Ueber die mathematische Induction.

Von

W. Wundt.

---

1. Analytische und synthetische Methoden in der Mathematik.

Mathematiker und Philosophen sind darüber einig, dass die Mathematik wegen der Sicherheit ihrer Principien und der bindenden Kraft ihrer Beweisführungen als das vollkommenste Beispiel einer deductiven Wissenschaft anzusehen sei. In der syllogistischen Demonstrationsmethode Euklid's, welche den logischen Zusammenhang von Voraussetzungen und Schlussfolgerungen ausführlich darlegt, hat man darum bekanntlich Jahrhunderte lang die specifisch mathematische Methode gesehen. Wo immer der Inhalt eines Gebietes in eine Anzahl von Lehrsätzen zerlegt war, die aus vorangestellten Definitionen, Axiomen und Postulaten in streng syllogistischer Weise abgeleitet wurden, da glaubte man der Vortheile der mathematischen Deduction sicher zu sein. Zuweilen wurde freilich diese Form der Darstellung eines wissenschaftlichen Systems mit dem bei der Gewinnung desselben eingeschlagenen Verfahren verwechselt, oder man meinte wenigstens, die ursprünglich vielleicht auf anderem Wege gefundenen Sätze bedürften einer solchen Beweismethode zu ihrer Sicherstellung.

Eine wichtige Umwälzung des Denkens findet nun in dieser Beziehung in Descartes' Methodenlehre und deren mathematischen Anwendungen ihren Ausdruck. Einem Manne, der selbst einer der größten Erfinder im Gebiete der Mathematik war, konnte jener Irrthum, auf welchem die Ueberschätzung der Euklidischen Demonstration beruhte, nicht verborgen bleiben. Indem er eine analytische und synthetische Methode unterscheidet, schliesst er sich zwar mit diesen Bezeichnungen an Euklid an, aber er gibt den Begriffen zum Theil einen anderen Inhalt. Bei Euklid sind Analysis und Synthesis Unterformen der syllogistischen Beweismethode. Bei der Analysis nimmt man das zu beweisende als zugestanden an und zeigt, dass die daraus gezogenen Folgerungen mit allgemein als wahr anerkannten Sätzen übereinstimmen. Bei der Synthesis geht man von als wahr anerkannten Sätzen aus und zeigt, dass die Folgerungen den zu beweisenden Satz enthalten.[1]) Beide Methoden, deren Unterscheidung in der hier hervorgehobenen Bedeutung übrigens auf Plato zurückgeht, fügen sich bei Euklid in das nämliche vielgliederige Schema von Definitionen, Axiomen, Theoremen und Problemen, und es ist klar, dass in beiden Fällen der zu beweisende Satz existiren muss, ehe der Beweis angetreten wird. Zugleich hat die synthetische Methode einen unverkennbaren Vorzug dadurch, dass sie stets zu einem bindenden Beweis führt, während das analytische Verfahren nur dann unbedingt richtige Folgerungen gestattet, wenn der Beweis ein indirecter oder apagogischer ist. Der directe analytische Beweisgang dagegen wird nur in dem Falle zwingend, wenn das Verhältniss von Grund und Folge, das zwischen den einzelnen Gliedern des Beweises besteht, zugleich ein Verhältniss der Wechselbestimmung ist, so dass die Folge als Grund den Grund als Folge hervorbringen würde. Gerade deshalb aber kann der directe analytische Beweis stets durch einen synthetischen ersetzt werden, wie dies Euklid selbst im Eingang seines 13. Buches an einem Beispiel erläutert. Man wird darum hier im allgemeinen den synthetischen Beweis vorziehen. Die Prüfung der Frage, ob die gegebenen Verhältnisse von Grund und Folge zugleich solche der Wechselbestimmung seien, fällt bei ihm von vornherein hinweg. So bleibt denn auch bei Euklid dem analytischen Verfahren hauptsächlich das Gebiet der apagogischen Beweisführungen vorbehalten, Beweisführungen, die sich zumeist auf Sätze beziehen, die an unmittelbarer Evidenz den Axiomen so nahe stehen, dass man zweifeln kann, ob sie nicht ebenso unmittelbar gewiss sind wie die Axiome selbst, die zu ihrer Demonstration gebraucht werden.

---

1) Euklid's Elemente, XIII, 1.

