr misstrauisch geduldeten neuen Begriffe in den Kreis der arithmetischen Grundformen erst sicherstellte; die logische aber ist eine weit geringere. Denn die Gleichstellung reeller und imaginärer Zahlen auf diesem Wege war doch immer eine gewaltsame.

In Wahrheit blieben beide genau so heterogen wie vorher. Denn es war ja niemand im Stande, den Begriff des Complexen aus seiner anschaulichen Bedeutung heraus zu abstrahiren, sondern dieser anschauliche Charakter war ihm erst später mit großer Kunst und vielem Scharfsinn aufgezwungen worden, weil ein im Grunde unberechtigtes Verlangen, dass die rein formale Mathematik überall der Anschauung entsprechen solle, ihre Verdinglichung forderte. Die Ueberbrückung des Gegensatzes von formaler und anschaulicher Mathematik, welcher zu jener Zeit als Widerspruch empfunden wurde, war also wie bei den Indern eine rein äußerliche, eine Concession, die man der Ausgleichung eines in Wirklichkeit gar nicht vorhandenen Widerspruches machte, ohne doch dem wahren Charakter des Imaginären damit näher zu kommen. Statt seine rein formale Natur zu enthüllen, hatte man sie durch einen täuschenden Anstrich dem forschenden Auge verdeckt. Die Ansicht von Gauß: »Von einer anderen Seite wird hierdurch die wahre Metaphysik der imaginären Größen in ein neues helles Licht gestellt«[1]) kann man so wenig gelten lassen, dass man viel eher von einer logischen Verdunkelung des Gegenstandes sprechen könnte.

bravo

So ist der Grundzug der mathematischen Auffassung der Arithmetik von den Indern bis etwa in die Mitte dieses Jahrhunderts — ja es kann nicht geleugnet werden, dass selbst heutzutage noch Viele auf demselben Standpunkt stehen — ein Realismus a posteriori. Was der Veranschaulichung fähig, nicht was aus der Anschauung abstrahirt ist, gilt ihm als real, gleichviel ob die jeweilige geometrische Bedeutung naturgemäß aus dem Begriff selbst zu ziehen, oder nur mit gewaltsamen Mitteln zu bewerkstelligen ist. Da aber dieser Realismus mit dem ausgesprochenen Princip der Veranschaulichung um jeden Preis im Grunde doch nur ein versteckter, nicht eingestandener Nominalismus war, so krankte er an einem tiefen inneren Widerspruch, der unmöglich auf die Dauer verborgen bleiben konnte und entweder zu einer durchgreifenden Erneuerung Anlass geben, oder aber direct zum Nominalismus überführen musste. Bevor man nun aber zu diesem Letzten, Aeußersten sich entschloss, versuchte man doch noch, und zwar immerhin nicht

1) Werke II, S. 176.

ganz ohne Glück, die realistische Betrachtungsweise durch eine gründlichere Auffassung zu retten. Die Bestrebungen in dieser Richtung sind im allgemeinen getragen von den mathematischen Ideen des Rationalismus.

Eine Vertiefung der erwähnten Anschauungen konnte nun eigentlich höchstens dadurch erreicht werden, dass man den Realismus dem bisher maßgebenden empirischen Standpunkt entzog. In dieser Beziehung hatten schon die Pythagoreer Fortschritte gemacht, indem sie der allgemeinen Zahlenlehre eine selbständige, freilich völlig der Wirklichkeit immanente Bedeutung beimaßen. In gleicher Richtung wirkten der transcendente Realismus Plato's und der immanente des Aristoteles, ohne indessen gerade an dem Zahlbegriff viel zu ändern. Der Erste, welchem wirklich auch eine eingehender durchgeführte Auffassung zugesprochen werden muss, war Descartes. Sein apriorischer Realismus lässt die mathematischen Begriffe nicht mehr durch Abstraction aus der Anschauung entstehen, sondern spricht sie als ursprünglichen Besitzstand von Ideen dem menschlichen Geiste zu. Diese Auffassung bietet in der That den doppelten Vortheil, dass sie einmal nicht mit den Widersprüchen zu kämpfen braucht, welche die nachträgliche Veranschaulichung dem Zahlbegriff einimpft, andererseits aber auch eine freie selbständige Entwickelung der Zahlbeziehungen allein aus ihrem Begriff heraus gestattet. Von dem letzten Vortheil hat nun Descartes allerdings noch weniger Gebrauch gemacht, wie von dem ersten. Denn während er die Zahlen, welche als solche zu den »klaren Ideen« gehören, bald rein begrifflich fasst, gleich den racines fausses und imaginaires[1]), bald aber auch — und hierin besteht ja seine Hauptbedeutung für die Mathematik — mit den

---

1) Mais souvent il arrive que quelques unes de ces racines sont fausses ou moindre que rien; comme si on suppose que x désigne aussi le défaut d'une quantité qui soit 5, on a $x + 5 = 0$. Descartes: La Géométrie, Livre troisième (1637 erschienen) in der Cousin'schen Gesammtausgabe, V, Paris 1824, p. 389, in der Separatausgabe: Paris 1886, p. 56. Für das Imaginäre kommt die Stelle in Betracht: Au reste tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine. A. a. O. bei Cousin V, p. 398, in der Separatausgabe p. 63.

anschaulichen geometrischen Größen identificirt, ist seine ganze Ausbildung der Arithmetik, die imaginären Zahlen völlig ignorirend, lediglich eine anschauliche, d. h. erkenntnisstheoretisch wesentlich bestimmt durch die von Plato übernommene Wiedererinnerung, vermöge deren die sinnlich wahrnehmbaren Beziehungen der Außenwelt uns die apriorischen mathematischen zum Bewusstsein bringen sollen. Von einer klaren Herausarbeitung der Grundgedanken kann daher bei Descartes noch keine Rede sein.

Weitaus systematischer und consequenter ist die nahe verwandte Ansicht von Leibniz, weil sie die Anschaulichkeit völlig preisgibt und den Zahlen gleich allen anderen Ideen nur eine apriorische begriffliche Existenz zuspricht. Sie sind in Folge dessen hier völlig verschieden von der sinnlichen Anschauung, auf welche sie nur bezogen werden können. Wenn sie nichtsdestoweniger an der letzteren hauptsächlich zum Bewusstsein kommen, so bildet doch der Mechanismus der dunklen Erfahrungsvorstellungen nur eine Gelegenheitsursache, welche die Vorstellung jener Begriffe blos anzuregen vermag. Eine Wiedererinnerung, wie bei Descartes und Plato, haben wir hier aber nicht anzunehmen. Denn die Begriffe sind ja den Anschauungen nicht mehr adäquat, sie sind keine dunklen, sondern klare Vorstellungen. Als solche dürfen sie darum auch nicht an die Erfahrung angelehnt werden; vielmehr muss es möglich sein, weil ihnen apriorische Existenz zukommt, aus ihrem Begriffe selbst alle ihre Eigenschaften abzulesen und durch bloße Analyse zu erhalten. Die Wissenschaft von der Verknüpfung der Zahlen, die Algebra oder die mathesis universalis prior[1]) (im Gegensatz zur posterior, welche die Infinitesimalmethode umfasst) ist deshalb, wie alle Mathematik, bei Leibniz begrifflich, apriorisch und analytisch, und ihre Durchführung gilt als um so vollkommener, je weniger sie auf die Erfahrung Bezug nimmt, je mehr sie ars inveniendi erfordert.

In dieser Auffassung ist zunächst die Zahl noch, wie bei Descartes, wesentlich mit dem, hier abstract gefassten, Begriff der Größe verschmolzen, wenn es auch bisweilen den Anschein hat,

1) Matheseos universalis pars prior; Leibnizens mathematische Schriften, herausgegeben von Gerhardt, Band VII, Halle 1863, p. 53 ff.

als wollte Leibniz beide von einander trennen[1]). Sie umspannt bereits das ganze complexe Größengebiet, positive Zahlen wie negative, gebrochene wie irrationale, zu denen hier sogar, ein Erzeugniss des Infinitesimalcalculs, die transcendenten hinzukommen, endlich die complexen[2]); das Operationsfeld ist das gewöhnliche der Algebra[3]), obgleich er es allerdings einmal bei der Auflösung des casus irreductibilis der cubischen Gleichungen durch eine neue Rechnungsmethode erweitert zu haben glaubt[4]), welche es gestatte, bisweilen Größen, die äußerlich in imaginärer Form erscheinen, wie z. B. jene in Wirklichkeit reellen und nur scheinbar complexen Wurzeln im casus irreductibilis, in die reelle Form überzuführen.

Nach alledem muss man es Leibniz in der That nachrühmen, dass er, von einer selbständigen, apriori-realen Auffassung des Zahlbegriffs ausgehend, die Arithmetik unabhängig von der Anschauung hinstellte und entwickelte. Um so mehr muss es befremden, wenn er nun doch wieder, halb und halb in den früheren Realismus zurück verfallend, den Werth der so gewonnenen Resultate an ihrer praktischen Anwendbarkeit misst, ein Charakterzug, der sich durch die ganze, schon erwähnte, grundlegende Abhandlung: Matheseos universalis pars prior hindurchzieht. Und hier wird es namentlich sehr auffällig, wie er fast vollständig in den Nominalismus überlenkt. In concrete Größenverhältnisse übertragbar sind ihm nämlich nur die positiven Zahlen, den negativen und imaginären billigt

---

1) Vgl. z. B. Initia mathematica. Ebenda p. 29 ff, namentlich p. 31.

2) Numeri seu Termini simplices Algebraici sunt vel positivi vel privativi, integri (iique simplices aut figurati) vel fracti, rationales vel surdi (sc. irrational), et impuri (sc. nur scheinbar irrationale, wie $\sqrt{a^2} = a$) vel affecti (sc. allgemeine algebraische Irrationalitäten), sunt etiam numeri communes vel transcendentes et denique possibiles vel imaginarii seu impossibiles.

3) Et generantur per operationes, quae sunt vel syntheticae (additio, multiplicatio, potestatis ex radice excitatio) vel analyticae (subtractio, divisio, extractio radicis). Beide Stellen stehen unmittelbar hintereinander auf p. 208 des Bandes VII der mathematischen Schriften in der Abhandlung: De ortu, progressu et natura algebrae nonnullisque aliorum et propriis circa eam inventis (a. a. O. p. 203 ff).

4) Et notabile est sextum nos habituros Operationis sive Arithmeticae sive Analyticae genus: nam praeter additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem, radicum extractionem habebitur Reformatio seu Reductio expressionum imaginariarum ad reales etc. VII, p. 141.

er dagegen keine Existenz in der Erfahrung zu[1]. Ihre Bedeutung ist vielmehr eine rein begriffliche; und wo sie immer in einem Problem als Lösungen auftreten, zeigen sie durch ihr Erscheinen an, dass die Fragestellung etwas Unmögliches verlangte, geben aber zugleich eine Anleitung, wie man die Frage verbessern müsste, um eine wirkliche Lösung zu erhalten[2].

Diese Ansicht unterscheidet sich nun aber von dem reinen Nominalismus allein dadurch, dass sie den Zahlen die apriorische Existenz zuschreibt, welche jener leugnet. Denn klarer als Leibniz hat selbst Dühring die Thatsache nicht hervorheben können, dass imaginäre wie negative Zahlen lediglich Nominaldefinitionen wären, denen eine anschauliche Bedeutung nicht unterzulegen sei. Es ist aber zugleich ersichtlich, dass nicht allein den negativen und imaginären, sondern überhaupt allen Zahlen Leibnizens eine concrete Interpretation nicht gegeben werden darf. Denn wie sollen a priori in uns liegende Ideen und Begriffe verwirklicht gedacht werden in einer von ihnen völlig unabhängigen ganz heterogenen, Anschauung? Diese künstlich errichtete Kluft zwischen begrifflichem und anschaulichem, zwischen innerem und äußerem Werth, ist völlig unüberschreitbar, und so leidet denn auch Leibnizens Ansicht unter dem Grundfehler seines ganzen Systems, das, ausgehend von einem bloßen Gradunterschied beider Welten, diesen in einen Artunterschied umwandelt, ohne doch die dadurch bedingte

1) Für das Negative kann er natürlich die beiden concreten Deutungen von Schulden und entgegengesetzter Richtung einer Geraden nicht vermeiden (VII p. 70), von den imaginären Zahlen heißt es hingegen direct (VII p. 73): Hae expressiones id habent mirabile, quod in calculo nihil involvunt absurdi vel contradictorii, et tamen exhiberi non possunt in natura rerum seu in concreto.

2) Vgl. z. B. die Stellen der Mathesis universalis, Mathematische Schriften VII p. 70 und 73: Quantitates negativae, cum a minori subtrahi debet maius, saepe oriuntur in calculo, et licet non videantur respondere ad quaestionem, reapse tamen respondent perfectissime, non tantum enim indicant quaestionem fuisse male conceptam (etsi venia danda sit, quia praevideri non poterat) sed etiam quomodo fuerit concipienda et quid ad eam recte conceptam sit respondendum; und: Ex irrationalibus oriuntur quantitates impossibiles seu imaginariae, quarum mira est natura, et tamen non contemnenda utilitas; etsi enim ipsae per se aliquid impossibile significent, tamen non tantum ostendunt fontem impossibilitatis, et quomodo quaestio corrigi potuerit, ne esset impossibilis, sed etiam interventu ipsarum exprimi possunt quantitates reales. (Die letzte Bemerkung bezieht sich auf den oben erwähnten casus irreductibilis der cubischen Gleichungen.)

Scheidung an irgend einer Stelle aufrechterhalten zu können. Diese Incongruenz ist aber durch keine Dialektik und keine Uhrvergleiche zu beseitigen, und selbst die Lehre vom prästabilirten Parallelismus versagt hier den Dienst, da es ja Zahlbegriffe gibt, denen ein anschauliches Substrat überhaupt nicht mehr entspricht.

Hier zeigen sich offenbar nur zwei Auswege: entweder muss man eingestehen, dass man es mit zwei völlig incongruenten Gebieten zu thun hat — und dies führt unausbleiblich zum Nominalismus, da die Verbindung beider durch die ontologische Dialektik, abgesehen von deren sonstigen Schwächen, damals auch an den complexen Zahlen scheitern musste — oder man wird gezwungen, die apriorische Existenz der Begriffswelt als solcher aufzuheben und in der Anschauung aufgehen zu lassen. Diesen letzten Schritt in der Entwickelung des Realismus that nun Kant, indem er die Anschauung zunächst der empirischen Erfahrung entzog und dann den transcendenten Realismus Leibnizens durch einen transcendentalen ersetzte[1].

Wie nun bei Kant die Mathematik überhaupt die Wissenschaft von der Construction der Begriffe in der Anschauung a priori ist, so stellt er speciell die Zahl als die Anwendung der Kategorie der Quantität auf die Zeitanschauung oder in seiner Terminologie: als das reine Schema der Größe hin[2]. Den Anlass zur Bildung des Zahlbegriffs aber gibt die Wahrnehmung, insofern sie an den Gegenständen ihre einzelne zeitliche Selbständigkeit in's Auge fasst und so eine Reihe einzelner Apperceptionsacte erzeugt, welche sich als unmittelbare Addition darstellt.

Wir hatten nun oben[3] gesehen, wie diese Ansicht psychologisch völlig zu Recht besteht. Sie kann aber auch nur bis zu dem psychologischen Begriff der Anzahl und der gewöhnlichen Zahlenreihe vordringen und muss nothwendig versagen, wo es sich um den allgemeinen mathematischen Zahlbegriff handelt. Außerdem

1) Es ist wohl erlaubt, hier vorübergehend die Kantischen Anschauungen als transcendentalen Realismus zu charakterisiren, trotzdem diese Bezeichnung schon in ganz anderem Sinne als Gattungsname für die Philosophie Herbart's, Schopenhauer's u. s. w. gebraucht wird.

2) Kritik der reinen Vernunft. Der Gesammtausgabe von Rosenkranz und Schubert Band II (Leipzig 1838) S. 126.

3) Kapitel II, 3.

hat Kant auch die logische Zurückführung der Zahl auf die Zeit wohl beabsichtigt, aber nirgends näher ausgeführt. Seine Ansichten über diesen Punkt finden sich vielmehr überall zerstreut. Der Beurtheiler sieht sich also hier einer Reihe einzelner, unzusammenhängender Meinungsäußerungen gegenüber, welche erst zu einem System ergänzt werden müssten. Nimmt man aber alle gelegentlichen, auf unsern Gegenstand bezüglichen Bemerkungen zusammen[1]), so muss man zu der Ueberzeugung gelangen, dass Kant's Ansicht über den Zahlbegriff sich nicht frei aus sich selbst heraus entwickelt hat, sondern vollständig unter dem Zwange seines Transcendentalsystems steht[2]). Nach Analogie bestimmend hat hier vor allen Dingen die unmittelbare Beziehung der Geometrie zur Raumanschauung gewirkt. Während Kant aber gerade hierüber sehr klare und ausgearbeitete Gedanken vorträgt und bei Exemplificirungen im Gebiete der Mathematik auch am liebsten auf geometrische Beispiele zurückgreift, mag er wohl andererseits selbst die Unmöglichkeit einer ebenso innigen Beziehung von Zeitanschauung und Arithmetik gefühlt haben; denn alle hierhin zielenden Bemerkungen erscheinen als ebenso viel unzusammenhängende Behauptungen, die eines Beweises durchgängig ermangeln.

