Der mathematische Zahlbegriff und seine Entwicklungsformen.

Eine logische Untersuchung.

Von

Walter Brix.

(Schluss.)

Viertes Kapitel.

Der allgemeine Zahlbegriff.

1. Der Begriff der formalen Zahl.

Wir haben bereits im ersten, historischen Theil dieser Arbeit gesehen, wie sich der Uebergang von der Maßzahl der Griechen zu der universelleren Zahl der Inder auf Grund einer Verallgemeinerung der drei lytischen Operationen vollzog. Dort kam wesentlich die mathematische Seite dieser Erweiterung in Betracht, hier indessen handelt es sich darum, die logische Bedeutung des Ueberganges zu beleuchten, welcher dem vom psychologischen Zahlbegriff zum absoluten ganz analog ist. Wir werden finden, dass wir uns hier durchweg im Gebiet der generalisirenden Abstraction und der Deduction nach exacter Analogie bewegen.

Der absolute Zahlbegriff war aus dem psychologischen dadurch hervorgegangen, dass man von der Bildungsweise der Zahlen aus Einheiten abstrahirte und dieselben als etwas von Anfang an fertiges betrachtete. Dieser Umstand ermöglichte es, dass man nun die Zahl im Zusammenhang mit ihres gleichen behandeln konnte und die arithmetischen Eigenschaften derselben kennen lernte, welche ihren Ausdruck in einer Reihe von bisher sechs Grundoperationen fanden.

An diesem Punkt setzt nun die weitergehende Abstraction ein, welche zum allgemeinen Zahlbegriff führt. Der Hauptschritt, den sie zu thun hat, besteht in der Elimination des anschaulichen Charakters, welcher dem absoluten Zahlbegriff noch von seinem psychologischen Ursprung her anhaftete, indem sie nur die neu hinzugekommenen charakteristischen Eigenschaften, d. h. die arithmetische Bedeutung, als wesentliche Momente beibehielt. Der allgemeine Zahlbegriff entsteht aus dem absoluten einfach dadurch, dass man von aller Anschaulichkeit, d. h. von aller Möglichkeit, für die durch die Zahlbeziehungen geforderten Denkakte concrete Beziehungssubstrate anwenden zu können, abstrahirt und als Merkmal des allgemeinen Zahlbegriffs allein die arithmetischen Eigenschaften festhält. Und hier zeigt sich deutlich, wie der absolute Zahlbegriff zwischen dem psychologischen und dem allgemeinen in der Mitte steht, denn er hat mit jenem die anschaulichen, mit diesem die abstracten Bestimmungen gemein.

Lässt man nun aber das Merkmal der Anschaulichkeit bei den Zahlen sowohl, wie bei ihren Operationen ganz fallen, so ergibt sich damit auch sofort, dass man dann nicht mehr bei der bisherigen Form derselben stehen zu bleiben braucht, sondern jene Erweiterungen des Zahlbegriffs durch die Fälle der Unausführbarkeit der lytischen Operationen wirklich vornehmen kann, welche früher die Forderung der Anschaulichkeit noch verhinderte. Der Umfang der auf diesem Wege gewonnenen Formen, für welche die Sprache auch noch die Bezeichnung wie den Begriff der Zahl beibehalten hat, ist dadurch gegen früher natürlich ein außerordentlich erweiterter. Doch ist selbstverständlich andererseits bei jeder derartigen Ausdehnung die größte Vorsicht geboten. Denn sobald man die Erfahrung verlässt — und diese gibt uns ja zunächst nur absolute Zahlen — bewegt man sich auf dem Boden von rein transcendenten Speculationen,[1]) bei denen ein lohnendes Resultat von vorn herein eigentlich kaum zu erwarten ist. An Warnungen, gutgemeinten Rathschlägen, selbst an Drohungen haben es ja auch in dieser

1) Wir brauchen hier, wie im folgenden, auch wenn wir von transcendenten Zahlen sprechen, das Wort transcendent immer in dem philosophischen und nicht im mathematischen Sinn, also in der Bedeutung von überempirisch.

Hinsicht die Empiristen nicht fehlen lassen. Allein es ist ihnen die Erfahrung nicht erspart geblieben, dass die Mathematik ruhig auf der betretenen Bahn fortschritt, ohne sich um eine derartige Bevormundung auch nur im geringsten zu kümmern. Und wenn Dühring dieselbe deshalb wie ein ungezogenes Kind behandelt, so bleibt doch immer noch zu bedenken, dass, wer sich zum allgemeinen Richter aufwirft, zunächst mit den gegebenen Verhältnissen zu rechnen hat, nicht aber hartnäckig an einem, nur für einen viel engeren Umfang passenden Standpunkt festhalten und alles andere lediglich deshalb als »mystischen Unsinn« verwerfen darf, weil es zufällig über den ersten beschränkteren Gesichtskreis hinausreicht. Es muss ja zugegeben werden, dass die Mathematiker sich oft selbst über ihre Methode am wenigsten klar waren, dass sie von den erreichten Resultaten mit am meisten überrascht wurden; allein wie oft sind nicht in der Wissenschaft richtige Schlüsse aus ganz falschen Prämissen gezogen und umfangreiche, schöne Theorien auf den anerkannt unzuverlässigsten Grundlagen aufgebaut worden. Und wenn endlich der Erfolg als eine Bürgschaft für die Billigung des Versuchs anzusehen ist, so kann sich der Mathematiker in unserm Falle mit vollstem Recht auf ihn berufen. Denn nicht genug damit, dass keine einzige von den trüben Prophezeihungen der Erfahrungsphilosophen eingetroffen ist, die verhassten transcendenten Zahlformen sind sogar eine überreiche Quelle der scheinbar unerschöpflichsten Erkenntniss geworden, welche jene nur darum als fragwürdig hinzustellen sich bemühten, weil sie sich den Zusammenhang absolut nicht erklären konnten.

Die wahre, wissenschaftlich allein zulässige Beurtheilung der Sache darf aber offenbar nicht in dieser Weise dogmatisch, sondern nur kritisch verfahren und richtige Resultate nicht lediglich deshalb verwerfen, weil sie mit der engeren Methodik eines bestimmten erkenntnisstheoretischen Standpunktes nicht zu gewinnen sind, sondern hat den gegebenen Verhältnissen gemäß auszugehen von den thatsächlich unanfechtbaren Ergebnissen und Licht über den Weg zu verbreiten, auf dem der Mathematiker halb unbewusst zu ihnen gelangt ist. Denn am Ende ist es doch nicht die Philosophie, sondern die Mathematik selbst, welche zu bestimmen hat, was sie zum Gegenstand ihrer Untersuchung machen will und was nicht.

Tritt man nun aber an die kritische Behandlung der Frage heran, so zeigt sich zunächst als das begrifflich wichtigste Moment die Thatsache, dass alle über die absoluten Zahlen hinausführenden Betrachtungen, alle ferneren Erweiterungen des Zahlbegriffs ohne jeden realen Untergrund sind und rein transcendente Speculationen bedeuten. Die genetische Entwicklung ist für die Erfahrung mit dem absoluten Zahlbegriff geschlossen als dem Beziehungssubstrat für die actuellen Operationen der vier Species. Dieser anschauliche Charakter wurde nun aber sehr bald äußerst lästig. Denn der Mathematik kommt es ja im allgemeinen auf die concrete Bedeutung der Objecte, auf welche sie bezogen wird, keineswegs an; sie untersucht in der Hauptsache nur die äußeren Formen ihrer Verknüpfung. Infolge dessen musste es auch durchaus unbequem erscheinen, wenn gerade bei den einfachen vier Species die ziemlich gleichgültige anschauliche Bedeutung der Forschung da Grenzen setzen sollte, wo das eigentliche Object der Untersuchung, nämlich die formalen Eigenschaften der Operationen keine besaßen. Denn schon die ersten, halb spielenden Versuche, die man in Hinsicht auf eine Erweiterung des bisherigen Forschungsgebietes unternahm, nicht weil irgend ein unerklärlicher Hang zum Mystischen gewaltsam zu transcendenten Speculationen getrieben hätte, sondern weil man, freilich nur halb bewusst, jene Beschränkung der formalen Untersuchung durch das ganz fremde Element der Anschaulichkeit als etwas drückendes empfand und empfinden musste, lehrten, dass in der That die algebraischen Formen der Species nicht an die Anschauung geknüpft waren. Und schon sehr bald zeigte es sich, dass man Subtraction, Division und Radicirung unter genau denselben Gesichtspunkten wie früher betrachten konnte, auch da, wo die (bisher auch schon völlig einflusslose) anschauliche Bedeutung ganz fehlte. Da man aber für diese Fälle immerhin irgendwelche Beziehungssubstrate brauchte, wenn man auch keine concreten finden konnte, so fingirte man zu diesem Zweck die negativen, gebrochenen, irrationalen und imaginären Zahlen, nicht in dem Glauben hiermit ganz neue, bisher dem menschlichen Geist unbekannte Größen entdeckt zu haben, sondern anfangs mit dem vollen Bewusstsein einer der Allgemeinheit der lytischen Methoden zu Liebe erfundenen Fiction.

Dies ist in wenig Worten das wahre Motiv zur Bildung der transcendenten Zahlformen. Unter einem höheren Gesichtspunkt betrachtet stellt es sich dar als ein Specialfall jenes unentwegten zielbewussten Strebens nach größtmöglicher Allgemeinheit, nach Beseitigung aller Ausnahmen, das den neueren Mathematiker den synthetisch construirenden Griechen so unendlich überlegen gemacht hat, dass Hankel ihn einmal treffend mit einem Minirer vergleicht, welcher in wenigen Gängen einen Fels durchzieht, dann von diesen aus den ganzen Block zersprengt und so mit einem Schlage dasjenige zu Tage fördert, was der Grieche in mühseliger Arbeit langsam von außen abzubröckeln gezwungen ist [1]. Gerade darum aber stehen auch die erwähnten Zahlformen als nominelle Erfindungen zu Gunsten der allgemeinen Ausführbarkeit aller lytischen Operationen durchaus auf der gleichen Stufe, wie etwa die unendlich fernen Punkte, Geraden und Ebenen der projectiven Geometrie, sie sind völlig transcendent. Und so wenig es dem Geometer beikommt zu glauben, dass es im Unendlichen auf der Geraden wirklich nur einen Punkt, in der Ebene nur eine Gerade [2], im Raum nur eine Ebene gäbe, so wenig darf auch der Arithmetiker die zunächst rein fictive Existenz seiner Zahlformen leugnen wollen. Dass man dieser Forderung nicht immer gerecht wurde, dass man, verleitet durch eine Reihe leicht zu findender, nachträglich beizubringender Bedeutungen im Banne realistischer Ansichten doch wieder alle Zahlen zu substantialisiren suchte, dass selbst ein Gauß aus der geometrischen Veranschaulichung des Imaginären neuen Aufschluss über die »wahre Metaphysik« desselben erhalten zu können meinte, haben wir ja bereits bei der Besprechung des mathematischen Realismus zu bemerken Gelegenheit gehabt. Hier ist weniger die kritische Prüfung dieser realistischen Verirrung, als vielmehr die positive Würdigung der lange verkannten und vielfach missgedeuteten formalen Erweiterung des Zahlbegriffs unsere Aufgabe.

Da wir es nun hier durchweg mit transcendenten Begriffen zu thun haben, so sind wir zunächst dem bisher maßgebenden Gebiete der Induction völlig entrückt und gänzlich in das der abstracten

---

1) Hankel: Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten, zweite Auflage, Tübingen 1885 p. 9.

2) Hier würde er noch dazu mit dem Functionentheoretiker zusammenstoßen, der ja das Unendliche der Ebene als Punkt auffasst.

Deduction getreten. Die Form dieser Deduction, welche natürlich eigentliche empirische Erkenntnisse nicht mehr liefern kann, ist nun überall die exacte Analogie. Von der obigen, auch beim absoluten Zahlbegriff in Wirksamkeit tretenden Generalisation unterscheidet sie sich dadurch, dass jene nur die Aufgabe hat, inductiv gewonnenen Resultaten auch für solche Fälle Gültigkeit zu verleihen, wo die Erfahrung diese nicht unmittelbar gibt oder doch nur auf sehr mühsame Art und Weise geben könnte, diese jedoch Gesetze und Beziehungen derselben Art auf Formen zu übertragen hat, die aus der Erfahrung niemals gewonnen wurden. Jene diente daher nur zur begrifflichen Ordnung anderweitig schon bekannter Verhältnisse, wie sie ja auch stets mit absoluten Zahlen operirte, diese dagegen war bestimmt, ein ganz neues Feld der Speculation zu eröffnen, dessen Begriffe, rein abstract, allein dem logischen Denken angehörten. Jene bedurfte bei ihrer allgemeinen Anwendung allein des generellen Princips der Constanz aller mathematischen Untersuchungsobjecte, d. h. der Gleichartigkeit des psychologischen Denkens, diese dagegen, wollte sie nicht ganz vag auf gutes Glück herumprobiren, noch eines neuen allgemeinen hodegetischen Princips, an dessen Hand die Auffindung weiterer Zahlbegriffe allein möglich war.

Nun haben wir oben als allein gültiges Merkmal für den Zahlbegriff die arithmetischen Eigenschaften festgehalten. Als Zahl im weitesten Sinne wäre demnach zu definiren, was immer diese Merkmale aufweist. Hiermit ist nun in der That auch im wesentlichen der leitende Grundsatz der folgenden Generalisation ausgesprochen. Doch ist eine Bemerkung so allgemeiner Natur selbstverständlich niemals geeignet, als ein mathematisches Princip zu dienen. Ein solches bedarf vielmehr einer scharfen, exacten Fassung und unzweideutigen Bestimmung. Darum präcisirte Hankel das verlangte durchgreifende Princip der Nominalisirung als das der Permanenz formaler Gesetze[1]), eine Gestalt, in der es seitdem allgemein in die Lehrbücher übergegangen ist. In Wahrheit ist es noch allgemeiner und umfassender als die Specialform, in der es für unsern Zweck in Betracht kommt, nämlich in der Forderung der Allgemeingültig-

1) Complexe Zahlen p. 10.

keit sämmtlicher drei lytischen Operationen. Und da ein Zweifel über seine Richtigkeit nicht existirt, werden wir uns ihm im folgenden unbedingt anvertrauen.

Als ein zweiter, aber nicht überall befolgter Grundsatz wäre dann noch die Forderung anzusehen, dass alle betrachteten Operationen stets eindeutig sein sollen. Für die Division ist aber z. B. dies Verlangen wieder fallen gelassen. So ist bei den Quaternionen und den Grassmann'schen alternirenden Zahlen die Division keineswegs eindeutig. Daher können wir von diesem Grundsatz auch nicht durchgängig Gebrauch machen.

Da nun die Grundlagen, von denen die Generalisation vermittelst des Permanenzprincips formaler Gesetze ausgeht, der Anschaulichkeit ganz entbehren, so sind sie in gewissem Sinne willkürlich. Denn wie man sonst im allgemeinen solche Bestimmungen fassen will, d. h. welche formalen Eigenschaften man beibehalten will, wäre methodologisch ganz gleichgültig. Nur die eine Beschränkung ist dabei gegeben, dass sie weder sich selbst noch bereits recipirten Begriffen der Logik widersprechen dürfen. Die historisch behandelten Zahlbegriffe haben übrigens zu einem Gegensatz zum allgemeinen Denken selten Anlass gegeben; nur in sich selbst schienen sie häufig genug widerspruchsvoll. Wir haben aber angedeutet, wie eine solche schiefe Auffassung immer auf der unberechtigten Vermengung zweier verschiedener Begriffe beruhte, indem man einmal die Vorzeichen functionell, das andere Mal als charakteristisches Merkmal einer durch sie definirten Zahl auffasste. Die erste Form entspricht dem absoluten, die zweite dem allgemeinen Zahlbegriff, mit dem wir es hier allein zu thun haben.

Wir hatten den letzteren nun abhängig gemacht von den formalen Eigenschaften der arithmetischen Grundoperationen. Sollte also eine exacte Durchführung der beabsichtigten Generalisirung überhaupt möglich sein, so war es nothwendig, diese formalen Eigenschaften erst gründlich zu fixiren, eine Aufgabe, deren endgültiger Lösung ein großer Theil der wissenschaftlichen Arbeit des letzten Jahrhunderts gewidmet war. Als Resultat derselben, das wir hier natürlich nur historisch mittheilen, nicht ausdrücklich verificiren können, stellten sich die wesentlichen Eigenschaften der Addition und Multiplication — die Potenzirung können wir vorläufig aus dem Spiele lassen — in folgender Form dar:

1. für die Addition

a) das associative Gesetz: $(a+b)+c=a+(b+c)$

und b) das commutative: $a+b=b+a$;

2. für die Multiplication

a) das associative: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

und ebenfalls b) das commutative: $a\cdot b=b\cdot a$;

3. für beide Operationen in ihrer Verbindung das distributive Gesetz: $a(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ und $(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$.

Diese Eigenschaften[1]) sind für die absoluten Zahlen natürlich alle inductive Wahrheiten von allgemeiner Gültigkeit und zwar zugleich die letzten und einfachsten Formen derselben. Der gewöhnliche Weg ihrer logischen Schematisirung für die Deduction würde also der sein, dass man sie ohne weiteres zu Definitionen der Addition und Multiplication macht. Und in der That ist diese rein formale Definition diejenige, welche der Entwicklung des allgemeinen Zahlbegriffs zu Grunde gelegt wurde. Wir werden demnach die Addition definiren als eine associative und commutative Verknüpfung irgendwelcher Beziehungselemente, die Multiplication als eine associative, commutative und in Bezug auf die Addition distributive Operation derselben Art. Da diese Bestimmung rein formal ist, so umfasst sie natürlich auch den Specialfall der actuellen Addition und Multiplication, in welche die generellen Operationen übergehen, wenn der allgemeine Zahlbegriff zum absoluten zusammenschrumpft.

Der allgemeine Zahlbegriff kann nun auf Grund des Permanenzprincips der formalen Gesetze einfach definirt werden als das **Beziehungssubstrat für die angeführten formalen Operationen.** Hiermit ist in der That die wissenschaftlich recipirte Begriffsbestimmung der transcendenten Zahlformen auf ihre logischen Grundlagen zurückgeführt. Denn da dieselben lediglich Fictionen ohne jeden realen Inhalt sind, die man erfand, um die lytischen Operationen immer ausführbar zu machen, so lässt sich eine andre

---

1) Ich entnehme dieselben der besten hierüber bestehenden Darstellung, der von Hankel. (Complexe Zahlen p. 36—39.)

als diese rein äußerliche Nominaldefinition schlechterdings nicht geben.

Fragen wir nun nach dem Umfang des so definirten Begriffs, der, wie wir hier bemerken wollen, als »formale Zahl« bezeichnet wird, so brauchen wir uns der abstracten Bestimmung zufolge dabei keineswegs mehr an die Anschauung zu binden; dennoch aber werden thatsächlich die verschiedenen hierhergehörigen Zahlformen indirect aus der Anschauung gewonnen, da ja eine apriorische Existenz derselben im menschlichen Geiste weder zu beweisen noch überhaupt wahrscheinlich ist.

Als einfachste Zahlart bieten sich hier offenbar die absoluten Zahlen selbst, welche völlig mit unter den allgemeineren Begriff fallen. Nur kommt hier nicht ihre actuelle Bedeutung, sondern allein ihr formaler Charakter in Betracht. Damit ist aber der allgemeine Begriff der formalen Zahl keineswegs erschöpft. Denn nun zeigt sich unmittelbar, dass man die im vorigen Kapitel erwähnten Fälle von unausführbaren lytischen Operationen sofort zur Definition von Formen benutzen kann, welche völlig unanschaulich sind, aber direct unter den Begriff der formalen Zahlen fallen. Als einfachste neue Zahlgattung bieten sich zunächst die negativen Zahlen. Wie man die absolute Zahl gewann durch vollendet gedachte Setzung von Einheiten des psychologischen Anzahlbegriffes, so wurde die negative der begriffliche Ausdruck für die angenommene Hinwegdenkung einer absoluten Zahl. Dieser Process ist natürlich an und für sich vollständig unanschaulich, so lange nicht schon von Anfang an eine bestimmte absolute Zahl gegeben ist, derart, dass das Resultat jener Aufhebung immer noch einen positiven Rest lässt. Es wäre aber ganz verkehrt, zu glauben, dass auf die Natur desselben überhaupt irgend etwas ankäme; die Discussion darüber gehört allein dem absoluten Zahlbegriff an. Dort war es in der That der Process der Negation, welcher von Bedeutung wurde, hier aber ist die negative Zahl das vollendet gedachte Resultat desselben, ganz gleich, ob es vorstellbar ist oder nicht.

Begrifflich aber ist auf diesem Wege das Negative, früher eine Function des absoluten Zahlbegriffs, jetzt selbständig geworden und tritt nun in entschiedenen Gegensatz zu jenem, der hierdurch erst als positive Zahl erscheint. Eine, natürlich mit größter Sorgfalt vorzunehmende Untersuchung lehrt dann, dass in der That die negativen Zahlen dem allgemeinen Begriff beizurechnen sind, d. h., dass sich formale Eigenschaften derselben so festsetzen lassen, dass sie dem Permanenzprincip Genüge thun. Die wesentlichsten dieser neu zu treffenden Bestimmungen sind:

$$+a + (-a) = 0\ ;\ -(-a) = +a\ ;\ (-a)\cdot b = a\cdot(-b) = -(a\cdot b)\ ;$$
$$(-a)\cdot(-b) = +(a\cdot b)$$

Und diese Beziehungen sind — darauf müssen wir hier noch einmal zurückkommen — durchaus nothwendige Festsetzungen, welche den Begriff der negativen Formalzahlen erst ermöglichen. Sie sind aber als solche zugleich in gewissem Sinne willkürlich; denn im Begriff der negativen Zahl sind sie nicht gegeben. Nun gibt es allerdings noch heutzutage sehr viele Mathematiker, welche die Zumuthung, dass ihre Wissenschaft etwas willkürliches enthalte, mit Entrüstung zurückweisen, die Richtigkeit der obigen Formeln aber entweder als beweisbar ansehen oder sich damit trösten, dass sie schlechthin nothwendig seien. Das eine ist so unzutreffend, wie das andere. Denn alle Beweise, welche für die Richtigkeit der Gleichungen in's Feld geführt werden, treffen in Wahrheit ganz etwas andres. Sie beweisen nämlich nicht, wie wir schon oben [1]) bemerkten, die betreffenden Combinationsgesetze der negativen, sondern nur die negativ genommener absoluter Zahlen, sie deduciren nicht aus dem Zahlbegriff, sondern aus dem Vorzeichen allein, kurz sie haben nicht das Resultat der Negation, sondern die Negation selbst im Auge, gehören also zum absoluten, nicht zum allgemeinen Zahlbegriff. Aus der Nominaldefinition der negativen Zahl ist aber schlechterdings nichts zu entnehmen. Weitere Bestimmungen, die natürlich auch rein formaler Natur sein müssen, können also nur von außen hinzukommen. Dies hat man nun wohl auch andererseits erkannt, aber die Willkür ihrer Festsetzung durch das Schlagwort ihrer Nothwendigkeit heben zu können gemeint [2]). Hier ist aber der Irrthum ziemlich durchsichtig. Denn nothwendig sind die Fixirungen wohl, so nothwendig sogar, dass sie die negativen Zahlen überhaupt erst begrifflich fest bestimmen, aber jedenfalls

---

1) Kapitel III, 2 gegen Ende.