Eine wesentlich andere Bedeutung gewinnt nun die Unterscheidung der analytischen und synthetischen Methode bei Descartes. Analysis nennt er dasjenige Verfahren, durch welches das Wesen eines Gegenstandes unmittelbar erforscht werde, und welches daher auch beim Unterricht der Mathematik zu bevorzugen sei, weil es den Schüler selbst auf den Weg der Erfindung führe. In seiner Geometrie hat er ein mustergültiges Beispiel dieser Methode aufgestellt, und aus diesem Beispiel erhellt deutlicher als aus seinen unbestimmter gehaltenen methodologischen Ausführungen der Sinn der Bezeichnung. Ueberall besteht bei ihm die Analyse in einer zweckmäßigen Zerlegung des Ganzen, dessen Untersuchung in Frage steht, in Elemente und eventuell in der constructiven Hinzufügung anderer Elemente, welche zusammen mit den gegebenen eine vollständige Bestimmung der Eigenschaften des untersuchten Gebildes möglich machen. Zugleich aber hält es Descartes für wesentlich, dass diese analytische Untersuchung in der allgemeinsten Form geführt werde, damit die Beschaffenheit der Verstandesoperationen und die allgemeine Bedeutung der Resultate deutlich hervortrete. In diesem Sinne macht er der Analysis der Alten den Vorwurf, dass sie den Geist an die Betrachtung der Figuren gebunden und darum die Einbildungskraft ermüdet, aber die Uebung des Verstandes verabsäumt habe; und seine eigene Methode bezeichnet er als ein Verfahren, welches, die Analysis der Alten mit der Algebra der Neueren und der syllogistischen Kunst verbindend, die Vortheile dieser aller wahrnehme und ihre Fehler vermeide.[1]) So äußerlich diese Definition auch erscheinen mag, so deutet sie doch vollkommen treffend den Charakter der modernen Analysis an, zu welcher Descartes' Geometrie den Grund gelegt hat. Gerade das Princip der analytischen Methode Plato's und Euklid's, dass das Gesuchte als bereits gegeben vorausgesetzt werde, ist eines der mächtigsten Werkzeuge auch der modernen Analysis. Eine der fruchtbarsten Anwendungen dieses Princips ist namentlich die von Descartes erfundene Methode der unbestimmten Coefficenten. Aber die eigentliche Quelle dieser Anwendungen liegt hier wie in andern Fällen schon in der Einführung der algebraischen Symbolik. Indem das Buchstaben-

---

2) Discours de la méthode. Oeuvr. publ. par Cousin, I, p. 140.

symbol jede beliebige unbekannte oder veränderliche Größe bezeichnen kann, ist es an und für sich ein überall brauchbares Hülfsmittel, um das Gesuchte in der Rechnung so zu verwenden, als wenn es bereits gefunden wäre. Wie auf diesen Umstand historisch die Entwicklung der algebraischen Symbolik zurückgeht, so ist auch er es weit mehr als die von Descartes hervorgehobene abstracte Allgemeinheit der Zeichen, auf welchem die Bedeutung der letzteren für die Analysis beruht. Allerdings aber hängt mit dieser Allgemeinheit jene Eigenschaft innig zusammen. Denn das algebraische Symbol eignet sich eben nur darum zur Bezeichnung aufzusuchender Größen und Größenbeziehungen, weil es an und für sich vieldeutiger Natur ist. Dadurch drängt der Gebrauch der algebraischen Symbolik von selbst zur analytischen Methode. War daher diese in der Geometrie der Alten ein nur gelegentlich benutztes und an Bedeutung hinter der synthetischen Demonstration zurückstehendes Hülfsmittel gewesen, so hatte sich dieselbe schon vor Descartes in der Algebra praktische Geltung verschafft. Die algebraischen Methoden zur Lösung der Gleichungen sind im wesentlichen nichts anderes als Anwendungen der allgemeinen analytischen Methode. Nur bewegen sich diese Anwendungen ausschließlich auf arithmetischem Gebiete, und es bleibt Descartes das große Verdienst, dass er zuerst mit durchschlagendem Erfolg die allgemeinere Anwendbarkeit der algebraischen Symbolik kennen lehrte, ein Unternehmen, welches nothwendig sofort von einer neuen Ausdehnung der analytischen Methode begleitet sein musste.

Im Gefolge dieser allmäligen Erweiterung ihrer Anwendungen erweiterte sich aber zugleich der Begriff der analytischen Methode selbst. Der Gesichtspunkt der Alten, welcher von den Formen der geometrischen Beweisführung ausgegangen war, trat zurück, und die unmittelbar mit dem Gebrauch der algebraischen Symbolik zusammenhängende Maxime, die gesuchten Größen ebenso wie die bereits gegebenen in die Rechnung einzuführen, wurde als ein selbstverständliches, aber nebensächliches Element angesehen. Indem sich die Demonstrations- in eine Untersuchungsmethode umwandelte, konnte nicht mehr die Stellung des Beweisobjectes, sondern nur noch das wechselseitige logische Verhältniss der auf einander folgenden Sätze entscheiden. Hier aber erwies sich überall der Fortschritt vom Zusammengesetzten zum