Ein solcher ist nun freilich auch nur in den seltensten Fällen zu geben. Denn, wenn Kant z. B. gleich nach der discontinuirlichen Auffassung der Zahl als der »Vorstellung, welche die successive Addition von einem zu einem (gleichartigen) zusammenfasst«[3]), zu der Ableitung eines continuirlichen Zahlengebietes übergeht, so ist hier eine weite logische Lücke, die allein durch den Hinweis auf die Analogie mit der Zeitanschauung nicht überbrückt werden kann. Wenn er ferner gezwungen wird, ebenso wie die Geometrie die Construction im Raume ist, die Arithmetik als eine ebensolche,

---

1) Die wichtigsten finden sich a. a. O. S. 126, 143, 146—148, 244, 380, 554—558 etc.

2) Außer der hier behandelten Ansicht hat Michaelis in seiner Abhandlung: Ueber Kant's Zahlbegriff (Programmabhandlung Berlin 1884) aus zwei Stellen der Kritik noch eine andere Auffassung nachweisen zu können gemeint, in welcher der begriffliche Charakter der Zahl mehr betont wird. Da aber die diesbezüglichen Angaben der Beurtheilung fast gar keine Handhabe bieten, können sie hier übergangen werden. Näheres in der citirten Abhandlung p. 7 ff.

3) A. a. O. p. 126.

wenn auch nur symbolische in der Zeit anzusehen[1]), so ist dies eine Ansicht, die sich durch unmittelbare Betrachtung als falsch erweisen muss. Denn, kann schon die Mathematik wie die Logik in ihrer Auffassung des Zahlbegriffs als solchen der Zeit völlig entrathen, so hat sich vollends noch niemals ein Forscher bei der Ableitung arithmetischer Sätze auf die Zeit-, viel eher auf die Raumanschauung berufen. Und, wenn Hamilton unter dem Einflusse Kant's in der schon mehrfach citirten Vorrede zu den Lectures on Quaternions die Mühe nicht gescheut hat, eine solche mathematische Begründung der Zahlenverhältnisse auf die Zeit wirklich zu versuchen, so gelingt ihm das allerdings äußerlich vollkommen durch zweckmäßige Handhabung einer singulären Terminologie. Aber die offenbare Gewalt, die er anwenden muss, um den Stoff in die ihm genehmen Formen zu pressen, spricht besser als alles andere dafür, dass die fraglichen Resultate thatsächlich auf ganz anderem Wege gefunden sind.

Während daher die Lehre Kant's der Geometrie gerecht zu werden vermochte, konnte sie der Arithmetik nicht genügen. Denn schon die logische Schematisirung der reellen Zahlen in der Zeit musste misslingen, für die imaginären aber — und diese waren doch, trotzdem er sie stillschweigend übergeht, ebenso wohl definirt — bleibt auf diese Weise kein Platz, während an die allgemeinen complexen gar nicht mehr zu denken ist[2]). Nimmt man hinzu, dass Kant die Grundlage seiner ganzen positiven Theorie, die begrifflose Apriorität von Zeit und Raum weder hat beweisen noch wahrscheinlich machen können, so bleibt die Bedeutung seiner Ansicht wesentlich auf die Betonung der von Leibniz noch analytisch gedachten, synthetisch construirenden Natur der Zahloperationen beschränkt; und auch hier kommen die transcendentalanschaulichen Elemente in's Wanken, um begrifflichen Platz zu machen.

Mit der begrifflosen Transcendentalität der Zeit fällt aber auch

1) A. a. O. S. 555.

2) Hamilton's Anstrengungen in dieser Beziehung sind zwar von Erfolg gekrönt, aber die symbolischen Schemen, die er schließlich zu Stande bringt, haben mit den wirklichen Zahlbegriffen, wie er sie in der eigentlichen mathematischen Entwicklung selbst anwendet, nichts gemein als die Namen.

unmittelbar die Realität der Zahl, und die ganze Lehre von der symbolischen Construction der Arithmetik[1]) und der Entstehung mathematischer Begriffe aus Definitionen[2]) führt unmittelbar zum crassesten Nominalismus über.

Das Resultat dieser ganzen realistischen Entwickelung des Zahlbegriffs ist also ein durchaus negatives. Denn weder konnte jener erste empirische Realismus durch allmähliche künstliche Assimilation der zum psychologischen Zahlbegriff hinzukommenden neuen Formen deren nominalistische Definitionen verwischen, noch vermochte seine Verlegung in's Transcendente oder Transcendentale, jene weil sie die anschaulichen, diese weil sie die begrifflichen Elemente der Zahl aufheben musste, sie gegenüber den immer lauter werdenden Reclamationen des Nominalismus zu schützen. Der letztere war aber inzwischen dermaßen erstarkt, dass er nun dem Realismus, welcher wenigstens noch in der Mathematik herrschend war, als ein ebenbürtiger Gegner gegenübertrat.

2. Die Zahlbegriffe des mathematischen Nominalismus.

Es ist ein charakteristisches Merkmal in der Entwickelung des Zahlbegriffs, dass sie fast unausweichlich zum Nominalismus hindrängt. Denn wo immer eine neue Erweiterung der bestimmenden Elemente vorgenommen wurde, überall beruhte sie auf einer willkürlichen Festsetzung. Mochte sie auch Manchem mehr als nothwendig denn als willkürlich erscheinen, in dem Wesen der vorher herrschenden Begriffe lag sie nicht; und der beste Beweis dafür war ja, dass es eine ausgebildete Arithmetik immer schon vor der Auffindung der neuen Zahlformen gab.

Sollte man nun aber solche abstracten Begriffe verwerfen, weil sie in der Anschauung niemals realisirt werden konnten? Dazu hat man zu keiner Zeit ernstlich den Muth gehabt; und wenn die Griechen über derartige Schwierigkeiten niemals klagen konnten, so war das keine Entsagung, die ihnen mathematische oder logische Bedenken zur Pflicht gemacht hätten, sondern eine glückliche Veranlagung ihres durchaus realen Geistes, der sie von nominali-

1) A. a. O. S. 555.
2) A. a. O. S. 566.

stischen Speculationen zurückhielt. Wir haben aber gesehen, wie man andrerseits sich den formalen Charakter der formalen Begriffe auch nicht eingestehen mochte, wie der Wunsch ihrer Beibehaltung und das Unvermögen, auf die Anschauung zu verzichten, jenen Kampf zwischen Realismus und Nominalismus erzeugte, in welchem der erste bis in die Mitte unseres Jahrhunderts Sieger blieb, ohne doch den zweiten ganz verdrängen zu können. Hatte aber der Realismus die Assimilirung der gebrochenen und irrationalen Zahlen noch ohne allzu große Schwierigkeit zu vollziehen vermocht, so brauchte er doch schon ein ganzes Jahrtausend, um sich das Negative zu unterwerfen. Während dessen hatte aber der Nominalismus bereits den viel unanschaulicheren Begriff des Imaginären erzeugt. Und wenn es gleich dem Realismus schließlich noch gelang, auch diesen seinem Gegner zu entringen, so waren damit seine Kräfte doch endgültig erschöpft; und da sich selbst der Rückzug in's Transcendente und Transcendentale unausführbar erwies, war er gezwungen, vor dem Nominalismus ganz das Feld zu räumen, der nur in den allgemeinen complexen Zahlen eine dauernde Unmöglichkeit schuf, den Zahlbegriff auf die Anschauung zu begründen.

Die völlig abstracte Natur der arithmetischen Operationen brachte es nun aber mit sich, dass die nominalistische Kritik derselben einen wesentlich anderen Charakter tragen musste, als die Anwendung der nämlichen Principien auf die geometrischen Grundbegriffe. Die letzteren erschienen im Lichte dieser Betrachtungsweise fast immer als die Resultate einer Abstraction aus der Erfahrung, denen ihre unleugbare Constanz dann durch eine hinzukommende willkürliche, alle variabeln empirischen Elemente eliminirende Definition verliehen wird. Der willkürliche Charakter des ganzen Verfahrens tritt dabei um so mehr hervor, je mehr man sich von der empirischen Anschauung entfernt. Das ist nun aber bei den Zahlbegriffen in viel höherem Maße, als bei den geometrischen Verhältnissen der Fall. Denn diese waren ja, soweit sie über die positive ganze Zahl hinausgingen, wie schon mehrfach hervorgehoben wurde, überhaupt nicht mehr durch Abstraction gewonnen, sondern stellten sich als völlig inhaltlose Nominaldefinitionen dar, welche sich sogar im Anfang einer nachträglichen Veranschaulichung entzogen. Wollte der Nominalismus hier seine Kritik ernstlich ansetzen, so erwuchs ihm demnach die doppelte Aufgabe, erstens diese eigenartigen, neuen, gänzlich unanschaulichen Formen aus der künstlichen realistischen Hülle herauszuschälen und in ihrer ursprünglichen begrifflichen Natur wiederherzustellen, zweitens aber den so restaurirten Begriffen ihren richtigen Platz in der Erkenntnisstheorie anzuweisen.

Es ist nun auf's höchste zu bedauern, dass die zweite Aufgabe viel früher in Angriff genommen wurde als die erste, dass man anfing, über die nominalistische Natur der Zahlen zu urtheilen, lange bevor man dieselbe wirklich erkannt hatte. Die Vertreter der letzteren Richtung, hauptsächlich Philosophen der empirischen Schule, überließen die Reinigung des Zahlbegriffs so vollständig den Mathematikern, dass diese, wenig gewöhnt sich mit solchen Untersuchungen zu beschäftigen, noch bis auf den heutigen Tag die nothwendige Rehabilitirung desselben nicht im vollen Umfange haben vornehmen können [1]. Die Folge davon ist natürlich eine in den empiristischen Ansichten überall zu Tage tretende Unklarheit, welche sich einerseits in der Vermeidung jeder tieferen Begründung ihrer Anschauungen [2], andrerseits aber auch in ihrer inneren Uneinigkeit zeigt. Denn von Anfang an treten im Nominalismus, allerdings unter der Oberfläche verborgen, aber dem aufmerksamen Beobachter doch deutlich erkennbar, zwei diametral entgegengesetzte Richtungen auf, eine positive, welche auf der Beibehaltung der neuen Begriffe besteht und so, unterstützt durch die Schwäche eines geometrisch geschulten, der Anschauung nicht zu entwöhnenden Geistes, anfänglich regelmäßig in's realistische Lager überführt, und eine negirende, welche ihnen die Existenzberechtigung überhaupt bestreitet, sich aber dadurch ebenfalls dem Realismus wieder nähert, da nun die noch geduldeten Zahlbegriffe in gewisser Weise als Realitäten erscheinen müssen. Die Trennung beider Richtungen wird außer durch diese Inconsequenz noch durch ihr durchweg gleichzeitiges Auftreten erschwert. Und in dieser unerquicklichen Vereinigung

1) Sehr interessant und lehrreich ist z. B. in dieser Beziehung die allmähliche Formalisirung des Irrationalen.

2) Schon auf das Negative hat sich ein solches System niemals ernstlich eingelassen, und das Imaginäre und Complexe wird bei allen mit alleiniger Ausnahme Comte's stillschweigend übergangen.

der heterogensten Elemente, welche die Anhänglichkeit der Mathematiker an die Anschauung zu einem tief verborgenen, aber acuten Gegensatz zuspitzte, liegt die Quelle aller jener unendlichen Unklarheiten, welche so lange über den Zahlbegriff geherrscht haben. Aus ihr flossen z. B. die vielen wunderbaren und unsicheren Ansichten über das Negative, sie erzeugte die unmögliche Benennung der »unmöglichen Größen« für das Imaginäre, sie führte endlich zu jenen eigenartigen »considérations générales«, wie wir sie unten bei Cauchy finden werden.

Wo in der früheren Zeit der Nominalismus sich wirklich in bestimmter Weise geltend macht, ist er zunächst immer negirend, um dann gemildert in einen gewissen Argwohn und schließlich in eine misstrauische Duldung der neuen Begriffe überzugehen. Alle drei Stadien scheinen nach Hankel's und Cantor's Darstellungen [1]) in Bezug auf das Negative die Inder durchlaufen zu haben, während man später jede Berührung der gefährlichen Frage ängstlich zu vermeiden suchte. Cardan ist in seiner Betrachtung des Imaginären, eines viel schwierigeren Problems, schon einen Schritt weiter gekommen. Denn er erkennt, zwar nirgends direct, aber doch überall implicit die formale Berechtigung desselben an. Andrerseits stellt er aber die complexen wie negativen Zahlen als numeros fictos den realen numeris veris gegenüber, und weist einmal sogar ausdrücklich einen möglichen Einwurf gegen die Regel, dass $-(-a) = +a$ gesetzt werden müsse, mit der Erklärung zurück, dass solche Beziehungen, über die unmittelbare Anschauung hinausgehend, lediglich Erzeugnisse des Verstandes beträfen [2]). Seine Ansicht ist daher durchaus nominalistisch und würde ihn schließlich zu einer vollen Anerkennung jener Zahlformen gezwungen haben, wenn nicht ein letzter Rest realistischer Bedenklichkeit ihn von diesem entscheidenden Schritte wieder zurückgehalten hätte. So begnügt er sich jedoch damit, die Möglichkeit ihrer algebraischen

1) Hankel, Geschichte der Mathematik S. 172 ff., und M. Cantor, Geschichte der Mathematik S. 505 ff.

2) Et si dicas, quòd hoc est contra quintam secundi Euclidis, dicò, quod qui hoc dicit non intelligit vere Euclidem, et eius imaginatio est supra intellectum, istud tamen verum est, quod tales aequationes (sc. negative Lösungen) requirunt intellectum subtilissimum et sunt quasi entia rationis. Ars magna Arithmeticae, quaestio 38 (in der oben citirten Ausgabe S. 373).

Verwendung an einigen Beispielen zu zeigen, wobei er freilich noch formale Fehler macht, und die Bemerkung hinzuzufügen, dass er die ganze Frage des Imaginären wegen ihrer Complicirtheit für überflüssig halte[1]), offenbar nur eine bequeme Ausflucht, um der Schwierigkeit zu entgehen.

Hatte aber Cardan dem Banne der realistischen Anschauung sich nicht völlig zu entreißen vermocht, so hat doch sein Zeitgenosse, der deutsche Algebrist Michaël Stifel — und dies ist um so bemerkenswerther, als er für lange Zeit der einzige blieb, der die Algebra thatsächlich ganz formalisirte — den letzten Schritt, die definitive Lösung von der Anschauung, wirklich ausgeführt. Denn, ohne sich freilich auf das ihm noch unbekannte Imaginäre einzulassen, räumt er den numeris fictis, zu welchen er die negativen Zahlen und — ein für jene Zeit ganz außerordentlicher Fortschritt — die Brüche rechnet[2]), die volle Gleichberechtigung mit den numeris veris ein. Ueberhaupt ist er sowohl nach der ganzen Behandlungsweise, wie nach den im ersten Buch seiner Arithmetica integra niedergelegten Grundansichten wirklich als der erste, leider ganz vereinzelte Vertreter des positiven Nominalismus anzusehen; und sein Grundsatz: Permittendum esse Arithmeticis, ut, dum bona ratione et utili consilio aliquid fingunt, uti possint huiusmodi rebus fictis[3]), verräth eine Klarheit der Anschauung, wie sie bedauerlicherweise nach ihm ganz wieder verloren ging. Denn die Beschäftigung mit dem Imaginären, welche ja noch am ehesten geeignet schien den schwach sich regenden Nominalismus zu kräftigen, führte im Gegentheil, wie wir gesehen haben, geradeswegs wieder zu einem Rückfall in den alten Realismus.

So wurde denn die Ausbildung und Förderung der nominalistischen Ansichten von den Mathematikern ganz der Philosophie anheimgestellt, sehr zum Schaden der Sache. Denn wenn auch die diesbezüglichen Theorien, wie sie der Schule des Empirismus

---

1) . . . et hucusque progreditur Arithmeticae subtilitas, cuius hoc extremum ut dixi, adeò est subtile, ut sit inutile: Liber artis magnae XXXVII, in der citirten Ausgabe S. 287.

2) videlicet minutias unitatis habendas esse pro numeris fictis. Arithmetica integra. Norimbergae 1544, liber III, caput V, p. 249.

3) Vgl. Gerhardt: Geschichte der Mathematik in Deutschland. München 1877, S. 74.

entsprangen, viel zur Klärung der erkenntnisstheoretischen Frage überhaupt beigetragen haben, so kann doch auf der andern Seite nicht geleugnet werden, dass sie in der Regel blos auf die Geometrie zugeschnitten waren. Wo sie aber auch auf Arithmetik Anwendung fanden, da brachte die Unkenntniss der in Frage kommenden Begriffe eine nur oberflächliche Behandlung des Gegenstandes mit sich, die sich zudem nie über die ganzen Zahlen hinauswagte. Der Referent, will er nicht dies Kapitel ganz übergehen, steht demnach vor der unangenehmen Aufgabe, die Specialisirungen aus den jeweilig geäußerten allgemeinen Anschauungen zu einem großen Theil selbst heraus zu construiren. In der That scheint dies die einzige Möglichkeit, der ganzen Richtung, die auch hier ihrer großen erkenntnisstheoretischen Bedeutung wegen nicht ganz vernachlässigt werden darf, einigermaßen gerecht zu werden. Da jedoch in diesem Falle die Gefahr unberechtigter Interpretationen die größte Vorsicht empfiehlt, wird man sich mit den allgemeinsten Andeutungen begnügen müssen.