2) Dieses Schlagwort ist namentlich sehr beliebt in der am Ende von Kapitel III 2 erwähnten Controverse.

doch nur nothwendig auf Grund des Permanenzprincips der formalen Gesetze. Dass man aber gerade dies Princip zum leitenden gemacht hat, das ist eben conventionelle Willkür. Zwar empfiehlt es sich durch seine außerordentliche Fruchtbarkeit, und seine Aufstellung ist tief in der historischen Entwicklung des menschlichen Denkens begründet, aber man hätte mit demselben Rechte auch irgend ein andres hodegetisches Princip wählen können. Denn wir dürfen keinen Augenblick vergessen, dass wir uns hier auf dem völlig unanschaulichen Boden von Nominaldefinitionen und formalen Bestimmungen bewegen, dass die behandelten Zahlbegriffe, ursprünglich ganz inhaltsleer, ihre Eigenschaften erst durch äußere künstliche Fixirung erhalten.

Durch die Einführung der negativen Zahlen waren nun alle Subtractionen in Formalzahlen wirklich auszuführen oder, wie man sich besser ausdrücken sollte, ausgeführt zu denken, und alle additiven, subtractiven und multiplicativen Verknüpfungen führten wieder auf Zahlen desselben Charakters, d. h. auf positive oder negative ganze Zahlen (oder auch auf die Null); nicht so die Division. Das Verlangen, dass auch sie formell immer ausführbar sein sollte, leitete auf die Brüche oder die gebrochenen Zahlen. Anfänglich formell als möglich angenommen und gedacht als das Resultat einer unrealisirbaren Theilung einer Zahl, werden sie durch die nothwendige Probe auf Grund des Permanenzprincips in ihren Eigenschaften wieder derartig bestimmt, dass sie thatsächlich als neue Formen des allgemeinen Zahlbegriffs zugelassen werden können. Diese hinzukommenden Festsetzungen tragen natürlich wieder den Charakter formal nothwendiger Zusatzbestimmungen, welche die Zahlexistenz der Brüche bedingen; und Sätze wie: »Statt mit einem Bruch zu dividiren, kann man mit dem umgekehrten multipliciren« sind hier aus dem Begriff des Bruches so wenig zu beweisen, wie früher die Bestimmung $-(-a) = +a$.

Auf diese Weise waren nun alle vier Species immer ausführbar geworden, und zwar so, dass sie immer wieder formale Zahlen oder — und das bildet die einzige, unvermeidliche Ausnahme — die Null erzeugten. Die formale Zahl selbst aber, definirt als das Beziehungssubstrat für diese Operationen, war nun beherrscht von dem doppelten Gegensatz der positiven und negativen, der ganzen und gebrochenen Zahlen. Hiermit ist ihr Gebiet indessen noch nicht erschöpft. Denn in der That liefert die Unausführbarkeit der Radicirung weitere, ebenfalls als Zahlen zu behandelnde Formen, nämlich zunächst die Irrationalitäten, d. h. die Wurzeln aus irgendwelchen ganzen Zahlen[1]). Eine Discussion dieser Ausdrücke lehrte dann, dass auch sie den formalen Zahlen beizurechnen seien, und dasselbe galt auch von den Wurzeln aus Brüchen.

Hierbei zeigte sich nun freilich eine neue Erscheinung, nämlich die, dass eine solche Bestimmung der Irrationalzahlen niemals eindeutig zu erreichen war, dass es immer mehrere, unter einander verschiedene Ausdrücke gab, welche den definirenden formalen Bedingungen Genüge leisteten. Es war also hier zum ersten Mal das Princip der eindeutigen Begriffsbestimmung durchbrochen, aber nicht so, dass nun ein regelloses Chaos von neuen Zahlen entstanden wäre, sondern die auftretende Vieldeutigkeit wurde durch ihre Gesetzmäßigkeit wieder unschädlich gemacht. Sie konnte daher ignorirt, und die einzelnen Formen einer Irrationalität durften für sich als Zahlen gefasst werden.

Die Möglichkeit der allgemeinen Durchführung dieser Betrachtung beruht indessen schon auf der Voraussetzung der letzten hier in's Auge zu fassenden Zahlgattung, der imaginären Zahlen. Definirt als Quadratwurzeln aus negativen Zahlen, was selbstverständlich wieder nur einer inhaltsleeren Nominalbestimmung gleichkommt, durch ihre formalen Eigenschaften auf Grund dieser Definition in Uebereinstimmung mit den bereits bekannten Regeln für das Negative und die Wurzeln näher fixirt, bilden sie die letzte Art des formalen Zahlbegriffs und zugleich die interessanteste Erweiterung desselben. Da aber auch sie, wie die reellen Irrationalitäten, niemals völlig eindeutig definirt werden können, so müssten sie eigentlich ebenfalls vom Zahlbegriff ausgeschlossen werden, wenn man nicht statt der ursprünglich geforderten Eindeutigkeit eine gesetzmäßige Vieldeutigkeit zulassen will.

Wir haben hier zwei einander umfassende Gebiete der formalen Zahl. Das eine beschränkt sich auf die vier Species als Grundoperationen, und seine Zahlarten sind bestimmt durch die Gegen-

---

1) Dabei darf natürlich die Potenzirung auch nur formal gefasst, d. h. durch ihre äußeren Eigenschaften definirt werden, wie z. B. durch die Formel $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.

sätze von positiv und negativ, von ganz und gebrochen. Alle seine Begriffe und Operationen sind eindeutig definirt. Das zweite, umfangreichere Gebiet hebt die letzte Beschränkung auf und lässt statt dessen eine gesetzmäßige Vieldeutigkeit zu, wobei freilich die Null, weil sie zu einer unendlich vieldeutigen Division Anlass geben würde, immer noch ausgeschlossen bleibt. Sein Zahlenmaterial ist noch durch den Gegensatz von rational und irrational, von reell und imaginär erweitert. Dort haben wir nur vier, hier aber sechs Grundoperationen, nämlich die vier Species und die algebraischen Verknüpfungen; und weder führen die ersteren über die gebrochenen, noch die letzteren über die complexen Zahlen hinaus. Beide Gebiete sind also in sich völlig abgeschlossen. Für das erstere ist das unmittelbar evident, für das zweite ergibt es sich aus dem Fundamentalsatz der Algebra, dass jede endliche Combination der sechs Grundoperationen immer in gesetzmäßiger Weise eine allgemein complexe Zahl definirt[1]).

Zu neuen Zahlen kann man demnach auf diesem Wege nicht mehr gelangen. Der Umfang der formalen Zahlen ist damit völlig erschöpft. Es wird deshalb zweckmäßig sein, am Schlusse dieser Betrachtung sich noch einmal kurz ihre logischen Merkmale zu vergegenwärtigen. Das erste und vorzüglichste derselben ist die rein begriffliche Existenz, die absolute Unanschaulichkeit. Wir haben, mit andern Worten, in der formalen Zahl den reinen Typus der numeri ficti C a r d a n's und S t i f e l's gefunden. Definiren konnten wir diese Zahlen daher auch nur nominal als die Beziehungssubstrate für die gleichfalls formal gefassten arithmetischen Grundoperationen. Da aber aus einer Nominaldefinition niemals etwas reales herauszulesen ist, da ferner für eine zweckmäßige Begriffsbestimmung einer formalen Operation aus ihrem Begriffe heraus keinerlei Anhaltspunkte zu gewinnen sind[2]), so ist die formale

---

1) Der Beweis dieses Satzes muss in dem vorliegenden Zusammenhange natürlich rein algebraisch sein und sich von allen Stetigkeitsbetrachtungen freihalten, etwa wie der zweite von G a u ß angegebene.

2) Man könnte natürlich von vorn herein auch irgend welche andern formalen Eigenschaften festsetzen, als die gewöhnlichen. Dies würde aber doch einem blinden Probiren gleich zu achten sein, ob es gleich nicht ausgeschlossen ist, dass man auch auf diesem Wege zu interessanten Operationssystemen gelangen könnte.

Zahlentheorie doch gezwungen, sowohl ihre Operationen als auch ihr Material indirect aus der Anschauung zu entlehnen. Jene können daher auch nur durch den Zusatz genetisch fixirt werden, dass sie unmittelbar in ihre actuellen Formen übergehen, wenn man den allgemeinen Zahlbegriff auf den absoluten beschränkt.

Die Beziehungssubstrate für diese Operationen sind ebenfalls in fester Gestalt nur aus der Anschauung zu gewinnen. Denn in ihrer Definition — und eine andere ist für die formale Zahl schlechterdings nicht zu geben — liegt gar nichts, was auf irgend eine Bestimmung ihrer Form hinwiese. Die Auffindung dieser Zahlarten kann daher auch nur durch ein systematisches Probiren geschehen, derart, dass man bestimmte anschauliche Formen in's Auge fasst, die anschaulichen Momente eliminirt, die formalen allein beibehält und nun die Nominaldefinition als ein Kriterium benutzt, vermöge dessen über die Zulassung der betreffenden Formen zum Zahlbegriff entschieden wird. Auf diesem Wege erhalten dann zugleich die neuen Zahlen auch alle die neuen Bestimmungen, welche ihnen die bloße Nominaldefinition nicht geben konnte.

Wir haben damit die systematische Methode skizzirt, welche heutzutage seit dem Erscheinen des vielfach schon citirten Hankelschen Werkes über die complexen Zahlsysteme und mehr noch auf Grund der parallelen Untersuchungen von Weierstraß[1]) allgemein angewendet wird, um die mangelhaften früheren Theorien zu ersetzen. Sie ist mathematisch ja entschieden viel werthvoller und so streng, wie es überhaupt nur denkbar ist. Indessen kann doch nicht verschwiegen werden, dass sie das wahre logische Verhältniss einigermaßen verdeckt. Bei dieser Art der Behandlung erscheint es nämlich schließlich doch immer als ein Glück, auf das man eigentlich gar nicht hoffen durfte, wenn die untersuchten Ausdrücke sich thatsächlich so bestimmen lassen, dass man sie mit unter den Zahlbegriff aufnehmen kann. Denn man bleibt hierbei bis zuletzt

1) Da das Hankelsche Werk viel weniger bekannt ist, als es verdient, so kann man heutzutage noch vielfach die Ansicht hören, dass die ganze strenge Betrachtung überhaupt erst von Weierstraß herrühre. Dies ist durchaus unzutreffend. Hankel hat seine, von Weierstraß ganz unabhängigen Arbeiten zum mindesten früher (1867) publicirt und verfährt auch arithmetisch viel systematischer, während Weierstraß, der nur für die Functionentheorie eine sichere Basis gewinnen will, immer mit Zahlgrößen, nie mit formalen Zahlen operirt.

ungewiss darüber, ob die Entscheidung positiv oder negativ ausfallen wird, während es doch logisch von vorn herein klar sein muss, dass die Anwendung der formal ganz eindeutig definirten allgemeinen Operationen nicht an den engen Umfang der bloßen absoluten Zahlen gebunden sein kann. Diese Incongruenz zwischen der mathematischen Behandlung und dem eigentlichen logischen Verhältniss erklärt sich leicht durch die Thatsache, dass der Arithmetiker durch die hergebrachte Form der Bearbeitung gezwungen ist, auf den Zahlbegriff selbst die volle Aufmerksamkeit zu lenken, während in Wahrheit gar nicht einmal dieser, sondern eigentlich nur die formalen Operationen der wirkliche Gegenstand der Untersuchung sind. Denn man hatte keineswegs die neuen Zahlen um ihrer selbst willen in den Kreis der Betrachtung gezogen, etwa weil ihre wunderbaren Eigenschaften den wissenschaftlichen Forschungseifer gereizt hätten. Im Gegentheil, ihre ganz heterogene Natur hat von Anfang an den exact geschulten Arithmetiker mit Misstrauen erfüllt und immer nur abgestoßen, nie angezogen. Und wenn die formalen Zahlen sich trotzdem immer und immer wieder aufgedrängt haben, so ist das der beste Beweis dafür, dass man sich nicht freiwillig mit ihnen befasste, sondern nur gezwungen durch die rein formalen arithmetischen Untersuchungen, welche nothwendig über die anschaulichen absoluten Zahlen hinausführen mussten. Denn in der That, wenn man es z. B. unternahm, größere Zahlen von kleineren abzuziehen, so war es nicht das Interesse an den Zahlen, welches diesen Versuch bestimmte, sondern das an der fraglichen Operation selbst. Man wollte eben sehen, ob die Subtraction auch außerhalb der Anschauung dieselben Eigenschaften beibehielt, welche man bis dahin an ihr kennen gelernt hatte. Und da man bei allen Grundoperationen sehr bald merkte, dass sie, formal aufgefasst, ganz unabhängig waren von ihrem concreten Beziehungssubstrat, den absoluten Zahlen, so war es ganz natürlich, dass man sie auch unabhängig davon behandeln wollte.

Nun ist es aber offenbar völlig unmöglich, Operationen ohne einen Gegenstand, worauf sie sich beziehen, Verknüpfungen ohne ein Verknüpftes zu untersuchen oder auch nur zu denken. In Folge dessen war es unvermeidlich, dass man sich nach einem Object umsah, welches den leeren Formbetrachtungen einen festen

Halt geben konnte. Als solches bestimmte man den allgemeinen Begriff der formalen Zahl, welcher eben nichts weiter ist und sein soll, als ein Beziehungssubstrat für die formalen Operationen. Er ist also lediglich ein Hülfsbegriff. Seine Gestalt und Natur ist zunächst völlig gleichgültig und für die Operationen selbst ohne jede Bedeutung, sowie die Leinwand auf das Bild einflusslos ist, das man auf sie gemalt hat.

Erst eine secundäre Frage ist es dann, ob es möglich ist, für die erwähnten Beziehungssubstrate auch thatsächlich näher bestimmte, greifbarere Formen zu finden. Und, da man aus der Definition selbst nichts folgern kann, auch für die Untersuchung der rein formalen Operationen nichts zu folgern braucht, so ist man gezwungen, anderswoher Hülfe zu nehmen. Die Fundgrube für die Gewinnung solcher Zahlarten bilden nun die lytischen Operationen der Subtraction, Division und Radicirung. Denn, abgesehen von den absoluten Zahlen, welche naturgemäß unter den Begriff der formalen rubricirt werden müssen, konnten sie für die Fälle, wo ihnen anschauliche Deutungen nicht mehr zu geben, d. h. wo sie in absoluten Zahlen nicht mehr auszuführen waren, dadurch dass man von ihrer actuellen Bedeutung abstrahirte, zur Definition neuer Formen benutzt werden, welche sich dann, mit Ausnahme der Null, alle so bestimmen ließen, dass sie als formale Zahlen betrachtet werden durften. Dies kann aber kaum Wunder nehmen. Denn, da die absoluten Zahlen wohl unter den allgemeinen Begriff fallen, aber doch von viel zu beschränkter Anwendbarkeit sind und den ganz allgemeingültigen Operationen immer nur in gewissen Fällen als begriffliche Unterlage dienen können, so war es logisch eigentlich unmittelbar evident, dass es für die übrigen Fälle andere Formen geben müsse, welche, den absoluten Zahlen gleichwerthig, sie bei den transcendenten Speculationen ersetzten. Deshalb bedeuten die Betrachtungen, welche die Arithmetik bei der Einführung der neuen Zahlgattungen vorzunehmen pflegt, nicht eigentlich experimenta crucis über die Möglichkeit derselben, obwohl man ihnen der methodischen Strenge zuliebe diesen Anschein gibt — denn, dass irgend welche, den betrachteten ähnliche Formen existiren müssen, ist logisch von vorn herein klar — sondern sie sind vielmehr direct positiv bestimmt, die noch ungewissen schematischen Ausdrücke, von denen man nichts weiß, als dass sie existiren müssen, so zu fixiren, wie es gerade nöthig ist. Denn um ihre Möglichkeit handelt es sich in Wahrheit viel weniger, als um die Eigenschaften, die man ihnen noch beilegen muss, damit sie Zahlen werden.

Diese Eigenschaften selbst sind aber für den allgemeinen Zahlbegriff vollständig irrelevant. Sie sind nur halb zufällig durch den Umstand bestimmt, dass man, um überhaupt irgend welche bekannten Formen für den allgemeinen Begriff zu finden, von der Anschauung, d. h. von den absoluten Zahlen ausgehen muss. Aber das Resultat wäre schließlich auch dasselbe geworden, wenn das uns zunächst gegebene nicht die absoluten Zahlen, sondern etwa die negativen Zahlen, und entsprechend die primäre Operation nicht die Addition, sondern die Subtraction gewesen wäre. Man hätte dann ein ganz analog beschränktes Forschungsgebiet für die in Wahrheit unbeschränkten Operationen gehabt und, um diesem unnatürlichen Zwange zu entgehen, dasselbe ganz entsprechend durch die positiven Zahlen u. s. f. erweitert.

Vielleicht ist es nicht überflüssig, die vorstehenden Betrachtungen durch einen Vergleich näher zu erläutern. Die ersten Versuche bildhauerischer Thätigkeit sind bekanntlich bei den meisten Völkern in Stein ausgeführt. Man konnte deshalb die Skulptur anfänglich definiren als die Kunst, gewisse Formen im Stein abzubilden. Dennoch ist offenbar in der Definition der Stein ziemlich überflüssig. Denn in Wahrheit kommt es doch nur auf die Erzielung der gewünschten Formen an, nicht auf das Material. Nur weil man zu diesem Zweck irgend einen Stoff der Bearbeitung braucht, war man genöthigt zu der Erreichung der gewünschten Absichten den Stein zu benutzen als das vorläufig allein geeignete Material. Nun wuchs aber die Skulptur allmählich über ihre bisherigen Zwecke hinaus und erweiterte sich zur plastischen bildenden Kunst, als deren Aufgabe man allgemein die körperliche Herausarbeitung bestimmter, gewollter Formen bezeichnen kann. Von dem Stoff der Bearbeitung ist hier keine Rede, er ist vollständig Nebensache geworden. Zudem kam man nun mit dem bisher dazu verwandten Stein nicht mehr aus. Denn da dieser immer doch nur gewisse, typisch wiederkehrende Arten der Bethätigung einer offenbar viel allgemeineren Kunst gestattete, da man z. B. immer in großen Dimensionen arbeiten musste, so fand man schließlich nach und nach andere Materialien, welche jedes für sich auf einem bestimmten speciellen Gebiete als Objecte der Bearbeitung dienen konnten und so in ihrer Gesammtheit das ersetzten, was in der Natur nicht gegeben war, nämlich ein einheitliches, für alle künstlerischen Zwecke passendes Material. Eine ganz ähnliche Entwicklung hätte aber schließlich die plastische Kunst genommen, wenn man anfänglich nicht vom Stein, sondern etwa vom Holz oder etwas anderem ausgegangen wäre. Auch dann würde man heutzutage Colossalstatuen nicht aus Elfenbein, sondern aus Stein oder Erz, Miniaturfiguren umgekehrt nicht aus Stein, sondern aus Elfenbein oder Porzellan oder etwas ähnlichem machen.

Ganz analog liegen die Verhältnisse beim Zahlbegriff. Ursprünglich war die Arithmetik eine Rechnenkunst, die man, weil man nichts anderes hatte, an absoluten Zahlen ausübte. Dann wurde die Kunst die Hauptsache, die absoluten Zahlen gleichgültig, d. h. man hielt ebenfalls die Form fest, unabhängig von dem bisher benutzten Material. Aber auch hier brauchte man irgend einen festen Stoff, womit man die verlangten Operationen vornehmen konnte. Und da zu diesem Zweck der absolute Zahlbegriff zu beschränkt war, da er immer nur in ganz bestimmten Fällen die Ausführung der beabsichtigten Operationen gestattete, so war man genöthigt, für alle übrigen Fälle zu neuen Zahlformen zu greifen, welche zwar nur transcendent sein konnten, aber den absoluten Zahlen arithmetisch doch durchaus coordinirt waren. So setzte man aus positiven und negativen, ganzen und gebrochenen, rationalen und irrationalen, reellen und imaginären den allgemeinen Begriff der Formalzahl, das Complexe zusammen. Und man wäre auch hier schließlich zu demselben Resultat gekommen, wenn man einen anderen Ausgangspunkt, also etwa die negativen statt der absoluten Zahlen gewählt hätte. Immer bleibt das Object das secundäre, die Form das primäre. Und so wenig der reine Formenwerth eines Kunstwerkes von dem Material berührt wird, in dem es ausgeführt ist, so wenig ist die mathematische Sicherheit eines Resultates davon abhängig, ob man mit absoluten oder irgendwelchen transcendenten Zahlen gerechnet hat.

In diesem letzteren Umstand liegt zugleich die Erklärung für die dem Nominalismus unbegreifliche Thatsache, dass völlig reale Ergebnisse und Beziehungen aus ganz unmöglichen transcendenten Formen gewonnen werden. Sie werden nämlich gar nicht durch diese Zahlen, sondern in Wahrheit durch die allgemeingültigen formalen Operationen erhalten, auf deren Richtigkeit die Beziehungssubstrate ohne jeden Einfluss sind. Die transcendenten Zahlen haben eben nur die Bestimmung, als allgemeinere Beziehungssubstrate für die dem absoluten Zahlbegriff entwachsenen arithmetischen Grundverknüpfungen zu dienen, d. h. genauer gesprochen den drei lytischen Operationen allgemeine Gültigkeit zu verleihen.

Dieser Zweck ist aber auch wohl erreicht. Denn es sind im Gebiete der formalen Zahl thatsächlich Subtraction, Division und Radicirung in jedem Falle ausführbar geworden, wenn man noch in beschränkter Weise die Null hinzunimmt. Es ist nun aber interessant, zu sehen, wie gerade durch ihre unbegrenzte Erweiterung ihr Charakter als lytischer Operationen ganz verloren geht. In der That kennt das Gebiet der formalen Operationen in seiner allgemeinsten Herausarbeitung nur die Addition, Multiplication und Potenzirung, da ja die Begriffsbestimmung derselben durch ihre formalen Verknüpfungsgesetze auch unmittelbar auf ihre Umkehrungen passt. Die Subtraction ist eben hier formal nichts weiter, als die Addition einer negativen Zahl, die Division eine Multiplication mit einem Bruch, die Potenzirung mit gebrochenen Exponenten ersetzt endlich die Radicirung, weil die negativen, gebrochenen und irrationalen Zahlen nothwendig von vorn herein so bestimmt werden müssen, dass

$$(+a)+(-a)=0\ ,\ \frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{b}\cdot a\ ;\ \sqrt[n]{a^q}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^q=a^{\frac{q}{n}}$$

ist. In diesem Sinne spricht man bekanntlich von einer algebraischen Addition und müsste ebenso eine algebraische Multiplication und Potenzirung einführen.

Die Möglichkeit einer derartigen Identificirung entgegengesetzter Operationen, welche als solche deshalb nicht mehr erscheinen können, weil sie ihre actuelle Bedeutung eingebüßt haben und in formaler Beziehung gleich sind, beruht wesentlich auf der Commutativität. Denn nur wenn es gleich ist, ob man erst mit a multiplicirt und darauf mit b dividirt, oder umgekehrt, nur dann können beide Operationen als coordinirt gelten. Wo daher z. B. die Multiplication nicht mehr commutativ ist, — und das ist bei vielen höheren Zahlsystemen der Fall — da kann die Division auch nicht mehr als ein Specialfall derselben erscheinen, sondern wird wieder lytisch, und zwar dadurch meistens auch mehrdeutig. Man pflegt sie deshalb dort auch nicht mehr zu benutzen und von den Grundoperationen ganz auszuschließen. Als solche gelten dann nur noch die Addition, welche, immer commutativ, die Subtraction mit umfasst, und die jeweilig näher zu bestimmende Multiplication.