Einfachen, vom Besonderen zum Allgemeinen als das charakteristische Merkmal der Analyse, der umgekehrte Weg als derjenige der Synthese. Die Ausdrücke Analysis und Synthesis nahmen auf diese Weise eine dem Sinne dieser Worte vollkommen entsprechende, aber im Vergleich mit der ursprünglichen allgemeinere Bedeutung an. So erklärt Newton im dritten Buch der Optik, die Analyse sei diejenige Forschungsmethode, welche in der Mathematik wie in der Physik der Synthese vorausgehe. »Die Analyse«, sagt er, »stützt sich auf Experiment und Beobachtung und geht durch Schlussfolgerung vom Zusammengesetzten auf das Einfache zurück; sie schließt von den Bewegungen auf die Kräfte, von den Wirkungen auf die Ursachen, endlich von den besonderen Ursachen auf die allgemeineren. Die Synthese dagegen nimmt die gefundenen Ursachen als die Principien an, erklärt die aus ihnen hervorgehenden Erscheinungen und führt den Beweis für ihre Erklärungen.« [1]) Diese Ausführung hat zunächst die Physik im Auge, aber ihrem allgemeinen Inhalte nach bezieht sie sich auf die Mathematik in gleicher Weise. Uebereinstimmend nennt Leibniz ganz allgemein Analyse die Zerlegung eines Problems in seine Bestandtheile, Synthese den Fortschritt von den einfacheren zu den schwereren Problemen. Er fügt aber die bereits über den Euklidischen Begriff der synthetischen Methode hinausweisende Bemerkung bei, dass sich mit der Analyse fast immer zugleich ein synthetisches Verfahren verbinde. [2])

In jener Erklärung Newton's, die man wohl als eine Art exemplificirender Definition der zu seiner Zeit gültigen Begriffe von Analysis und Synthesis ansehen darf, ist nun derjenige Punkt, auf welchen in der Auffassung der Alten das Hauptgewicht gelegt und der noch bei Descartes deutlich zu bemerken war, ganz zurückgetreten. Nichts desto weniger ist gerade in der physikalischen Anwendung, die Newton gibt, noch in Einer Beziehung die Verwandtschaft bemerkbar. Der Schluss »von den Bewegungen auf die Kräfte, von den Wirkungen auf die Ursachen« ist keineswegs von zwingender Gewissheit, sondern, wie jeder Schluss von der Folge auf den Grund, im allgemeinen von vieldeutiger Art, so dass auf diese Weise nur hypothetische

1) Newton, Optice. Lib. III, quaestio XXXI. Edit. Lausanne. 1740, p. 329.
2) Math. Werke, Ausg. von Gerhardt, VII, S. 206.

Begriffe und Grundsätze zu Stande kommen. Dem gegenüber erfreut sich auch hier die synthetische Methode des Vortheils, dass sie, da der Schluss vom Grund auf die Folge stets zwingend ist, mit völliger Sicherheit aus den einmal angenommenen Principien das Einzelne ableitet. Für das Wissen als solches ist damit freilich nichts gewonnen, da, wie Newton ausdrücklich hervorhebt, das analytische Verfahren immer dem synthetischen vorausgehen muss, also nach seiner Meinung offenbar die Principien selbst nur auf dem analytischen Wege zu gewinnen sind.

Gleichwohl kommt diese physikalische Unvollkommenheit der analytischen Methode für die Mathematik nicht mehr in Betracht: hier ist ein analytisch gewonnener Satz, falls nur seine Voraussetzungen richtig sind, von ebenso zwingender Gewissheit wie das Resultat einer synthetischen Demonstration. Auch diesen Vorzug verdankt die moderne Analysis der Anwendung der algebraischen Symbolik. Die Analysis der Alten hatte sich in geometrischen Constructionen bewegt, deren Ergebnisse in einer Reihe von Bedingungsurtheilen niedergelegt waren. Sollte hier ein directer Beweis in bindender Weise geführt werden, so war zu prüfen, ob jedes Bedingungsurtheil zugleich ein Verhältniss der Wechselbestimmung enthalte, also umkehrbar sei. Diese Prüfung wurde hinfällig, sobald für jede Art mathematischer Untersuchungen der abstracte arithmetische Ausdruck in Anwendung kam, denn nun trat an die Stelle des Bedingungsurtheils die algebraische Gleichung, welche, da sie stets umkehrbar sein muss, bei ihrer Aufstellung bereits jene Prüfung bestanden hat. Hierin liegt der zweite entscheidende Fortschritt, den die Analysis durch Descartes' Bemühungen errang. War sie aber erst in Bezug auf Strenge der Beweise der synthetischen Methode ebenbürtig geworden, so konnte es nicht fehlen, dass sie bei ihren sonstigen Vorzügen bald den Vorrang behauptete. Nur als Beweisverfahren hat die synthetische Methode Euklid's noch lange Zeit die Herrschaft behalten, und nicht selten mussten, wie das Beispiel Newton's zeigt, Untersuchungen, die auf analytischem Wege geführt waren, sich die mühselige Umprägung in Euklidische Demonstrationen gefallen lassen. Besonders aber glaubte man die Strenge und Vollständigkeit dieses Verfahrens in solchen Fällen nicht entbehren zu können, wo die Gefahr des Irrthums größer zu sein schien. Darum empfahl der

Erfinder der modernen Analysis selbst für das Gebiet der Metaphysik die synthetische Methode; denn er meinte, hier seien die einfachen Principien an und für sich klar, und die Schwierigkeit bestehe nur in der Erklärung der zusammengesetzten Erscheinungen. Doch gerade das Beispiel Descartes' zeigt, wie sehr der Schein der Strenge und Vollständigkeit, welchen diese Methode verbreitet, eher den Irrthum zu verhüllen als zu verhüten geeignet ist.