Sogleich Thomas Hobbes, mit dem die Besprechung der erwähnten Tendenzen beginnen muss, hält sich mit Vorliebe an die geometrischen Grundbegriffe, während er über Zahlen sich nur gelegentlich äußert. Wie aber ihm, dem consequentesten aller Nominalisten, die Begriffe überhaupt nichts anderes sind als Namen, lediglich bestimmt als Erkennungs- und Erinnerungszeichen für irgend welche Objecte des Denkens zu dienen[1]), so stellen naturgemäß die geometrischen Begriffe nur Wörter für die Lagenverhältnisse der Körperwelt, die arithmetischen Ausdrücke nur Bezeichnungen für concrete Mengenbeziehungen vor. Die Zahl ist daher nichts anderes als das, was wir Ziffer nennen, das Zeichen für eine discontinuirliche Größe[2]), und die ganze Arithmetik nur ein Cal-

1) A name is a word taken at pleasure to serve for a mark, which may raise in our mind a thought like to some thought we had before, and which being pronounced to others may be to them a sign of what thought the speaker had or had not before in his mind. Hobbes: Elements of Philosophy, first section, part I, chap. II, § 4, in der englischen Gesammtausgabe von Molesworth, London 1839. Band I, S. 16.

2) Im § 15 des oben citirten Kapitels (S. 16) ist die Quantity not continual direct als Number nominalisirt und dasselbe besagt auch wohl die synthetische Definition: Number is unities, welche im zweiten Theil, chap. VII, § 7 (S. 96) gegeben ist.

culiren, ein reasoning mit solchen Symbolen. Da nun die Namengebung durch keinerlei äußere Verhältnisse bestimmt, sondern lediglich Sache des persönlichen Geschmacks ist, kann es nicht Wunder nehmen, wenn man sich für solche viel gebrauchten Namen die bequemsten Formen ausgesucht, d. h. mit Eliminirung aller variabeln empirischen Elemente ihnen eine absolute mathematische Constanz gegeben hat.

Von diesem Standpunkt aus erscheint nun freilich schon die ganze Zahl — und das ist ein Schritt, der weit über den schüchternen Nominalismus früherer Zeiten hinausführt — als ein rein formaler Begriff. Sie muss hier gleich allen anderen reellen Zahlen aufgefasst werden als ein der subjectiven Bequemlichkeit wegen ein- für allemal conventionell fixirtes Schema der wirklichen Ordnungen der Gegenstände und Erscheinungen in Raum und Zeit. Ebenso sind in Folge dessen die arithmetischen Operationen nur anzusehen als ein formales Hülfsmittel der Betrachtung wirklicher Größenbeziehungen, und können auf Gültigkeit auch nur in soweit Anspruch machen, als sie sich in der Natur verwirklicht finden.

Weiter wird man aber hier in der Specialisirung der generellen Bemerkungen nicht vorschreiten dürfen. Denn wenn man auch die negativen Zahlen noch unterbringen könnte[1]), die complexen haben in diesem Systeme keinen Platz, da sie ohne irgend welche Beziehung zur Erfahrung entstanden, aus Nominalbegriffen wieder nominal definirt, gewissermaßen Schemata zweiter Ordnung darstellen würden. Dies müsste aber zu der Ansicht Cardan's führen, dass sie unnöthig und darum aufzugeben wären, und so in den durchaus positiven Grundcharakter der Hobbes'schen Lehre ein verneinendes Element hineintragen. Denn wenn der Arithmetik, wie überhaupt aller Mathematik, die Bedeutung zukommt, dass sie einen exacten Schematismus für die in Wirklichkeit ungenauen Beziehungen der Außenwelt aufstellen soll, so ist alles Unanschauliche aus ihr zu verbannen oder doch wenigstens seines begrifflichen

---

1) In der That erwähnt Hobbes einmal ganz gelegentlich negative Zahlen, nämlich an der Stelle First section, part I, chap. II, § 6 (S. 18): And for the same reason we say truly less than nothing remains, when we substract more from less; for the mind feigns such remains as these for doctrine sake, and desires, as often as is necessary to call the same to memory.

Gewandes entkleidet, auf den Werth einer Hülfsmethodik herabzudrücken.

In noch höherem Grade müsste deshalb Locke zu einem negirenden Resultate gelangen, da er die von Hobbes zur Erklärung der Constanz der mathematischen Begriffe angenommene Willkür der Convention in eine freie Variation, die gewaltsame Beseitigung der Erfahrung in einen Klärungsprocess der begrifflichen Schemata zu Ideen umwandelt. So ist hier die Zahl der von selbst gebotene begriffliche Ausdruck einer wahrgenommenen Mehrheit, die Arithmetik aber die naturgemäße Nachbildung von Mengenbeziehungen im menschlichen Geiste [1]). Die Zahl ist, mit andern Worten, die Idee der Menge, und zwar ist sie als solche »the simplest and most universal idea«, »for Number applies itself to Men, Angels, Actions, Thoughts, every thing, that either doth exist, or can be imagined« [2]). Hiermit ist aber zugleich auch die Folgerung verbunden, dass der Zahlenlehre eben wegen dieser nahen Uebereinstimmung mit den physikalischen Beziehungen auch eine gewisse Allgemeingültigkeit zugesprochen werden müsse. Und dieses nothwendige Resultat führt direct wieder aus dem nominalistischen Gesichtskreis heraus zu einem Realismus a posteriori.

In der That, wenn schon die Hobbes'sche Lehre von der Incongruenz und Parallelität der mathematischen und empirischen Begriffe im großen und ganzen eine Umkehrung der analogen Theorie Leibnizens ist — denn diesem sind die mathematischen, jenem die Erfahrungsbegriffe das Primäre — so nähert sich Locke andererseits bedenklich der Cartesianischen Anschauung, nur dass er die idealen Vorbilder desselben durch Nachbilder, seine »Ideen« ersetzt. Hier zeigt sich also wieder die schon früher beobachtete Erscheinung, wie nahe der positive Nominalismus dem Realismus verwandt ist. Da Locke aber andererseits gezwungen wäre, den negativen und imaginären Zahlen gegenüber, weil sie ja nicht anschaulich sind, einen negirenden Standpunkt einzunehmen [3]), so krankt seine Theorie,

1) Vgl. Locke, An Essay concerning human understanding: Book II, chap. VI, Of Number.

2) A. a. O. § 1.

3) Er selbst beschränkt sich in dem citirten Kapitel vorsichtig auf die ganze Zahl.

abgesehen von der unklaren Vermengung empirischer und rationalistischer Elemente im Begriff der »Idee«, auch an dem Gegensatz positiver und verneinender Grundanschauungen. Und weil dieser Widerstreit in der That ein unversöhnlicher ist, so gab es, wollte man die nominalistischen Ansichten nicht ganz aufgeben, auf dem Boden des Empirismus nur zwei Auswege. Entweder man ließ den positiven Standpunkt ganz fallen und negirte überhaupt jede Mathematik, oder aber man kehrte zu den positiveren Anschauungen von Hobbes zurück.

Den ersten, zweifellos bequemeren, jedoch sehr bedenklichen Weg schlug Berkeley ein. Aber indem er die Existenz der Begriffe, wie die der reinen Zeit- und Raumanschauung überhaupt leugnet, kann er selbstverständlich den Zahlbegriff nur in seiner allerersten psychologischen Form, d. h. als Zahlvorstellung fassen. In der That sind denn auch die Zahlen bei ihm lediglich ein subjectives Hülfsmittel der Wahrnehmung, eine Form der Vorstellung[1]).

Hierdurch ist aber der Zahlenlehre eine so schwankende, unzuverlässige Grundlage gegeben, dass man ihr jede erkenntnisstheoretische Verwendung absprechen muss. Denn selbst der psychologische Process des Zählens setzt schon eine Reihe von Apperceptionsacten, also vor allen Dingen den von Berkeley geleugneten[2]) Begriff der Einheit voraus. Nun sucht er zwar als Ersatz dafür die Berechtigung zu Zahlenverknüpfungen in der empirisch gegebenen Constanz der äußeren Beziehungen, auf welche sie angewandt werden[3]). Da es jedoch offenkundig ist, dass die Arithmetik als con-

1) That Number is entirely the Creature of the Mind, even thô the other Qualities be allow'd to Exist without, will be evident to whoever considers, that the same thing beares a different Denomination of Number, as the Mind views it with different respects, Thus, the same Extension is One, or Three, or Sixty Six, according as the Mind considers it with reference to a Yard, a Foot, or an Inch. Number is so visibly relative, and dependent on Mans Understanding, that it is strange to think how any one shou'd give it an absolute Existence without the Mind. George Berkeley; A Treatise concerning the Principles of Human Knowledge, Part I, Dublin 1710 S. 53, Part I, § 12.

2) Unity, I know, some will have to be a simple or incompounded Idea accompanying all other Ideas into the Mind. That I have any such Idea answering the Word »Unity«, I do not find and if I had methinks I could not miss finding it.. ebenda § 13 S. 54.

3) A. a. O. § 119 ff. = S. 169 ff.

stantes Beziehungselement nur den Begriff der Einheit, diesen aber auch nothwendig braucht, während ihr die etwaige Unveränderlichkeit irgend welcher äußeren Verhältnisse vollständig gleichgültig ist, so stellt sich diese Ansicht in einen flagranten Widerspruch mit der Mathematik selbst. Zu einem ähnlichen Resultat muss aber jede derartige Negation führen. Sollte daher nicht ein ebenso unfruchtbarer wie unberechtigter Skepticismus der Resignation [1]) der Erfolg dieser Bestrebungen sein, so blieb dem Empirismus nichts weiter übrig, als den zweiten oben erwähnten Ausweg zu beschreiten, d. h. wieder zu den positiveren Anschauungen zurückzukehren.

Hier ergriff nun Hume die Initiative, indem er den von Berkeley so gröblich ignorirten Begriff der Einheit wieder zur Grundlage der Arithmetik machte [2]), freilich nicht in der abstracten Form, wie Hobbes. Denn er hat noch etwas von dem Bestreben Berkeley's geerbt, sich um jeden Preis, sollte dies auch zu offenbaren Widersprüchen mit den Thatsachen des Bewusstseins führen, an die empirisch gegebenen Grundlagen der Erkenntniss anzuklammern. Und wenn er auch nicht jedes einzelne mathematische Urtheil, wie jener, auf die Außenwelt bezog, sondern die abstracte Natur eines solchen wohl erkannt hatte, so glaubte er doch die Grundbegriffe nicht von der Anschauung lösen zu dürfen. Darum versteht er die wahre Natur des Begriffes der Einheit ebenso wenig, wie Berkeley. Denn in der Thatsache, dass man jedes Object, ja jede beliebige Menge als Einheit betrachten kann, sieht er allein einen Missbrauch dieses Begriffes. Derartige Einheiten sind ihm gleich den Zahlen rein nominalistische Erfindungen [3]). Die wahre, d. h. einzig reale Ein-

---

1) In der That versteigt sich schon Berkeley (auf S. 170 des citirten Werkes) zu dem Urtheil, die Ausbildung der abstracten Mathematik führe zu »most trifling Numerical Speculations, which in practice are of no use, but serve only for Amusement« (sic).

2) 'T is evident, that existence in itself belongs only to unity and is never applicable to number. Hume, Treatise on human nature I, vol. I, part II, sect. II in der Ausgabe von Green und Grose, London 1874, I S. 337.

3) That term of unity is merely a fictitious Denomination, which the mind may apply to any quantity of objects it collects together: nor can such a unity any more exist alone than number can, as being in reality a true number (weil nämlich solche Einheiten physikalisch noch theilbar sind). Ebenda S. 338.

heit kann nur etwas völlig untheilbares sein[1]) und dieses letzte Element der Beziehung sieht er in dem physikalischen, »mit Farbe und Solidität begabten Punkt«[2]). Die Bildung der Zahlen erfolgt dann nicht mehr durch einen Abstractionsprocess — das Resultat dieses, bei Hume freilich nur rudimentären Processes ist ja eben der physikalische Punkt — sondern durch die Fiction einer wiederholten Setzung desselben.

Hiermit ist nun zwar die synthetische Natur der Zahlenbildung klarer erkannt, als dies bei Locke oder Berkeley der Fall war, indessen blieb die abstracte Zahl doch immer noch an dem sinnlichen Einheitspunkt haften. Und da es ja jedem freisteht, denselben mit anderer Farbe und anderer Solidität zu versehen, so entbehrt diese Einheit durchaus der Constanz, die ihr nun einmal nicht abzuphilosophiren ist. So lange die Zahl nichts weiter bedeuten kann, als im günstigsten Falle eine Reihe vorgestellter Punkte, so lange bleibt unerklärt, wie man überhaupt etwas anderes zählen kann, als solche. Wie man sich auch zu dieser Frage stellen mag, die unleugbar abstracte Natur der Zahl fordert unbedingt ihre völlige Lösung von der sinnlichen Anschauung und ihre Wiederherstellung als reinen Begriff.

Eine solche Scheidung konnte nun wieder entweder zu einer dualistischen positiven oder einer monistischen, negirenden Ansicht führen. Während aber für die letztere eigentlich nur ein einziger consequenter Vertreter, Dühring, existirt, wurde die erstere Gegenstand einer umfangreichen Bearbeitung, die von dem in französischem Boden wurzelnden Positivismus ausging und sich dann mit diesem hauptsächlich nach England verbreitete, wo sie in John Stuart Mill ihren Hauptvertreter fand.

Der Begründer dieser ganzen Richtung, Auguste Comte, gibt nun freilich noch keine sehr ausgearbeiteten oder vertieften Gedanken über die Natur der mathematischen Begriffe, obwohl er ihnen fast den ganzen ersten Band seiner Philosophie positive gewidmet hat. Ihm ist die Mathematik zunächst die Wissenschaft

---

1) But the unity, which can exist alone, and whose existence is necessary to that of all numbers, is of another kind, and must be perfectly indivisible, and incapable of being resolved into any lesser unity. Ebenda S. 338.

2) Näheres im Originalwerk I, part II.

der anschaulichen Größen, bestimmt dieselben auszumessen, aber nicht auf directem Wege — denn dazu bedarf es keiner Wissenschaft — sondern durch indirecte Methoden. Deshalb fasst er ihre Aufgabe in die Worte zusammen: »déterminer les grandeurs les unes par les autres, d'après les relations précises qui existent entre elles«[1]. Eine jede mathematische Untersuchung zerfällt demnach in zwei Theile, einen concreten, der die in Wirklichkeit uns gegebenen Größenverhältnisse aufsucht und in die Form von Gleichungen bringt, und einen abstracten, welcher, ohne sich weiter um die concreten Größen zu kümmern, diese Gleichungen nach allgemeinen Methoden auflöst[2]. Die concrete Mathematik kann ihre Aufgabe, die Auffindung der Gleichungen in der Erscheinungswelt, der équations des phénomènes, wieder vom Gesichtspunkt der Ruhe oder Bewegung aus behandeln und theilt sich so in Geometrie und Mechanik; die abstracte Mathematik hingegen, auch wohl als calcul bezeichnet, hat es nur mit den fertigen Formeln zu thun.

Das Substrat der rein mathematischen Analyse, die Zahlen, sind demnach keine anschaulichen Größen mehr, denn diese gehören in die mathématique concrète, sondern allein Begriffe, und zwar die allgemeinsten, abstractesten und einfachsten Begriffe die überhaupt möglich sind[3]. In Folge der abstracten Natur der Zahlen darf man sich denn auch nicht wundern, wenn man unter ihnen Ausdrücke findet, welche ohne eigentliche reale Bedeutung sind, wie das Negative und Imaginäre. Man darf diesen Begriffen eben überhaupt keinen concreten Sinn zuschreiben wollen, sondern muss sie allein auffassen als das, was sie in Wahrheit sind: abstracte, symbolische Ideen, welche der Allgemeinheit der Methode zu Liebe erfunden wurden[4].

Mit diesen Bemerkungen, die er in ziemlich ausgedehnter Darstellung vorträgt, meint Comte die ganze Frage ebenso einfach wie elegant erledigen zu können; allein man ersieht beinahe

---

1) Cours de philosophie positive I, 3; in der dritten Auflage, Paris 1869, S. 98.

2) Vgl. für dies und das Folgende die dritte Lection: Considérations philosophiques sur l'ensemble de la science mathématique (S. 89 ff.).

3) Les idées dont elle s'occupe sont les plus universelles, les plus abstraites et les plus simples que nous puissions réellement concevoir. A. a. O. S. 109.