In unserm Falle, wo die letztere associativ, commutativ und distributiv zugleich ist, haben wir, wenn die Null ausgeschlossen wird, ein eindeutiges Operationsgebiet, welches im allgemeinen die rationalen Zahlen umfasst. Gestattet man außerdem noch eine gesetzmäßige Vieldeutigkeit, so kann der Umfang des Zahlenmaterials, ohne dass man an dem Bisherigen etwas zu ändern brauchte, noch um die algebraisch irrationalen und imaginären Zahlen erweitert werden. Ihre Multiplication ist auch noch associativ, commutativ und distributiv, und sie gestatten nunmehr alle algebraischen Verknüpfungen.

Die Möglichkeit einer solchen rein formalen Entwicklung der complexen Zahlen ist begrifflich vollkommen gegeben. Sie sind logisch ebenso wohl definirt, wie alle anderen Begriffe, und ihre Existenzberechtigung ist selbst dann nicht anzufechten, wenn man mit Berkeley der Meinung ist, dass sie nur zum Amusement dienen. Es darf indessen andrerseits auch nicht verschwiegen werden, dass noch niemals ein Mensch die hier angedeutete Entwicklung wirklich ausgeführt hat; sondern, wo immer die Idee dazu auftaucht, da ist sie bei den rationalen Zahlen stehen geblieben. Die bestimmenden Gründe sind dabei freilich immer praktischer, niemals logischer Natur gewesen. So scheute Hankel, der erste, dem man eine systematische Theorie der formalen Zahlen verdankt[1]), vor der nothwendig unendlichen Menge von Definitionen und Untersuchungen über die Irrationalitäten zurück und kam zu dem Schluss: »Es ist klar, man wird verzichten müssen, alle Aufgaben, welche die Einführung neuer Zahlen erfordern würden, vollständig und

1) Complexe Zahlen p. 35—47.

erschöpfend zu betrachten.«[1]). Das kann man wohl auch ohne weiteres unterschreiben; indessen ist der hieraus gezogene Schluss, dass auch die begriffliche Fixirung aller formalen Irrationalzahlen deshalb unausführbar sei, doch ein übereilter zu nennen. Denn die Generalisation nach exacter Analogie, welche den ganzen formalen Zahlbegriff beherrscht, gestattet unmittelbare Uebertragung gewisser Eigenschaften auf ganze Klassen von Irrationalitäten, wenn auch das zu beobachtende Verfahren immerhin noch ein sehr umständliches bleibt.

Dieselben Gesichtspunkte leiten auch Stolz, welcher die Unmöglichkeit, auf diesem Wege eine Uebersicht über die fraglichen Zahlformen zu erhalten, besonders betont und die Potenz deshalb schon als eine Function betrachtet wissen will[2]). Ebenso bleibt die Behandlung, welche Weierstraß dem Gegenstande in seinen Vorlesungen, allerdings nur in Bezug auf die hier noch nicht in Frage kommenden Zahlgrößen angedeihen ließ, bei den rationalen Zahlen stehen und geht dann gleich zu den mathematisch-transcendenten irrationalen Größen über, weil die formalen für die Functionentheorie nicht zu gebrauchen sind[3]). Und man kann auch in der That mit den oben entwickelten formalen Begriffen der irrationalen und complexen Zahlen nichts anfangen, als sie eben fixiren und schematisch mit ihnen rechnen, während sie in der Größenlehre eine viel bedeutendere Rolle spielen. Nichts desto weniger würde diese Erfahrung noch nicht die Ausschließung solcher Zahlen rechtfertigen, wenn nicht andererseits auch begriffliche Bedenken ihrer Zulassung im Wege stünden. Hierzu ist vor allen Dingen zu rechnen, dass sie die anfänglich verlangte Eindeutigkeit in eine gesetzmäßige Vieldeutigkeit verwandeln, weil ja nach dem Fundamentalsatz der Algebra jede algebraische Gleichung — und aus einer

---

1) Ebenda p. 46.

2) Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Leipzig 1885, p. 56.

3) Vgl. die Darstellungen der Weierstraß'schen Theorie bei Kossak, Die Elemente der Arithmetik, Berlin 1872; Thomae, Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen, Halle, 1880. Biermann, Theorie der analytischen Functionen, Leipzig, 1887. Die böhmische Arbeit von Kraus, Grundlagen der Arithmetik nach Vorträgen von Weierstraß, Casopis XII, 1883 p. 153 ist mir nicht zugänglich gewesen.

solchen kann man die formale Irrationalität doch nur definiren — ebenso viel Wurzeln hat, wie ihr Grad angibt.

Ist nun aber auch diese Vieldeutigkeit ihrer Gesetzmäßigkeit wegen gefahrlos, so kann doch andrerseits die Betrachtung der Potenzirung und Radicirung als Grundoperationen schwerer wiegende Bedenken erregen. Die Species waren so eingerichtet, dass alle additiven und multiplicativen Verknüpfungen zwischen zwei Zahlen des Gebietes wieder eine ebensolche Zahl (oder die Null) erzeugten; und dasselbe gilt auch noch einerseits für die in ihnen als Specialfälle enthaltenen Subtractionen und Divisionen, und andrerseits für die complexen Zahlen in Bezug auf die Species, nicht aber für die neu hinzutretende Potenzirung und Radicirung. Denn unter $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ war ebenso wenig etwas zu verstehen, wie unter $(a + bi)^{c + di}$. Es existirt auch vorläufig keine zu übersehende Möglichkeit, aus dem Begriff der bisherigen formalen Zahl heraus zu einer Auffassung solcher Verbindungen zu gelangen. Jene Ausdrücke sind etwas völlig Neues, Incommensurables, in diesem Zusammenhang ganz Sinnloses, kurzum sie gehören nicht in die Theorie der hier betrachteten formalen Zahlen.

Es zeigt sich also, dass die sechs Grundoperationen nicht so in sich abgeschlossen sind, wie die vier Species, d. h. nicht durch jede Verknüpfung zweier allgemeiner Zahlen wieder eine solche ergeben. Wenn man daher diese Eigenschaft als wesentlich für den Begriff einer Grundoperation hinstellen will, dann bleiben allein die vier Species oder vielmehr, was ja völlig genügt, die Addition und Multiplication übrig; und die Erfahrung hat in der That gelehrt, dass Potenzirung und Radicirung besser als Functionen betrachtet werden, welche den Begriff der Stetigkeit schon voraussetzen. Man ist daher logisch auch berechtigt, das Gebiet der formalen Zahlen auf die rationalen Zahlen zu beschränken. Denn ob die complexen gleich als Beziehungssubstrate für die Addition und Multiplication benutzt werden können, so sind sie von diesen doch nicht nothwendig gefordert, wie die Brüche und die negativen Zahlen. Es sind dies Verhältnisse, über welche eine volle begriffliche Klarheit vorläufig noch nicht zu gewinnen ist. Denn so lange nicht eingehendere Untersuchungen über die gegenseitigen Beziehungen der arithmetischen Operationen vorliegen, so lange wird es logisch immer mehr als ein Zufall erscheinen, dass es Zahlformen gibt, welche geeignet sind, als Beziehungssubstrate für die Species zu dienen, ohne doch von diesen selbst nothwendig gefordert zu werden.

Freilich wird sich möglicherweise der ganze Begriff der formalen Zahl einmal mathematisch als überflüssig darstellen, wenn es nämlich Kronecker wirklich gelingen sollte, alles auf die absoluten Zahlen zu reduciren und zugleich seinen Congruenzenalgorithmus derart zu vervollkommnen, dass man geneigt werden könnte, ihn gegen die bisher allein maßgebende Behandlung der Arithmetik mit den rein formalen Operationen einzutauschen. Aber das sind lediglich Fragen der mathematischen Praxis. In der genetischen Entwicklung wird jedenfalls die formale Zahl als das logische Mittelglied zwischen der absoluten und der Zahlgröße niemals zu entbehren sein. Und selbst die Untersuchung der complexen Zahlen allein unter dem formalen Gesichtspunkt bietet wegen der commutativen Eigenschaft der Multiplication große methodologische Vorteile. Da indessen ein weiteres Eingehen auf diese Fragen nicht in den Rahmen der vorliegenden Arbeit gehört, so scheint es zweckmäßig, den völlig erschöpften Begriff der formalen Zahl nunmehr zu verlassen und zu dem genetisch nächsten, ungleich wichtigeren der discreten Zahlgröße überzugehen.

2. Die discrete Zahlgröfse.

Der bisher in's Auge gefasste Zahlbegriff ist zwar logisch mindestens ebenso berechtigt, wie jeder andere, aber thatsächlich völlig unfruchtbar geblieben. Denn selbst die Algebra, deren Gebiet er doch eigentlich beherrschen sollte und anfänglich auch immer beherrscht hat, verlässt ihn sehr häufig, um Größenbetrachtungen oder selbst, wie z. B. beim Beweise ihres Fundamentalsatzes, Stetigkeitserwägungen in ihrer Methodik breiten Raum zu gewähren. Unfruchtbar ist er namentlich deshalb, weil man sich unter ihm nichts denken kann, weil er unvorstellbar und unanschaulich allein als ein leeres Schema sich darstellt, dessen Erforschung an und für sich wohl möglich sein würde, aber doch immer nur den beschäftigt hat, der aus ihm neue Eigenschaften für die Veranschaulichung zu gewinnen trachtete. Bezeichnend für seine Unselbständigkeit ist ja auch der Umstand, dass er alle seine Zahlarten allein aus der Anschauung entlehnt und nur ihre unvorstellbaren Operationen schematisirt. Gerade diese nominalistische Umformung concreter fassbarer Beziehungen, diese schattenhafte Existenz leerer Formen ermüdet aber den denkenden Geist derartig und ist an und für sich so wenig anregend, dass sich z. B. niemals ein Mensch enger mit den imaginären Zahlen abgegeben hätte, wären sie allein auf diese Weise zu behandeln. Und so wenig ein Rechnen mit Schwingungszahlen die Musik zu ersetzen vermag, so wenig ist auch der formale Zahlbegriff im Stande, die greifbaren Verhältnisse der Anschauung vergessen zu lassen. Seine leblosen, starren Formen haben an und für sich nicht das geringste Interesse und sind allein deshalb erfunden, weil man für die gewünschte formale Untersuchung der arithmetischen Operationen ein Beziehungssubstrat nicht entbehren konnte. Sollte daher eine weitere Ausbildung der Zahlenlehre praktisch möglich sein, so war es nothwendig, jenem schematischen Beziehungssubstrat, das eigentlich nur das Bedürfniss des Denkens nach einem solchen ausdrückte, ohne es doch wirklich zu liefern, einen realen, denkbaren Inhalt zu verleihen, d. h. die frühere Anschaulichkeit des absoluten Zahlbegriffs in irgend einer Weise zu ersetzen.

Der anschauliche Zahlbegriff in seiner allgemeinen Form ist nun freilich keineswegs so zu fassen, dass es immer möglich sein sollte, diesen Begriff, wie die absolute Zahl, in der äußeren Anschauung zu substantialisiren. Die Anschauung ist hier vielmehr in den meisten Fällen nur eine hypothetische und durch exacte Generalisation aus der gewöhnlichen erweiterte. Die allgemeinen Zahlen können sich z. B. auf alle transcendenten Raumformen beziehen. Es genügt für diese Art der allgemeinen mathematischen Anschaulichkeit ihre rein begriffliche Existenz, d. h. man begnügt sich mit der Möglichkeit, die formale Zahl oder, was dasselbe ist, die formalen Operationen auf irgend einen festen, wirklich widerstandsfähigen Denkinhalt zu beziehen, welcher selbst wenigstens durch Abstraction aus der Anschauung erzeugt gedacht werden konnte. Dieser gesuchte abstracte Begriff, welchem natürlich die größte Allgemeinheit zukommen muss, da er alle concreten Verknüpfungen in sich vereinigen soll, ist der der Größe. Er ist, richtig aufgefasst, nichts weiter, als irgend ein Denkact unter dem Gesichtspunkt eines exacten Vergleichs mit einem anderen. Und da jedes Denkobject dadurch sofort zu einer Größe wird, dass man es mathematisch behandelt, d. h. eben mit anderen, analogen exact vergleicht, so ist der allgemeine Größenbegriff offenbar gar nichts anderes, als der stellvertretende Sammelbegriff für die unendlich verschiedenen einzelnen Größen. Daher ist er gewissermaßen der feste Zustand jenes flüchtigen, niemals zu fassenden Begriffs des Beziehungssubstrates, das verbindende Mittelglied zwischen Anschauung und Schematismus der Operationen, diejenige Form der concreten Objecte, unter der sie einer mathematischen Behandlung erst fähig werden, oder das letzte Abstractionsproduct aus der Erfahrung, welches mit dem subjectiven Formalismus des Denkens zusammentrifft, um die reine Größenlehre, als den Urtypus der angewandten Formenlehre, zu erzeugen. Wie die anschauliche Größe daher einerseits formal dem obigen Beziehungssubstrat wenig nachgibt, so ist sie andrerseits als höchster Realbegriff der Erfahrung sofort fähig, ihre formalen Verknüpfungen als actuelle in die Welt der Anschauung zu projiciren; ja dies ist gerade die Bestimmung, durch welche sie allein definirt werden kann.

Ist aber die Größe das mathematische Abstractionsproduct der Erfahrungsbegriffe und als solches gewissermaßen der arithmetische Grundbegriff der Nominalisten, die formale Zahlentheorie dagegen der subjective Schematismus des discursiven Denkens, der letzte zusammengeschrumpfte Rest der Leibnizischen Ideenwelt, welchem wir noch dazu seine selbständige Apriorität bestreiten müssen, so entsteht die Frage, mit welchem Recht überhaupt an eine Vereinigung beider gedacht werden kann. Die Beantwortung derselben ist allerdings so einfach, dass viele Mathematiker von den Indern herauf bis in unsere Zeit sie für überflüssig hielten. Nichts desto weniger muss sie aber einmal ausgesprochen und richtig formulirt werden, wenn man nicht in die Irrthümer der früheren erkenntnisstheoretischen Schulen zurückverfallen will.

Nun definirt die reine Formenlehre die Addition nur als eine associative und commutative Verknüpfung, die Multiplication dagegen, wenigstens die bisher in Betracht gezogene, als eine in sich ebenfalls associative und commutative, außerdem aber noch in Bezug auf die Addition distributive. Hat man nun irgend eine actuelle anschauliche Verknüpfung zweier Größen, so wird man sofort berechtigt sein, sie eine Addition zu nennen, wenn sie die ersten, eine Multiplication, wenn sie die zweiten Bedingungen erfüllt. Denn es ist, da die obigen Begriffe der Operationen einen reinen Nominalcharakter tragen, offenbar nur nöthig, dass die formalen Eigenschaften übereinstimmen, um die actuellen Operationen unter diesem formalen Gesichtspunkt als Addition oder Multiplication darzustellen. Mag daher immer eine solche Veranschaulichung nicht unmittelbar gegeben, sondern nur eine nachträgliche sein, man wird ohne weiteres die vorher schon bekannten ferneren Eigenschaften der formalen Operationen auf die speciellen concreten Verknüpfungen übertragen können, und so auf deductivem Wege ganze Gruppen von Resultaten mit einem Schlage anschaulich zu deuten im Stande sein, zu deren selbständiger actueller Erforschung die inductive Detailarbeit vielleicht Jahrhunderte brauchte oder überhaupt nicht gelangt wäre. Von welcher Tragweite aber ein so einfacher Grundgedanke, wie die isolirte Betrachtung der schematischen Formenverknüpfung und die leichte, unmittelbare Uebersetzung in das specielle Anschauungsgebiet — dieses immer in dem oben besprochenen allgemeinen Sinne gefasst — werden kann, das zeigen die vielen schönen und weitgehenden Resultate, welche der eigentliche Schöpfer dieser Idee, Hermann Grassmann, in seinen vielen Einzelschriften daraus gezogen hat[1]). Dass andrerseits diese Methode der Trennung von Form und Stoff auch dem Geiste der Wissenschaft völlig entspricht, beweist ihre immer weiter gehende Anwendung auf andern Gebieten. So haben z. B. Riemann und Weierstraß die Functionen formalistisch behandelt, d. h. durch Functionalgleichungen allein definirt, so schuf Grassmann die geometrische Charakteristik[2]), so wurde endlich die Mechanik theil-

---

1) Um die Fruchtbarkeit dieser Idee nachzuweisen, müsste man eigentlich alle mathematischen Schriften Grassmann's citiren. Es genüge aber hier der Hinweis auf die Zusammenstellungen der Titel in den mathematischen Annalen XIV (1879) p. 43—45 am Ende seines Nekrologs und auf p. 79—82 der Biographie Grassmann's von Victor Schlegel, Leipzig 1878.

2) In der berühmten Preisschrift: Geometrische Analyse etc., Leipzig 1847.

weise von Kirchhoff[1]), vollständig aber von Neumann[2]) formalisirt.

Logisch ist aber — das muss hier ausdrücklich betont werden — die Beziehung der formalen Zahlen auf Größen für die Arithmetik keineswegs nothwendig, sie wird nur aus Bequemlichkeitsrücksichten von der mathematischen Praxis gefordert. Rein begrifflich betrachtet, müssten die formalen Zahlen vollkommen ausreichen, um alle algebraischen Resultate zu liefern. Wenn man daher dennoch überall in der historischen Entwickelung den erwähnten Schritt gethan hat und noch heute thut, so muss man sich dabei immer des Umstandes bewusst bleiben, dass dies nicht geschieht unter dem Zwange der nothwendigen Forderung anderer, als der bisherigen Zahlen, — denn als Beziehungssubstrate für die formalen Operationen, aus denen man doch allein Ergebnisse gewinnen kann, sind die formalen Zahlen vollkommen ausreichend — sondern lediglich aus Rücksichten der bequemeren Behandlung, und darf andererseits auch nicht vergessen, dass man dadurch nicht neue Resultate zu erhalten hoffen kann, welche mit den gewöhnlichen formalen Zahlen nicht auch zu gewinnen wären, sondern höchstens einfachere und elegantere Ableitungen derselben.

Hält man sich diese Thatsachen vor Augen, so würde die Einführung der Größe in den Zahlbegriff etwa folgendermaßen zu gestalten sein. Ausgehend von dem psychologischen Begriff der Anzahl denke man sich ein Object, d. h. also eine Größe, ein-, zwei-, dreimal u. s. w. gesetzt. Das Resultat des psychologischen Denkprocesses liefert dann die absoluten Zahlen 1, 2, 3 . . ., das Resultat der Setzung aber kann dargestellt werden durch $1e$, $2e$, $3e$ . . . . Diese Ausdrücke geben, unter e die Größeneinheit verstanden, die einfachsten Größen. Ihr Begriff entsteht offenbar, indem man das Resultat der subjectiven Denkthätigkeit mit dem objectiven Beziehungssubstrat zu einem Ganzen verschmilzt, eine begriffliche

---

1) Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, dritte Auflage, Leipzig 1883.

2) C. Neumann: Grundzüge einer analytischen Mechanik, insbesondere der Mechanik starrer Körper, Berichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Leipzig 1887, p. 153 bis 190, 1888, p. 22—88.

Thätigkeit, die immer möglich und zulässig ist, da die in sich bereits formal untersuchten Denkprocesse, welche den arithmetischen Operationen entsprechen, wirklich dauernd auf feste Einheiten bezogen werden können, d. h. ihren formalen Charakter dabei behalten. Im vorliegenden Fall ist das leicht nachzuweisen. Denn die Reihe der Größen $1e$, $2e$, $3e \ldots$ wird ja, wenn $1e = e$ die Beziehung eines Denkactes auf die Größe e bezeichnet, definirt durch die Formeln: $1e + 1e = 2e$, $2e + 1e = 3e, \ldots$ allgemein: $ae + 1e = (a + 1)e$ u. s. w. Und die Gleichungen zeigen sofort, dass die Verbindung ae unmittelbar ihrer distributiven Eigenschaft wegen als eine Multiplication aufgefasst werden kann, da man ihr associative und commutative Vertauschbarkeit natürlich auch noch zuschreiben darf. Die Addition zweier solcher Größen ist demnach umgekehrt wieder durch das distributive Gesetz gegeben: $ae + be = (a + b)e$, und hieraus folgen auch sofort die Gesetze der Association und Commutation durch Reduction der ganzen Frage auf die voranstehenden formalen Zahlen. Denn es ist: $ae + (be + ce) = ae + (b + c)e = [a + (b + c)]e = [(a + b) + c]e = (a + b)e + ce = (ae + be) + ce$ und andrerseits: $ae + be = (a + b)e = (b + a)e = be + ae$.

Es ist also eine Addition solcher Größen möglich, und zwar ist dies einfach diejenige Verknüpfung, welche die Synthesis ihrer Definition bezeichnet. Ebenso zeigt sich, dass die Multiplication, als Specialfall der Addition, hergeleitet aus ihrem früheren erkenntnisstheoretischen Begriff, sehr wohl zulässig ist, wenn man noch die Festsetzung trifft: $a \cdot (be) = (ab)e$.

Was allerdings unter der Multiplication zweier Größen zu verstehen sei, das bedarf in jedem einzelnen concreten Fall wieder einer besonderen Untersuchung. Die allgemeingültige, formalistische Behandlung erlaubt hier nur die Bestimmung, dass $(ae) \cdot (be) = (ab) \cdot (ee)$ gesetzt werden solle. Für die actuelle Sonderbedeutung ist dann die ganze Frage auf die Multiplication von Einheiten reducirt, und nur diese brauchen gegebenen Falls specialisirt zu werden. In dem gewöhnlichen Größensystem der Algebra pflegt man z. B. einfach $e \cdot e = 1 \cdot 1 = 1$ zu setzen, für Flächenmaße könnte etwa e ein Meter, $e \cdot e$ ein Quadratmeter bedeuten u. s. w. Selbst für verschiedene Einheiten ist diese äußerliche Multiplication ganz wohl beizubehalten, und man könnte z. B. $(ae) \cdot (be_1) = (ab) \cdot (ee_1)$, 5 kg · 16 m = 80 kgm setzen.

Ebenso wie die absoluten lassen sich dann ohne weiteres auch die negativen, gebrochenen und irrationalen Zahlen verdinglichen, d. h. auf eine Größe beziehen. Doch erscheint eine nähere Behandlung dieser mathematischen Frage für unsern Zweck überflüssig[1]), wir können uns hier mit der Bemerkung begnügen, dass eine derartige Substantialisirung deshalb und nur deshalb möglich ist, weil man den formalen Charakter der Operationen dabei wahren kann. Eben darum kann man aber auch das ganze bisher betrachtete Zahlgebiet auf eine einzige Größeneinheit beziehen, die ursprünglich selbständigen formalen Zahlen in Coefficienten verwandeln und Größen bilden, wie $(-a)\,e$, $\frac{1}{a}\,e$, ja sogar $(a + bi)\,e$, ohne dass an den Rechnungsregeln irgend etwas geändert zu werden brauchte. Indessen haben z. B. Größen der letzten Art doch noch niemals Verwendung gefunden[2]). Vielmehr zeigte es sich als viel vortheilhafter, wie schon in der Schreibweise angedeutet lag, i selbst als eine neue, der reellen 1 coordinirte Größeneinheit zu betrachten. Diese Auffassung involvirt aber bereits den Begriff der zusammengesetzten Größe, dem wir uns nunmehr zuzuwenden haben.