Wenn in der Regel die fertigen Begriffe mannigfache Spuren ihrer Vergangenheit an sich tragen, so gilt dies vielleicht von wenig Begriffen in so hohem Maße, wie von dem der »Analysis« in der modernen Mathematik. Die ganze Geschichte desselben scheint sich in seiner heutigen Bedeutung verdichtet zu haben. Gerade darum aber wird es so schwer, denselben erschöpfend zu definiren oder auch nur sein Verhältniss zu der allgemeineren logischen Bedeutung des Begriffs anzugeben. Eine weitere Erschwerung ist noch durch den Umstand eingetreten, dass der nämliche Ausdruck, der ursprünglich nur auf eine Methode bezogen wurde, nunmehr zur Bezeichnung der ganzen Disciplin dient, in welcher jene Methode vorzugsweise zur Anwendung kommt, in welcher aber selbstverständlich auch solche Verfahrungsweisen, die ihrem logischen Charakter nach synthetische genannt werden müssen, keineswegs ausgeschlossen sind. Bleiben wir hier bei der methodologischen Bedeutung des Begriffes stehen, so werden sich nach dem Obigen hauptsächlich drei Kriterien der analytischen Methode unterscheiden lassen. Das erste besteht in der von Newton hervorgehobenen, allgemein logischen Eigenschaft, dass sie den Weg von dem Zusammengesetzten zu dem Einfachen einschlägt. Gerade dieses Merkmal gilt aber ausschließlich von der methodischen Behandlung der einzelnen Probleme, und es trifft daher für die »Analysis« als mathematische Disciplin nicht zu, welche letztere vielmehr naturgemäss umgekehrt von den einfacheren zu den zusammengesetzteren Problemen überführt und insofern im Ganzen den synthetischen Gang wählt. Das zweite Kriterium besteht in dem Euklidischen Princip, dass das Gesuchte gefunden wird, indem man es als gegeben voraussetzt; das dritte in der Wahl einer gleichförmigen, für die formale Ausführung der arithmetischen Operationen geeigneten Symbolik. Diese drei Kennzeichen der analytischen Methode stehen aber in einem innigen Zusammenhang, und insbesondere das dritte und scheinbar äußerlichste derselben ist für die Vollendung der Methode unerlässlich.

Im Verhältniss zu der Ausbildung der Analysis ist nun die »Synthesis«, als mathematische Methode betrachtet, verhältnissmäßig lange zurückgeblieben. Augenscheinlich war es hier der Einfluss Euklid's, welcher einer freieren Auffassung im Wege stand. Während man längst in dem analytischen Verfahren eine Forschungsmethode erkannt hatte, welche sich nur gelegentlich zugleich in eine Darstellungsmethode verwandeln könne, hatte man bei dem synthetischen Verfahren immer nur die geometrische Demonstration im Auge. Newton's oben angeführte Definition lässt dies deutlich durchblicken, indem in derselben der Analyse unbedingt der zeitliche Vorrang eingeräumt wird. Kann die Synthese erst nachfolgen, so wird es sich bei ihr auch im wesentlichen nur um die wissenschaftliche Umformung eines bereits gegebenen Inhaltes handeln, sie wird Demonstrations-, aber nicht Forschungsmethode sein können.

Nichts desto weniger findet diese Auffassung Descartes' und Newton's im Grunde schon in den einfachsten arithmetischen Operationen ihre Widerlegung. Die Addition, Multiplication und Potenzirung sind synthetische Verfahrungsweisen, und sie sind zweifellos früher als die zu ihnen inversen Operationen der Subtraction, Division und Radicirung, welche als analytische bezeichnet werden können. Aber alle diese einfachen Operationen setzt man in der Regel von vornherein als gegeben voraus, man betrachtet sie als Hülfsmittel, deren sich jede Methode bedienen müsse, die aber nicht selbst den Rang von Methoden beanspruchen können. Obgleich daher in Wahrheit in Arithmetik und Zahlentheorie synthetische Verfahrungsweisen eine nicht geringe Rolle spielen, so ist doch auch hier die Geometrie es gewesen, in welcher die Erkenntniss reifte, dass die Synthesis ebenfalls den Werth einer Forschungsmethode besitzen könne. Und nicht nur ist es auf diese Weise das nämliche Gebiet, welches ebensowohl der modernen Analysis wie einer tieferen Erfassung der synthetischen Methode den Ursprung gegeben, sondern es ist sogar der Zeitgenosse und Rivale Descartes', Roberval, auf welchen die ersten, freilich noch auf lange hin unentwickelt gebliebenen Anfänge der neueren synthetischen Geometrie zurückweisen.