4) A. a. O. Leçon 5, S. 159 ff.

aus jedem Satze, wie sehr sich die gesammte Theorie an der Oberfläche hält. Zunächst ist die Scheidung von concreter und abstracter Mathematik in dieser Form durchaus unzutreffend; denn es dürfte wohl nur wenig Mathematiker geben, die in der Formulirung der concreten Probleme wirklich ein Arbeitsfeld ihrer Wissenschaft sähen. Es gehört allerdings immer schon ein geschultes Auge dazu, um im gegebenen Falle die fraglichen Größenbeziehungen überhaupt herauszufinden; allein solche Aufstellungen sind doch von der Fachliteratur immer nur als Anwendungen der durchaus unconcreten Mathematik aufgefasst worden, und es dürfte der Autorität eines Philosophen schwer werden, sie von der Richtigkeit des Gegentheils zu überzeugen. Zudem sind die beiden Disciplinen, welche Comte als concrete bezeichnet, die Geometrie und Mechanik, in Wahrheit nichts weniger als concret; die reinen geometrischen und mechanischen Begriffe sind in der Natur keineswegs verwirklicht. Es gibt in der Außenwelt weder vollkommene Gerade, noch absolut starre Körper, weder Ellipsen, noch elliptische Bewegungen, und die Beispiele, die Comte zur Illustration des Gesagten anführt, der freie Fall und die Ausmessung eines Körpers, sind beide unzutreffend; denn die äußere Erfahrung kennt eine wirklich gleichförmige Beschleunigung so wenig, wie eine rein geometrische Figur. Geometrie und Mechanik sind eben nicht, wie Comte sie auffasst, Naturwissenschaften [1]), wenn auch die allgemeinsten, sondern selbst schon ganz abstracten Charakters, da sie beide mit idealen, in Wirklichkeit immer nur angenähert realisirbaren Verhältnissen sich beschäftigen; und die exacten Beziehungen, welche die oben mitgetheilte Definition zwischen den anschaulichen Größen voraussetzt, existiren in Wahrheit nirgends.

Was nun vollends die Auffassung der Zahlen betrifft, so kann man diese wohl kaum anders als oberflächlich bezeichnen. Comte versichert uns zwar, dass sie die allgemeinsten, abstractesten und einfachsten Ideen wären, und stellt sie als solche den concreten Größen gegenüber; allein, um das zu erkennen, bedarf es wahrlich keiner philosophie positive. Es ist zudem ganz undurchsichtig, was

1) Ainsi la géométrie et la mécanique constituent, par elles-mêmes, les deux sciences naturelles fondamentales. Leçon 3, S. 106.

er sich unter dieser Combination von Worten eigentlich Positives gedacht hat. Denn an der citirten Stelle, wie bei der Behandlung der negativen und imaginären Zahlen[1]), wo ihm ebenfalls Gelegenheit gegeben wäre, sich über das Thema auszusprechen, weicht er der Frage mit der Erklärung aus, dass die gegebene Darstellung einfach und klar sei, und dass alle Dunkelheiten anderer Auffassungen nur durch weitergehende metaphysische Speculationen bedingt sein könnten. Man darf aber offenbar von einer systematischen Darstellung, wie sie der cours de philosophie positive bezweckt, verlangen, dass sie bei einem so grundlegenden Begriff wie dem der Zahl nicht blos behauptet, er sei abstract, sondern zum mindesten auch angibt, wovon man bei seiner Bildung eigentlich zu abstrahiren hat, wie er überhaupt entsteht.

Eine Beantwortung dieser Frage, auf die doch schließlich alles ankommt, vermissen wir aber bei Comte durchaus; versucht ist sie erst von John Stuart Mill, der, von ähnlichen Anschauungen ausgehend wie jener, theilweise direct unter seinem Einfluss, vielfach aber auch im Gegensatz zu ihm, in seinem großen systematischen Werke, der Logik, sich auch über den Zahlbegriff eingehender ausspricht, als alle seine Vorgänger im Nominalismus[2]). Zunächst hat er die von Comte verkannte abstracte Natur aller mathematischen Begriffe klar zum Ausdruck gebracht und den von Hobbes eingeführten, von Berkeley geleugneten und von Comte in falscher Weise verschobenen Dualismus der ungenauen Wirklichkeit und der exacten, aber eben darum hypothetischen Mathematik wiederhergestellt[3]). Wie deshalb die geometrischen und mechanischen Deductionen nur scheinbar exacte Erkenntnisse liefern, weil sie ja auf ganz irreale Verhältnisse sich beziehen, so geben auch alle arithmetischen Operationen keine absoluten Wahrheiten; denn sie arbeiten alle mit der Voraussetzung vollständig gleicher Einheiten.

---

1) Leçon 5, S. 159 ff.

2) John Stuart Mill, A System of Logic Ratiocinative and Inductive, zuerst 1843 in London erschienen. Für uns kommen besonders in Betracht: Book I, chap. VIII; II, chap. V und VI; und III chap. XXIV.

3) Conformably to this is said, that the subject-matter of mathematics, and of every other demonstrative science, is not things as they really exist, but abstractions of the mind. A. a. O. Book I, chap. VIII, § 6.

Diese aber sind in der Erfahrung nirgends gegeben, zwei Größen sind niemals genau einander gleich[1]).

So ist Mill also im Wesentlichen zu den Anschauungen von Hobbes zurückgekehrt. Der Unterschied beider besteht nur darin, dass Hobbes, ähnlich wie Leibniz, einen vollständigen Parallelismus von mathematischen und empirischen Begriffen annahm, Mill aber diesen zu einem immanenten Monismus zusammenschmilzt. Während also bei Hobbes eine selbständige Existenz beider Begriffsklassen wohl denkbar war, aber andererseits doch wieder nicht recht in den Empirismus hinein passte, sind sie bei Mill unlöslich mit einander verbunden. Der Parallelismus, den Hobbes seinem System zu Liebe künstlich festsetzen musste, wird dadurch unnöthig. Denn bei Mill sind Erfahrungsthatsache und mathematische Form gewissermaßen nur zwei Seiten eines und desselben Dinges. Die Größenbeziehung ist die Vorstellung der Zahl, die Zahl der begriffliche Ausdruck der Größenbeziehung[2]). Wie deshalb die Geometrie die Lehre von den räumlichen Eigenschaften der Körper sein soll, so ist die Arithmetik die Wissenschaft von den Beziehungen der Größen, d. h. das begriffliche Schema für die in Wahrheit incommensurablen Verhältnisse der Erfahrung.

Die Grundlage der Arithmetik bilden ferner einerseits die Zahlenaxiome, welche er von den neun *κοιναῖς ἐννοίαις* Euklid's auf zwei reduciren will, nämlich: »Dinge, welche einem und demselben Dinge gleich sind, sind einander selbst gleich« und »Gleiches zu Gleichem addirt gibt gleiche Summen«[3]), und andererseits die Definitionen der verschiedenen Zahlen. Da diese rein wissenschaftliche, von den erkenntnisstheoretischen Fragen mehr absehende Behandlung dieses Gegenstandes uns hier am meisten interessiren muss, mag die betreffende Stelle hier wörtlich folgen[4]):

»Wie andere sogenannte Definitionen, so sind dieselben aus

---

1) Vgl. Book II, chap. VI, § 3.

2) All numbers must be numbers of something: they are no such things as numbers in the abstract. Ten must be ten bodies, or ten sounds, or ten beatings of the pulse. But though numbers must be numbers of something, they may be numbers of anything. Book II, chap. VI, § 2.

3) Vgl. Book III, chap. XXIV, § 5.

4) Ich entnehme diese Stelle der Bequemlichkeit wegen der deutschen Uebersetzung von Schiel (vierte Auflage, Braunschweig 1887) in demselben Paragraphen.

zwei Dingen zusammengesetzt, aus der Erklärung eines Namens und aus der Behauptung einer Thatsache, wovon die erste allein ein erstes Princip oder eine Prämisse einer Wissenschaft bilden kann. Die in der Definition einer Zahl behauptete Thatsache ist eine physikalische Thatsache. Eine jede der Zahlen eins, zwei, drei, vier u. s. w. bezeichnet physikalische Phänomene und mitbezeichnet (connotes) eine physikalische Eigenschaft dieses Phänomens. Zwei z. B. bezeichnet alle Paare von Dingen, zwölf alle Dutzende von Dingen, indem es mitbezeichnet, was sie zu Paaren, Dutzenden macht; und das, was sie dazu macht, ist etwas Physikalisches, da es nicht zu leugnen ist, dass zwei Aepfel von drei Aepfeln, zwei Pferde von einem Pferd physikalisch verschieden sind, dass sie ein davon verschiedenes sichtbares und fühlbares Phänomen (a different visible and tangible phenomenon) sind. Ich unternehme nicht zu sagen, welches der Unterschied sei; es ist hinreichend, dass ein Unterschied besteht, von welchem die Sinne Kenntniss nehmen können. Und obgleich hundert und zwei Pferde nicht so leicht von hundert und drei unterschieden werden, als zwei Pferde von einem Pferd (im Original steht: as two horses are from three), obgleich in den meisten Fällen die Sinne keinen Unterschied bemerken, so können sie doch in die Lage gebracht werden, dass ein Unterschied wahrnehmbar wird, weil wir sie sonst nie von einander unterschieden und ihnen verschiedene Namen gegeben hätten« (or else we should never have distinguished them, and given them different names, ein interessanter Cirkelschluss).

Wir ersehen hieraus, dass sich auch Mill, wie die meisten seiner Vorgänger auf den Begriff der ganzen Zahl, oder vielmehr den der Anzahl beschränkt und bei diesem noch dazu die psychologische Thätigkeit ganz vernachlässigt. Von einer Zahl zwei, drei oder vier als solcher zu sprechen, ist man daher nach ihm nicht berechtigt, sondern nur von zwei »Steinen, Pferden, Zollen, Pfunden oder Gewichten« u. s. w.; die Bezeichnung: zwei Kiesel aber sagt aus, dass man, um das Aggregat zusammenzusetzen, einen Kiesel zu dem anderen hinzufügen muss. Durch analoge Additionen concreter Einheiten kann man ferner in mannigfacher Weise die verschiedensten Mengen erzeugen; dieselben Mengen sind aber andererseits auch durch irgendwelche Subtractionen zu erhalten, kurz es gibt unendlich viele physikalische Erzeugungsweisen einer jeden Zahl. Das anscheinend Wunderbare dieser Mannigfaltigkeit erklärt sich nun leicht aus dem exacten Charakter der Arithmetik, der es gestattet, alle diese physikalisch verschiedenen Bildungsweisen doch a posteriori deductiv aus einer einzigen abzuleiten; und als solche Grunderzeugungsweise wählt man einerseits die Addition von Einheiten und andererseits, aus praktischen Gründen, die Darstellung durch Potenzen von zehn.

Diese Ausführungen wird man nun im allgemeinen zugeben können, wenigstens vom historischen Standpunkt aus; entwickelt doch noch heut jeder Dorfschulmeister die Zahlengesetze ebenso, nur dass er etwa die Mill'schen Kiesel durch die wegen ihrer Theilbarkeit bevorzugten Aepfel ersetzt, aber er wird dabei von pädagogischen und nicht, wie Mill das für sich in Anspruch nimmt, von logischen Gesichtspunkten geleitet. Es wird sich niemand der Anerkennung verschließen können, dass er selbst in analoger Weise, wie es hier ausgeführt ist, sich sein arithmetisches Wissen erworben hat. Indessen erhellt auch gerade aus dieser Bemerkung, dass Michaëlis Recht hat, wenn er behauptet[1]), die ganze Mill'sche Lehre gäbe keine Discussion der eigentlichen mathematischen Begriffe, sondern eine Darstellung, wie erfahrungsmäßig mathematische Kenntnisse erworben werden.

An der Zurückführung der begrifflichen Elemente in der Zahl auf die Erfahrung muss aber der ganze Nominalismus, in der empirischen Form wie wir ihn bisher kennen gelernt haben, scheitern. Denn die oben erwähnte deductive Beziehung der einzelnen Erzeugungsweisen einer Zahl zu einander kann eben wegen ihres deductiven Charakters nicht direct in der Anschauung begründet werden. Daher sieht sich Mill auch genöthigt, die eigentliche Ableitung aus der Erfahrung auf die beiden angeführten Grundsätze zu beschränken, auf welche die ganze Deduction erst basirt ist. Diese Axiome nimmt er nun allerdings vollständig für seine empiristische Erkenntnisslehre in Anspruch. Sie sind nach ihm lediglich inductive Wahrheiten und verdanken ihre Entstehung sogar nur einer gewöhnlichen »inductio per enumerationem simplicem«.

---

1) in seiner Schrift: Stuart Mill's Zahlbegriff. Programmabhandlung. Berlin 1888 S. 7.

Daher stehen sie durchaus auf gleicher Stufe mit den geometrischen und mechanischen Axiomen, vor denen sie nur das voraus haben, dass sie als Naturgesetze höchster Ordnung aufgefasst werden können, während sie die Unabhängigkeit vom Causalprincip mit ihnen theilen [1]).

Diese vom erkenntnisstheoretischen Interesse dictirte Doctrin stellt sich aber in offenkundigen Widerspruch mit dem logischen Bewusstsein. Denn wie sollen Axiome von unmittelbarer Evidenz ihre einzige Rechtfertigung in dem Umstand suchen, dass sie glücklicherweise noch niemals falsch befunden sind? Oder wie sollen Grundsätze, deren Abänderung eine logische Unmöglichkeit involvirt, deren Aufgeben einfach undenkbar ist, durch eine zufällige empirische Richtigkeit erklärt werden?

Die ganze schiefe Auffassung der Sachlage hat ihren Grund lediglich in dem Umstand, dass sowohl die psychologische wie die logische Seite der Frage dem erkenntnisstheoretischen Interesse aufgeopfert wird. So lange sich Mill auf die Ableitung der Entstehung mathematischer Begriffe und Operationen beschränkt, so lange wird man ihm seine Zustimmung nicht versagen dürfen. Denn er kann sich hier auf die Erfahrung berufen und nachweisen, dass wirklich die Zahlbegriffe durch Abstraction gebildet, die Rechnungsregeln durch Induction gefunden wurden. Nun begnügt er sich aber damit nicht, sondern gibt die historische Entwickelung für die genetische, die Baumaterialien für das Haus aus. Auf diese Weise gelangt er zu Resultaten, die den wirklichen Verhältnissen nicht entsprechen, um so mehr als er auch noch die mathematische Abstraction und Induction ohne weiteres mit den entsprechenden physikalischen Methoden identificirt, mit dem einzigen Unterschiede, dass sie des Causalgesetzes entbehren. Wie aber soll — muss man hier wieder fragen — der Begriff der Gleichheit aus der Erfahrung gewonnen werden können, wenn in dieser überhaupt nirgends zwei gleiche Größen vorkommen, wie der der Zahl zwei, wenn es thatsächlich immer nur zwei Pferde, zwei Kiesel u. s. w. gibt? [2]) Oder wie ist es denkbar, dass ein inductiv gefundener Grundsatz denk-

---

1) Vgl. zu den obenstehenden Ausführungen Book III, chap. XXV, § 5.
2) Wir müssen hier auf die Ausführungen in Kapitel II, 3 verweisen.

nothwendig erscheint, wenn die einzige Gewähr für seine Richtigkeit, die Erfahrung, durch irgend einen unvorhergesehenen Fall jeden Augenblick umgestoßen werden kann?

Sehen wir so, wie die Vernachlässigung der subjectiven Elemente des Erkenntnissprocesses zu Anschauungen führt, welche der Mathematiker unmöglich gelten lassen kann, weil sie der Natur der Arithmetik direct widersprechen müssen, so bleibt auch andererseits in Mill's System kein Platz für die übrigen Zahlbegriffe. Denn, da diese sicherlich nicht aus der Erfahrung abstrahirt waren, da es negative Kiesel so wenig gab, wie imaginäre Pferde, so blieb, wollte man bei solchen nominalistischen Ansichten überhaupt stehen bleiben, nichts weiter übrig, als ihre begriffliche Existenz zu leugnen. Mill selbst, welcher gleich seinen englischen Vorgängern sich an die ganze Zahl hält, vermied die Erledigung dieser Frage völlig und überließ sie Andern.

Nun ist es aber interessant zu verfolgen, wie wenig man sich mit der Schwierigkeit ihrer Existenz abfinden konnte. In das empirisch-nominalistische System passten sie nicht hinein, ihre Lebensfähigkeit stand aber andererseits ganz außer Frage; so kam man denn auf den vermittelnden Ausweg, allein ihre begriffliche Natur zu erschüttern, sie aber dafür noch als inhaltsleere Symbole bestehen zu lassen. Hiermit ist offenbar nur ein Wort durch ein anderes, viel dunkleres ersetzt. Denn Symbole müssen sich doch immer auf etwas Festes beziehen, sie sind selbst schematische Zeichen, vertreten aber stets ein reales Object des Denkens. Bei den imaginären Symbolen fehlte hingegen ein solcher fester Hintergrund vollkommen.