Schon das bisherige System kann unter einem anderen Gesichtspunkt als ein zusammengesetztes betrachtet werden. Denn eine Größe $(-a)\,e$ muss nach dem Permanenzprincip der formalen Gesetze auch geschrieben werden können als $a\,(-e)$, und in dieser Schreibart erscheint dann bereits $-e$ als eine neue Größeneinheit, jede negative Größe aber als Multiplication einer absoluten Zahl mit derselben. Bestimmt ist die negative Einheit durch die Gleichung $(+e) + (-e) = 0$, während ihre Setzung die negative Zahlgröße erzeugt. Dasselbe Permanenzprincip lässt aber zugleich die andere Auffassung zu, so dass man hier zwei Betrachtungsweisen einhalten kann und im allgemeinen auch thatsächlich beobachtet, ohne dass beide sich stören. Die eine kennt nur eine einzige Größeneinheit und zweierlei Zah-

1) Eine eingehendere Darstellung geben die oben citirten Bearbeitungen der Weierstraß'schen Vorlesungen und Grassmann's Lehrbuch der Arithmetik. Berlin 1861.

2) Nur Hamilton betrachtet bisweilen derartig gebildete Quaternionen.

len, die andere nur einerlei Zahlen[1]) und zwei Größeneinheiten. Ebenso gibt der Ausdruck $\frac{ae}{b}$ (wo a und b ganze Zahlen sind) die doppelte Möglichkeit, $\frac{a}{b}$ als Zahl und e als Einheit oder $\frac{e}{b}$ als Einheit und a als Zahl zu fassen, und das Gleiche würde von Formen wie $\sqrt{3}\,e$ gelten. Welche von beiden Auffassungen gewählt wird, hängt ganz von der Natur des jeweiligen Gedankenganges ab. Im Anfang der functionentheoretischen Untersuchungen wird man immer mit Weierstraß von der zweiten Art der Betrachtung ausgehen, die allgemeine Arithmetik pflegt dagegen meist die erste zu wählen, d. h. als »Zahlencoefficient« alle formalen reellen Zahlen zuzulassen, die complexen aber nur aus dem praktischen Grunde auszuschließen, weil sie, abgesehen von den citirten Biquaternionen Hamilton's, keine Verwendung finden. Die bisher behandelte Zahlgröße besitzt arithmetisch also nur eine »Dimension«, d. h. eine Größeneinheit, und ist ihrem Wesen nach discontinuirlich und einfach ausgedehnt. Denn es ist möglich, die einzelnen Zahlgrößen nach ihrer Größe in eine einzige Reihe so zu ordnen, dass eine jede einen eindeutigen, gegen die übrigen fest definirten Platz einnimmt. Dies Größengebiet ist demnach vorläufig in sich völlig abgeschlossen, da man keine anderen formalen Zahlen mehr zur Verfügung hat, die man verdinglichen könnte.

Will man also zu umfassenderen Zahlgrößen vorschreiten, so sind irgend welche neuen Festsetzungen und Annahmen nöthig, welche ebenfalls so eingerichtet sein müssen, dass sie dem, natürlich auch für die Zahlgröße beibehaltenen Permanenzprincip der formalen Gesetze nicht widersprechen. Aber auch hier ist von vorn herein klar, dass man nicht erwarten kann, auf diesem Wege irgend welche Resultate zu gewinnen, die man mit den bisherigen Mitteln nicht auch erreichen könnte, sondern höchstens eine übersichtlichere Form oder elegantere Ableitung. Daher bedeutet dieser Schritt ganz analog der Verdinglichung der formalen Zahlen ebenfalls nicht eine Erweiterung des Zahl-, sondern in diesem Fall nur

---

1) Dies entspricht im Gebiete der stetigen Zahlgröße, d. h. ausgedehnt auf die im mathematischen Sinne transcendenten Irrationalitäten den Definitionen der Zahl, welche Newton in seiner Arithmetica universalis und Duhamel in seinem Methodenwerk gegeben hat. Vgl. oben Kapitel III, 2.

eine solche des Größenbegriffs. Eine Ausdehnung derselben nahm man nun zunächst vor, indem man die Anzahl der Einheiten vermehrte. Logisch wie mathematisch war diese Generalisation zu rechtfertigen durch den Beweis, dass sie noch keine weiteren Verknüpfungsregeln gebrauchte und durchaus eindeutig war. In der That zeigte sich zunächst bei der Betrachtung eines zweifach ausgedehnten discontinuirlichen Größengebietes, das also repräsentirt war durch Zahlen von der Form: $a_1 e_1 + a_2 e_2$, dass man die Addition vollkommen bestimmen konnte durch die Festsetzung: $(a_1 e_1 + a_2 e_2) + (b_1 e_1 + b_2 e_2) = (a_1 + b_1) e_1 + (a_2 + b_2) e_2$ und die Multiplication durch die distributive Eigenschaft: $(a_1 e_1 + a_2 e_2)(b_1 e_1 + b_2 e_2) = (a_1 b_1)(e_1 e_1) + (a_1 b_2)(e_1 e_2) + (a_2 b_1)(e_2 e_1) + (a_2 b_2)(e_2 e_2)$.

Nimmt man hierin z. B. für e_1 die reelle Größeneinheit, die man ja vielfach kurz mit 1 bezeichnet, für e_2 aber die imaginäre Einheit i, so wird speciell: $(e_1 e_1) = 1$, $(e_1 e_2) = i$, $(e_2 e_1) = i$, $(e_2 e_2) = -1$ zu setzen sein. Man erhält durch die Multiplication zweier complexen Zahlen dann immer wieder eine ebensolche. Dass man aber i als eine wesentlich neue Einheit betrachten darf, dafür bürgt begrifflich die Unmöglichkeit, complexe Zahlgrößen wie $(a + bi) e$ eindeutig in die obige discrete reelle eindimensionale Größenreihe einzuordnen, mathematisch die formale Durchführbarkeit dieses Gedankens.

Das hier betrachtete specielle zweidimensionale Größengebiet, über das wir uns an dieser Stelle nur ganz summarisch aussprechen können, hat noch die Eigenschaft, dass die Addition und Multiplication in ihm commutativ sind und zugleich immer wieder auf Zahlen desselben Gebietes führen. Eine weitere Aufrechterhaltung aller dieser Eigenschaften bei irgend welchen anderen Zahlsystemen ist aber bekanntlich nicht mehr ausführbar. Denn begrifflich stand zwar der Einführung anderer Größeneinheiten nichts im Wege, mathematisch stellte sich aber sehr bald die Unmöglichkeit heraus, wenigstens alle bisherigen Merkmale der Multiplication beizubehalten. Worauf diese, mathematisch längst streng erwiesene Thatsache logisch eigentlich beruht, ist noch nicht recht durchsichtig. Man hat wohl versucht sie darauf zurückzuführen, dass die bisherigen complexen Formalzahlen direct erfunden waren, weil die Allgemeingültigkeit der Grundoperationen sie verlangte, dass aber alle weiteren Zahlarten, als nicht nothwendige, den Operationen auch höchst wahrscheinlich nicht mehr gehorchen würden. Diese Ueberlegung ist aber in doppelter Hinsicht falsch. Denn erstens sind die complexen Zahlen gar nicht durch die Allgemeingültigkeit der Multiplication bestimmt, sondern nur die rationalen, und zweitens gibt es außer ihnen noch andere Zahlgrößen, nämlich die (im mathematischen Sinne) transcendenten Irrationalitäten, welche sich ebenfalls den formalen Gesetzen noch vollkommen unterwerfen lassen. Wie es daher kommt, dass außer den nothwendig verlangten gewisse singuläre Formen für die gewöhnliche Multiplication zu gebrauchen sind und andere nicht, ist begrifflich vorläufig noch nicht genügend aufgeklärt und kann erst durch eine weitere Untersuchung der algebraischen Operationen in ihrem Verhältniss zu einander verständlich werden, wie sie bisher noch nicht vorliegt. Es wäre z. B. ein gewisser Zusammenhang zu erkennen, wenn man die transcendenten Irrationalitäten durch die formale Betrachtung von Ausdrücken wie $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ oder allgemein $(a + bi)^{c + di}$ erhalten könnte. Das würde ja in der That die gerade Fortsetzung der obigen Betrachtung über den formalen Zahlbegriff sein[1]). Ob dies aber nöthig, ob überhaupt möglich ist, das ist noch in keiner Weise zu übersehen. Denn man würde dann durch Formalisirung früherer Operationen, welche in absoluten Zahlen sich als Specialfälle der Potenzirung darstellen, zu einer überwältigenden Fülle von transcendenten[2]) Irrationalitäten gelangen, in denen sich der Forscher mit den jetzigen Hülfsmitteln völlig verlieren würde. Es wäre dann allerdings erklärlich, dass das auf solchem Wege zu gewinnende allgemeine Beziehungssubstrat für alle formalen Operationen: Addition, Multiplication, Potenzirung, und die unendlich vielen höheren Operationen seiner Allgemeingültigkeit wegen auch sämmtlichen formalen Verknüpfungsregeln gehorcht. Es könnte auch nicht weiter auffallen, wenn die durch allgemeine Ausdehnung der höheren Verknüpfungen gewonnenen neuen Formen, welche natürlich immer transcendenter werden (das Wort transcendent hier in der philo-

---

1) Vgl. oben 1 (Begriff der formalen Zahl) Schluss.

2) Wir brauchen jetzt das Wort wieder in dem mathematischen Sinn von überalgebraisch.

sophischen und mathematischen Bedeutung zugleich verstanden), auch stets für alle niedrigeren Operationen brauchbar bleiben. Da dies aber vorläufig ganz unrealisirbare Speculationen sind, so können wir das Gesagte nur als eine beweislose Vermuthung aussprechen und müssen uns betreffs der Frage, warum bestimmte Zahlen außer den nothwendigen, nämlich den rationalen, für die bisherige Multiplication zu brauchen sind und andere nicht, dem Beispiel des Mathematikers folgend mit dem Hinweis auf die Thatsache begnügen.

Wollte man nun trotzdem noch andere Größengebiete unter dem Gesichtspunkt des Zahlbegriffs betrachten, so war es, da sie den bisherigen Grundoperationen sich nicht mehr fügten, eben nothwendig, diese in ihrer bisherigen Form aufzugeben und zu erweitern. Ob der Erfolg die Mühe lohnte, die eine derartige Umänderung des ganzen Arbeitsfeldes bedingen würde, war natürlich von vorn herein nicht abzusehen. Es ist indessen doch gelungen, auf diesem Wege eine solche Fülle der interessantesten Untersuchungen und Resultate zu gewinnen, dass der kritische Beurtheiler heutzutage die allgemeinen complexen Zahlgrößen als etwas überall Recipirtes anerkennen muss. Wir können deshalb nicht umhin, ihnen auch hier Raum zu gewähren.

An der Addition, dieser einfachsten Verknüpfungsform, war ja natürlich kaum etwas zu ändern; man war also ganz auf die Multiplication angewiesen. Und hier wurde es denn bald durch die verschiedenen Untersuchungen von Hankel[1]), Weierstraß[2]), Simony[3]) und anderen klargelegt, dass man, wie schon Gauß behauptet hatte[4]), und Hamilton durch den Versuch lernte[5]), an

1) Complexe Zahlen namentlich S. 99 ff.

2) In der Abhandlung aus den Göttinger Nachrichten von 1884, S. 395—419, an welche sich in derselben Zeitschrift noch die Arbeiten anschließen von Schwarz, 1884, S. 516—519; Dedekind, 1885, S. 141—159; 1887, S. 1—7; Hölder, 1886, S. 241—244, Petersen, 1887, S. 487—502. Hierzu gehört auch eine Abhandlung von dem Letzteren in der Tidsskrift for Mathematik, udgivet af J. P. Gram og H. G. Zenthen, V, 3, S. 1—22, Kjöbenhavn 1885.

3) Ueber zwei universelle Verallgemeinerungen der algebraischen Grundoperationen. Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Kaiserlichen Academie der Wissenschaften zu Wien. 1885, S. 223—328.

4) Werke II, S. 178.

5) Vgl. die Vorrede zu den Lectures on Quaternions, Dublin 1853.

dem Begriff der bisherigen Multiplication irgend etwas fallen lassen musste. Die wesentlichen Eigenschaften derselben waren das associative, das distributive, das commutative Gesetz und endlich die Bedingung, dass die multiplicativen Verknüpfungen zweier Zahlgrößen wieder eine Größe desselben Gebietes lieferten. Die Erfahrung lehrte nun, dass es das Zweckmäßigste war, die beiden letzten Bestimmungen zugleich fallen zu lassen und die Multiplication allein als eine associative und in Bezug auf die Addition distributive Verknüpfung zu definiren.

Demgemäß war nun in irgend einem allgemeinen Zahlgrößengebiet oder wie man nun sagte »Zahlsystem« e_1, $e_2 \ldots e_n$ die Addition zu definiren durch die Formel:

$$\sum_1^n{}_\nu a_\nu e_\nu + \sum_1^n{}_\nu b_\nu e_\nu = \sum_1^n{}_\nu (a_\nu + b_\nu) e_\nu ,$$

woraus die associative und commutative Eigenschaft von selbst folgte, weil sie ja für die Zahlencoëfficienten a und b galt, die Multiplication aber durch das distributive Gesetz:

$$\sum_1^n{}_\nu a_\nu e_\nu \cdot \sum_1^n{}_\varkappa b_\varkappa e_\varkappa = \sum_1^n{}_\nu \sum_1^n{}_\varkappa (a_\nu b_\varkappa) \cdot (e_\nu e_\varkappa),$$

worin, da immer eine beliebige Verstellbarkeit der Zahlencoëfficienten gestattet werden muss, das associative Princip ebenfalls implicit schon enthalten ist.

Die Addition ist immer commutativ, die Multiplication nach der Definition nicht mehr, kann es aber in speciellen Fällen natürlich ebenfalls sein. Die Addition führt stets auf Zahlen desselben Gebietes, bei der Multiplication ist auch dies nicht nothwendig der Fall. Denn $(e_\nu e_\varkappa)$ ist eine vorläufig noch gar nicht definirte Combination von Zeichen, eine neue Größeneinheit, welche in den früheren nicht enthalten ist oder doch wenigstens nicht enthalten zu sein braucht. Die Multiplication ist daher wohl formal zulässig, aber vorläufig ohne jeden Sinn und jedes Interesse, wenn nicht noch irgend eine Festsetzung für die einstweilen rein formalen Einheitsproducte getroffen, d. h. das Zahlsystem specialisirt wird.

Hierbei hat man sich nun natürlich, da die Bestimmung im übrigen willkürlich bleibt, vollständig von dem Gedanken der Eindeutigkeit für die Multiplication leiten zu lassen. Da sie aber nun im allgemeinen nicht mehr commutativ ist, wird sie die Division auch nicht mehr unter sich begreifen. Die letztere ist vielmehr wieder selbständig zur lytischen Operation geworden und könnte hier als dritte Grundoperation — die Subtraction ist natürlich nach wie vor von der Addition nicht unterschieden — hinzukommen. Indessen hat man sie aus praktischen Erwägungen doch als solche nicht zugelassen und demzufolge auch die lange beibehaltenen Beschränkungen aufgehoben, dass sie immer eindeutig sein müsse, und dass andererseits ein Product nur dann verschwinden dürfe, wenn einer der Factoren, d. h. jeder seiner Zahlencoëfficienten gleich Null ist[1]. Ohne auf die mathematischen Details der Rechnung einzugehen, sieht man hier sofort, dass es zwei ganz verschiedene Arten der Multiplication geben wird. Entweder nämlich bleiben die Einheitsproducte so bestimmt, dass sie durchaus neue, heterogene Einheiten liefern, oder aber sie reduciren sich auf die ursprünglichen Einheiten. Ein Beispiel für die erste Art von Zahlsystemen bieten die von Grassmann entdeckten Zahlen, welche Hankel alternirend genannt hat[2], für die zweite die gewöhnlichen complexen Zahlen und die Quaternionen. Eine Verschmelzung beider Arten von Multiplication ist im allgemeinen nicht wohl möglich, wenigstens noch nie vorgekommen, da der Uebersichtlichkeit und Eindeutigkeit wegen alle Definitionsgleichungen für die Einheitsproducte immer in gewisser Weise gleichartig gehalten werden müssen.

Damit ist aber das Gebiet der discreten Zahlgrößen begrifflich im wesentlichen erschöpft. Die weitere Ausführung der nur generell

1) Bei den alternirenden Zahlen ist diese Bedingung im allgemeinen nicht erfüllt, oder, um ein bequemes Beispiel zu benutzen, bei einem System, dessen Multiplication etwa definirt wäre durch die Gleichungen: $(e_\nu e_\nu) = e_\nu$, $(e_\nu e_\varkappa) = 0$. Denn hier würde $(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots a_n e_n)(b_1 e_1 + b_2 e_2 + \ldots b_n e_n) = a_1 b_1 e_1 + a_2 b_2 e_2 + \ldots a_n b_n e_n$ sein und man könnte z. B. durch die Wahl von $a_1 = a_2 = \ldots a_{n-1} = 0$ und $b_n = 0$ erreichen, dass das ganze Product verschwindet, ohne dass doch einer der Factoren Null wird. Ja, es gibt, wie Frobenius in seiner Arbeit »Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen« (Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 84. 1878, p. 1—63) nachgewiesen hat, überhaupt nur drei Zahlsysteme, welche die letzte Bedingung erfüllen, und deren Einheitsproducte sich wieder linear durch die Einheiten selbst ausdrücken, nämlich die reellen, die gewöhnlichen complexen Zahlen und die Quaternionen.

2) Complexe Zahlen p. 129 ff.

hier angedeuteten Ideen ist die Aufgabe der mathematischen Forschung, und zwar zum größten Theil die einer zukünftigen, obwohl dies Gebiet bereits mit großem Glück von Grassmann, Hankel, Hamilton, Weierstraß, Simony und Anderen theils in specielleren, theils in allgemeineren Untersuchungen bearbeitet ist. Es genüge an dieser Stelle die charakteristischen Merkmale der ganzen Entwickelung noch einmal hervorzuheben.

Als ein solches bot sich zunächst die Substantialisirung des arithmetischen Beziehungssubstrates, die Anwendung der formalen Operationen auf irgend einen vorausgesetzten realen, festen Denkinhalt, der hierdurch als der allgemeine Begriff der Größe gegeben war. Während also die formale Zahl im allgemeinen nur dem Schematismus der Rechnung diente, ist die Zahlgröße die Grundlage für das Rechnen mit benannten Zahlen, sie ist selbst nichts weiter als die benannte Zahl. So lange sie sich nun im Gebiete der gewöhnlichen complexen Zahlen bewegt, so lange deckt sie sich äußerlich vollkommen mit den Formalzahlen und bezeichnet gewissermaßen deren Krystallisation um den Größenbegriff. Sobald man Größen aus mehreren incommensurablen Einheiten in Betracht zieht, fordert das Verlangen, sie als Zahlen zu behandeln, d. h. den formalen Gesetzen der Arithmetik unterwerfen zu können, eine Erweiterung des Begriffs der Multiplication. An dieser wurde deshalb die Bedingung der Commutativität und der Geschlossenheit, d. h. die Forderung, eine multiplicative Verknüpfung zweier Größen des Systems solle wieder eine Größe des nämlichen Systems ergeben, fallen gelassen. Hierdurch wurde sie ihres Charakters als Species, zu der viele noch die Geschlossenheit rechnen, theilweise entkleidet, während die Addition nach wie vor als die einfachste, geschlossene associative und commutative Verknüpfung beibehalten werden konnte. Die Multiplication blieb dagegen nur associativ und in Bezug auf die Addition distributiv. Die Subtraction ging vermöge der Commutativität noch in der Addition auf. Aber die Division war wieder selbständig geworden, wurde indessen, da sie nicht immer eindeutige Verknüpfungen zu geben brauchte, da ein Product auch dann verschwinden durfte, wenn keiner der Factoren Null war, aus der Reihe der Grundoperationen stillschweigend gestrichen. Potenzirung und Radicirung endlich kamen überhaupt nicht mehr in Frage und wurden schon zu den Functionen gerechnet. Als Grundoperationen für die allgemeine Zahlgröße gelten demnach nur die Addition und die Multiplication in ihrem umfassenderen Begriff. Die erste, ganz so definirt wie früher, kann niemals aus dem Größensystem herausführen, der zweiten aber braucht diese Eigenschaft nicht zuzukommen. Es ist also unmittelbar einleuchtend, dass die Multiplication immer das Charakteristische für ein Zahlsystem sein wird; und thatsächlich bietet sie auch einen guten Eintheilungsgrund.

Dies ist im allgemeinen der begriffliche Inhalt des Ueberganges von den Formalzahlen zu den discreten Zahlgrößen. Wir könnten daher diesen Gegenstand verlassen, wenn es nicht aus mehrfachen Gründen angebracht schiene, noch einiges speciell über die geometrische Veranschaulichung der complexen Zahlen, über die wir uns hier und da schon gelegentlich geäußert haben, hinzuzufügen. Jedoch werden wir uns hier nach dem Voraufgegangenen ganz kurz fassen können.

Wir hatten in der historischen Entwickelung das allgemeine Streben nach möglichst schneller geometrischer Veranschaulichung der anfänglich immer formell gefundenen Zahlen verfolgt und von den Indern bis in unser Jahrhundert überall die nämliche Erscheinung wiedergefunden, dass die formalen Zahlen immer erst durch diese Verdinglichung in ihrer Existenz sich zu behaupten vermochten. Es galt also dem hierbei in Erscheinung tretenden mathematischen Realismus a posteriori die Anschauung, d. h. das feste, in gewisser Weise noch vorstellbare Beziehungssubstrat für das Primäre, unmittelbar Evidente, und dieses sollte in der Veranschaulichung seine bekannten und längst untersuchten Eigenschaften für den schematischen, unfassbaren Begriff der formalen Zahl herleihen. Dadurch sollte dann der letztere, seiner Nominaldefinition nach unbegriffen, mit fremder Hülfe gefestigt und überhaupt erst verstanden werden. Ja selbst Gauß glaubte noch, dass die Veranschaulichung des Imaginären ein neues, helles Licht auf die »Metaphysik« dieses Begriffes werfen könne[1]).

In Wirklichkeit ist aber das Verhältniss, wie es auf anderen

1) In der schon mehrfach citirten Stelle, Werke II, S. 175.

Gebieten zuerst durch die schönen Arbeiten von G r a s s m a n n klargelegt wurde, gerade umgekehrt. Nicht der Größenbegriff bildet das primäre, erforschte Gebiet in der Veranschaulichung, sondern die formale Zahl, welche als das Beziehungssubstrat für die allgemeinen Operationen sich allein durch ihre arithmetischen Eigenschaften und durch diese vollständig bestimmt. Und nicht der feste Beziehungsinhalt ist das tertium comparationis, sondern der Schematismus der formalen Operationen, der überall den Hauptgegenstand des Interesses bildet. In einer jeden Veranschaulichung des allgemeinen Zahl- oder Zahlgrößenbegriffs wird darum auch nicht, wie der frühere Realismus glaubte, der Zahlbegriff der Anschauung, sondern umgekehrt die Anschauung dem Zahlbegriff unterworfen, d. h. auf additive und multiplicative Verknüpfungen zurückgeführt. Der obige Ausspruch von G a u ß ist deshalb geradezu umzudrehen, indem, wenn man diesen eigenartigen Ausdruck beibehalten will, die Metaphysik des Imaginären höchstens ein helles Licht auf die analytische Behandlung der Ebene wirft.