Fasst man bei Euklid nicht die äußere Form der Demonstration, sondern die Untersuchungsmethoden selbst ins Auge, wie dieselben vor allem in den gewählten Constructionsmethoden zu Tage treten, so kann kein Zweifel bleiben, dass hier das herrschende Verfahren das analytische ist, sofern wir nur bei dem Ausdruck »Analysis« uns an die Definition Newton's zurückerinnern. Die Geometrie Euklid's betrachtet, wie die Geometrie der Alten überhaupt, die mit Lineal und Zirkel gezeichneten Figuren als fertige Objecte, die sie für sich und in ihrem gegenseitigen Verhältnisse der Untersuchung unterwirft. Dadurch wird eine Constructionsmethode zur vorherrschenden, die durchaus den analytischen Charakter an sich trägt: die Methode der Theilung der Figuren. Eine gegebene Figur wird in angemessener Weise durch Hülfslinien zerlegt und so die Anwendung einfacherer, bereits bekannter Sätze oder Grundsätze auf dieselbe möglich gemacht. Man denke z. B. an die außerordentlich sinnreiche Zerlegung, welche dem allgemeinen Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes zu Grunde liegt.[1] Nur ganz ausnahmsweise bedient sich Euklid einer zweiten Methode, welche als Methode der ergänzenden Hülfsconstructionen bezeichnet werden kann, insofern es sich bei ihr um Constructionen handelt, die außerhalb der untersuchten Figuren angebracht sind, aber die Theile derselben in neue Relationen bringen, durch welche die Zurückführung auf bestimmte Axiome oder einfachere Lehrsätze vermittelt wird.[2] Diese Methode steht in der Mitte zwischen dem analytischen und synthetischen Verfahren: sie ist analytisch, da sie ebenfalls die Zurückführung auf einfachere Sätze beabsichtigt, synthetisch aber, da dieses Ziel erst durch die Construction einer zusammengesetzteren Figur erreicht wird, in welche die vorhandene als Bestandtheil eingeht. Völlig zurück in dem Euklidischen Lehrsystem tritt dagegen die genetische Constructionsmethode. Indem die Geometrie der Alten im allgemeinen die geometrischen Figuren als fertige Objecte betrachtet, unterwirft sie dieselben isolirt der Untersuchung; nur gelegentlich, und wo die unmittelbare Anschauung darauf hinweist, berücksichtigt sie die Beziehungen zwischen verschiedenen Raumgebilden. Die Euklidische Lehrmethode mit ihrer Zerfällung des Stoffs in eine Anzahl

1) Euklid, I, 47.

2) Vgl. z. B. VI, 4. Ausserdem gehören hierher zahlreiche Problemata.

von Lehrsätzen und Aufgaben ist, wie sie aus einer solchen isolirenden Untersuchung ihren Ursprung genommen hat, ihrerseits geeignet, dieselbe zu fördern; sie wird naturwidrig, sobald die Probleme in ihrem innern Zusammenhang zur Entwicklung gelangen. Indem bei jener Behandlung die Construction der Figuren überall nur den Zweck hat, das Material für die nachfolgende Untersuchung zu gewinnen, nicht dieser selbst als vornehmstes Hülfsmittel zu dienen, erscheint die Art, wie die verschiedenen Figuren erzeugt werden, verhältnissmäßig gleichgültig. Der gleichzeitige Gebrauch von Zirkel und Lineal ließ überdies von vornherein die einfachsten regelmäßigen Figuren bevorzugen, eine Neigung, die ebenso sehr durch die Leichtigkeit der Aufgaben wie durch die einseitig metrische Richtung der antiken Geometrie begünstigt wurde. So begreiflich aber auch diese Bevorzugung war, so hinderte doch gerade sie eine allgemeinere Behandlung der Probleme, welche zugleich zu einer planmäßigeren und übereinstimmenderen Anwendung genetischer Constructionsmethoden hätte führen können. Es ist charakteristisch für dieses Zurücktreten des genetischen Gesichtspunktes, dass Euklid die Definitionen der Raumgebilde möglichst unabhängig macht von ihrer Erzeugungsweise, und daher erst bei den Körpern mit krummen Oberflächen, Kugel, Cylinder, Kegel, wo offenbar eine bloße Beschreibung allzu weitläufig würde, die descriptive durch eine genetische Definition ersetzt. [1]) Obgleich aber die in diesen Fällen naheliegende Entstehungsweise der Raumgebilde durch Bewegung einer ebenen Figur (Halbkreis, Parallelogramm, Dreieck) um ihre Axe darauf hinweisen musste, dass die Bewegung eine überall anwendbare genetische Constructionsweise sei, so wurde diese doch bei den Kegelschnittslinien aus bloß zufälligen Anlässen wieder verlassen, um das Princip der Erzeugung von Figuren mittels der gegenseitigen Durchschneidung anderer, die bereits gegeben sind, zu benutzen. Nur bei gewissen verwickelteren Curven, wie bei der Quadratrix, der Conchoide des Nikomedes, der Archimedischen Spirale u. s. w., kehrte man, veranlasst durch die in der Natur zu beobachtende Entstehung solcher Curven, abermals zu der Bewegung zurück. Auf diese Weise pflegt die antike Geometrie überall von derjenigen Entstehungsweise der Figuren auszugehen, durch