Um den Widerspruch, dass trotzdem reelle Resultate aus jenen Schemen gezogen werden könnten, zu beseitigen, war man dann gezwungen, sich immer weiter in Worterklärungen zu verlieren, aus denen es schließlich keinen Ausweg mehr gab. Zu welchen sinnentstellenden und hohlen Auseinandersetzungen dieser zweideutige Standpunkt führen kann, davon mögen z. B. die Worte Zeugniss ablegen, mit welchen eine Autorität wie Cauchy seine »considérations générales sur les expressions imaginaires« eröffnet[1]: »En

[1] Cours d'analyse de l'école royale polytechnique. I^re partie. Analyse algébrique, Paris 1821, Chapitre VII, § 1 (p. 173).

analyse on appelle expression symbolique ou symbole toute combinaison de signes algébriques, qui ne signifie rien par elle-même, ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir. On nomme de même équations symboliques toutes celles qui, prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, sont inexactes ou n'ont pas de sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts, en modifiant et en altérant selon des règles fixes ou ces équations elles-mêmes ou les symboles qu'elles renferment. L'emploi des expressions ou équations symboliques est souvent un moyen de simplifier les calculs et d'écrire sous une forme abrégée des résultats assez compliqués en apparence... Parmi les expressions ou équations symboliques dont la considération est de quelque importance en analyse, on doit surtout distinguer celles que l'on a nommées imaginaires«. Hankel hat diese »considérations générales«, welche Ausdrücke, »die an sich nichts bezeichnen«, oder doch »etwas anderes bezeichnen, als sie naturgemäß bezeichnen sollten«, in einer nicht anders als mystisch zu nennenden Form für die realen Größen verwerthen, nicht mit Unrecht als ein unerhörtes Spiel mit Worten charakterisirt[1]. Trotzdem muss der Fortschritt zu einer solchen mystischen Symbolik den Zeitgenossen als etwas Außerordentliches erschienen sein. Denn noch 1868 schreibt Cauchy's Biograph Valson darüber[2] »Parmi les plus belles recherches de Cauchy, il faut compter aussi celles, qu'il entreprit au sujet de la théorie des quantités imaginaires. Cette théorie est la plus extraordinaire et en même temps la plus féconde de l'analyse. Ici le savant n'opère plus, ni sur des nombres, ni sur des quantités géométriques, ni même sur des quantités algébriques de valeur arbitraire, mais uniquement sur des signes et de purs symboles. Les expressions imaginaires en effet, auxquelles on donne quelquefois improprement le nom de quantités, ne sont autre chose que des symboles abstraits, n'ayant absolument aucun sens par eux-mêmes; et cependant, en les combinant suivant des lois déterminées, en les soumettant à une sorte d'analyse mécanique, on déduit, pour les quantités réelles elles-mêmes, des

1) Hankel, Complexe Zahlen. S. 14.

2) La vie et les travaux du Baron Cauchy par C. A. Valson, Paris 1868, Tome I, p. 127, 128.

résultats d'une grande importance, qu'on chercherait vainement à démontrer de toute autre manière.«

Die letzte Stelle ist hier ausführlich mitgetheilt, weil aus ihr nicht etwa blos der bedingungslos begeisterte Biograph spricht, sondern weil sie im allgemeinen auch noch auf die Anschauungen der heutigen französischen Mathematiker passt, nur dass diese noch die geometrische Anschauung zu Hülfe rufen. Wie wenig aber die angeführten considérations générales ihren Autor sogar über den Betrug hinwegzutäuschen vermochten, dass hier sinnlose Symbole schlankweg als reale Rechnungsgrößen behandelt werden, hat er schließlich selbst nicht mehr verhehlen können[1]). Aber die neue Theorie der algebraischen Aequivalenzen, die er statt dessen vorschlug, und die des weiteren von Grunert ausgeführt ist[2]), hilft dadurch, dass sie $\sqrt{-1}$ als eine Art reeller Veränderlichen betrachtet, über die ersten Grundbedenken hinweg, verlegt sie aber nur in einen späteren Zeitpunkt. Denn die Anwendung derselben auf concrete Probleme bleibt schließlich ebenso mystisch wie die frühere. Darum entschloss sich Cauchy sogar schließlich dazu, sich ganz auf die geometrische Veranschaulichung zu stützen[3]). So gelangte er aus

1) Mais il est évident que la théorie des imaginaires deviendrait beaucoup plus claire encore et beaucoup plus facile à saisir, qu'elle pourrait être mise à la portée de toutes les intelligences, si l'on parvenait à réduire les expressions imaginaires et la lettre i elle-même, à n'être plus que des quantités réelles. Die Stelle steht am Anfang der Abhandlung, welche die neue Theorie enthält: Mémoire sur une nouvelle théorie des imaginaires, et sur les racines symboliques des équations et des équivalences. Comptes rendus Tome XXIV (1847) S. 1120, auch abgedruckt in den Nouveaux Exercices d'analyse et de physique mathématique IV (1847) p. 87 als Mémoire sur la théorie des équivalences algébriques substituée à la théorie des imaginaires.

2) Theorie der Aequivalenzen: Grunert's Archiv für Mathematik und Physik XLIV, 1865, S. 443—477 und: Allgemeine Theorie der Wurzeln der Aequivalenzen, ebenda XLV, 1866, S. 454—492.

3) Dans mon analyse algébrique, publiée en 1821, je m'étais contenté de faire voir qu'on peut rendre rigoureuse la théorie des expressions imaginaires en considérant ces expressions et ces équations comme symboliques; mais, aprés de nouvelles et mûres réflexions, le meilleur partie à prendre me paraît être d'abandonner entièrement l'usage du signe $\sqrt{-1}$ et de remplacer la théorie des expressions imaginaires par la théorie des quantités que j'appellerai géométriques. Diese Stelle ist dem Anfang der Abhandlung entnommen: Mémoire sur la théorie des quantités géométriques et sur leurs applications. Nouveaux exercices d'analyse et de physique mathématique. IV, p. 157.

dem krassesten Nominalismus allmählich wieder in den alten Realismus zurück, gefolgt von den meisten Mathematikern aus dem Anfang des Jahrhunderts. Und dementsprechend finden wir in dieser Zeit einen ausgesprochenen Dualismus. Die reine Symboltheorie gilt begrifflich als unanfechtbar. Da sie aber doch zu wunderbar erschien, und sich namentlich ihre Anwendung auf reelle Verhältnisse als eine ganz mystische Beziehung darstellen musste, so hielt man sich lieber an die concretere geometrische Anschauung und glaubte die eigentliche Schwierigkeit dadurch heben zu können, dass man sich nicht um sie kümmerte[1]).

Um ein für alle Mal den Standpunkt aller derartigen Darstellungen zu charakterisiren, sei hier noch auf die ziemlich ruhige und sachliche Auffassung verwiesen, wie sie sich in Klügel's Wörterbuch der Mathematik findet[2]). Der Anfang des betreffenden Artikels lautet hier: »Unmögliche oder eingebildete oder imaginäre Größen nennt man alle solche Ausdrücke, für welche sich keine wirkliche Größe als Werth angeben lässt, z. B. arc sin x, arc cos x für $x > 1$. Die Werthe solcher Größen, wenn sie den Regeln des Algorithmus unterworfen werden, existiren also blos symbolisch und sind nur eingebildet oder imaginär. Dessenungeachtet sind solche Größen in der Mathematik von großem Nutzen und werden oft absichtlich zur Abkürzung der Rechnung eingeführt, wo sie sich aber im Laufe der Rechnung wieder aufheben und das Resultat real und möglich bleibt. Uebrigens aber rechnet man in der Mathematik mit imaginären Größen, wie mit wirklichen.« Hier ist zwar das Anklammern an die geometrische Veranschaulichung vermieden; aber die beiden Auffassungen, die nominalistische Symbol- und die realistische Größentheorie, gehen doch nebeneinander her. Und wenn der Lexikograph auch im Sinne der ersten Anschauung die Forderung stellt, dass alles Imaginäre im Resultat wieder verschwinden müsse, so hält doch weder die praktische Mathematik, noch er selbst diese Regel ein. Denn in den späteren Theilen jenes Artikels wird

---

1) Mit überraschender Offenheit ist dies noch eingestanden im Anfang der Théorie élémentaire des quantités complexes von Hoüel (Paris 1867), welche in Frankreich sehr geschätzt ist.

2) Mathematisches Wörterbuch von Klügel, Mollweide, Grunert, fünfter Theil (Leipzig 1831), Artikel: Unmögliche Größen.

fortwährend mit complexen Zahlen gerechnet, ohne dass diese aus den Endformeln herausfallen. Wäre aber selbst das der Fall, so bleibt doch immer noch unerklärt, wie man denn eigentlich dazu kommt, die gewöhnlichen Rechnungsregeln auf das Imaginäre anzuwenden. Die Motivirung: »Uebrigens aber rechnet man in der Mathematik mit imaginären Größen, wie mit wirklichen« lässt die ganze Benutzung des Complexen als ein unermessliches, aber unverdientes Glück erscheinen, das dem Mathematiker vergönnt, selbst aus solchen sinnlosen Symbolen eine Fülle der schönsten Resultate zu ziehen.

Hier stand der Nominalismus vor einem erkenntnisstheoretischen Räthsel. Dass Symbole, von denen man nichts weiter wusste, als dass sie an und für sich gar keine Bedeutung haben, wenn man sie nur richtig behandelte, mit einem Mal eine der ergiebigsten Quellen der mathematischen Erkenntniss wurden, das war doch nicht viel weniger als ein logisches Wunder, welches die consequente Kritik unmöglich dulden konnte. Nun aber stand die Thatsache, dass complexe Zahlen von den Mathematikern fortwährend unbekümmert um irgendwelche Unsicherheit in der Motivirung gebraucht wurden, unumstößlich fest. Es mussten also nothwendig die bisherigen Voraussetzungen des Nominalismus falsch sein. Und hier setzte nun wieder die bisher lange unterdrückte negirende Richtung der nominalistischen Kritik den Hebel an, indem sie die Existenz alles Imaginären und zugleich alles Negativen überhaupt leugnete. Der Grundgedanke dieser Richtung ist der, dass diese Ausdrücke weder mögliche, noch unmögliche Größen, noch Symbole, noch Zahlen, kurz überhaupt keine Begriffe seien, sondern wesentlich Formen der Rechnung, Functionszeichen für gewisse vorzunehmende Operationen.

In diesem Sinne bestimmt zuerst Duhamel in seinem großen Werk: Des méthodes dans les sciences de raisonnement[1]) die Zahl wieder lediglich als das Verhältniss irgend einer Größe zur Einheit[2]),

1) Paris 1865—73. Für unsern Zweck kommen allein der zweite und dritte Band in Betracht.

2) C'est là ce que dorénavant nous entendrons par un nombre, que l'usage veut encore qu'on appelle le rapport de la grandeur à l'unité. A. a. O. II, chap. VII, p. 42.

eine Definition, die schon Newton an die Spitze seiner Arithmetica universalis gestellt hat. Ganz wie Newton fasst er dementsprechend auch das Negative und Imaginäre nicht als Zahlen, sondern als Größen (allerdings in einem andern Sinne als gewöhnlich) oder als Ausdrücke auf, für welche er mit Vorliebe das Wort expressions anwendet. Beide gelten ihm für unentbehrlich, um die Allgemeinheit arithmetischer Sätze und Methoden aufrecht zu erhalten; sie sind als Rechnungsformen von großem Nutzen. Man darf sie aber nicht als isolirte Größen individualisiren oder ihnen irgend eine begriffliche Existenz zuschreiben wollen. Solche Versuche könnten immer nur zu unklaren »êtres phantastiques« führen, wie er dies z. B. durch eine ziemlich klare und im allgemeinen zutreffende Besprechung der über das Negative von Laplace, Euler, D'Alembert und Carnot[1]) aufgestellten Theorien nachzuweisen sich bemüht. Eine negative Größe ist nach ihm von einer positiven begrifflich gar nicht verschieden, sondern nur eine andere Form, unter der man jene betrachtet, indem man sie in irgend einem Zusammenhang mit anderen Größen — und in einem solchen kann sie überhaupt nur Sinn haben — nicht setzen, sondern abziehen soll.

Ist in diesem Sinn das Negative immerhin noch in concreteren Verhältnissen interpretirbar, so kommt dagegen dem Imaginären gar keine reelle Bedeutung zu. Dies ist ihm nur eine symbolische Form, erfunden, um die Zerlegung eines algebraischen Ausdrucks in lineare Factoren immer möglich zu machen, und zwar eine Form weniger für die Factoren selbst, als für die Zerlegung. Aber auch hier muss man sich hüten, in solchen und ähnlichen Rechnungen wirkliche Operationen zu sehen. In Wahrheit haben wir es nur mit Umformungen gewisser Identitäten in andere zu thun, aus denen irgend ein Resultat nicht zu gewinnen ist[2]).

Allen diesen Ausführungen wird man eine gewisse Klarheit und Vorsicht im Gegensatz zu den Cauchy'schen »considérations générales« nicht absprechen können. Allein sie treffen leider nicht die wirklichen Begriffe des Negativen und Imaginären, wie sie thatsächlich von der Mathematik fortwährend gehandhabt werden, sondern viel engere, von Duhamel selbst construirte Formen. Dies

---

1) A. a. O. II, chap. XIX.

2) Vgl. II, Chap. XX, p. 178 und 181 ff.

zeigt sich denn auch klar in dem dritten Bande seines Werkes in den Theilen, wo er die Anwendungen der reinen Arithmetik behandelt. Hier wird es ihm nämlich unmöglich, seinen eigenen Definitionen und selbstgewählten Beschränkungen treu zu bleiben. So ist er z. B. doch schon recht oft gezwungen, isolirte negative Ausdrücke in den Kreis der Betrachtung zu ziehen, obwohl er dies natürlich nicht zugeben will; vollkommen aber versagt seine Theorie gegenüber denjenigen Disciplinen der Mathematik, für welche das Complexe die Grundlage der Betrachtung bildet. Denn bei der Besprechung dieser vergisst er ganz die ursprünglich aufgestellte Bestimmung, dass alle Rechnungen mit imaginären Größen niemals Erkenntnisse, sondern immer nur schematische Umformungen liefern könnten, und leitet selbst durch ausgedehnte Betrachtungen über complexe Reihen, complexe Functionen u. s. w. eine Fülle von ganz neuen Resultaten ab. Freilich kommen ihm anfänglich noch Bedenken über eine derartige Handlungsweise, und er spricht dieselben offen aus[1]; aber er gelangt dann schließlich keineswegs, wie es nach seiner Definition doch eigentlich sein sollte, zu dem Schluss, dass solche Rechnungen in der That zwecklos sein müssten, weil sie ja lediglich Umformungen bekannter reeller Verhältnisse bedeuteten, sondern sieht sich, dem wirklichen Thatbestand entsprechend, zu dem Urtheil genöthigt, dass er es mit sehr wichtigen und nützlichen Methoden zu thun hat, die auch Resultate, und zwar sehr schöne Resultate zu liefern im Stande sind. An jener Stelle hält er allerdings äußerlich noch an seiner früheren Darstellung fest und hilft sich mit der Bemerkung: Or la transformation des expressions est une des plus grandes ressources de l'analyse[2]) über die Frage hinweg. Aber in der allgemeinen Uebersicht

1) Tout cela (es handelt sich um Folgerungen aus dem Moivre'schen Satz) est évident et incontestable; mais on peut se demander à quoi peuvent servir ces fictions de calculs qui ne semblent qu'un amusement bizarre, qui n'offre de remarquable que la simplicité du résultat comparée à la multitude des matériaux qu'il a fallu combiner. N'y a-t-il autre chose que dans ces jeux d'enfants où, avec un grand nombre de pièces de toutes formes, on parvient à construire des figures qui surprennent par leur élégance et leur régularité? A ces questions, qu'il semble naturel de s'adresser, il faut une réponse nette et précise. a. a. O. III, Chap. XVII, p. 359.

2) Ebenda p. 361.

über das Vorgetragene, mit welcher er den dritten Band schließt, erkennt er das Rechnen mit imaginären Größen, welches doch nach der ursprünglichen Begriffsbestimmung niemals den Charakter von wirklichen Operationen tragen sollte, sogar als eine sehr wichtige und ebenso strenge Methode an, wie jede andere, die nur mit reellen Größen rechne [1]).

Nach alledem ist die Duhamel'sche Ansicht wohl in sich consequent und widerspruchsfrei, aber seine Begriffe von Zahl, negativ, imaginär sind nicht die in der Mathematik wirklich herrschenden, sondern viel zu beschränkt. Und dies Verhältniss trägt einen tiefgreifenden Widerspruch in seine Darstellung hinein, der, wenn man sich an den wirklichen Thatbestand der wissenschaftlichen Methodik halten will, nur zu beseitigen ist durch das Aufgeben seiner allzuengen Definitionen. Allerdings gibt es in einer solchen Lage noch eine zweite Lösung der Schwierigkeit. Statt die eigenen, beschränkteren Begriffe den weiteren der Wissenschaft anzupassen, kann man auch ebenso consequent an ihnen festhalten, sie als grundlegende Normen aufstellen und alles, was ihnen in der thatsächlichen Entwickelung der Wissenschaft widerspricht, für fehlerhaft, unzulässig und verwerflich erklären. Diesen, ja mehrfach bewährten (man denke nur an den Untergang der Astrologie, Alchemie u. s. w.), aber im Gebiete der exacten Wissenschaften doch immerhin bedenklichen Ausweg schlug im gleichen Falle Dühring ein.

Seine diesbezüglichen Anschauungen, die sich mit denen Duhamel's vielfach berühren, obwohl sie von ihnen ganz unbeeinflusst sich entwickelt zu haben scheinen, hat er niedergelegt in dem mit seinem Sohn gemeinsam verfassten Werk: Neue Grundmittel und Erfindungen zur Analysis etc.[2]). Nachdem er hier die mathema-

---

1) C'est surtout l'application réciproque de la science des nombres et de la géométrie qui met en évidence les avantages de l'introduction des imaginaires, et nous les avons fait ressortir avec tout le soin que mérite cette méthode, si bizarre de déduction et de recherche: méthode aussi sûre que celles qui n'emploient que des quantités réelles. Exposé synoptique III, p. 429.