Wie aber speciell eine solche Veranschaulichung zu denken sei, ist nach den allgemeinen Betrachtungen, die voraufgegangen sind, leicht auszuführen. Hat man es nämlich mit einem anschaulichen Größengebiet zu thun, so kann man irgend eine actuelle Verknüpfung zweier Elemente desselben untersuchen. Stellt sie sich als eindeutig, associativ und commutativ heraus — und diese Eigenschaften kommen sehr vielen anschaulichen Verknüpfungen zu — so wird man sie ohne weiteres als eine Addition auffassen können, da sie ja deren formale Eigenschaften besitzt. So hat, um statt vieler Beispiele nur eins der bekanntesten anzuführen, G r a s s m a n n gezeigt, dass die statische Zusammensetzung von Kräften als eine Addition angesehen werden kann. Eine andere Größenbeziehung lässt sich vielleicht, weil sie associativ und in Bezug auf eine, bereits als bekannt vorausgesetzte additive Verknüpfung distributiv sich erweist, als Multiplication auffassen, wie etwa die Inhaltsberechnung von Rechtecken u. a. Ist aber einmal eine solche Zurückführung der Anchauung auf den Formalismus gelungen, so wird man mit einem Schlage alle schon vorher bekannten formalen Operationseigenschaften in die betreffende Anschauung übersetzen können.

Die außerordentliche Tragweite dieser Behandlungsart hat ja

Grassmann in seinen zahlreichen Schriften, in denen er eine Fülle der verschiedensten Deutungen von Zahlgrößen, Additionen und Multiplicationen gegeben hat, zur Genüge bewiesen. Der eminente Vorzug dieser, in ihrer Einfachheit wahrhaft großartigen Idee ist die gemeinsame, gleichzeitige Behandlung der verschiedensten anschaulichen Verknüpfungen unter demselben, rein formalen Gesichtspunkt, während ihre singuläre anschauliche Untersuchung nicht allein sehr mühsam war, sondern oft gerade die charakteristischen Eigenschaften verkennen ließ.

3. Die continuirliche Zahlgröfse.

Der Umfang des Begriffs der discreten Zahlgröße und damit das Feld seiner Anwendbarkeit ist schon ziemlich bedeutend. Er umfasst nämlich alle denkbaren discontinuirlichen Mannigfaltigkeiten, deren gemeinsamen Algorithmus er an die Hand gibt. Aber grade die discrete Natur dieses Begriffes beschränkt seine Anwendbarkeit doch immer nur auf solche Größen, welche selbst discontinuirlich sind. Er ist demnach nichts mehr und nichts weniger als die Grundlage der Lehre von den discreten Größen, für welche man im allgemeinen die Algebra ansieht, und einer weiteren Ausdehnung vorläufig nicht fähig. Sollte er noch andere Anwendungen erfahren, so musste er sich zunächst um ein neues, ihm noch fremdes Merkmal bereichern, um die Eigenschaft der Stetigkeit.

Der Begriff der Stetigkeit, oder vielmehr die Einführung desselben in den der Größe, hat von jeher sehr viele Schwierigkeiten gemacht, und man kann sagen, dass dieselben bis zu einem gewissen Grade noch heute nicht überwunden sind. Seine fundamentale Wichtigkeit und die ihn charakterisirende Eigenschaft der Unmessbarkeit, deren Entdeckung — ein eigenartiges Spiel des Zufalls — gerade derjenigen Schule gelang, welche das Maß, und zwar die einfachsten Maße, in allen Dingen nachzuweisen sich bemühte, den Pythagoreern, nöthigen uns, bei ihm etwas länger zu verweilen.

Die Griechen hatten die Eigenart des Stetigkeitsbegriffes zuerst an den Irrationalitäten kennen gelernt; und zwar waren ihnen diese deshalb so merkwürdig erschienen, weil sie den übrigen

Zahlen gegenüber incommensurabel sich erwiesen, indem sich trotz aller Bemühungen kein gemeinsames Maß finden ließ, durch das man beide in einer ganzzahligen Proportion hätte ausdrücken können. So war die vollständige Heterogeneität des discreten und stetigen, des discontinuirlichen und continuirlichen Größenbegriffs klar erkannt und gab zu jener glücklichen Trennung von Arithmetik und Geometrie Anlass, welcher die antike Mathematik ihren exacten Charakter verdankt. Nichts desto weniger erschien doch das Stetige immer noch als etwas Mystisches, Geheimnissvolles, dessen Existenz man anzunehmen gezwungen war, ohne doch recht daran glauben zu mögen.

Fragt man aber nach dem Grund dieses unverkennbaren Misstrauens, so wird man keinen andern finden, als den, dass die continuirlichen Größen eben im allgemeinen incommensurabel waren. Denn, wie überhaupt die Mathematik dem Verlangen nach Messung der Größen ihren Ursprung verdankte, so ging man naturgemäß an die Bearbeitung derselben auch mit der unwillkürlichen Voraussetzung, alle Größen müssten messbar sein. Die Erfahrung, dass man sich in dieser Voraussetzung täuschte, blieb ja auch nicht aus. Aber weit entfernt, die als unrichtig erkannte Grundannahme zu beseitigen, brachte sie vielmehr umgekehrt jenes nie ganz überwundene Gefühl begrifflicher Unsicherheit hervor, das die Analysis eigentlich bisher noch nicht verlassen hat. Denn jetzt, am Ende dieser ganzen Entwicklung stehend, kann man unbedenklich die obige Ueberlegung verallgemeinern und das Urtheil aussprechen: Alle Unklarheiten, welche jemals die Behandlung des Stetigen oder Irrationalen verdunkelt haben, entsprangen lediglich aus dem, seinem Begriff direct widersprechenden Verlangen einer Ausmessbarkeit durch discrete Größen. Und so oft Erwägungen theoretischer oder praktischer Natur eine quantitative Bestimmung der Irrationalitäten forderten, kamen jedesmal die alten Widersprüche und Gegensätze wieder zum Vorschein.

Nothwendig, ja unentbehrlich war aber eine Größenvergleichung von Discretem und Stetigem für die praktische Mathematik durchaus. Man musste deshalb wenigstens irgend ein methodisches Auskunftsmittel suchen und fand dies schließlich in der A n n ä h e r u n g, welche noch heutzutage den einzigen Weg für die Auswerthung der Irrationalitäten bildet. Der Gedanke derselben taucht zuerst in der griechischen Exhaustionsmethode auf. Sie war ein Nothbehelf für die Berechnung unquadrirbarer Flächen und damit der erste Schritt aus dem bis dahin streng exacten Aufbau der alten Mathematik heraus. So lange man sich aber der Thatsache bewusst blieb, dass dieser Weg niemals wirkliche Werthe, sondern immer nur Annäherungen zu liefern im Stande sei, so lange war er noch gefahrlos und konnte als eine mehr praktische Methode nebenbei gelehrt werden. Immerhin bildete diese aber doch eine stete Bedrohung für die Strenge der exacten Größenlehre, und der Sophist Antiphon mag nicht der einzige gewesen sein, der in ihr eine wirklich genaue, zum Ziele führende Methode sah[1]).

Mit dem Untergang der griechischen Mathematik ging auch die Idee der Ausmessung des Irrationalen wieder verloren. Denn die indisch-arabische Mathematik, welche sie in ihrer Herrschaft ablöste, unterwarf diese Größen, soweit sie noch in Frage kamen, einfach dem Formelmechanismus der Algebra, ohne hierfür die Berechtigung nachzuweisen. Sie vermischte Arithmetik und Geometrie von vorn herein zu einer einzigen algebraischen Größenlehre, während der wissenschaftlich richtige Weg zunächst die Untersuchung beider für sich gefordert hätte. Erst durch den Beweis, dass gewisse geometrische Beziehungen als Additionen, andere als Multiplicationen oder Potenzirungen u. s. w. sich auffassen ließen, wäre jene unmittelbare Identificirung wissenschaftlich begründet worden, während sie sich so nur durch den Erfolg rechtfertigen konnte. Der Grund aber, warum gerade den Indern der tiefe Zwiespalt des Discreten und Stetigen verborgen blieb, ist in nichts anderem als in jener Schematisirung der Geometrie zu suchen. Denn man ging nun nicht mehr aus auf die unmittelbare Messung aller Größen, sondern nur auf ihre Construction. Und indem man sich gewöhnte, nicht allein die vier Species, sondern auch höhere algebraische Operationen für die Zahlen und Zahlgrößen zuzulassen, konnte es natürlich nicht Wunder nehmen, wenn man auf diese Art zu Zahlen gelangte, welche nur durch die Radicirung, nicht durch die einfachen Operationen bedingt waren. Eben die falsche

---

1) Vgl. Hankel, Geschichte der Mathematik p. 110.

Voraussetzung, dass alle Größen messbar sein müssten, fehlte den viel abstracter denkenden indischen Mathematikern. Da sie die Irrationalitäten nur als Quadrat- und Cubikwurzeln kannten, genügte es ihnen, dass sie algebraisch überhaupt brauchbar waren, um sie als Zahlen zu dulden.

Jahrhunderte lang blieb die Wissenschaft auf diesem Standpunkt stehen. Erst als man anfing, Geometrie wieder selbständig zu treiben, als man sich nicht mehr mit den Resultaten begnügte, welche geometrisch aus algebraischen Relationen gelegentlich mit erhalten wurden, erst da konnte die Frage nach dem eigentlichen Wesen des Stetigen und Irrationalen wieder in den Vordergrund treten. Und die von Descartes begonnene innige Verschmelzung von Algebra und Geometrie in die neuere Analysis — bei den Indern war diese rein äußerlich gewesen — musste wieder den alten Gegensatz von discret und stetig auch in Bezug auf die Zahlenlehre acut machen. Und da dieser Gegensatz tief in der Natur der Sache begründet lag, andererseits aber jene Verschmelzung, sollte sie aufrecht erhalten werden, die Gleichartigkeit der aufeinander bezogenen Formen unbedingt verlangte, so hing alles davon ab, ob man einen Ausweg fand, der dieser Forderung wenigstens äußerlich entsprach.

In solcher Verlegenheit kam man nun wieder auf die alte Exhaustionsmethode zurück, d. h. man versuchte von neuem das Unmögliche, die Ausmessung des Unmessbaren. Das Mittel aber, die hierbei unvermeidlichen Fehler zu verschleiern und der oberflächlichen Betrachtung unsichtbar zu machen, bot die neu entdeckte Infinitesimalmethode. Man verwandelte ganz einfach die endliche Annäherung der Exhaustion in eine unendliche und verdeckte durch das Wort: unendlich die Thatsache, dass man es eben nur mit einer Annäherung zu thun hatte. Diese Anwendung der Infinitesimalmethode, die nicht viel mehr als ein Missbrauch derselben ist, war nun eine doppelte, je nachdem man von der unbegrenzt abnehmenden Größe, oder von der unendlich kleinen, vom infiniten oder transfiniten Differentialbegriff ausging.

Die letztere Auffassung behauptete sich namentlich im Anfang lange Zeit. Durch fortgesetzte Addition von immer kleineren Größen müsste man — so wurde calculirt — im Unendlichen schließlich einmal zu den transfinit unendlich kleinen Größen gelangen, welche der Null gleichzuachten seien; durch unendliche Addition ganz kleiner Größen sei also der Werth des Irrationalen wirklich zu erschöpfen. Der Grundfehler dieser Ueberlegung besteht in ihrer Doppelseitigkeit. Im Anfang hat sie nämlich eine successive Annäherung im Auge, welche die zu bestimmende Irrationalität wohl durch bekannte Bruchmaße zu umzirkeln, niemals aber wirklich zu erreichen im Stande ist. Dann jedoch setzt sie die Näherung plötzlich als vollendet und gelangt auf diesem Wege zwar thatsächlich zu der Zahl selbst, übersieht aber dabei, dass damit gar nichts gewonnen ist. Denn von einer wirklichen Ausmessung kann offenbar, sobald man die Annäherung verlässt, überhaupt nicht mehr die Rede sein. Das Irrationale selbst bleibt so singulär, wie zuvor, da der Process der Ausmessung nur durch einen Sprung, durch ein kategorisches Machtwort, nicht vollendet, sondern nur als vollendet erklärt wird.

Hob aber so die transfinite Betrachtungsweise ihren ganzen Zweck, die Ausmessung des Irrationalen, d. h. seine exacte Vergleichung mit dem Rationalen, ohne es zu wollen durch jenen Gedankensprung wieder auf, so machte sich die infinite des entgegengesetzten Fehlers schuldig, sie erreichte überhaupt gar nicht das Ziel. Denn da die verlangte unendliche Annäherung in der Anschauung niemals auszuführen ist, so blieben die allgemeinen Irrationalitäten als unvorstellbar von den vorstellbaren rationalen Größen genau so verschieden, wie früher; und die Annäherung konnte zu ihrer Klärung nicht das geringste beitragen, war vielmehr völlig überflüssig.

Beide Wege waren also gleich erfolglos und auch ihre Vereinigung in der Grenzmethode war nicht im Stande, die Aufgabe zu lösen. Denn wenn man der infiniten, in der Natur der Sache gegebenen Annäherung dadurch gerecht wurde, dass man den Gedankensprung der Realisten vermied und statt dessen eine Grenze des Processes einführte, d. h. eine Größe, der man durch die Annäherung so beliebig nahe kommen kann, dass sich immer eine Größe durch Synthese von messbaren Brüchen finden lässt, welche sich von der Grenze um weniger als eine andere, beliebig kleine, aber auch noch messbare Größe unterscheidet, so war hier die falsche transfinite Auffassung doch von vorn herein durch die Annahme der Existenz einer Grenze in die Ueberlegung hineingetragen. Man hatte nur eine wissenschaftlich völlig werthlose petitio principii gemacht, indem man das Vorhandensein einer Grenze aus der Annahme derselben bewies. Der Fehler dieser verführerischen Speculation bestand also darin, dass man die anfängliche Induction, welche natürlich zuerst die Existenz der Grenze lehren musste, nicht vollständig durch die Deduction ersetzte.

Dieser Mangel ist nun allerdings, wenn auch erst sehr spät beseitigt, und die inductive Thatsache wirklich, wie es der deductive Umwandlungsprocess verlangt, in eine formale Hypothese verwandelt worden. Man machte nämlich die unbestreitbare Annahme, dass eine gesetzmäßige unendliche Zahlenreihe eben wegen ihres Bildungsgesetzes auch irgend etwas — es brauchte nicht einmal eine Größe zu sein [1]) — bestimmen müsse. Erst weiterhin wird dann bewiesen, dass man unter diesem Etwas auch die Grenze, d. h. eine solche Größe verstehen kann, der man sich, falls man nur in der Reihe weit genug fortschreitet, bis auf beliebig kleine vorgegebene Größen nähern kann. In dieser Form, deren Grundgedanke von Weierstraß herrührt, ist der Begriff heutzutage in die neueren deutschen Lehrbücher der Functionentheorie übergegangen. Aber die meisten derselben sind nicht ganz consequent. Sie setzen häufig genug die Reihe mit ihrer Grenze einfach identisch, während doch beide für die functionentheoretische Betrachtung nur als gleich angesehen werden, in Wahrheit aber ganz verschiedene Begriffe sind, der eine ein fließender, niemals zu vollendender, der andere ein fester, von vorn herein bestimmter.

Aehnlich mit der hier gegebenen, functionentheoretischen Behandlungsweise vergleicht auch Cantor [2]) von einem höheren Gesichtspunkt aus zwei Begriffe des Irrationalen mit einander, deren einer als eine bestimmte Größe b auftritt, während der andere dessen Darstellung durch eine Fundamentalreihe erster Mächtigkeit

---

1) Heine in seinem Aufsatz: Die Elemente der Functionenlehre, Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 74, 1872, S. 172, der ersten Publication dieser Art, spricht von einem Zeichen.

2) In dem Aufsatz: Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten, Mathematische Annalen, Band XXI, 1883, S. 545 ff. Vgl. namentlich S. 567.

liefert[1]). Auch Christoffel ersetzt in analoger Weise jenes allgemeine Zeichen Heine's durch eine, als endlichen Begriff gefasste, aber in unendlicher Form erscheinende Charakteristik[2]).

Allen diesen drei Betrachtungsweisen ist also eine Doppelseitigkeit des Irrationalitätsbegriffes gemein, welche aber offenbar dem ganz klaren und eindeutig fest bestimmten anschaulichen Begriff des Continuums nicht eigen sein kann und nur durch die specielle Art der mathematischen Behandlung künstlich hineingetragen ist. In dieser Hinsicht hält sich nun eine vierte und zwar die originellste und scheinbar ganz unalgebraische Einführungsweise rein, die von Dedekind[3]). Ausgehend von der auffallenden Analogie des reellen Zahlgebietes mit den Punkten einer Geraden versucht er, das erstere so zu bestimmen, dass die Analogie vollständig, d. h. das Zahlgebiet stetig wird. Das Kriterium für die Stetigkeit sieht er dann in der Möglichkeit, überall einen Schnitt zu machen, d. h. überall einen und nur einen Punkt des Zahlgebietes zu finden, derart, dass alle Zahlen auf der einen Seite desselben kleiner sind als alle auf der anderen. Hier tritt uns nun das Irrationale gleich von vorn herein als ein fester, ganz bestimmter Begriff entgegen, nämlich als ein Punkt, oder vielmehr ein Schnitt des Gebietes. Aber auch Dedekind kann bei dieser Form allein nicht stehen bleiben, auch er sieht sich am Schlusse der Arbeit, wo er von der Anwendung auf die Infinitesimalmethode spricht, genöthigt, doch zugleich noch den Grenzwerth einer Näherung einzuführen. Es

---

1) Gegen die Theorien der irrationalen Zahlen von Cantor und Weierstraß erhebt Illigens im XXXIII. Bande der Mathematischen Annalen (Leipzig 1888) S. 155 ff. Einspruch, weil diese schematischen Zeichen gegen die Zahlgrößen, denen sie doch gleichgesetzt werden, ganz heterogen sind, wie uns aber scheinen will, mit Unrecht. Denn es wird doch das Zeichen nicht selbst als die irrationale Zahl definirt, sondern die wirkliche Grenze, und nur nachträglich bewiesen, dass man diese Grenze auch unter dem Zeichen, dessen Existenz anfänglich allein gewiss ist, verstehen kann. Dies ist übrigens auch wohl der Sinn der inzwischen von Cantor (a. a. O. S. 476) gegebenen Antwort, mit welcher sich allerdings Illigens (ebenda Bd. XXXV p. 454) nicht befriedigt erklärt.

2) In dem Aufsatz: Lehrsätze über arithmetische Eigenschaften der Irrationalzahlen, Brioschi's Annali di Matematica pura ed applicata. Serie II^{a}, Tomo XV^{o}, Milano 1888, p. 253.

3) In der Schrift: Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872.

lässt sich freilich nicht leugnen, dass seine Definition das Moment des Stetigen im Irrationalen wesentlich besser trifft, als die übrigen Behandlungsweisen, welche in dieser Beziehung der mathematischen Verwendung zu Liebe mit anschaulich ungenügenden, schematischen Hülfsbegriffen arbeiten, aber das Wesen des Stetigen trifft sie so wenig wie die früheren. Denn die Dedekind'sche Definition des Continuums liefert nur eine schematisehe Nachahmung desselben durch eine überall gleich dichte Mannigfaltigkeit, ohne das den Begriff des Stetigen in erster Linie charakterisirende Moment des inneren Zusammenhangs zu berücksichtigen[1]. Andrerseits erweist sich der Begriff des Schnittes analytisch auch wieder als unbrauchbar und muss nothwendig der Grenzbetrachtung weichen. Allerdings leiten auch Dini[2], Pasch[3] und Tannery[4] ihre analytischen Werke mit dem Dedekind'schen Begriff des Schnittes ein, jedoch nur, um ihn alsbald wieder zu verlassen und zu den früheren analytisch allein brauchbaren Grenzentwickelungen zurückzukehren. Diese Darstellungen sind eigentlich doppelseitig. In den begrifflichen Deductionen operiren sie mit dem finiten Schnitte, in den mathematischen mit der infiniten Annäherung.

So zeigt denn die ganze lange Behandlung des Irrationalitätsbegriffes mit den Hülfsmitteln der Infinitesimalmethode, dass der ursprüngliche Zweck, auf den es eigentlich ankam, die Ausmessung des Irrationalen, keineswegs erreicht ist. War aber dieses Resultat eben deshalb, weil man sich von vorn herein ein falsches Ziel steckte, vorauszusehen, so ist doch andrerseits die Discussion der Frage durchaus nicht nutzlos gewesen. Sie hat vielmehr die Sachlage in einem Maße geklärt, dass man nun deutlich erkennt, wie es überhaupt zwei ganz verschiedene Begriffe des Irrationalen, beziehungsweise Stetigen gibt, deren erster, den man den finiten oder transfiniten nennen kann, allein dem eigentlich anschaulichen Begriff der Stetigkeit entspricht, während der zweite, passend als infinit zu bezeichnende, eigentlich nur ein Bastardbegriff ist, ein Surrogat,

---

1) Das betont schon Cantor in der mehrfach citirten Abhandlung: Mathematische Annalen XXI (S. 576).

2) Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, Pisa 1878.

3) Einleitung in die Differential- und Integralrechnung, Leipzig 1883.

4) Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, Paris 1886.

das die Functionentheorie und messende Arithmetik sich geschaffen haben, um die Irrationalitäten überhaupt in irgend einer Form ihren Betrachtungsweisen unterwerfen zu können[1]. Der infinite Irrationalitätsbegriff ersetzt nämlich die Ausmessung, die er in Wirklichkeit nicht erreichen kann, durch eine Reihe von unendlich vielen Messungen, deren Folge nach einem gewissen Gesetz geregelt ist. Das Object der Messung, die irrationale Größe selbst erscheint also hier als die Grenze eines unendlichen Processes. Eben deswegen ist aber die verlangte Operation eine ideale, die Grenze niemals zu erreichen.

Dieser Begriff des Irrationalen ist also in gewisser Weise unbestimmt, fließend und nie zu vollenden. Andrerseits steht es aber der Einbildungskraft frei, den Näherungsprocess, dessen Abschluss nicht vorstellbar ist, beendet zu denken. Das Irrationale erscheint dann nicht mehr als die Näherung selbst, sondern als die Grenze, nicht als eine unendliche Reihe, sondern als ihre Summe, nicht als eine niemals zu erreichende, sondern als eine festgegebene Größe. Diese Form des Irrationalitätsbegriffes ist die transfinite. Sie ist in dem »Zeichen« Heine's und in der »Charakteristik« Christoffel's dargestellt. Sie deckt sich auch im wesentlichen mit den verdinglichten formalen Irrationalitäten der discreten Zahlgröße, nur dass sie allgemeiner ist und auch die transcendenten mit umfasst. In diesem Sinne erscheint analog wie bei Dedekind irgend ein Abschnitt des zur stetigen Reihe ergänzten Zahlgebietes als Irrationalität, ob er sich gleich im speciellen Falle auf rationale Größen reduciren kann. Und dies ist, wenn man noch die Fähigkeit, positiv und negativ zu sein, hinzufügt, analog derjenigen Definition, welche Newton und Duhamel gegeben haben: Zahl ist das Verhältniss einer Größe zu der ihr entsprechenden Einheit[2].