1) Euklid's Elemente, XI.

welche dieselben zufällig gerade gefunden wurden, ohne sich darum zu kümmern, ob im einen Fall körperliche Gebilde zur Erzeugung von Curven in der Ebene, oder in einem andern umgekehrt ebene Figuren zur Erzeugung von Körpern und krummen Oberflächen verwendet werden.

Im Gegensatze hierzu ist nun die neuere Geometrie, in dem Maße als sie die genetische Construction zur herrschenden Methode erhob, zugleich bestrebt gewesen, die einzelnen Constructionen in einen systematischen Zusammenhang zu bringen, welcher durch die gleichförmigen Bedingungen der Erzeugung und die regelmäßige Ableitung neuer Constructionen aus den bereits gegebenen bedingt wird. Indem dieser Zusammenhang die Forderung mit sich bringt, dass alle Raumgebilde auf die einfachsten Elemente zurückzuführen sind, aus denen sie erzeugt werden können, werden die äußeren Hülfsmittel, deren sich die Construction bedient, nicht vermehrt, sondern vereinfacht. Das einzige unerläßliche Werkzeug bleibt das Lineal. Nicht der Kreis und die Gerade, sondern der Punkt und die Gerade sind die einfachsten Gebilde, welche die Geometrie verwendet; sie dienen zunächst zur Erzeugung der Ebene, worauf dann mittels dieser drei Elemente alle andern Raumgebilde entstehen können. Hatte die alte Geometrie, durch zufällige Anlässe bestimmt, bald die Bewegung der Elemente, bald die Durchschneidung gegebener Figuren zur Erzeugung benützt, ohne dass zwischen beiden Methoden eine innere Beziehung ersichtlich geworden wäre, so ist jetzt die wechselseitige Durchdringung beider Methoden zur Herrschaft gelangt. Indem alle Raumgebilde auf gesetzmäßig erfolgende Bewegungen von Punkten und Geraden zurückgeführt werden, pflegt nämlich eine solche Bewegung die Entstehung von Durchschnittsfiguren als eine weitere Folge mit sich zu führen. Der Vorgang, welcher diese Durchdringung beider Constructionen unmittelbar verwirklicht, ist die Projection. Hiernach scheiden sich die genetischen Constructionsmethoden im Ganzen in drei Classen: in die Erzeugung von Raumgebilden durch Bewegung, in die Bildung von Durchschnittsfiguren und in die aus der Vereinigung beider hervorgehende projectivische Construction.

Mit Recht hat die hier angedeutete Richtung der Geometrie sich selbst den Namen der synthetischen Geometrie gegeben. Wie die Definition Newton's es verlangt, so folgt hier auf das Einfache das

Zusammengesetzte, mit der besonderen Bedingung, dass dieses aus jenem unmittelbar in der Anschauung erzeugt werde, daher nun auch die synthetische Geometrie der abstracten Begriffssymbolik, deren die Analysis bedarf, entrathen kann, oder doch erst am Ende der Untersuchung zum Behuf allgemeiner Fixirung gewisser Ergebnisse zu ihr greift. Die synthetische Methode überhaupt aber ist hier zur Forschungsmethode geworden, und als Darstellungsmethode empfiehlt sie sich nur unter dem nämlichen Gesichtspunkte, unter welchem Descartes auch die analytische empfohlen hat, und unter welchem die Demonstrationsmethode Euklid's bestreitbar ist, insofern nämlich, als im allgemeinen das zweckmäßigste Verfahren zur Nachweisung der Wahrheit in der Reproduction ihrer Auffindung besteht.