2) Der vollständige Titel lautet: Neue Grundmittel und Erfindungen zur Analysis, Algebra, Functionsrechnung und zugehörigen Geometrie sowie Principien zur mathematischen Reform nebst einer Anleitung zum Studium und Lehren der Mathematik von Dr. E. Dühring und Ulrich Dühring. Leipzig 1884.

tisch-realistische Auffassung, wie sie bis in die Mitte unseres Jahrhunderts in Deutschland die gewöhnliche war, im allgemeinen besprochen und in seiner schonenden Polemik, »was hierüber ein Gauß, und was Nachtreter dieses Professors an abnormen Beschränktheiten und Thorheiten zu Markte gebracht haben«, auf Rechnung ihres »persönlichen Idiotismus« gesetzt hat, geht er dazu über, seine positiven Ansichten über die Frage zu entwickeln. Dieselben bestehen im allgemeinen darin, dass er die anschauliche und begriffliche Existenz aller Zahlen mit Ausnahme der absoluten leugnet. Ueber das Irrationale und die Brüche spricht er sich nirgends aus, aber es geht doch aus allem hervor, dass er im allgemeinen den Zahlbegriff ebenso wie Duhamel und Newton fasst.

Was nun seine Anschauungen über das Negative und Imaginäre betrifft, so soll der Grundirrthum der vor-Dühring'schen Mathematiker darin bestanden haben, dass sie in diesen Ausdrücken die Vorzeichen mit der absoluten Größe zu einem Begriff verschmolzen und die so künstlich hergestellten Formen als neue, selbständige Zahlgattungen einführten. Die früheren Bezeichnungen als falsche Wurzeln oder unmögliche Größen wären demnach die einzig richtigen gewesen, insofern sie anzeigten, dass man es hier überhaupt nicht mit Größen zu thun habe. In Wahrheit sind aber — so muss man hier die Dühring'schen Ueberlegungen ergänzen — nur absolute Größen der Anschauung zugänglich und darum allein zu dulden. Daher bezeichnen auch jene Formen, welche an und für sich keineswegs unmöglich sind, nicht selbständige Größengattungen, sondern allein die Art und Weise, in der die in ihnen enthaltene absolute Größe zu betrachten ist, die Gestalt, in welcher sie in die Rechnung eingeführt werden soll. Denn »die Vorzeichen bedeuten nie und nirgends etwas anderes, als Operationen und Operationsbeziehungen«[1]). Die Formen $-a$ und $\sqrt{-a}$ sind daher bei Dühring keine dem a coordinirten neuen Begriffe, sondern, um es kurz zu sagen, Functionen der absoluten Größe a. So bedeutet der Ausdruck $-a$, dass a in irgend einer Rechnung abgezogen werden soll, $\sqrt{a}$ — so müsste man hier eigentlich wieder interpoliren — dass es überhaupt erst mit Größen verglichen werden

1) A. a. O. p. 7.

kann, welche sich als Quadrate darstellen, $\sqrt{-a}$ endlich, nicht zu lesen als: Wurzel aus minus a, sondern als das Functionszeichen: Wurzel minus in Bezug auf a, die verlangte Setzung einer ganz unmöglichen Operation, welche aber deshalb noch nicht zu verwerfen ist, sondern als solche, ähnlich den unmöglichen Annahmen im indirecten Beweise, bewusst vorgenommen von großem Vortheil werden kann[1]).

Auf diese functionelle Auffassung, welche die Zahlen allein als Argumente für ihre Vorzeichen bestehen lassen will, gründet Dühring dann eine neue Algebra des Absoluten. So liest er z. B. aus der Existenz einer Lösung $y = a - x$ $(a < x)$ heraus, dass es eine Gleichung $x - y = a$ statt der vorgelegten: $x + y = a$ gibt, für welche sofort die positive Lösung $y = x - a$ gefunden wird. »Die negative Lösung liefert, sei es durch Substitution, sei es durch jene unmittelbare Ueberlegung, jederzeit eine neue Gleichung, die in absoluten Größen möglich ist«[2]). Ebenso bedeutet eine imaginäre Lösung $y = \sqrt{a - x^2}$ $(x^2 > a)$ der Gleichung 1) $x^2 + y^2 = a$, dass es eine reelle $y = \sqrt{x^2 - a}$ der Gleichung 2) $x^2 - y^2 = a$ gibt, oder, geometrisch gesprochen, dass y statt einer Ordinate im Kreise 1) eine solche in der Hyperbel 2) sei. Dies ist ihm übrigens auch zugleich im Gegensatz zu jenen »monströsen Gaußigkeiten« die wahre geometrische Veranschaulichung des Imaginären.

Betreffs der weiteren Entwickelung dieser Ideen müssen wir auf das Originalwerk verweisen. Den positiven Entwickelungen desselben wird man im allgemeinen zustimmen können. Man kann entschieden die Vorzeichen lediglich als functionelle Symbole für die Zahlen ansehen, man kann die letzteren in Folge dessen auf die absoluten Zahlen beschränken. Aber wir dürfen hier die Bemerkung nicht unterdrücken, dass, einmal auf dem Dühring'schen Standpunkt angelangt, man diese functionelle Auffassung auch nothwendig auf alle Vorzeichen, d. h. auch auf die Wurzeln und den Bruchstrich ausdehnen und das Irrationale wie Gebrochene gleichfalls aus dem Zahlbegriff eliminiren muss, so dass für diesen nur

---

1) Ebenda p. 27.
2) Ebenda p. 10.

die positive ganze Zahl, die absolute Zahl im engeren Sinne übrig bleibt.

In dieser Richtung ist denn auch in neuester Zeit Kronecker noch weit über Dühring hinausgegangen, indem er mit dem Versuch begonnen hat, die ganze Arithmetik wieder auf die Lehre von den absoluten ganzen Zahlen zu reduciren[1]), ein Gedanke, den nach seiner Darstellung schon Gauß ausgesprochen haben soll. Nun ist Kronecker allerdings nicht gerade unter die Nominalisten zu rechnen. Die Motive, die ihn bestimmen, sind nicht in erster Linie erkenntnisstheoretischer, sondern mathematischer Natur. Und seine Theorie ist praktisch noch nicht als ein ausgebildetes System, sondern vorläufig noch als ein Versuch anzusehen, wie weit man mit der ganzen Zahl in der Mathematik allein ausreichen kann. Mag dem aber immerhin so sein, implicit liegt einer solchen Beschränkung doch jedenfalls die begriffliche Erwägung zu Grunde, dass die übrigen Zahlformen unsicher und schwankend, vielleicht sogar zu unsicher sind, um zu constanten Elementen einer mathematischen Disciplin gemacht zu werden.

In der That ist diese Erwägung ja auch insofern richtig, als die positive ganze Zahl die einzige Form ist, in der uns der Zahlbegriff überhaupt in der Erfahrung gegeben ist, in der wir ihn thatsächlich abstrahiren (daher sich auch die Empiristen alle auf sie beschränkt haben). Aber wollte man hieraus den Schluss ziehen, dass darum auch die Arithmetik sich mit der absoluten ganzen Zahl begnügen solle, so würde das die Voraussetzung involviren, die Mathematik sei nur anzusehen als ein Hülfsmittel oder gar eine specielle Form der Erfahrung. Von der Seite des empiristischen Nominalismus ist ihr diese Rolle ja auch beinahe durchgängig zu-

1) Kronecker, Ueber den Zahlbegriff. Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 101, Berlin 1887, S. 337—355, zum Theil auch enthalten in dem Aufsatz, welcher neben der Arbeit von v. Helmholtz über Zählen und Messen in der Sammlung von Festschriften zum fünfzigjährigen Doctor-Jubiläum Eduard Zeller's als No. VIII abgedruckt ist. Kronecker hat dann seinen Algorithmus der Congruenzen schon weiter angewandt, und zwar auf allgemeine complexe Zahlen, in den Abhandlungen: Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme, Sitzungsberichte der königlich preußischen Academie der Wissenschaften zu Berlin, 1888, p. 429—438, 447—465, 557—578, 595—612, 983—1016. (Fortsetzung in Aussicht gestellt.)

gedacht worden. Der Mathematiker selbst jedoch, der täglich vollbewusst mit Entwickelungen arbeitet, die schlechterdings nicht in empirische Erkenntnisse umzusetzen sind, kann sich mit dieser Auffassung, welche der Zahlenlehre im Grunde nur die schematische Reproduction von Gruppirungsmöglichkeiten zuerkennen will, unmöglich zufrieden geben. Er wird deshalb als Grundlage der reinen abstracten Mathematik auch einen anderen, den allgemeinen Zahlbegriff verlangen, um auch die höheren complexen Zahlen in den Kreis der Betrachtung ziehen zu können, welche Dühring's singuläre Auffassung unter die »fehlgreifenden Phantasien, Spielereien und Wortschmiedereien über neue Combinationen, oder vielmehr mit neuen Masken des Imaginären« rechnen muss[1].

So haben wir denn als positives Ergebniss der erkenntnisstheoretischen Bearbeitung des Zahlbegriffs vorläufig das Resultat gewonnen, dass es zwei ganz verschiedenartige Betrachtungen des Zahlbegriffs geben kann. Die eine geht direct von erkenntnisstheoretischen Erwägungen aus und lässt nur das gelten, was in der realen Welt vorgebildet ist. Sie beschränkt den Zahlbegriff deshalb consequenter Weise auf die absolute Zahl[2]. Die andere betont den logisch systematischen Charakter der Mathematik und fordert als Grundlage derselben den allgemeinen Zahlbegriff. Auf die erste Auffassung, welche die Vorzeichen als Functionsbezeichnungen auffasst, gründen sich z. B. alle Beweise für das Zeichen von Producten, bei denen einer oder jeder von beiden Factoren negativ ist, während diejenigen, welche das als eine nothwendige, aber unvorstellbare Concession an die Permanenz der formalen Gesetze ansehen, nur den zweiten Zahlbegriff im Auge haben. In der Regel wähnt man dann die vermeintliche Unglaublichkeit, welche in den Beziehungen: $(-a) \cdot (+b) = -ab$; $(-a) \cdot (-b) = +ab$ liegen soll, durch einen Beweis im Sinne der ersten Auffassung heben zu können[3]. Diese, und nur diese ist ja wirklich im Stande, überhaupt einen solchen Beweis zu erbringen, aber man übersieht dabei, dass

1) A. a. O. p. 4.

2) Unter absoluter Zahl ist hier wie im folgenden immer der engere Begriff, d. h. die absolute ganze Zahl zu verstehen.

3) Vgl. z. B. Kuno Fischer, System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre. Zweite Auflage, Heidelberg 1865 § 116 S. 340.

man keineswegs das Multiplicationsgesetz für negative, sondern nur das für negativ genommene absolute Zahlen demonstrirt [1]).

Die vermeintliche Paradoxie entspringt aber hier, wie überall in der Mathematik, lediglich aus der Vermengung zweier ähnlicher, aber doch verschiedener Begriffe. Es erwächst demnach, wenn der Schein des Wunderbaren von diesen und ähnlichen Gebieten definitiv genommen werden soll, der logischen Untersuchung die Aufgabe, beide Begriffe einmal wirklich ganz zu trennen, um sie einer isolirenden und erklärenden Einzelbetrachtung zu unterwerfen.

Nun ist es allerdings nicht zu verkennen, dass auf diesem Gebiete bisher dem kritischen Forscher noch sehr wenig vorgearbeitet ist. Die Mathematiker können aus formalen Gründen auf die Nothwendigkeit der erwähnten Trennung nur schwer kommen, und die Logiker scheinen sie übersehen oder nicht für nöthig gehalten zu haben, weil sie sich meist auf die reellen Zahlen beschränken, bei denen sie weniger zur Geltung kommt [2]). Nichts desto weniger besteht aber dieser Unterschied, und als bester Beweis dafür dürfen die unendlichen Schwierigkeiten gelten, welche z. B. der Begriff

---

1) Die lange und ziemlich erfolglose Controverse über diese Frage in der Hoffmann'schen Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (Leipzig, bei Teubner), zu welcher die Aufsätze von Kober, Band XIV, S. 13—17, S. 178, S. 340—341, XV, S. 106—108; Thieme, XIV, S. 177 bis 178; Hoffmann, XIV, S. 178—181, XV, S. 108—113, 274—277, 344—345, 505—515, 581—582, 595—598, XVI, S. 107—110; Härter, XIV, S. 582—587; Rüfli XV, S. 500—504; Z, S. 599—606 gehören, gibt ein sehr lehrreiches Beispiel dafür ab, wie weit die unbewusst vorgenommene Vermischung zweier solcher verschiedener Begriffe selbst mathematisch geschulte Köpfe irre machen kann.

2) Nur Hankel hat in seiner Theorie der complexen Zahlsysteme einen ähnlichen Unterschied von actuellen und formalen Zahlen, und allein Sigwart hat in seiner Logik einmal gelegentlich (Band II, dritter Theil, erster Abschnitt § 15, S. 52 [Tübingen 1878]) die oben in's Auge gefasste Scheidung bei den negativen Zahlen ausgesprochen. Aber beide Auffassungen stehen unvermittelt nebeneinander z. B. bei Trendelenburg, Logische Untersuchungen, Berlin 1840, I, S. 22, bei Kuno Fischer an der in der dritten Anmerkung auf S. 47 citirten Stelle, bei Lotze, Logik, zweite Auflage, Leipzig 1880 S. 600, 601, und bei Drobisch, Logik (Neue Darstellung der Logik), fünfte Auflage, Hamburg und Leipzig 1887, S. 29, 30, 38 etc. Auch die sonst so eingehend gliedernde Logik von Wundt führt ohne deutlichen Uebergang von dem einen Zahlbegriff zum andern über, so z. B. auf S. 100 und 101 des zweiten Bandes und S. 94 desselben in dem Passus: Da zahlreiche Objecte mathematischer Speculation ganz imaginärer Art sind u. s. w.

des Negativen von jeher gemacht hat. Dafür spricht andererseits auch die Existenz der allgemeinen complexen Zahlen, welche allein dem zweiten Begriff angehören.

Soll aber die Erkenntniss dieser Doppelnatur des Zahlbegriffs, welche schon einigermaßen bei Leibniz[1]), weniger bei Cardan[2]) vorgebildet ist, dazu führen, dass man mit Dühring den allgemeinen Zahlbegriff ganz wegwirft? Wir meinen nein! Was sich nicht blos als leichtfertige Speculation des Augenblicks, sondern als ein so geschlossenes und fehlerfreies System darbietet, wie es z. B. das — Dühring scheinbar ganz unbekannte — ausgezeichnete Werk von Hankel gibt, das ist doch wohl nicht ohne Weiteres als »mystischer Aberglaube« und »Uebermathematik der Mathematisten« in den Papierkorb zu werfen; was nicht allein als praktisches Hülfsmittel, sondern auch als begriffliche Theorie so allgemein recipirt ist, wie z. B. die Quaternionenrechnung, kann nicht der Machtspruch einer Autorität einfach als »fehlgreifende Phantasie oder Spielerei« bei Seite schieben. Wenn die Philosophie ihren wahren Beruf als Wissenschaftslehre erfüllen will, darf sie nicht mit der vorgebildeten Meinung einer in sich noch so abgeschlossenen Erkenntnisstheorie an die Frage herantreten, sondern hat das von der Arithmetik ihr schon ziemlich fertig übergebene Begriffsmaterial einer in diesem Fall allerdings sehr nothwendigen Kritik zu unterziehen.

Eine solche unbefangene Kritik führt aber zu dem Ergebniss, dass jeder der beiden erwähnten Zahlbegriffe, welche wir als absoluten und allgemeinen unterschieden haben, gleichmäßig für sich zu Recht bestehen kann. Und nun wir, gedrängt durch die historische Entwickelung, zu dieser Erkenntniss gelangt sind, zeigt uns sofort ein Rückblick, dass eigentlich die beiden Gegensätze des Nominalismus und Realismus jeder einen anderen Zahlbegriff bearbeitet haben. Dem ersten verdanken wir hauptsächlich die Entwickelung des absoluten, dem zweiten die des allgemeinen Zahlbegriffs. Und man wird in der That die beiden endgültigen Typen aus den von Dühring und Leibniz aufgestellten Formen unschwer herausarbeiten können. Der einzige Vorbehalt, den man zu treffen haben

1) Vgl. oben Kapitel III, 1.

2) Vgl. Kapitel I, 2.

wird, ist der, dass man ihre Entstehungsweise ändert und den nicht zutreffenden Apriorismus der Realisten ebenso eliminirt wie die rein empirischen Grundlagen der Nominalisten.

In der That werden wir uns bemühen zu zeigen, wie in dieser Beziehung eine Stufenfolge von Abstractionen vom psychologischen zum absoluten, von diesem zum allgemeinen Zahlbegriff führt[1]).

3. Der Begriff der absoluten Zahl.

Nachdem wir uns am Schluss der vorstehenden Betrachtungen im allgemeinen darüber orientirt haben, in welcher Weise der reine, von allen logischen Vorurtheilen freie Zahlbegriff aus den verschiedenen Ansichten der erkenntnisstheoretischen Schulen herausgeschält werden kann, wird es nunmehr an der Zeit sein, diesen Begriff, oder vielmehr diese Begriffe, positiv aus ihnen zu entwickeln. Da indessen der von uns als allgemeiner bezeichnete Zahlbegriff schon eine höhere Abstraction des reinen Denkens darstellt, der absolute aber allein im Stande ist, wirkliche Erfahrungen zu vermitteln, so kann in dieser erkenntnisstheoretischen Besprechung auch nur der letztere behandelt werden.