Hier, wie in vielen anderen Betrachtungen stellt sich das Irra-

---

1) Wir wenden hier die bisher nur für unendlich große oder unendlich kleine Verhältnisse gebrauchten Wörter infinit und transfinit auch für den endlichen Maßstab an, weil wir offenbar hier dieselben Beziehungen haben, und andere bequeme Bezeichnungen nicht existiren. Da jedoch eine endliche Größe nicht blos als Grenze eines Näherungsprocesses, sondern auch von vorn herein als gegeben aufgefasst werden kann, werden wir für diesen Fall die Benennungen fin und transfinit promiscue gebrauchen.

2) Vgl. oben Kapitel III, 2.

tionale als fest fixirt und begrifflich genau umrissen dar. Und deshalb ist der transfinite Irrationalitätsbegriff auch der einzige, welcher einer exacten Behandlung zugänglich ist. Sein Gebiet ist darum, so lange er discontinuirlich bleibt, die abstracte Algebra, wie sie durch Substantialisirung der formalen Zahlen gewonnen wird, außerdem aber, sobald er stetig wird, die construirende, nicht die berechnende Geometrie, oder allgemeiner die Grassmann'sche Ausdehnungslehre.

Andrerseits ist aber dieser strenge Begriff nicht mehr zu verwenden, wo es sich um eine Ausrechnung irgend welcher Art handelt. In der rechnenden Arithmetik z. B. muss man sich entweder mit einer endlichen Annäherung begnügen oder eine unendliche durch den infiniten Irrationalitätsbegriff andeuten. Hier zeigt sich nun aber auf's klarste, dass man in diesem Fall nur eine Aushülfe geschaffen hat, welche niemals gestattet, die transfinite Irrationalität wirklich zu erreichen, dass man der präcisen, exacten Größe ein veränderliches Surrogat unbestimmten Werthes substituirt. Ja die Forderung der Gleichartigkeit aller Größen, z. B. ihre Darstellbarkeit durch Potenzen von zehn, führt hier sogar schon dazu, Größen, die auf andere Weise rational zu messen wären, durch einen unausführbaren Process zu bestimmen. So verwandelt diese Betrachtungsweise z. B. den finit bestimmten Quotient $\frac{1}{3}$ in den infiniten Decimalbruch 0,333 ...., und für diesen Process lassen sich natürlich noch beliebig viele Beispiele beibringen.

Sieht aber schon die rechnende Algebra, zu welcher auch alle geometrischen Berechnungen hinzuzuziehen sind, sich gezwungen, durch das Hülfsmittel der unendlichen Näherung das Unmessbare zu assimiliren, so verlangt die wissenschaftliche Behandlung der stetigen Größen eine Einheitlichkeit der Untersuchungsobjecte in noch viel höherem Grade. Der begrifflich sehr schwierig zu definirende Unterschied der stetigen Größe von der discreten, der continuirlichen von der discontinuirlichen ist in der Anschauung klar und durchsichtig. Hier ist die stetige Größe offenbar nichts weiter als die Ausfüllung der discreten. Gleichwie die dem Bewusstsein ursprünglich in unzusammenhängenden einzelnen Momenten gegebene Zeit dadurch zu einer stetigen ergänzt wird, dass man die Zwischenräume zwischen den verschiedenen Denkacten durch irgend welchen Vorstellungsinhalt erfüllt denkt, oder wie, um ein concretes Bild zu gebrauchen, der Verfertiger einer Reliefkarte den in Höhencurven discontinuirlich gegebenen Abfall eines Gebirges durch Ausfüllung mit Thon zu einem allmählichen macht, so braucht man nur die discrete Zahlgröße, deren Anordnung in eine Reihe ja schon ihre einseitige Ausdehnung nahelegt, vollständig in sich verbunden zu denken, um sofort den Begriff der stetig eindimensional ausgedehnten Größe zu erhalten, der sich natürlich mühelos auf beliebig viele Dimensionen verallgemeinern lässt.

Der so durch Ausfüllung der Lücken des Discontinuirlichen gewonnene Begriff der continuirlichen Zahlgröße ist, wie man sofort sieht, an und für sich finit. Die Untersuchung desselben stößt auf keinerlei Schwierigkeiten, so lange sie von einer Maßvergleichung absieht. Deshalb besteht in der Euklidischen Geometrie, wie in der modernen, wo die Maßzahlen durch Proportionen, beziehungsweise Lagebestimmungen ersetzt werden, der Gegensatz von rational und irrational eigentlich überhaupt nicht. Er verschwindet sogar ganz, um vollständig in den generellen, ungegliederten Begriff der stetig ausgedehnten Größe überzugehen, wenn man in das höhere, abstractere Gebiet der Grassmann'schen Ausdehnungslehre hinaufsteigt. Sobald dagegen das Verlangen nach Maßbestimmung auch der stetigen Größen wieder laut wird, sobald eine wissenschaftliche Analysis es sich zur Aufgabe macht, die Beziehungen continuirlicher Gebiete der Rechnung zu unterwerfen, d. h. sie auf die vorstellbaren Größenverhältnisse zurückzuführen, muss jener Gegensatz mit einem Schlage wieder acut werden.

Nun verlangten aber die Methode der Untersuchung und die begriffliche Forderung gleicher Correctheit aller Resultate gebieterisch die Gleichartigkeit der zu Grunde gelegten Zahlgrößen. Es blieben demnach aus dieser Schwierigkeit zwei Auswege offen. Entweder musste das Irrationale dem Rationalen angepasst werden oder umgekehrt. In dem einen Fall entfernte man sich nicht allzuweit vom Boden der algebraischen Operationen, im anderen betrat man ein ganz neues Gebiet. Der Versuch, den ersten Weg zu gehen, an dessen Ebnung eine unendliche Arbeit der beiden letzten Jahrhunderte vergeblich gewendet wurde, muss, wie wir oben ausgeführt haben, als definitiv gescheitert betrachtet werden. Und im Laufe der Zeit stellte es sich immer klarer heraus, dass nur der zweite zum Ziele führen könne. So verschwand allmählich aus der Differentialrechnung der transfinite Differentialbegriff der Realisten, und an seine Stelle trat die infinite Grenzmethode von Lagrange, welcher aber immer noch die Unvollkommenheit anhaftete, dass die Grenze der Näherung als wirkliches Object der Untersuchung ausgegeben wurde, während dieses eigentlich die Näherung selbst war.

Es ist eines der größten Verdienste von Weierstraß, zuerst das Transfinite ganz aus der Analysis verbannt zu haben. Denn, da man die hypothetischen Grenzen in Wirklichkeit doch nie erreichen kann, so scheint es nicht allein methodisch falsch, sondern auch mathematisch durchaus entbehrlich, wenn man blos sie in's Auge fassen will und nicht die der Behandlung allein zugängliche Näherung. Ist aber der infinite Irrationalitätsbegriff erst einmal als der für die Analysis allein zulässige erkannt, so muss die nothwendig zu erfüllende Forderung der Gleichartigkeit aller Untersuchungsobjecte sofort die Umwandlung auch des Rationalen in infinite Bestimmungen verlangen, gleichwie aus praktischen Gründen die numerische Rechnung exacte Quotienten durch unendliche Decimalbrüche zu ersetzen gezwungen war. In der That ist denn auch diese Umwandlung, deren Gedanke, so einfach er sich ausnimmt, doch erst sehr spät als richtig erkannt wurde, im umfangreichsten Maße von Weierstraß vorgenommen worden. Nur indem alle Zahlgrößen in die infinite Form umgegossen, d. h. durch Reihen definirt werden, — Weierstraß wählt bekanntlich immer Potenzreihen, wodurch die Analogie mit den Decimalbrüchen noch größer wird, — nur so kann jene Gleichartigkeit der Grundbegriffe erreicht werden, die das erste Erforderniss einer einheitlichen Theorie bildet [1]).

Hiermit hat man nun aber auf einmal einen ganz neuen Boden betreten. Denn wenn alle in Betracht kommenden Größen nur

1) Wohl zieht die Weierstraß'sche Functionentheorie auch ganze rationale Functionen in den Kreis der Betrachtung, aber doch nur immer gelegentlich als Specialfälle, und man fühlt auch eigentlich instinctiv dabei, dass sie nicht recht zu den übrigen Functionen gehören, dass die Methode nicht auf sie berechnet ist.

durch unendliche Processe in Annäherung zu bestimmen, niemals aber in finiter oder transfiniter Form gegeben sind, dann muss auch nothwendig die unerbittliche Exactheit der Algebra verschwinden, um der beliebigen Genauigkeit der Functionentheorie Platz zu machen. Man muss sich eben immer des Umstandes bewusst bleiben, dass man es hier mit ganz andersartigen Zahlgrößen zu thun hat, mit Aushülfsbegriffen, die nur erfunden wurden, um der messenden Betrachtung diejenigen Größen zugänglich zu machen, welche es an und für sich nicht sind. Mathematisch lässt sich hiergegen nichts einwenden, sobald man sich nur eingesteht, dass alle Resultate allein in Näherung, wenn auch in beliebiger, richtig sind. Gerade darum hat man sich hier aber auch ein ganz neues Untersuchungsgebiet geschaffen, das mit dem der Algebra nichts gemein hat als die Namen, ein Zusammenhang, den man zudem auch nicht gerade als einen Vorzug betrachten kann.

Das ganze Gebiet der transfiniten stetigen Zahlgröße musste also für die messende Betrachtungsweise in die infinite Form umgegossen werden. Und hierbei verlor natürlich nicht nur die Zahlgröße als solche, sondern auch der Begriff der Stetigkeit seinen wahren Charakter, um in eine formale, begrifflich nichts sagende Definition umgewandelt zu werden. Denn während derselbe im allgemeinen so eng mit der anschaulichen Bewegung verknüpft ist, dass man beinahe als ein Kriterium (natürlich nicht als eine Definition) den Satz aufstellen könnte: »Stetig ist alles, was durch Bewegung, im weitesten Sinne des Wortes, erzeugt gedacht werden kann«, heißt in der analytischen Betrachtung die eine Größe definirende Zahlenreihe dann stetig, wenn sie sich bei beliebig kleiner Aenderung des Argumentes selbst um beliebig wenig ändert. Diese Begriffsbestimmung steht offenbar zu der wirklichen anschaulichen Stetigkeit nicht in der geringsten Beziehung. Denn es fehlt ihr das in diesem Zusammenhange allerdings unnöthige Merkmal, dass die Reihe zwischen zwei beliebig nahe gelegenen Werthen alle zwischenliegenden wirklich annehmen muss, wenn sie dem anschaulichen Begriff der Stetigkeit entsprechen soll. Weit entfernt aber, aus der Formalisirung eines anschaulichen Begriffs der Functionentheorie einen Vorwurf zu machen, muss man ihr vielmehr für diesen Schritt die vollste Anerkennung zollen. Denn nur eine vollständige

Umprägung aller durch transfinite Größen gegebenen Beziehungen in die infinite Form vermag der Functionentheorie und mit ihr der Analysis diejenige Einheit und innere Festigkeit zu geben, welche sie besitzen muss, soll sie anders als eine selbständige Disciplin und nicht als ein missrathenes Hülfsmittel der analytischen Untersuchung erscheinen.

So sehen wir denn den Versuch, das Irrationale der Messung zu unterwerfen, vollkommen misslungen. Die ganze Arbeit zweier Jahrhunderte hat im Gegentheil gerade dazu gedient, zwei völlig verschiedene Irrationalitätsbegriffe aufzustellen, welche aber beide keine Messung zulassen. Denn der erste, der transfinite, kommt überhaupt nur da in Frage, wo es sich gar nicht um eine Messung handelt, wie in der allgemeinen Grassmann'schen Ausdehnungslehre oder in der abstracten Algebra, der zweite, infinite, aber ist immer nur annähernd auszumessen und hat sich sogar in dieser Beziehung noch die rationalen Größen assimilirt, vollständig in der Functionentheorie, soweit wie nothwendig in der numerischen Algebra. Das Resultat dieser Untersuchung ist also eine durchgehende Spaltung des Begriffs der Zahlgröße in vier verschiedene Formen. Denn was hier der Einfachheit wegen an einer reellen Größenreihe ausgeführt wurde, ist natürlich sofort auf beliebig viele Dimensionen auszudehnen, und was für die stetige Zahlgröße untersucht ist, gilt mutatis mutandis auch für die discrete (weshalb wir auch, um Wiederholungen zu vermeiden, bei der Besprechung der infiniten und transfiniten Formen beide Arten von Zahlgrößen stillschweigend zusammengezogen haben). Je nachdem man daher dasselbe Zahlgrößengebiet als discontinuirlich oder continuirlich, als finit oder infinit betrachtet, wird es die Grundlage einer reinen oder numerischen Algebra, einer Ausdehnungslehre oder Functionentheorie, obwohl in den wenigsten Fällen die Untersuchung dieser allgemeinen Disciplinen bisher durchgeführt ist.

Wir können diese Stetigkeitsbetrachtungen nicht verlassen, ohne noch der jüngsten und unerwartetsten Erweiterung des Zahlgebietes zu gedenken, welche zwar anfänglich nicht an diese Stelle zu gehören scheint, sich aber doch ziemlich ungezwungen hier anschließt, der unendlichen Zahlen G. Cantor's[1]). Denn, mag es

1) Dieselben sind eingeführt in der schon citirten Abhandlung: Ueber

auch auf den ersten Blick den Anschein gewinnen, als ob es sich hier um etwas ganz anderes handle, als um Stetigkeitsbetrachtungen, so wiederholen sich hier doch in Wahrheit ähnliche Ueberlegungen, nur im unendlichen Maßstab. Das Resultat ist wenigstens ein dem continuirlich stetigen ähnliches Größensystem.

Cantor geht aus von der Zahlenreihe 1, 2, 3, ... welche ihrer Definition und genetischen Entstehung nach nothwendig ohne obere Grenze, also infinit ist. Das mathematische Symbol für den hierdurch charakterisirten infiniten Unendlichkeitsbegriff ist bekanntlich ∞. Kann man nun aber in der Vorstellung die Erschöpfung der Zahlreihe auch niemals erreichen, so liegt doch andererseits gar kein Hinderniss vor, sie begrifflich vollendet zu denken. Und da der so gewonnene Begriff der transfiniten Unendlichkeit, für welchen Cantor das Zeichen ω einführt, ein ebenso völlig bestimmter ist, wie der der endlichen Grenze in Bezug auf die zugehörige Potenzreihe, so wird es auch möglich sein, ihn der mathematischen Größenbetrachtung zu unterwerfen.

Diese ist es nun aber, welche Cantor, der hauptsächlich bemüht war, seine begriffliche Existenz sicher zu stellen, nicht völlig gelungen zu sein scheint. Denn während gegen die Möglichkeit einer logischen Setzung des transfinit Unendlichen nur noch ein dogmatischer Nominalismus Einspruch erheben kann, lassen sich gegen die algebraische Handhabung dieses Begriffes doch schwerere mathematische Bedenken beibringen. Cantor bleibt nämlich nicht bei dem bloßen Begriff der transfiniten Unendlichkeit stehen, sondern führt gleich eine ganze Reihe unendlicher Zahlen ein. Ganz analog den endlichen Zahlen sollen diese, nachdem die einheitliche Zusammenfassung des ∞ in ω vorgenommen ist, die Reihe bilden: ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3 \ldots\ldots 2\omega$, $2\omega + 1$, $2\omega + 2 \ldots\ldots 3\omega \ldots\ldots 4\omega \ldots\ldots \omega^2 \ldots \omega^3 \ldots \omega^\omega \,.\, \omega^{\omega^\omega} \ldots\ldots$ und so eine Mannigfaltigkeit zweiter Mächtigkeit erzeugen durch die abwechselnde infinite Addition von Einheiten und die transfinite Zusammenfassung derselben[1]).

Als eine charakteristische Eigenschaft dieses unendlichen Zahl-

unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, Mathematische Annalen XXI, Leipzig 1883, S. 545 ff.

1) Betreffs der weiteren Ausführung dieser Gedanken müssen wir auf die citirte Originalabhandlung verweisen.

gebietes wird es nun betrachtet, dass in ihm schon das commutative Gesetz der Addition nicht mehr gilt. Denn es wäre $\omega + 1$ von ω verschieden, eben durch die Setzung der neuen Einheit, $1 + \omega$ müsste aber wieder gleich ω gesetzt werden, weil dies seiner Begriffsbestimmung nach die Zusammenfassung aller Zahlen bereits darstelle. Ebenso wäre z. B. $\mu\omega + \nu\omega^2 = \nu\omega^2$ zu setzen, während $\nu\omega^2 + \mu\omega$ eine davon ganz verschiedene Zahl sei. Wollte man also die neuen Cantor'schen Formen als Zahlen beibehalten, so müsste auch die Definition der Addition geändert, ihre Commutativität fallen gelassen werden. Dies würde nun allerdings eine ungeheure Störung in der Formenlehre hervorbringen; denn Hankel hat die Commutativität der Addition aus dem nicht aufzugebenden associativen Princip derselben, so wie aus der associativdistributiven Multiplication direct bewiesen [1]. Hoffentlich aber wird die hierdurch erforderte, weitgehende Aenderung, deren Folgen gar nicht zu übersehen wären, unnöthig sein. Denn so bestechend die Cantor'schen Ueberlegungen auch klingen mögen, recht überzeugt wird man von ihnen nicht; und in der That scheint hier, wenn man näher zusieht, eine unberechtigte Vermengung der logisch-psychologischen Seite der Frage mit der mathematischen vorzuliegen. Denn die logische Function des Setzens ist bei beiden Ausdrücken $1 + \omega$ und $\omega + 1$ zweimal in Wirkung getreten. In dieser Beziehung sind sie also völlig gleich. Nichts desto weniger bringt es der Begriff des ω mit sich, dass die 1 in $1 + \omega$ unterdrückt werden muss. Dies wird man unmittelbar zugeben können; denn obwohl psychologisch verschieden, müssen beide Ausdrücke nach den Größengesetzen doch als gleichwerthig behandelt werden. Cantor bezieht diese Betrachtung nur auf die Form $1 + \omega$. Nun aber sind wir der Meinung, dass dieselbe Ueberlegung auch auf den Ausdruck $\omega + 1$ Anwendung findet. Denn wenn ω bereits den Inbegriff aller Zahlen bezeichnet, wie sollen dann $\omega + 1$, $\omega + 2$ u. s. w., durch die psychologische Setzung von ω natürlich ebenfalls verschieden, in der Größenbetrachtung noch irgend etwas anderes bedeuten können als ω selbst [2]? Dass in der Behandlung Cantor's bald

1) Complexe Zahlen, S. 32.

2) Der Gebrauch, den Cantor von den unendlichen Zahlen beim Abzählen von Mannigfaltigkeiten macht, hat natürlich hiermit nichts zu thun, weil dabei

der psychologische, bald der Größen-Gesichtspunkt bevorzugt wird, leuchtet ein. Gerade darum erscheint aber die ganze Frage der transfiniten Zahlen, deren Einführung nur von dem psychologischen Interesse der Abzählung gefordert wird, in dieser Größenbetrachtung um so mehr entbehrlich, als die Größennatur der betreffenden Zahlen noch keineswegs ganz klar ist. Wir dürfen deshalb von einer systematischen Verwerthung an dieser Stelle wohl Abstand nehmen.

Fünftes Kapitel.

Die logische Entwickelung des Zahlbegriffs.

1. Der Oberbegriff für die Zahl.

Nachdem wir in den voraufgegangenen Kapiteln die Haupt- und Grundformen des Zahlbegriffs nach ihrer mathematischen wie logischen Gestalt besprochen haben, erhebt sich nunmehr die Frage, in welcher Weise die verschiedenen Typen, zu denen wir gelangt sind, zusammengehören oder in einander greifen. Hatten wir uns bisher bemüht, sie zu isoliren, ihre logische Natur klar zu legen und die begriffliche Existenz eines jeden von ihnen einzeln zu erweisen, so handelt es sich jetzt darum, in genereller Untersuchung zu entscheiden, ob sie sich nicht etwa widersprechen, wiederholen, oder sonst in irgend welchen inneren Beziehungen — der äußeren hat es zum Schaden der Sache immer genug gegeben — zu einander stehen, die ihre Selbständigkeit gefährden könnten. Die Lösung dieser Aufgabe fällt unmittelbar mit der Möglichkeit zusammen, die vorhandenen Zahlbegriffe in eine bestimmte logische Beziehung zu einander zu setzen, ihr gegenseitiges Verhältniss zu beleuchten, ihre Stellung zur übrigen Begriffswelt klarzulegen, mit einem Wort, sie zu classificiren. Erst wenn es gelingt, diese Classification in eindeutiger und zufriedenstellender Weise vorzunehmen, erst wenn es möglich wird, rückwärtsschreitend durch logische Determination alle einzelnen Zahlbegriffe aus ihrem obersten Gattungs-

allein die psychologische Betrachtung in Frage kommt, bei der alle unendlichen Zahlen verschieden sind. Unseres Erachtens könnte man übrigens auch mit demselben Recht $1 + \omega$, $2 + \omega$ u. s. w. zählen, nur wäre dies zwecklos.

begriffe zu entwickeln, erst dann wird man berechtigt sein, von einem befriedigenden Abschluss der ganzen Untersuchung zu sprechen.

Es wäre uns daher hier die letzte Aufgabe gestellt, auf die historische und genetische umgekehrt eine logische Entwickelung des Zahlbegriffs folgen zu lassen, als ein Kriterium für die Richtigkeit der befolgten Principien und als wissenschaftlichen Abschluss der ganzen Untersuchung. Dieser dritte Theil dürfte daher als der wichtigste und über die Zulässigkeit des Ganzen entscheidende Anspruch auf eine ebenso umfangreiche Behandlung machen, wie die vorhergehenden. Da indessen einmal bei dem jetzigen Stand der Frage ein Eingehen auf die Details noch in keiner Weise thunlich erscheint, andrerseits aber auch die successive Determination als directe Umkehrung der in den drei vorhergehenden Kapiteln behandelten genetischen Entwickelung nothwendig zu Wiederholungen führen muss, so kann sie hier nur in allgemeiner Uebersicht gegeben werden. Was man aber in dieser Beziehung vorläufig überhaupt erreichen kann, ist im allgemeinen noch nichts Fertiges. Denn weder sind die begrifflichen Bestimmungen der Zahl so sicher, dass man auf Grund derselben sofort eine durchgreifende Classification wagen könnte, noch sind die Untersuchungen über die Oberbegriffe abgeschlossen genug, um als sichere Fundamente eines festen Systems dienen zu können. Eine willkürliche Begrenzung des Zahlbegriffs aber auf Grund der vorliegenden Untersuchungen würde bei der Lückenhaftigkeit derselben und bei der Nothwendigkeit, mit der sich die Beantwortung dieser Frage im Laufe der Zeit aus ihr selbst ergeben muss, nicht viel mehr wissenschaftlichen Werth besitzen, als etwa der Versuch, die Küstenlinie des hypothetischen antarktischen Continentes durch eine internationale Convention festzusetzen. Die folgende Uebersicht kann daher, umsomehr als sie wohl die erste ihrer Art sein dürfte[1]), im wesentlichen

1) In kleinerem Maßstabe sind solche Ableitungen gegeben bei Wundt, Logik II, S. 118 ff., wo aber der infinite Irrationalitätsbegriff nicht berührt wird, bei Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnisstheorie, Berlin 1878, welcher bei den gewöhnlichen complexen Zahlen stehen bleibt. Ferner bei Frege in der Schrift: Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau 1884, und bei Dedekind in der Abhandlung: Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1888, endlich im Anschluss an die beiden letzten Arbeiten, welche sich

nur allgemeine Bestimmungen geben, Andeutungen, die noch nicht in's Einzelne gehen, Gedanken, die noch ihrer Ausführung harren.