Unzweifelhaft ist die synthetische Methode in diesem neuen Sinne nicht auf die Geometrie beschränkt, sondern sie erstreckt sich über alle Gebiete der Mathematik. Zu einer consequenten Anwendung des synthetischen Verfahrens scheint aber allerdings eine anschauliche Beschaffenheit der Untersuchungsobjecte erforderlich zu sein; dafür spricht schon der Umstand, dass dasselbe bei den complicirteren Aufgaben der höheren Geometrie wachsenden Schwierigkeiten begegnet, so dass es hier hinter der analytischen Behandlung zurückstehen muss. Diese Bedingung der Anschaulichkeit resultirt aus dem der synthetischen Methode eigenthümlichen Constructionsverfahren, welches stets voraussetzt, dass irgend ein zusammengesetztes Ganze in leicht zu übersehender Weise aus der Synthese seiner Elemente gewonnen werde. Neben der Geometrie ist es daher die Mechanik, deren elementare Probleme eine synthetische Behandlung gestatten, wie denn auch in die nach ihrem vorherrschenden Charakter so genannte analytische Mechanik und nicht minder in die analytische Geometrie Constructionen von synthetischem Charakter eingehen. Von den aus der Arithmetik hervorgegangen Gebieten ist es hauptsächlich die Zahlentheorie, die bei ihrer Beschäftigung mit den einzel[illegible]Zahlbegriffen und Zahlgesetzen synthetischen Untersuchungen zug[illegible]r sogar auf sie angewiesen ist.

Blicken wir nun aber nochmals auf die Definition Newton's zurück, so ist es deutlich, dass dieselbe vergleicht, was streng genommen nicht unmittelbar vergleichbar ist: einer Untersuchungsmethode stellt sie eine Demonstrationsmethode gegenüber, wobei sich noch dazu hinter der letzteren selbst großentheils analytische Verfahrungsweisen verbergen. Um jedoch das wirkliche Verhältniss beider Methoden zu bestimmen, werden wir dieselben unter gleichen Bedingungen ihrer Anwendung betrachten müssen. Hier kann nun von einer zeitlichen Priorität der Analysis im Newton'schen Sinne nicht mehr die Rede sein. Vielmehr zeigen sich zahlreiche Probleme ebensowohl der synthetischen wie der analytischen Behandlung zugänglich. Nur bei den fundamentalsten Aufgaben gewinnt die synthetische Methode einen Vorrang und wird schließlich, bei der Ableitung der einfachsten arithmetischen und geometrischen Sätze, allein verwendbar, während umgekehrt bei der Untersuchung sehr zusammengesetzter Objecte die Analysis die näher liegende und manchmal sogar, freilich mehr aus praktischen als rein theoretischen Gründen, die allein anwendbare Methode ist.

Mit diesem Verhältniss, welches nahezu eine Umkehrung der früheren Auffassung in sich schließt, hängt ein weiterer Unterschied der modernen Begriffe von den älteren nahe zusammen. Nach den letzteren stehen Analysis und Synthesis beide im Dienste der D e d u c t i o n. Jede dieser Methoden setzt die Principien, aus denen Folgesätze abgeleitet oder Beweise geführt werden sollen, als gegeben voraus. Nicht nur die Definitionen und Axiome der Arithmetik und Geometrie, sondern auch alle möglichen einzelnen Zahlformeln und mit Lineal und Zirkel im Raume ausführbaren Constructionsweisen, die letzteren von Euklid zum Theil als Postulate bezeichnet, gelten als ein ursprüngliches Inventar, über welches die mathematische Deduction beliebig verfügen könne. Wesentlich anders gestaltet sich die Sache, wenn man, wie es in der neueren Mathematik geschieht, auf beiden Gebieten den genetischen Standpunkt zur Geltung bringt. Es erhebt sich dann nothwendig die Frage, wie jenes ursprüngliche Inventar selber entstanden sei, und wie seine einzelnen Bestandtheile mit einander zusammenhängen oder auseinander hervorgehen. Hier ist es nun gerade auf der einen Seite die Zahlentheorie, auf der andern die synthetische Geometrie, welche in ihren grundlegenden Theilen jene Frage zu beantworten suchen. Dadurch gelangt in beiden das logische Verfahren der I n d u c t i o n zu umfassender Geltung. Auch die inductiven Operationen der Mathematik sind aber theils synthetischer, theils analytischer Art, wie dies oben schon in Bezug auf die einfachen arithmetischen Operationen bemerkt wurde. Die Methoden der Analysis und Synthesis erstrecken sich also über die beiden Gebiete der Induction und Deduction. Dies ist vollkommen begreiflich, da sich die zwei erstgenannten Begriffe auf das bei der Untersuchung oder Beweisführung eingeschlagene Verfahren, die zwei letzten auf das Verhältniss der Voraussetzungen der Untersuchung zu deren Resultaten beziehen.