Ueberblickt man die ganze Bearbeitung des Zahlbegriffs in der Philosophie von drei Jahrhunderten, so muss man zu dem Ergebniss gelangen, dass dem Nominalismus der Nachweis für die

---

1) Was die Benennungen: absoluter und allgemeiner Zahlbegriff betrifft, so habe ich mich hier an den Sprachgebrauch gehalten, obwohl er gerade in diesem Falle recht unsystematisch verfährt. Man könnte vielleicht von einem erkenntnisstheoretischen und einem logischen Zahlbegriff sprechen, weil allein der erste Erkenntnisse vermitteln kann, während der zweite eine Abstraction des reinen Denkens darstellt, aber dies würde zu leicht die Vorstellung erwecken, als ob der erstere unlogisch oder kein eigentlicher Begriff sei, und außerdem der mathematischen Verwendung beider nicht gerecht werden. Ebensowenig würde sich die Classificirung: wahrer nominalistischer und wahrer realistischer Zahlbegriff empfehlen, weil mit diesen Bezeichnungen doch immer die Vorstellung des Unfertigen und der logischen Schulvorurtheile, der idola theatri verbunden wäre. Auch die von Hankel (Complexe Zahlen p. 6 und 36) eingeführte Gegenüberstellung der actuellen und formalen Zahlen, sowie der von Cantor (Mathematische Annalen, Leipzig 1883, p. 562) betonte Unterschied von immanenter resp. intrasubjectiver und transienter resp. transsubjectiver Realität treffen wohl etwas ähnliches, aber nicht die wahren Gegensätze.

Unmöglichkeit der apriorischen Existenz desselben völlig gelungen ist. Ebenso wird man vom historischen Standpunkt aus der Zurückführung der arithmetischen, wie überhaupt aller mathematischen Erkenntniss auf Induction und Abstraction unbedingt Glauben schenken. Sind doch die Existenz der dekadischen Zahlsysteme, der in dieser Beziehung sehr werthvolle Papyrus Rhind [1]), endlich die pädagogische Methode der Entwicklung aller Rechengesetze hierfür die beredtesten Zeugnisse. Andererseits beruht aber der rein wissenschaftliche Werth der Arithmetik, wie der gesammten Mathematik, keineswegs blos auf dieser Schematisirung der Erfahrung, sondern vielmehr hauptsächlich auf der von Mill ihrer wahren Bedeutung nach verkannten Möglichkeit, das ganze inductiv aufgeführte Gebäude deductiv in jedem Augenblick zu reconstruiren. Die empirisch gefundenen Fundamentalsätze können jederzeit in Definitionen, die inductiven Schlüsse in Beweise, die Grundsätze in Specialisirungen der allgemeinen logischen Axiome umgewandelt werden. Wenn daher die Arithmetik auch durchaus der Erfahrung ihren Ursprung verdankt, wenn man selbst die These nicht ohne Glück verfechten könnte, dass an der ganzen Peripherie des mathematischen Wissens in der Hauptsache noch heutzutage inductiv gearbeitet wird, immer gelten die neuen Resultate erst dann als heimathsberechtigt, wenn ihre deductive Herleitung aus bereits bekannten Begriffen und Sätzen gelungen ist; und hierauf beruht gerade der von Mill falsch dargestellte exacte Charakter der mathematischen Wissenschaften.

Fragt man aber, was diesen Forscher zu einer so schiefen Auffassung der Mathematik als einer, wenn auch der höchsten Erfahrungswissenschaft getrieben hat, so wird man mit Wundt [2]) keinen anderen Grund finden, als den einer unberechtigten Identificirung der mathematischen Abstraction und Induction mit den entsprechenden Methoden der Erfahrungswissenschaften.

Es wird nothwendig sein, dies hier noch etwas näher zu erläutern. Unter Abstraction versteht man bekanntlich [3]) »im allge-

---

1) Vgl. oben Kapitel I, 1.

2) Wundt, Logik II, S. 98—111.

3) Ich entnehme diese Definition ebenfalls der Wundt'schen Logik (II, S. 10).

meinen das Verfahren, durch welches aus einer zusammengesetzten Vorstellung oder aus einer Mehrzahl solcher Vorstellungen gewisse Bestandtheile eliminirt und die zurückbleibenden als Elemente eines Begriffs festgehalten werden«. Die Entstehung der arithmetischen Grundbegriffe auf diesem Wege ist unmittelbar evident; es fragt sich nur, welche positiven Bestandtheile hier als Begriffselemente zurückbleiben. An der Beantwortung dieser Frage scheitert der Nominalismus vollständig. Denn Mill fasst die betreffenden positiven Elemente noch als Merkmale der objectiven Dinge selbst auf, welche sich nur dadurch auszeichnen, dass sie allen Gegenständen gleichmäßig zukommen. Hiernach wären also die Zahlen im wesentlichen eine Nachbildung der objectiven Größenbeziehungen im Geiste. Wir haben aber gesehen und schon bei der Besprechung des psychologischen Zahlbegriffs nachzuweisen versucht[1]), wie diese nothwendig an der Raumanschauung haftende Zahlform nur einen ganz minimalen Umfang haben kann und gewissermaßen als eine Vorstufe zu betrachten ist, deren Besitz selbst höher organisirten Thieren zugesprochen werden muss. Hierbei kann aber von einem Zählen, welches immer einen Zeitverlauf bedingt, nicht die Rede sein, und in der Anschauung werden die verschiedenen Gegenstände nicht einzeln gesetzt, sondern in demselben Augenblick gemeinsam vorgestellt, ohne dass ihre psychologisch mögliche Construction von Einheiten dabei zum Bewusstsein kommt. Bei dem psychologischen Begriff der Anzahl muss indessen schon die Mill'sche Theorie versagen. Denn die Definition der letzteren als das, was zurückbleibt, wenn man bei Betrachtung getrennter Dinge von den Merkmalen absieht, durch welche sie sich unterscheiden[2]), muss nothwendig darauf führen, dass sie überhaupt keine objective Bedeutung hat — denn alles Objective wird ja im Abstractionsprocess eliminirt — sondern lediglich den rein subjectiven Schematismus der Zusammenfassung einzelner Denkacte bezeichnet. Wir haben demgemäß oben[3]) den psychologischen Zahlbegriff auch im Lichte dieser

---

1) Kapitel II. 2.

2) Ich entnehme diese Definition, in welcher allerdings das genus proximum fehlt, die man aber doch sehr oft hören und lesen kann, einem der verbreitetsten Lehrbücher, dem Lehrbuch der Analysis von Lipschitz (I Bonn 1877, S. 1).

3) Kapitel II. 3.

Auffassung betrachtet. Ihr Unterschied von der Kantischen, der sie äußerlich sehr ähnelt, besteht darin, dass der transcendentale Apriorismus dieses Schemas gestrichen und durch die subjective Gedankenthätigkeit im psychologischen Apperceptionsprocess ersetzt ist.

Der Begriff der Anzahl liegt nun zunächst auch der weitergehenden erkenntnisstheoretischen Behandlung zu Grunde. Während aber die psychologische Betrachtung nur eine einzige Erzeugung einer jeden Zahl durch Zusammensetzung von Einheiten, d. h. durch die einheitliche Znsammenfassung getrennter Denkacte liefert, lehrt die erkenntnisstheoretische Untersuchung die mannigfachsten und verschiedenartigsten Bestimmungsweisen derselben durch die Ausbildung der sogenannten Zahlentheorie. Im psychologischen Begriff der Anzahl liegt selbstverständlich nur eine einzige Erzeugungsart. Soll die Zahl also Gegenstand der Erkenntniss werden, so müssen Bestimmungen und Entwickelungen mit ihr in Beziehung treten, die ihrer psychologischen Wirkungssphäre fern stehen. Hierdurch erhält sie aber ein ganz neues Aussehen; denn sie wird durch eine Fülle von neuen Eigenschaften bereichert, welche dem Begriff der Anzahl noch fremd sind. Diese neuen Eigenschaften sind weder analytisch aus ihrem Begriff zu entwickeln, wie Leibniz glaubte, noch synthetisch a priori in der Anschauung zu construiren, wie Kant annahm, sondern durchaus auf empirischem Wege gefunden.

Der Erfahrungsprocess nun, welcher auf die Erkenntniss der Zahlbeziehungen führte, ist, wie Mill richtig hervorhob, die Induction, aber wiederum nicht die gewöhnliche physikalische, sondern die mathematische Wundt's. Denn auch hier bezieht sich der Erkenntnissprocess keineswegs auf die jeweilig betrachtete äußere Einheit, welche vielmehr ganz nebensächlich ist und nur als festes Beziehungssubstrat dient, noch haftet sie etwa gar an ihr, sondern einzig und allein auf die dabei aufgewandte subjective Denkthätigkeit.

Betrachten wir z. B. das für diese Zwecke beinahe gewohnheitsmäßig eingebürgerte Beispiel Kant's: $7 + 5 = 12$, so ist dies zunächst, wie Kant richtig betont[1]), kein analytisches Urtheil;

1) Kritik der reinen Vernunft. Ausgabe von Rosenkranz und Schubert II (Leipzig 1838) S. 143 und 703.

denn weder im Begriff der sieben, noch in dem der fünf wird die zwölf mitgedacht. Darum braucht es aber noch lange nicht ein synthetisches Urtheil a priori oder ein Axiom im Kantischen Sinne[1]) zu sein; denn hierfür ist ein Beweis schlechterdings nicht zu erbringen. Ebensowenig ist man aber auch andererseits berechtigt, die obige Gleichung als physikalisches Erfahrungsgesetz zu bezeichnen und seine Richtigkeit mit Mill allein in der Thatsache zu suchen, dass sieben Kiesel und fünf Kiesel zusammen bisher noch immer die constante Summe von zwölf Kieseln ergeben haben. Nicht durch die unzuverlässige äußere Wahrnehmung kann ihre apodiktische Gewissheit erklärt werden, sondern allein durch die untrügliche innere Erfahrung, dass die Combination von fünf einzelnen Denkacten, zusammengefasst mit der von sieben, der zwölfmaligen Wiederholung desselben Denkactes äquivalent ist.

Pflegt man sich auch solche arithmetischen Grundwahrheiten in der Regel an concreten Objecten, am liebsten an sichtbaren klar zu machen, so sind diese doch eben nur Beziehungssubstrate für die einzelnen Denkacte, Objecte mit der einzigen Bestimmung, gesetzt zu werden. Die Induction bezieht sich aber nicht auf die Verbindung der Objecte, sondern lediglich auf die Art und Weise des Setzens. Die Objecte selbst sind dabei völlig gleichgültig. Als ein empirischer Beweis für die Richtigkeit dieser Ansicht kann auch der Umstand gelten, dass für alle diejenigen, welche in Folge des Mangels eines Sinnes, namentlich des Auges, nur unklarere Vorstellungen von der Außenwelt haben können, die arithmetischen Sätze genau die gleiche Evidenz besitzen, wie für jeden anderen.

Die mathematische Induction, welche uns die arithmetischen Wahrheiten liefert, bezieht sich also nach alledem nicht mehr, wie Mill glaubt, auf die Größenverhältnisse der Außenwelt, sondern bereits auf die aus ihnen abstrahirten Zahlen, sie ist rein subjectiv. Das Gebiet aber, welches sie in dieser Form beherrscht, ist ein ziemlich umfangreiches, und die Summe derjenigen Sätze, welche entweder direct oder im letzten Grunde auf die Anschauung zurück-

1) Kant scheut zwar vor der Bezeichnung: Axiom zurück, und wählt dafür den Ausdruck: Zahlformel, weil es sonst unendlich viele Axiome geben müsste. Dies ist aber offenbar kein logischer, sondern ein rein praktischer Grund. In Wahrheit bleibt die Gleichung bei ihm trotz des andern Wortes doch Axiom.

gehen, eine sehr bedeutende. Wundt unterscheidet drei verschiedene Arten derselben[1]).

Zu der ersten gehören die arithmetischen Axiome, welche natürlich dieselbe unmittelbare Evidenz besitzen, wie die logischen Grundgesetze, d. h. nicht auf Grund einer äußeren inductio per enumerationem simplicem geglaubt werden, sondern ihre unmittelbare, durch innere Erfahrung freilich erst zum Bewusstsein kommende Gewissheit in der subjectiv unumstößlichen Thatsache ihrer Denknothwendigkeit finden. Eben deswegen können sie sich aber auch nur als Determinationen der allgemeinen logischen Grundsätze im arithmetischen Gewande darstellen und müssen, wo dies nicht der Fall ist, auf ihre einfachsten Bestandtheile noch reducirt werden.

So sind z. B. entschieden die neun Euklidischen *κοιναὶ ἔννοιαι* nicht alle selbständige Nothwendigkeiten[2]). Deshalb wollte schon Mill dieselben auf die beiden Grundsätze zurückführen: »Dinge, welche einem und demselben Ding gleich sind, sind untereinander selbst gleich« und: »Gleiches zu Gleichem addirt gibt gleiche Summen«[3]). Der letzte ist aber noch unnöthig eng, da er z. B. der Multiplication negativ genommener Zahlen nicht gerecht werden kann. Man wird daher zweckmäßiger, analog mit Wundt[4]), von folgenden vier Specialisirungen der logischen Axiome, des Satzes von der Identität, vom Widerspruch, vom ausgeschlossenen Dritten und vom Grunde ausgehen: Erstens »Jede Zahleinheit gilt jeder andern gleich«, zweitens: »Eine Zahl ist jeder andern ungleich«, drittens: »Die Bildung einer Zahl aus Einheiten ist stets eindeutig«, und viertens: »Gleiche Operationen, mit gleichen Zahlen vorgenommen, ergeben wieder Gleiches«. Die letzte ist als arithmetische Form des Satzes vom zureichenden Grunde die interessanteste und

---

1) Wundt, Logik II, S. 100—106.

2) In der Teubner'schen Ausgabe von Heiberg ist übrigens der gewöhnlich als fünfter bezeichnete Grundsatz: »Von Ungleichem Gleiches weggenommen gibt Ungleiches« und der gewöhnlich mit vier numerirte »Gleiches zu Gleichem zugesetzt gibt Gleiches« eingeklammert. Dafür ist dann, allerdings auch in Klammern, ein geometrisches Axiom hinzugefügt »zwei Gerade schließen keinen Raum ein«, ein anschauliches Postulat, das offenbar nicht unter die κοιναὶ ἔννοιαι, sondern unter die αἰτήματα gehört.

3) Logik III, Kap. XXIV, § 5, vgl. oben S. 34.

4) Logik I, S. 521.

kann leicht durch weitere Specialisirung auf die einzelnen arithmetischen Operationen, auf die drei thetischen Addition, Multiplication und Potenzirung sowohl, wie auf die drei lytischen Subtraction, Division, Radicirung bezogen werden[1].

Was nun diese Operationen betrifft, so ist zunächst zu bemerken, dass dieselben für den vorliegenden Zahlbegriff auch nur die Bedeutung von actuellen, anschaulichen Beziehungsformen, d. h. von functionellen Verknüpfungen besitzen, dass andrerseits die Vorzeichen überall auch nur wörtlich als Vor-Zeichen aufzufassen sind, auf die Natur der ihnen nachgestellten Zahlen aber nicht den geringsten Einfluss haben. Denn auf Objecte der Erfahrung bezogen ist allein der Zahlbegriff, welchen die Sprache als absoluten (natürlich hier immer im engeren Sinne verstanden) bezeichnet. Er besitzt nur die einzige Form der positiven ganzen Zahl und sticht durch seine begriffliche Starrheit bedeutend gegen den geschmeidigeren, artenreichen allgemeinen Zahlbegriff, durch seine höhere Abstraction ebenso sehr gegen den psychologischen ab. Von letzterem unterscheidet er sich namentlich dadurch, dass jener allein durch seine Genese aus Einheiten definirt werden konnte, dieser aber auf unendlich viele Weisen zu erzeugen ist. Dort konnte jede Zahl allein für sich betrachtet oder höchstens auf die vorhergehende bezogen werden, hier aber wird sie lediglich in Verbindung mit anderen Zahlen behandelt, und gerade diejenigen Merkmale werden an ihr festgehalten, welche allen Zahlen gemein sind; dort war unter der Zahl jedesmal der Zählprocess selbst verstanden, hier wird er ganz eliminirt und von vornherein als vollendet angenommen; dort war sie bestimmt, die Gegenstände zu registriren, hier soll sie Erkenntnisse vermitteln; dort schuf sie einen Ausdruck für die Menge, hier einen solchen für das Maß. Das Verhältniss vom psychologischen zum absoluten Zahlbegriff ist also etwa so zu fassen, dass

---

1) Wir brauchen hier wie im Folgenden immer die von Hankel (in der Theorie der complexen Zahlsysteme) eingeführten Wörter: thetisch und lytisch. In der That empfehlen sie sich auch mehr, als die von Leibniz und Graßmann angewandten, anderweitig schon so viel abgenutzten Bezeichnungen: synthetisch und analytisch, oder als die ebenfalls vielfach gebrauchten: direct und indirect. Zudem sind die Hankel'schen Bezeichnungen wohl mehr recipirt, z. B. bei Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Leipzig 1885, Wundt, Logik u. s. w.

der zweite die fertig gedachte Zusammenfügung von Einheiten darstellt, welche unter dem ersten verstanden wird, dass er als Ganzes das betrachtet, was der erste aus Theilen zusammengesetzt, analog wie etwa die transfinite Unendlichkeit als das Einheitssubstrat der infiniten gedacht wird. Betrachtet man aber andrerseits die rein erkenntnisstheoretische Verwendung, so kann man die absoluten Zahlen auch als Argumente definiren für die functionellen Verknüpfungen der anschaulichen, arithmetischen Operationen.