Von welcher Seite man aber auch die Frage betrachten mag, eins kann gegenwärtig als gesichert gelten, dass man nämlich in der Mannigfaltigkeitslehre die Oberdisciplin der Zahlen- und Größenlehre gefunden hat. Indessen wird selbst sie besser noch in zwei verschiedene Theile zu spalten sein. Denn wenn man mit Wundt der Mathematik die Aufgabe zuerkennt, »die denkbaren Gebilde der reinen Anschauung sowie die auf Grund der reinen Anschauung vollziehbaren formalen Begriffsconstructionen in Bezug auf ihre Eigenschaften und wechselseitigen Relationen einer erschöpfenden Untersuchung zu unterwerfen«[1], so bleibt als oberste Aufgabe offenbar eine doppelte übrig, nämlich einmal die Untersuchung der höchsten denkbaren Begriffe der reinen Anschauung und zweitens eine Discussion der allgemeinsten möglichen Beziehungen zwischen solchen. Der ersten Aufgabe sucht die allgemeine Mannigfaltigkeits-, der zweiten die allgemeine Formenlehre gerecht zu werden; und aus ihrer Verbindung entsteht erst die in gewisser Beziehung schon angewandte Mannigfaltigkeitslehre Cantor's.

Die ursprüngliche, reine Mannigfaltigkeitslehre hat sich also zunächst mit der Feststellung der Begriffsformen zu beschäftigen, welche einer mathematischen Behandlung fähig sind. Abstrahirt man aber bei allen Objecten des Denkens von ihren sonstigen Eigenschaften und behält allein diejenige Qualität im Auge, vermöge deren sie Gegenstand irgend welcher formaler Verknüpfungen werden können, so erhält man den gesuchten Begriff der Mannigfaltigkeit. Seiner Bestimmung nach ist er die einheitliche Zusammenfassung einer Menge gegebener Elemente, als der letzten, für unzerleglich angesehenen Beziehungssubstrate des discursiven Denkens. Die nähere Discussion dieses Begriffes lässt nun aber schon verschiedene Typen unterscheiden, deren Abgrenzung gegen einander durch den von Cantor eingeführten Begriff der Mächtig-

---

im wesentlichen auf die ganzen Zahlen beschränken in einem Aufsatz von Keferstein. Ueber den Begriff der Zahl, Festschrift, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg anlässlich ihres 200jährigen Jubelfestes 1890. Zweiter Theil, Leipzig 1890 p. 119 ff.

1) Logik II, S. 75.

keit gegeben wird. Dieser letztere Begriff hat die Bestimmung, für unendliche Mengen ein von der Anordnung derselben unabhängiges Kennzeichen an die Hand zu geben. Für endliche Mengen dient ja diesem Zwecke der Begriff der Anzahl, und es sind zwei endliche Mannigfaltigkeiten in Bezug auf ihre Anzahl gleich, wenn sich jedem Element der einen auch eins und nur eins der anderen zuordnen lässt. Für unendliche Mengen ist natürlich der Begriff der Anzahl nicht zu verwerthen. Dagegen wird man die zweite Bestimmung auch auf diese übertragen und zwei unendlichen Mannigfaltigkeiten dann und nur dann gleiche Mächtigkeit zuschreiben müssen, wenn sich ihre Elemente eindeutig auf einander beziehen lassen. Als niedrigste Mächtigkeit bietet sich ohne weiteres die der unendlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, ..., weil jeder Theil derselben, falls er nicht selbst von der Mächtigkeit der Reihe ist, endlich sein muss. In gleicher Weise ist dann jede höhere Mächtigkeit aus den niedrigeren dadurch zu definiren, dass alle ihre Theile, sobald sie nicht selbst die in Frage kommende Mächtigkeit besitzen, eine der vorhergehenden aufweisen müssen. In der abgekürzten Symbolsprache der abzählenden Geometrie würden z. B. die verschiedenen Mächtigkeiten den Anzahlen ∞, ∞^{∞}, $\infty^{\infty^{\infty}}$ u. s. w. entsprechen[1]).

Die Mächtigkeit ist also begrifflich das charakteristische Merkmal der Mannigfaltigkeit und als solche von großer Wichtigkeit. Schon hier tritt nämlich der ganz fundamentale Unterschied von discret und stetig in Erscheinung, insofern die Mannigfaltigkeiten erster Mächtigkeit in die discontinuirlichen, die zweiter in die continuirlichen Zahlgrößen übergehen werden, und die Variirung dieses Begriffs zu den Zahlarten Wundt's führt[2]). So erhalten wir eine Reihe von vier Typen der allgemeinen Mannigfaltigkeit, nämlich erstens die einheitliche, welche sich mit ihrem Element deckt, d. h. selbst als untheilbar betrachtet wird, zweitens die endliche, aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehend, drittens die unendliche erster Mächtigkeit oder abzählbare, und endlich viertens

---

1) Betreffs der weiteren Ausführung aller hier in Frage kommenden Ideen müssen wir natürlich auf die Kapitel III. 3 citirten Originalarbeiten Cantor's verweisen.

2) Vgl. Wundt, Logik II, S. 119.

die zweiter Mächtigkeit oder stetige, von denen natürlich immer die höheren alle niedrigeren vollständig enthalten.

Weiter wird man aber in dieser Rubricirung vorläufig nicht gehen können. Denn Mannigfaltigkeiten von höherer als der zweiten Mächtigkeit sind bisher noch nicht nachgewiesen, wenngleich Cantor in der Gesammtheit aller stetigen und unstetigen Functionen eine solche erhalten zu haben glaubt[1]. Außerdem enthält aber auch schon die bisherige Aufzählung eine große, noch nicht ausgefüllte Lücke. Denn der Beweis, dass die continuirliche Mannigfaltigkeit wirklich von der zweiten Mächtigkeit sei, wie wir dies oben ohne weiteres angenommen haben, ist bisher noch nicht erbracht. Wohl arbeitet Cantor schon Jahre lang an einem befriedigenden Nachweis dafür, wohl scheint er selbst von der Wichtigkeit der Annahme, welche übrigens der ganze Zusammenhang direct aufnöthigt, vollkommen überzeugt zu sein, wohl gewinnt es sogar nach einer Notiz[2] aus dem Jahre 1884 den Anschein, als ob er den zum Ziele führenden Gedankengang selbst schon völlig übersähe und nur noch nicht für reif zur Mittheilung hielte, indessen steht trotz alledem der definitive Beweis noch heute aus. Und da kaum anzunehmen ist, dass Cantor einen so wichtigen Satz gekannt hätte, ohne ihn zu publiciren, so müssen wir an dieser Stelle eben eine Lücke, und zwar eine für uns leider sehr bedeutende constatiren. Wo wir daher im Folgenden, wie ja auch im Vorhergehenden, die Mannigfaltigkeit zweiter Mächtigkeit mit der stetigen oder continuirlichen identificiren, müssen wir immer den Vorbehalt treffen, dass wir dazu vorläufig noch kein Recht haben, obwohl es nach dem ganzen Zusammenhang der Dinge kaum denkbar erscheint, dass die Annahme nicht doch richtig sein sollte.

Im Interesse unserer späteren Determination können wir zu den Cantor'schen Resultaten noch hinzufügen, dass, je nachdem man die Zusammenfassung der Elemente oder ihre Aneinanderreihung, d. h. die Mannigfaltigkeit selbst oder ihre Darstellung durch die Elemente in's Auge fasst, der finit-transfinite oder infinite Mannigfaltigkeitsbegriff entsteht, eine Spaltung, die allerdings

1) Mathematische Annalen XXI, S. 590, Anmerkung 10.
2) Acta mathematica IV, S. 388.

bisher noch nie vorgenommen wurde. Beide Formen fallen zusammen im ersten Typus, unterscheiden sich aber schon merklich im zweiten und gehen dann weit auseinander im dritten, um endlich im vierten ganz heterogen zu werden. Fügt man diesen wenigen Ueberlegungen noch den selbstverständlichen Satz hinzu, dass jeder Theil einer Mannigfaltigkeit wieder eine solche gleicher oder niedrigerer Mächtigkeit ist, so wird man im wesentlichen alles zusammengefasst haben, was für unsere Zwecke von Nutzen ist und was, wie man wohl behaupten darf, vorläufig überhaupt über diesen Gegenstand zu sagen ist.

Sollen vielmehr irgend welche neuen Beziehungen gefunden werden, so ist dazu die Kenntniss der zweiten Oberdisciplin der Mathematik nöthig, der allgemeinen Formenlehre. Ihre Aufgabe ist die Discussion der formalen Eigenschaften aller Beziehungen von Denkobjecten, die ihr dadurch natürlich in der Form von Mannigfaltigkeiten gegeben sind. Ihr Umfang kann daher auch nur ein geringer sein. Denn über allgemeine Verknüpfungen lässt sich selbstverständlich nicht viel ausmachen. Bestimmt, allein den formalen Algorithmus des Denkens zu fixiren, wird sie sich vorläufig auf die Betrachtung des Unterschiedes von thetisch und lytisch, von associativen, distributiven und commutativen Eigenschaften beschränken müssen. Die knappe Darstellung von Hankel[1]) wird demnach so ziemlich alles enthalten, was hierüber zu sagen ist.

Die Anwendung dieser Formenlehre auf die Mannigfaltigkeit als Beziehungssubstrat führt nun zu der eigentlichen Cantor'schen Mannigfaltigkeitslehre. Das neue Element der Betrachtung, das hier hinzukommt, ist die Möglichkeit der begrifflichen Verknüpfung zweier Mannigfaltigkeiten oder ihrer Abbildung. So kommt man einerseits dazu, eine Mannigfaltigkeit auf eine andere, andrerseits aber auch sie auf sich selbst abzubilden, und gewinnt namentlich den wichtigen Cantor'schen Satz, dass sich jede Mannigfaltigkeit beliebig vieler Dimensionen auf eine eindimensionale derselben Mächtigkeit eindeutig abbilden lässt, andrerseits aber durch die Selbstabbildung zu der Vorstellung einer Erzeugung der Mannigfaltigkeit, welche von nun an die Trägerin der infiniten Form des

1) Complexe Zahlen, S. 18—29, 33.

Mannigfaltigkeitsbegriffes wird. Von diesem Gesichtspunkt aus kann man dann ähnlich von solchen Operationen sprechen, welche, auf zwei Theile einer Mannigfaltigkeit angewandt, wieder einen Theil derselben geben, und solchen, bei denen dies nicht der Fall ist. Derartige »gruppentheoretische« Betrachtungen würden also auf die Unterscheidung von geschlossenen und ungeschlossenen Operationen führen; doch gehören sie im allgemeinen noch der Zukunft an[1]).

Im allgemeinen muss diese generelle Uebersicht genügen, um die folgende Determination verständlich zu machen. Es würde höchstens noch erforderlich sein, am Schluss hier diejenigen logischen Postulate kurz zusammenzustellen, welche bei dieser einfachsten Anwendung des Denkschematismus auf den allgemeinsten Denkinhalt in Frage kommen. Das ist aber sehr schnell gethan. Denn diese Postulate sind offenbar nichts anderes, als die vier logischen Grundgesetze, noch dazu in ihrer reinsten schematischen Form. Die drei ersten, der Satz von der Identität, dem Widerspruch und dem ausgeschlossenen Dritten beziehen sich auf die selbständige Mannigfaltigkeit, der Satz vom Grunde hingegen bedingt die Anwendung der Formenlehre auf die letztere. Alle diese Gesetze kann man natürlich noch entsprechend variiren. So ist z. B. für die Anwendung der Formenlehre auf die Mannigfaltigkeitslehre auch noch die Specialisirung des Identitätssatzes nöthig: Jede Mannigfaltigkeit wird jeder anderen dann gleich gesetzt, wenn sie sie in dem fraglichen Gedankenzusammenhang vertreten kann[2]).

---

1) Während die vorliegende Arbeit entstand, ist die Frage gerade von dieser Seite aus erfolgreich und mit ganz neuen allgemeinen Methoden in Angriff genommen und erheblich gefördert worden durch die Aufsätze von Schur, »Zur Theorie der aus Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen«, Mathematische Annalen XXXIII, Leipzig 1888, S. 49; Study, »Ueber Systeme von complexen Zahlen«, Göttinger Nachrichten von 1889, S. 237, und »Complexe Zahlen und Transformationsgruppen«, Berichte der math.-phys. Classe der Königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften von 1889, S. 177, und Scheffers, »Zur Theorie der aus n-Einheiten gebildeten complexen Größen«, a. a. O. S. 290 und »Ueber die Berechnung von Zahlensystemen«, ebenda, S. 400.

2) Damit ist natürlich nicht, wie viele das wollen, eine Definition der Gleichheit gegeben, sondern diese Bestimmung ist lediglich einem Kriterium gleichzuachten, wie ja überhaupt die höchsten logischen Begriffe wegen des Mangels an Oberbegriffen nicht mehr exact zu definiren, sondern allein aus ihren Determinationen heraus zu fixiren, d. h. nur durch Kriterien zu bestimmen sind.

Die entsprechende specifische Form des Satzes vom Grunde würde aber in diesem Falle lauten: Jede Mannigfaltigkeit kann mit jeder anderen jeder formalen Verknüpfung unterworfen werden.

2. Zahl und Größe.

Auf Grund der Fundamentalbeziehungen, wie sie im vorigen Abschnitt niedergelegt wurden und wie sie sich natürlich auch in allen niederen Begriffen wiederspiegeln müssen, wäre nunmehr die Determination des Zahlbegriffs auszuführen. Es scheint dabei einer der wesentlichsten Punkte zu sein, dass man das Verhältniss von Zahl und Größe, welche in den verschiedensten Entwicklungsperioden der Mathematik bald einander über-, bald nebengeordnet, bald direct identificirt wurden, vor allen Dingen klärt und in die gehörige Beleuchtung rückt. Der folgende Gedankengang wird in dieser Beziehung wohl im allgemeinen als zutreffend zu bezeichnen sein.

Wir definiren zunächst die Größe als die quantitative Determination der Mannigfaltigkeit. Hiermit ist nun freilich noch nicht allzuviel gesagt, weil sich darunter für's erste nur sehr wenig denken lassen wird. Indessen dürfte doch eine logische Entwicklung, da ja Quantität und Qualität die letzten und einfachsten Abstractionen aus der Anschauung darstellen, ziemlich außer Stande sein, eine adäquatere als diese, in gewisser Beziehung tautologische Definition zu geben. Sie deckt sich logisch ungefähr mit der Kantischen, wonach die Größe die Anwendung der Kategorie der Quantität auf die Erfahrung sein soll, ohne sich natürlich erkenntnisstheoretisch mit ihr identificiren zu wollen[1]).

Unmittelbar werden sich nun die Fundamentalunterschiede der Mannigfaltigkeit auch auf die Größe vererben. Entsprechend den vier Typen der ersteren erhält man nämlich die einfache, zusammengesetzte, discrete und stetige Größe direct durch quantitative Determination. Außerdem kann sie auch wieder unter dem infiniten oder transfiniten Gesichtspunkt betrachtet werden, wobei dieser Gegensatz schon wesentlich schärfer als in der Mannigfaltigkeitslehre zum Ausdruck kommt. Endlich kann sie natürlich auch beliebig

1) Betreffs des positiven Inhalts des Größenbegriffs vgl. oben Kapitel IV, 2.

viel Dimensionen besitzen. Wie aber andererseits alle Mannigfaltigkeiten sich auf lineare eindeutig abbilden lassen, so genügt auch die Betrachtung einer einfach ausgedehnten Größenreihe, um dann mühelos auf beliebig viele Dimensionen übertragen zu werden. Die hier angedeutete Untersuchung setzt aber schon nothwendig eine Anwendung der Formenlehre auf den Größenbegriff voraus, welche zwar auch eine selbständige, eigenartige sein kann, aber doch fast immer auf den Zahlcharakter zurückgreift. Wir werden deshalb jetzt zu der Fixirung des Zahlbegriffs genöthigt.

Den Zahlbegriff werden wir nun in dieser Betrachtung keineswegs als einen Ueber- oder Unterbegriff der Größe auffassen können, wie das sehr vielfach geschehen ist, sondern ihn formal neben dieselbe stellen. Denn während wir die Größe als die quantitative Determination der Mannigfaltigkeit darstellten, ist die Zahl lediglich als eine qualitative Determination derselben denkbar. Denn wir hatten ja in der genetischen Entwickelung gesehen, dass das einzige, was allen Zahlbegriffen gemein, was daher auch allein als Merkmal des allgemeinen Zahlbegriffs beizubehalten war, die Verwendung als Beziehungssubstrat für die formalen arithmetischen Grundoperationen bildete. Nun ist aber die Mannigfaltigkeit bestimmt als das Beziehungssubstrat für die allgemeine Formenlehre. Folglich wird sie unmittelbar dadurch zur Zahl, dass man die allgemeinen Verknüpfungen als die arithmetischen Grundoperationen, also rein durch qualitative Determination specialisirt.

Als solche Grundoperationen wählt man aber die Addition mit der Subtraction auf der einen, die Multiplication mit der Division auf der andern Seite. Die erste wird hier natürlich nur formal definirt als eine associative und commutative geschlossene Operation, welche also niemals über das jeweilige Mannigfaltigkeitssystem hinausführt, die Multiplication aber als eine in Bezug auf die Addition distributive und in sich associative. Die Subtraction und Division sind als lytische, d. h. als Umkehrungen der thetischen Operationen zu bestimmen. Die wesentliche Eigenschaft der Addition ist ihre Geschlossenheit und Commutativität, welche beide die eindeutige Umkehrung in der nur äußerlich von der Addition verschiedenen Subtraction bedingen. Die gleichen Verhältnisse treffen bei der Multiplication nicht mehr zu. Denn abgesehen davon, dass sie im allgemeinen nicht geschlossen ist, braucht sie auch nicht mehr commutativ zu sein, so dass man infolge dessen als lytische Umkehrung zwei verschiedene Divisionen erhält, je nachdem man durch den ersten oder den zweiten Factor dividirt denkt.

Bezeichnet daher $\Theta\,(a,\,b)$ irgend eine thetische Verknüpfung, so ist die Addition definirt durch die Functionalgleichungen: $\Theta\,(\Theta(a,\,b),\,c) = \Theta\,(a,\,\Theta\,(b,\,c))$ und $\Theta\,(a,\,b) = \Theta\,(b,\,a)$, welche das associative und commutative Princip ausdrücken, und durch die Bedingung der Geschlossenheit. Eine solche Verknüpfung, die man als $a+b$ bezeichnet, kann daher auch zur Erzeugung der hierdurch als formale Zahl erscheinenden Mannigfaltigkeit benutzt werden. Fügt man noch die Null als Modul (eine Hankel'sche Bezeichnung[1]) hinzu, d. h. als einen Ausdruck, dessen Addition an der Zahl nichts ändert, definirt ganz allgemein durch die Gleichung $\Theta\,(a, \text{Mod.}) = a$, so ist alles erschöpft, was wesentliches über die Addition hier gesagt werden kann.

Viel interessanter ist jedenfalls die Multiplication. Sie wird zunächst in sich associativ, dann in Bezug auf die Addition distributiv definirt durch die Gleichungen: $\Theta\,(\Theta\,(a,\,b),\,c) = \Theta\,(a,\,\Theta\,(b,\,c))$ auf der einen und: $\Theta\,(a,\,b+c) = \Theta\,(a,\,b) + \Theta\,(a,\,c)$ nebst: $\Theta\,(b+c,\,a) = \Theta\,(b,\,a) + \Theta\,(c,\,a)$ auf der andern Seite. Das letzte Gleichungspaar, in seiner Gesammtheit das volle distributive Princip repräsentirend, bedingt zugleich die Commutativität der Addition, so dass man diese überall da, wo sie nicht allein, sondern mit der Multiplication zusammen vorkommt, also z. B. überall im Gebiete der Zahlen, lediglich durch die associative Eigenschaft definiren kann. Eine durch die multiplicativen Eigenschaften bestimmte Verknüpfung bezeichnet man mit $a \cdot b$, ihren Modul formal mit 1. Es zeigt sich dann, dass diese formale 1 als Zahleinheit betrachtet werden darf. Ihre successive Addition kann eine Reihe von Formen erzeugen, welche, da die Addition ja geschlossen ist, alle einer Mannigfaltigkeit angehören. Auf diese müssen dann der Definition der Zahl zufolge auch alle lytischen Operationen anzuwenden sein, und so kann man zu dem oben[2]) bereits behandelten Begriff der rein formalen Zahl auf ebenfalls formalem Wege gelangen. Diese Gestalt

1) Complexe Zahlen S. 23.

2) Kapitel IV, 1.

des allgemeinen logischen Zahlbegriffs ist aber offenbar nur äußerlich dadurch bestimmt, dass man von einer festen Einheit, dem Modul der Multiplication ausging, begrifflich nothwendig ist sie jedoch durchaus nicht und wird nur zufällig bedingt durch die psychologische Form unserer mathematischen Apperception. Der logische Zahlbegriff ist aber in Wahrheit viel allgemeiner. Er ist ja gar nichts anderes als die Mannigfaltigkeit selbst. Denn wenn diese so wie so dazu bestimmt ist, als Beziehungssubstrat für die Verknüpfungen zu dienen, so kann ihre Form auch nicht davon berührt werden, wenn man nicht sie, sondern nur die Verknüpfungen specialisirt. Die formale Zahlenlehre kann daher an ihr nichts ändern, sie ist höchstens im Stande, Bezeichnungen und Symbole für den allgemeinen Mannigfaltigkeitsbegriff einzuführen, also etwa algebraische Zeichen, und nur die Betrachtung concreter Fälle, d. h. die Anwendung der formalen Speculationen auf die Erfahrung, kann sich der gewöhnlich gebrauchten Zahlformen bedienen, weil diese ja nicht rein logische Realitäten, sondern durch mehr oder minder lange Abstractionen und Generalisationen aus der Erfahrung gewonnen sind, also nicht dem logischen Denken, sondern der Art und Weise unserer Apperception ihre, in diesem Sinne zufällig erscheinende, Gestalt verdanken[1]).

---

1) Wir haben bisher durchgehends die Multiplication nothwendig für associativ und distributiv erklärt, ihre Commutativität aber nicht gefordert. Wir befinden uns dabei in Uebereinstimmung mit den meisten Mathematikern, welche auch, da eine der drei Eigenschaften geopfert werden muss, bei der Betrachtung der höheren Zahlsysteme in der Regel die Commutativität fallen lassen. Es darf indessen nicht verschwiegen werden, dass einige Mathematiker gerade diese beibehalten und dafür eine andere Eigenschaft aufgeben. So hat z. B. Scheffler (Ueber das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie, insbesondere über die geometrische Bedeutung der imaginären Zahlen, 1846 und 1851 im Situationscalcul) das commutative gegen das distributive, Kirkmann (On Pluquaternions and Homoid Products of Sums of n Squares, Philosophical Magazine 1848, p. 447 und 494) und Cayley (über ein analoges Thema, Philosophical Magazine, 1845, p. 210) dasselbe gegen das associative Princip umgetauscht. Da aber diese und ähnliche Zahlsysteme immer ohne allgemeine Bedeutung und unfruchtbar geblieben sind, darf man sie ohne sonderliche Bedenken von dem allgemeinen Zahlbegriff ausschließen. Sollte sich wider Erwarten zeigen, dass sie doch brauchbar sind, so müsste man allerdings die Definition der Multiplication anders fassen.

3. Die Zahlgröße.

Der Begriff der Zahlgröße, nach dem Vorhergehenden leicht abzuleiten, entsteht nun einfach, indem man den allgemeinen Zahlbegriff auf einen festen Erfahrungsinhalt bezieht, wobei er natürlich, da hier die Art und Weise der Erfahrung, also namentlich die Form unserer Apperception in Frage kommt, als formale Zahl in dem früheren Sinne erscheinen muss. Die Zahlgröße ist sonach wirklich, wie ihr Name besagt, die begriffliche Vereinigung der Größe mit der Zahl, die quantitative Determination der Formalzahl, die formale der Größe. Und wie die Größe aus dem reinen Mannigfaltigkeitsbegriff, die Zahl aus der allgemeinen Formenlehre gewonnen wurde, so bietet sich ganz entsprechend die Zahlgröße dar als die Specialisirung der Anwendung der Formenlehre auf den allgemeinen Mannigfaltigkeitsbegriff in der Cantor'schen Mannigfaltigkeitslehre. Die Analogie ist also eine vollkommene. Dort zwei selbständige Gebiete und ihre Vereinigung, hier dasselbe in ihren Determinationen wiederholt. Die Zahlgröße erscheint deshalb auch direct als das Product einer Formalzahl mit der Größeneinheit, eine Form, die ja allen complexen Zahlsystemen zukommt. Eine Zahlgröße wird sich deshalb stets in der Form darstellen lassen: $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots . a_n e_n$, wo die a Zahlencoëfficienten, d. h. die formalen Zahlen, die e die verschiedenen Größeneinheiten der Beziehung bezeichnen.

Die Eigenschaften dieser Zahlgrößen, als der quantitativen Determinationen der Formalzahlen sind natürlich auch zunächst durch ihre formalen Operationen zu bestimmen, sodass das Permanenzprincip der formalen Gesetze hier ganz von selbst als ein hodegetisches sich darbietet. Die Addition wird sich nun allerdings ihrer Geschlossenheit wegen nicht weiter specialisiren lassen außer in der Ausdehnung auf mehrere Dimensionen. Dagegen ist die Multiplication ganz vorzüglich geeignet, als ein Eintheilungsmittel zu dienen, und bildet auch in der That das für ein Zahlsystem charakteristische. Leider bestehen aber über die Möglichkeit verschiedener Multiplicationen noch so wenig Untersuchungen, dass man eine weitere Eintheilung der Zahlgrößen auf Grund derselben heutzutage noch nicht wird vornehmen können. Zwar sind manche einzelne Specialfälle in den Arbeiten von Hankel, Simony, Weierstraß, Dedekind und anderen untersucht[1]), zwar hat selbst Grassmann das Problem allgemein anzufassen unternommen[2]), indessen kann von einer befriedigenden Lösung der Frage im allgemeinen doch noch nicht gesprochen werden[3]). Nur ein Unterschied ist vorläufig außer der zufällig vorhandenen oder fehlenden Commutativität als wichtig und fundamental zu betrachten, der einer geschlossenen oder ungeschlossenen Multiplication, je nachdem die multiplicative Verknüpfung zweier Größen des Zahlsystems eine ebensolche erzeugt oder nicht. Diesem Unterschied gemäß trennt man nämlich begrenzte und unbegrenzte Zahlsysteme. Zu den ersteren gehören z. B. die Quaternionen und die gewöhnlichen complexen, zu den letzteren unter anderen die Grassmann'schen alternirenden Zahlen.

Der Begriff der Zahlgröße, ausgedrückt im allgemeinen n-dimensionalen Zahlsystem, ist also selbst mathematisch sehr mannigfach modellirt. Gemeinsam ist allen Zahlsystemen eigentlich nur die Addition. Die Multiplication ist zwar formal, d. h. in Bezug auf den Zahlcharakter überall gleich, modificirt sich aber andrerseits in Bezug auf das Moment der Größe durch die in jedem System anders gewählten Beziehungen zwischen den Einheitsproducten. Die Subtraction, ursprünglich die Lysis der Addition, wird durch Einführung der negativen Größen dieser gleichgestellt. Die Division endlich, nur selten in eindeutiger Form erscheinend, ist so wenig in ihrer Zulässigkeit bestimmt oder untersucht, dass man dies eigentlich als einen Mangel der bisherigen Theorien bezeichnen muss. Näher erforscht und wirklich vollständig behandelt sind außer den Quaternionen leider nur die gewöhnlichen complexen Zahlen, weil

1) Von einem formal neuen Geschtspunkt aus ist erst jüngst die Frage von Hölder an dem Specialfall der Quaternionen wieder aufgenommen in Göttinger Nachrichten 1889, S. 34.

2) In dem Aufsatz: Sur les différents genres de multiplication. Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 49, 1854, p. 123.

3) Doch sind bereits in jüngster Zeit in den auf S. 321 citirten Arbeiten von Study und Scheffers unabhängig mit zwei verschiedenen Methoden alle Zahlensysteme von zwei, drei und vier Dimensionen aufgestellt worden, deren Multiplication geschlossen ist und einen Modul (in dem oben benutzten Grassmann'schen Sinne) besitzt. Die betreffenden Anzahlen sind 2, 5 und 16. Scheffers hat endlich in der oben zuletzt citirten Abhandlung die Methode noch auf das entsprechende Größengebiet von fünf Dimensionen ausgedehnt und in diesem 54 mögliche Zahlsysteme gefunden.

sie das einzige begrenzte Zahlsystem mit commutativer Multiplication darstellen und deshalb äußerlich ganz dem reellen Größensystem gleichen. Im übrigen ist in dieser Beziehung wohl schon vielfach vorgearbeitet worden, aber ein vorläufiger Abschluss für's erste nicht zu erwarten. Eine weitere Determination und Classification der Zahlsysteme bietet daher bei dem gegenwärtigen Stand der Frage noch so große Schwierigkeiten, dass man sie vorläufig wird aufschieben müssen.

Ist aber einerseits die mathematische Ausbildung der Zahlgröße noch nicht im Stande, eine weitere logische Behandlung zuzulassen, so ist es dagegen unbedingt nothwendig, zum Schluss noch einmal auf die begrifflichen Gegensätze in derselben, namentlich auf den Unterschied von contiuuirlich und discontinuirlich hier näher einzugehen, der zwar in Wahrheit ganz fundamental, bisher aber doch noch immer unter der Oberfläche verborgen geblieben ist. Da jedoch alle n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten sich immer auf eine lineare derselben Mächtigkeit reduciren lassen, so können wir die ganze Frage im wesentlichen auf die reellen Zahlgrößen beschränken.

Die Specialisirung der vier Mannigfaltigkeitstypen führt unmittelbar in ihrer qualitativ-quantitativen Determination auf die vier entsprechenden Typen der Zahlgröße, welche wir mit Wundt[1]) als Zahlarten unterscheiden können. Der erste Typus liefert unmittelbar die Größeneinheit, der zweite die ganze und zwar, da es sich hier um Größen handelt, nicht die absolute, sondern die benannte ganze Zahl, der dritte ferner eine allgemein discrete und der vierte die stetige Zahlgröße. Und wie die höheren Mannigfaltigkeiten immer alle niedrigeren umschließen, so sind auch hier die vorhergehenden Zahlarten vollständig in den folgenden enthalten.

So lange es sich nun allein um die formale Verknüpfung selbst handelt, sind alle einzelnen Begriffe als gleichartig zu betrachten und zeigen keine Verschiedenheit; sobald dagegen der Begriff der Größe den der Zahl zurückdrängt, müssen ihre Unterschiede auch wieder in den Vordergrund treten. Indessen bringt es wiederum die mathematische Behandlung mit sich, dass zwar der vierte Typus gegen die drei anderen sehr erheblich, der dritte aber gegen die

1) Wundt, Logik II, S. 119.

beiden ersten viel weniger absticht. Denn sieht man von der Disciplin der sogenannten Zahlentheorie ab, deren Anwendung auf Größen relativ gering ist, so werden in der Regel die drei ersten Zahlarten einfach zusammengefasst in die algebraische, d. h. discontinuirliche Größe. Diese Behandlungsweise ist praktisch allein entwickelt und in der Algebra durch den Gebrauch beinahe geheiligt. Sie operirt im wesentlichen mit dem Begriff der discreten Größe, welche ihren Charakter dadurch erhält, dass sie äußerlich in der ganzen Rechnung immer allein um ihrer selbst willen in's Auge gefasst, niemals aber mit den anderen Größen der Verknüpfung in eine vergleichende Maßbeziehung gesetzt wird. Die Algebra hat es daher nur mit der discontinuirlichen Größe oder der allgemeinen algebraischen Irrationalität zu thun. Und zwar treten diese Irrationalitäten als etwas von vorn herein bestimmtes, wohldefinirtes, logisch greifbares auf, mit einem Wort, sie sind finite Zahlgrößen. Die Algebra ist daher, wie wir es jetzt endgültig aussprechen können, die Lehre von den discreten finiten Größen. So lange sie sich mit der Untersuchung der formalen Beziehungen solcher Größen begnügt, so lange sie immer noch mit Buchstaben rechnet, nicht mit Ziffern, so lange bleibt der algebraische Irrationalitätsbegriff auch stets ein finiter.

Das wird aber mit einem Schlage anders, sobald sie darauf ausgeht die Größen zu messen, d. h. quantitativ in bestimmter Weise auf eine Grundeinheit zu beziehen. Hier nöthigt die Unmöglichkeit, diese Forderung im ganzen betrachteten Gebiete zu erfüllen, zu der Heranziehung gewisser infiniter Processe, welche durch eine immer noch discontinuirlich erscheinende Addition Näherungswerthe aufstellen muss, um wenigstens den Irrationalitäten ähnliche Ausdrücke in die Rechnung einführen zu können. Diese infinite Behandlungsweise greift sogar über auf die rationalen Zahlen, welche hierdurch oft genug als unendliche Decimalbrüche eingeführt werden müssen. Andrerseits gestattet aber gerade der discontinuirliche Charakter der Messung nicht, dies Verfahren auch auf alle rationalen Zahlgrößen auszudehnen, da man doch immer gewisse, streng ausmessbare Grundverhältnisse haben muss, welche zur Auswerthung der anderen verwendet werden können. Diese Disciplin der Größenlehre, die numerische Algebra, formt den finiten

Zahlbegriff also nicht ganz in den infiniten um, sondern nur da, wo es nöthig ist. Das ist aber z. B. bei allen Irrationalitäten der Fall. In Folge dessen muss denn doch die numerische Algebra von der allgemeinen, abstracten wohl unterschieden werden, da ihr Zahlbegriff, abgesehen von den einfachsten Formen, wesentlich ein infiniter ist. Hier ist das Irrationale im allgemeinen als eine abzählbare Mannigfaltigkeit erster Mächtigkeit gegeben, während es dort transfinit als Summe derselben auftritt.

Spaltet sich so die discontinuirliche Zahlgröße in zwei grundverschiedene Unterbegriffe, je nachdem man ihre Erzeugung aus Elementen oder das Resultat derselben in's Auge fasst, so tritt derselbe Gegensatz bei der continuirlichen der (wenigstens wahrscheinlichen) quantitativen Zahldetermination der Mannigfaltigkeit zweiter Mächtigkeit in noch viel höherem Maße auf. Wieder ist hier der finite Begriff der ursprüngliche, der infinite nur eine Hülfsform des messenden Denkens. Die Behandlung der finiten stetigen Größe aber ist die Aufgabe der reinen Geometrie oder vielmehr ihrer, von Grassmann ausgebildeten, umfassenden Oberdisciplin, der Ausdehnungslehre. Es ist das große, methodologisch unschätzbare Verdienst dieses Mannes, gezeigt zu haben, dass sich solche »extensiven« Größen auch als Zahlen betrachten lassen, d. h. mit großem Vortheil Verknüpfungen zu unterwerfen sind, welche, in dem vorliegenden Gebiet natürlich von actueller Bedeutung, ihren formalen Eigenschaften nach als Addition und Multiplication erscheinen[1]. Zwar hatten schon vor ihm Möbius[2], Bellavitis[3] und andere ähnliche Gedanken in's Auge gefasst und theilweise zur Ausführung gebracht, aber sie reichten lange nicht heran an die durchgreifende Ausbildung derselben bei Grassmann, dessen außerordentliche Bedeutung für unsern Zweck darin besteht, dass er ursprünglich methodisch ganz verschieden behandelte Begriffe dem einen um-

1) Grassmann hat bekanntlich einen großen Theil seines Lebens hindurch an der Durchführung dieser Idee gearbeitet. Wir müssten darum auch hier alle seine Schriften citiren; vgl. deshalb Anmerkung 1, S. 286.

2) In dem bekannten vielcitirten »Barycentrischen Calcul«, Leipzig 1827; in den gesammelten Werken von Möbius abgedruckt in Band I, Leipzig 1883.

3) In mehreren Einzelabhandlungen, namentlich: Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica [Calcolo delle equipollenze]. Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto, Padova e Venezia V, 1835, p. 244—259, und Metodo delle Equipollenze, ebenda VII, 1887, p. 243—261, und VIII, 1838, p. 17—37, p. 85—121. Außerdem ist er noch mehrfach gelegentlich darauf zurückgekommen.

fassenden der Zahlgröße subsumirte und so die Zusammenfassung aller früher einzelnen actuellen Verknüpfungen in den formalen Operationen ermöglichte.

Die Disciplin der Anschauungslehre, leider in der modernen Mathematik immer noch recht wenig eingebürgert, entbehrt des Maßbegriffes durchaus oder kennt ihn doch nur in der Form von Größenverhältnissen. Daher sind auch alle ihre Begriffe in sich völlig widerspruchsfrei und finit. Sowie dagegen das analysirende Denken sich des anschaulichen Begriffs der stetigen Zahlgröße bemächtigt, sowie durch ein synthetisches successives Setzen die continuirliche Erzeugung desselben durch Bewegung grob nachgeahmt wird, sowie, mit einem Wort, die Zahlgröße der Messung unterworfen werden soll, wird dieser finite Begriff unbrauchbar und muss durch den infiniten ersetzt werden. Diejenige Disciplin, welche sich die Messung des Stetigen zur Aufgabe macht, ist die Functionentheorie oder im weiteren Sinne die ganze Analysis. Sie entspricht also direct der numerischen Algebra, wie die Ausdehnungslehre der allgemeinen. Nur ist hier die Umwandlung der finittransfiniten Form in die infinite viel weiter getrieben als dort, indem als Grundbegriffe nur wirklich infinite, d. h. z. B. Potenzreihen — bei Cauchy bestimmte Integrale — ebenso Differentiale als unendlich klein werdende Größen u. s. w. zugelassen werden sollen, wenn auch dieser Regel selbst heutzutage noch nicht überall entsprochen wird.

Als Haupteintheilung der Größenlehre ergibt sich also nach dem Vorangehenden eine doppelte. Zunächst kann man aus den vier verschiedenen Typen der Mannigfaltigkeit und ihrer quantitativen Determination, der Größe, vier verschiedene Zweige ableiten. Der erste behandelt die einheitliche, der zweite die zusammengesetzte, der dritte die allgemeine discrete, der vierte die stetige Zahlgröße. Doch ist die erste Disciplin hier lediglich von schematischer Bedeutung, da man mit der Größeneinheit doch nichts weiter beginnen kann, als sie eben setzen. Hier decken sich also unmittelbar Begriff und Umfang der Wissenschaft. Die drei andern aber sind selbständige, wohlunterschiedene Gebiete der Größenlehre und theilen sich wieder gleichmäßig in zwei parallele Entwickelungen. Je nachdem sie nämlich nur auf Lage, Richtung, Ordnung und ähnliche Verhältnisse, diese natürlich im allgemeinsten Sinne gefasst, Rücksicht nehmen oder auf die Messung der Größen ausgehen, behandeln sie den finit-transfiniten oder infiniten Größenbegriff.

Die drei finiten Disciplinen sind: Zahlentheorie, reine Algebra und Ausdehnungslehre, die ihnen entsprechenden infiniten: das inductive Rechnen mit benannten ganzen Zahlen, die numerische Algebra mit ihrer Anwendung auf die Geometrie, also alles Rechnen im weitesten Sinne umfassend, und die Functionentheorie oder Analysis. In diesem Sinne dürfte in der That die von Grassmann gegebene Haupteintheilung der »Formenlehre«, die er direct mit der Mathematik identificirt, zeitgemäß zu modificiren sein. Seine Eintheilung war beherrscht von dem doppelten Gegensatz von gleich und ungleich auf der einen, von discret und stetig auf der andern Seite[1]. Die Lehre von den gleichen discreten Größen sollte die Algebra, von den ungleichen die Combinationslehre, die von den gleichen stetigen die Functionentheorie, von den ungleichen stetigen die Ausdehnungslehre sein. Aber diese Scheidung scheint uns nicht den eigentlichen springenden Punkt zu treffen. Denn die Combinationslehre dürfte doch wohl zur reinen Algebra zu zählen sein, und eine Wissenschaft, die gleiche Größen betrachtet, bezweckt eben ihre Messung. Nach den ganzen vorhergehenden Deductionen müssen wir aber nothwendig zu dem Resultat kommen, dass der Begriff des Maßes es ist, welcher die fundamentale Spaltung der Größenlehre bedingt, nicht der Unterschied von gleich und verschieden[2]. Deshalb haben wir der Systematik zu Liebe auch auf die endliche zusammengesetzte Größe diese Scheidung angewandt, so dass unsere Eintheilung durch das folgende Schema darzustellen wäre:

Größenlehre.

	Lehre von der einheitlichen Größe	Lehre von den endlichen Größen	Lehre von den discreten Größen	Lehre von den stetigen Größen
1. Finite Disciplinen:		1. Zahlentheorie	1. Reine Algebra	1. Ausdehnungslehre
2. Infinite Disciplinen:		2. Inductives Rechnen mit ganzen Zahlen	2. Numerische Algebra	2. Functionentheorie.

Allen diesen drei, beziehungsweise sechs Oberdisciplinen lassen sich nun als Grundbegriffe Zahlgrößen zu Grunde legen. Die Zahlgröße kann deshalb als ebenso fundamental für die Größenlehre betrachtet werden, wie die abstracte Größe selbst. Denn die ganze

1) Ausdehnungslehre von 1844 (zweite Auflage 1878) S. XXIII ff.

2) Grassmann hat in der Ausdehnungslehre von 1862 zwar auch eine Art von finiter Functionentheorie gegeben. Dieselbe hat sich aber bisher noch nicht als brauchbar erwiesen.

Größenlehre, als der allgemeinste Ausdruck der angewandten Mathematik in der Verbindung von objectivem Erfahrungsinhalt mit subjectivem Denkmechanismus, kann mit Hülfe der einfachen arithmetischen Grundoperationen völlig ausreichend behandelt werden. Die Zahlentheorie behandelt den erkenntnisstheoretischen Begriff der absoluten Zahl bezogen auf eine Größe, die reine Algebra die discrete, die Ausdehnungslehre die stetige Zahlgröße. Die zugehörigen infiniten Beziehungssubstrate sind: der psychologische Begriff der Anzahl, ebenfalls auf eine Größe bezogen, für die numerische Algebra die discrete infinite (Decimal-, Kettenbruch u. s. w.), für die Functionenlehre im weitesten Sinne die stetige infinite Zahlgröße, wie etwa Potenzreihen, Integrale u. s. w. Und in aufsteigender Reihe benutzt der Begriff der Anzahl zu seiner primitivsten Messung, der psychologischen, die einfache finite Größeneinheit, die numerische Algebra als Maßstab die transfinite Form der Anzahl, nämlich die absolute Zahl, die Functionentheorie endlich misst mit den transfiniten discreten Größen. So stützen sich also die infiniten Begriffe der höheren Mannigfaltigkeiten immer auf die transfiniten der nächst niedrigen, wie es ja auch sein muss, da sie aus diesen durch Synthese erzeugt werden.

Die hier für ein einfach ausgedehntes Gebiet vorgenommene Betrachtung gilt natürlich unmittelbar für eine Zahlgröße beliebig vieler Dimensionen. Zu jeder gehört eine Zahlentheorie[1]), reine Algebra, Geometrie auf der einen, und eine Zählbetrachtung, numerische Algebra und Functionentheorie auf der andern Seite. Nur bringt es gerade der Maßbegriff mit sich, dass die drei infiniten Disciplinen, deren erste allerdings nur dem Schematismus zu Liebe hier aufgestellt wurde, vorzugsweise begrenzte Zahlsysteme, also solche mit geschlossener Multiplication betrachten. Die unbegrenzten, für die Maßbestimmung unfruchtbarer, können dafür mit großem Nutzen unter dem transfiniten Gesichtspunkt behandelt werden. So zieht z. B. Hankel aus den alternirenden Zahlen große Vortheile für die gewöhnliche Algebra, namentlich die Determinanten[2]), und so legt namentlich Grassmann diese seiner ganzen Aus-

---

1) Hierbei denken wir natürlich keineswegs allein an die Theorien der von Gauß eingeführten, von ihm, Kummer, Dedekind und anderen vielfach behandelten »idealen Zahlen«, welche vielmehr nur eine andere Betrachtungsform für die gewöhnlichen complexeren Zahlen darstellen, da ihre Einheiten die n-ten Einheitswurzeln sind.

2) Complexe Zahlen S. 119 ff.

dehnungslehre zu Grunde[1]. Andrerseits sind aber auch die transfiniten Formen der begrenzten Zahlsysteme vielfach von Nutzen. Beispielsweise lässt sich die sphärische, nichteuklidische Geometrie mit Quaternionen, die euklidische der Ebene mit den gewöhnlichen complexen Zahlen leicht behandeln. — —

Hiermit dürfte die Classification der Zahlgrößen, soweit sie bei dem gegenwärtigen Stand der Frage überhaupt räthlich ist, im wesentlichen erschöpft sein. Denn weder wird die mehr formal mathematische Trennung in begrenzte und unbegrenzte Zahlsysteme wegen des Mangels allgemeiner Untersuchungen über die Multiplicationen viel weiter zu treiben, noch die mehr logische Scheidung von finit-transfinit und infinit über den Begriff der stetigen Zahlgröße auszudehnen sein. Indessen beruht doch die Beschränkung auf die betrachteten vier Typen auf keiner logisch nothwendigen Ueberlegung, sondern allein auf der Erfahrung, dass bisher noch keine Mannigfaltigkeiten von höherer als der zweiten Mächtigkeit gefunden worden sind. Und wenn auch der genaueste Kenner dieser Verhältnisse, G. Cantor, außer der Vermuthung, dass die Gesammtheit aller stetigen und unstetigen Functionen die dritte Mächtigkeit besitze[2], in dieser Richtung noch keinen Fortschritt hat machen können, so schließt das doch natürlich keinesfalls die Existenz höherer Mannigfaltigkeiten aus. Es ist ja sogar noch nicht einmal die zweite Mächtigkeit der stetigen Zahlgröße erwiesen; und die Denkbarkeit überstetiger Zahlsysteme ist keineswegs so unwahrscheinlich, dass von vorn herein Forschungen in dieser Richtung aussichtslos wären. Hat doch Cantor selbst schon in seinen transfiniten Zahlen eine Art Mittelding zwischen discreten und stetigen Größen aufgestellt. Sind aber erst einmal höhere Mannigfaltigkeiten gefunden, so würden sich diese leicht wieder zu Zahlgrößen determiniren lassen; und so wird vielleicht die Untersuchung überstetiger Zahlsysteme einmal eine wesentliche Aufgabe der Zukunft bilden.

---

1) Hauptsächlich in der Ausdehnungslehre von 1862.

2) Vgl. oben S. 319.