Unter diesem Gesichtspunkt bedeutet z. B. $+a$ nicht etwa eine positive Größe $(+a)$ — diese Form gehört erst dem allgemeinen Zahlbegriff an, — auch nicht, dass ein Ding nacheinander a mal zu setzen sei — dies würde dem psychologischen Zahlbegriff entsprechen, — sondern eine mit der absoluten Zahl a, welche als Ordinalzahl einen ganz bestimmten Platz unter den logischen Begriffen einnimmt, vorzunehmende Addition, wie sie nach den inductiv gefundenen Regeln dafür auszuführen ist. Soll diese Addition freilich direct veranschaulicht, zum Bewusstsein gebracht werden, so muss man doch wieder auf den psychologischen Zahlbegriff zurückgreifen.

Inductiv und allein durch Abzählen gefunden sind aber die betreffenden Operationsregeln als unmittelbare Specialisirungen der arithmetischen Axiome; und dies ist das zweite große Gebiet, auf dem die Induction die mathematische Erkenntniss leitet. Hierzu rechnet Wundt alle einfachen Zahlgleichungen, wie $5+7=12$ oder $5 \cdot 6 = 30$; ihm würden auch die Kantischen »Zahlformeln« entsprechen. Mit dem letzteren Gebiet hängt endlich noch eine dritte Quelle inductiver Erkenntniss zusammen, nämlich die an die Einzel-Inductionen sich anschließenden generalisirenden, wie sie vorzugsweise in der Combinationslehre zur Anwendung kommen, wenn man von n auf $n+1$ schließt.

Nachdem allerdings solche Sätze inductiv einmal erst gefunden sind, setzt ihrerseits unmittelbar die Deduction ein, welche, basirt auf die nicht anders als inductiv zu begründenden Axiome sowie auf die Definitionen der Zahlen und ihrer Operationen, entweder die einfachen Zahlformeln, wie $5+7=12$ oder $5 \cdot 6 = 30$ beweist, oder aber als Deduction nach exacter Analogie (als sogenannte vollständige Induction der Mathematik) die Resultate der dritten Art für das Lehrgebäude systematisch verarbeitet. Die Bedeutung der letzten Gattung von Deduction ist allerdings noch eine weit größere, insofern sie die empirisch gefundenen Einzelinductionen der zweiten Art mühelos, etwa auf Grund des dekadischen Zahlsystems, auf das ganze in Frage kommende Gebiet auszudehnen gestattet. So werden z. B. die für die Zahlen 1 bis 9 gefundenen Additions- und Multiplicationsregeln ohne weiteres auf beliebige Zahlen verallgemeinert, $5 + 7 = 12$ auf $50 + 70 = 120$ u. s. f.[1]).

Eine andere und zwar die interessanteste und folgenreichste Anwendung fand diese exacte Generalisation in Bezug auf die Fälle, wo die lytischen Operationen nicht mehr ausführbar erschienen. Vergegenwärtigen wir uns aber, um die Bedeutung dieser Verhältnisse, welche, wie wir hier gleich erwähnen wollen, in ihrem vollen Umfange erst dem nächsten Abschnitt angehören, an dieser Stelle gebührend würdigen zu können, noch einmal kurz den Standpunkt, den wir im vorliegenden Gedankengang eingenommen hatten.

Als Grundlage der Betrachtung, d. h. als Object der arithmetischen Operationen diente uns bisher immer die absolute (ganze) Zahl als das erkenntnisstheoretisch nothwendige Einheitssubtrat des zusammengesetzten, psychologischen Anzahlbegriffes. Präciser hatten wir sie als die subjective Gesammtheit der einzelnen Denkacte bestimmt, welche die Anzahl constituiren. Der Umfang des absoluten Zahlbegriffs ist also nothwendig derselbe, wie der des psychologischen, nur die Form ist eine andere. Was ihn aber wesentlich von jenem unterscheidet, das ist seine Bestimmung, nicht, allein für sich betrachtet, einen psychologischen Vorgang, den des Zählens zu schematisiren, sondern lediglich in Verbindung mit anderen Zahlen behandelt und in Bezug auf die allgemeinen, hieraus sich ergebenden Eigenschaften untersucht zu werden. Die Methode dieser Untersuchung war, wie historisch feststeht, die Induction, aber die mathematische, nicht die gewöhnliche physikalische. Denn sie bezog sich nicht mehr auf die äußeren Bestimmungen der Erfahrung, sondern allein auf die subjective, bei dem Process aufgewandte Gedankenthätigkeit. Hierdurch wird ihr aber die von Mill vergeblich geleugnete Constanz des Beziehungsobjectes gegeben, vermöge deren es möglich wird, das ganze inductiv gewonnene

1) Vgl. die weitere Ausführung dieser Ideen, über die sich wohl kaum noch etwas neues sagen lässt, im Original bei Wundt, Logik II, S. 100—114.

Erkenntnissmaterial deductiv wieder umzuarbeiten, d. h. ihm jene unbedingte, apodiktische Gewissheit zu geben, welche den Erfahrungswissenschaften abgeht.

Versteht aber die Deduction diese ihre Aufgabe richtig, so hat sie nichts weiter zu beabsichtigen, als eben nur die einzelnen, inductiv gefundenen Resultate systematisch zu ordnen und in ein festes Lehrgebäude zu bringen, mit andern Worten sie aus Definitionen und den arithmetischen Grundaxiomen abzuleiten, welche selbst freilich nicht mehr deductiv, sondern nur mit dem Hinweis auf ihre Existenz zu begründen sind und höchstens äußerlich auch noch in Definitionen umgewandelt werden könnten. Niemals aber — und das muss hier besonders betont werden — hat die Deduction das Recht, neue, bisher unbetretene Wege zu gehen, welche aus dem Gebiet der Induction herausführen, selbstverständlich allein in dem hier festgehaltenen, vom Begriff der absoluten Zahl bestimmten Gedankengang. Sie hat nicht zu forschen, sondern allein zu verificiren und muss daher Halt machen, wo sie durch weitere Verfolgung ihrer Operationen den Umkreis der absoluten Zahlen verlassen, wo ihre Durchführung, um denkbar zu sein, die Einführung neuer Zahlarten erfordern würde.

Nun können die thetischen Operationen niemals über das bisherige Zahlgebiet hinausführen. Denn die Addition, ursprünglich nur mit einer Einheit vorgenommen, erzeugte eben dadurch successiv die ganze Zahlenreihe. Eine Addition irgend welcher Zahlen konnte daher auch immer nur eine höhere, in der Reihe enthaltene Zahl geben. Ebenso lieferten natürlich die Multiplication als Specialfall der Addition und die Potenzirung als Specialfall der Multiplication stets nur absolute Zahlen, und dasselbe würde von allen höheren Operationen gelten, die man durch successives Specialisiren der Potenzirung gewinnen könnte. Sobald man sich aber etwa die Frage vorlegte, ob die Subtraction als Umkehrung der Addition immer möglich sei, ob sich also zu einer Zahl a stets eine solche Zahl x finden lasse, welche, zu einer dritten Zahl b addirt, a ergebe, so musste man zu der Erkenntniss kommen, dass eine solche Lösung der Gleichung $a = b + x$ nicht immer zu geben war. In der That ist diese schon unmöglich im Falle $a = b$. Denn die Gleichung $a = a + x$ zeigt sofort auf Grund des Satzes vom Widerspruch, dass x keine absolute Zahl sein, d. h. keinen einheitlichen Denkact postuliren kann. Wenn man daher den fraglichen Werth in diesem Falle mit 0 bezeichnet, so ist damit, wie im dekadischen Positionssystem, nur gesagt, dass an der betreffenden Stelle keine Zahl zu setzen sei. Wird aber vollends $b > a$, so ist die Subtraction, durch welche man zur Lösung gelangen würde, in keiner Weise mehr auszuführen. Man kann wohl die Zahl b in $a + c$ zerlegen und dadurch die Setzung von a wieder aufheben, behält dann aber immer noch eine abzuziehende Zahl c übrig, mit der man aber nichts weiter anfangen kann, als höchstens das Vergebliche des ganzen Versuchs durch ein $-c$ andeuten.

Weiter kann man hier aber offenbar nicht gehen, ohne das Gebiet der absoluten Zahlen zu verlassen; und auf der empirisch-nominalistischen Grundlage der Betrachtung ist aus der Gleichung $x = -c$ zunächst nichts weiter herauszulesen, als dass das ganze Problem unsinnig, und das x keine Zahl sei. Bei genauerem Zusehen erkennt man allerdings, dass man doch ein positives Resultat erhalten, aber eigentlich eine ganz andere Aufgabe gelöst hat, als ursprünglich beabsichtigt war. Denn die Lösung $x = -c$ zeigt ja an, dass man überhaupt erst noch die Zahl c zu a hinzufügen muss, um b zu erhalten, mit anderen Worten, dass man nicht $x = -c$ als Lösung der Gleichung $a = b + x$, sondern $x = c$ als Lösung von $b = a + x$ gefunden hat. Die Subtraction, richtig verstanden, braucht also über den Kreis der absoluten Zahlen auch noch nicht hinauszuführen, sobald man nur nicht das fingirte Resultat einer actuell unvorstellbaren Operation, wie beim allgemeinen Zahlbegriff, mit in den Kreis der Betrachtungen zieht.

Dasselbe gilt mutatis mutandis auch von der Umkehrung der Multiplication, der Division. Es sei z. B. die Gleichung $a = b \cdot x$ vorgelegt, und a und b seien relative Primzahlen (der Begriff derselben ist natürlich bereits fixirt zu denken). Dann bedeutet zunächst die schematische Lösung $x = a : b$ eine unmögliche Division, zeigt also damit an, dass x wiederum nicht zu den absoluten Zahlen gehört, positiv aber sagt sie zugleich aus, dass die Zahl a erst mindestens mit b multiplicirt werden muss, damit die Fragestellung überhaupt möglich ist. Statt der sinnlosen Gleichung $a = b \cdot x$ erhält man also die verbesserte $a \cdot b \cdot n = b \cdot x$ und als

Lösung derselben $x = a \cdot n$. Ebenso zeigt eine Wurzel $x = \sqrt{a}$ der Gleichung $x \cdot x = a$, in welcher a keine Quadratzahl ist, vermöge der unausführbaren Radicirung an, dass a in jener Gleichung überhaupt erst zu einem Quadrat ergänzt werden müsse, damit man von einem Problem und einer Lösung sprechen könne.

Es erscheinen also wirklich in diesem Gedankenzusammenhang die Zeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\sqrt{}$ lediglich als Bezeichnungen von functionellen Verknüpfungen, welche mit den nachgestellten absoluten Zahlen vorzunehmen sind. Vermöge dieser Eigenschaft haben aber, wie schon Cardan und Leibniz richtig betonten[1]), und Dühring näher ausgeführt hat[2]), alle diese sinnlosen Lösungen zugleich die positive Bedeutung, die falsch gestellte Frage derart zu corrigiren, dass nun eine Lösung möglich wird.

Derselbe Sinn, wie er hier an einfachen Specialfällen einer unausführbaren Subtraction, Division und Radicirung auftrat, ist natürlich andererseits auch unmittelbar auf zusammengesetzte Operationen anwendbar. Da diese Ausdehnung keinerlei Schwierigkeiten macht, so möge hier nur des speciellen Falles gedacht sein, welcher die Ausziehung einer Quadratwurzel aus einer negativ zu nehmenden Zahl verlangt. Die Unmöglichkeit dieser Operation ist mathematisch keine wesentlich höhere, als die Subtraction von Null, wir haben hier eben nur die Combination zweier unausführbarer Operationen. Ganz analog unserer früheren Betrachtungsweise werden wir daher aus der imaginären Lösung $x = \sqrt{-a}$ der Gleichung $x^2 + a = 0$ sofort herauslesen können, dass zunächst die Sinnlosigkeit der Gleichung $x^2 = -a$ die Gültigkeit von $x^2 = +a$ bedingt, wo dann a eventuell noch zu einem Quadrat zu ergänzen ist, damit man als Lösung eine ganze Zahl erhält.

Diese summarischen Andeutungen mögen genügen, um den Charakter der ganzen Auffassung, die wir die wahre nominalistische nennen können, und deren Berechtigung in dieser Form wohl nicht zu bestreiten sein dürfte, in das rechte Licht zu stellen. Die weitere Ausführung hat Dühring in den unpolemischen Theilen seines oben citirten Werkes gegeben, wobei er sich freilich nur auf das

---

1) Vgl. Kapitel I, 2 und III, 1.

2) In seinem oben citirten Werk.

Negative und Imaginäre beschränkt. Aber eben diese Beschränkung zeigt zugleich, dass die ganze Auffassung den wirklichen Zahlbegriff lange nicht erschöpft. Wohl müssen wir ihr eine selbständige Existenzberechtigung zugestehen und sind sogar gehalten, sie als eine Vorstufe des ungleich systematischeren und werthvolleren allgemeinen Zahlbegriffs anzusehen, aber sie muss sich dann eben auch selbst genug bleiben und die algebraischen Irrationalitäten und Brüche ebenso verwerfen, wie das Negative und Imaginäre. Eine partielle Erweiterung des Zahlgebietes ist logisch wie mathematisch gleich zu missbilligen. Im Gebiet des absoluten Zahlbegriffs darf allein — und dieser Gedanke beherrschte ja schon die griechische Arithmetik — die absolute ganze Zahl zugelassen werden; und alle Vorzeichen, das Plus wie das Minus, die Wurzel wie das Wurzelminus, dürfen nur als Operationszeichen betrachtet und nie zur Definition neuer Zahlformen verwandt werden. Ihre partielle Unausführbarkeit aber lehrt einerseits die Sinnlosigkeit der gestellten Frage, gibt jedoch andrerseits sofort die Mittel an die Hand, die Aufgabe derart zu verbessern, dass sie lösbar wird, und wirft so elastisch jeden Versuch einer Erweiterung des Zahlgebietes in die bisherigen Grenzen zurück.

Es ist nun auf's lebhafteste zu befürworten, dass dieser absolute Zahlbegriff in seiner ursprünglichen Reinheit in der Arithmetik wieder hergestellt wird, wie es Kronecker in der oben citirten Abhandlung, angeregt von Gauß, beabsichtigt und direct als Ziel der Arithmetik hinstellt; es ist sogar auf's höchste zu wünschen, namentlich deswegen, weil dann endlich einmal die principielle Sonderung der functionellen von der substantiellen Auffassung der negativen und imaginären Zahlen die letzten unklaren Ansichten über diese Frage beseitigen würde und z. B. jene Debatte über das Negative in der Hoffmann'schen Zeitschrift[1]) unmöglich gemacht hätte, deren Vorkommen nicht das glänzendste Zeugniss für die allseitig erkannte Klarheit der mathematischen Grundanschauungen ablegt.

Andrerseits kann aber auch wieder nicht genug betont werden, dass die bisher besprochene Auffassung schon deshalb, weil sie auf stetige Größen nicht anwendbar ist, nicht die einzige Behandlungsweise bleiben muss oder darf. Und wenn der unaufhaltsam fort-

1) Vgl. Die betreffende Anmerkung am Schluss von Kapitel III, 2.

schreitende Geist mathematischer Forschung nicht allein bei den absoluten Zahlen stehen geblieben ist, sondern sie thatsächlich mit ihren Vorzeichen zu neuen, festen Begriffen verschmolzen hat, so ist dies wohl weder eine entbehrliche Verallgemeinerung der Zahlenlehre, wie Kronecker das behaupten zu wollen scheint, noch eine gewaltige speculative Verirrung der mystisch werdenden Mathematik, wie Dühring das glauben machen will, sondern der Ausdruck jenes nie vollendeten, aber tief in der Natur der Sache selbst begründeten logischen Strebens nach immer höheren Abstractionen und Generalisationen, deren durchaus exacter Charakter der bisher betrachteten Methodik nichts nachgibt, deren Forschungsgebiet aber, in's Unbegrenzte erweitert, ganz neue, nie geahnte Probleme dem menschlichen Geist aufgeschlossen hat.

Man kann eine solche Erweiterung für erkenntnisstheoretisch werthlos, für unpraktisch und unbrauchbar, man kann sie mit Kronecker für überflüssig, mit Berkeley für eine Spielerei erklären — alles das, sobald man allein den subjectiven Standpunkt festhält, — aber eine Proclamirung dieser Ansichten als der allgemeinen oder gar eine wissenschaftliche Vernichtung der reinen Mathematik, wie sie Dühring beabsichtigt, wäre wohl ebenso unmöglich wie sinnlos.

Eine logische Untersuchung vollends hat sich vor allen Dingen mit den Begriffen zu beschäftigen, welche thatsächlich gebildet sind, sie vorurtheilsfrei zu untersuchen und erst dann zu verwerfen, wenn sie in sich unmöglich oder bereits anerkannten Begriffen widersprechend befunden werden. Geht man aber wirklich, ohne sich den klaren Blick durch Vorurtheile erkenntnisstheoretischer oder logischer Natur trüben zu lassen, an die Untersuchung der Frage selbst, so muss man nothwendig zu dem Schlusse gelangen, dass weitaus die meisten der noch gebildeten Zahlbegriffe, wenn man sie nur richtig versteht, ihrer logischen Natur nach genau so sicher und fest bestimmt sind, wie der psychologische Begriff der Anzahl oder der erkenntnisstheoretische der absoluten Zahl. Wie diese Anschauungen durchgeführt werden können, das werden wir uns im nächsten Capitel zu zeigen bemühen.

(Schluss folgt im nächsten Heft.)