So lange nun Analysis und Synthesis auf dem Gebiete der Induction sich bewegen, sind die synthetischen Verfahrungsweisen regelmäßig und nothwendig die früheren. Eine freie Wahl zwischen beiden tritt immer erst dann ein, wenn es sich um deductive Untersuchungen handelt. Dieser Umstand kann daher auch als ein Kriterium für die Unterscheidung mathematischer Induction und Deduction benutzt werden, eine Unterscheidung, die nicht immer leicht ist, weil namentlich der älteren Mathematik das Bewusstsein der Induction völlig abgeht. Bei Euklid z. B. treten zahlreiche Demonstrationen von inductivem Charakter in dem täuschenden Gewande der Deduction auf. Ist nun auch innerhalb der neueren Mathematik die Induction zu größerer Anerkennung gelangt, so ist doch die allgemeine Schätzung der mathematischen Methode immer noch von der Euklidischen Demonstrationsweise beherrscht. Ein gesicherter Schatz a priori feststehender Voraussetzungen soll die ganze Wissenschaft im Keim schon enthalten, so dass die Aufgabe derselben in folgerichtigen Deductionen sich erledige und zwischen Untersuchung und Beweisführung ein Unterschied nicht existire. Auf diese Weise bestimmt hier eine längst überlebte Form der systematischen Darstellung, manchmal selbst bei den Mathematikern, die sich praktisch von jenem System längst emancipirt haben, die Anschauungen über den logischen Charakter der Wissenschaft. Es gilt als ausgemacht, dass die Mathematik auch in Bezug auf die Methode eine Ausnahmestellung einnehme, da sie eine ausschließlich deductive Wissenschaft sei, die nur in einigen seltenen Fällen zu dem Verfahren der vollständigen Induction greife. Höchstens für die Principien, von welchen die Deduction ausgeht, ist man zuweilen geneigt, eine inductive Entstehung anzuerkennen; doch besteht selbst über diesen Punkt ein Streit der Meinungen, den wir uns zunächst vergegenwärtigen wollen.

2. Die Frage nach dem Ursprung der mathematischen Principien.

So sehr man zu jeder Zeit über die Vorzüge der mathematischen Methode einig war, so weit entfernen sich von einander die Anschauungen über die Natur der Voraussetzungen, von denen, wie man annimmt, alle mathematische Deduction ausgehen muss. Bald gilt die Mathematik vor allem deshalb als das Ideal einer Wissenschaft, weil ihre Fundamentalsätze durch ihre Evidenz und Allgemeingültigkeit auf eine dem Zufall wechselnder Erfahrungen entrückte Quelle der Erkenntniss in dem menschlichen Geiste selbst hinzuweisen scheinen. Bald behandelt man die Principien der mathematischen Deduction als willkürliche und eben deshalb von den empirischen Objecten sich mehr oder minder entfernende Voraussetzungen. Damit ist die metaphysische Verwerthung der Mathematik beseitigt, und gleichwohl behält diese den Erfahrungswissenschaften gegenüber jene Ausnahmestellung, wie sie für die apodiktische Geltung ihrer Sätze unerlässlich scheint. Beide Richtungen sind demnach in ihrer Ansicht über die mathematische Methode vollkommen einig: diese gilt ihnen als das vollkommenste Beispiel deductiver Methode überhaupt, dem man überall nachzustreben habe. In der Auffassung der Principien dagegen, der durch Definitionen festzustellenden Grundbegriffe und der keinem Beweis zugänglichen Axiome trennt man sich: entweder gelten diese Principien als reine, aller Erfahrung vorausgehende, darum angeborene oder doch nur gelegentlich durch die sinnliche Wahrnehmung erweckte Ideen; oder man betrachtet sie als willkürliche Schöpfungen des Denkens, welche aus Anlass der Einwirkung äußerer Objecte gebildet würden, aber insofern nicht mit denselben identisch seien, als den empirischen Gegenständen die Constanz der mathematischen Begriffsgebilde durchgängig fehle. Hierin findet man zugleich den Grund für die bindende Kraft der mathematischen Demonstrationsmethode. Die letztere ist zwingend, weil in der Beweisführung die Begriffe die constante Bedeutung bewahren, die wir ihnen willkürlich angewiesen haben. Beide Auffassungen begegnen sich daher in der Ueberzeugung, dass die Gewissheit der Mathematik auf der Unveränderlichkeit ihrer Voraussetzungen beruhe. Nur gilt diese Unveränderlichkeit im einen Fall als eine absolute, im andern als eine bloß relative. Dort erscheinen die mathematischen Axiome als eingeborene Gesetze des Geistes, welche dieser vielleicht aus einem überempirischen Dasein mitbringe, und in denen man darum begreiflicher Weise geneigt ist, gleichzeitig ursprüngliche Weltgesetze zu erblicken. Hier verdanken die nämlichen Voraussetzungen ihre allgemeinere Geltung der Übereinkunft der Menschen und höchstens noch der praktischen Anwendbarkeit auf empirische Objecte; aber an sich würde ein System ebenso strenger Folgerungen auf ganz anderer Grundlage möglich sein. Darum besitzt hier das mathematische Wissen trotz seiner exacten Form einen subjectiven und hypothetischen Charakter, oder vielmehr: gerade weil es subjectiv und hypothetisch ist, darum ist es zugleich exact; denn nur unsere subjective Willkür kann den Begriffen jene Constanz sichern, die zu einer exacten Beweisführung erfordert wird. Für beide Anschauungen erscheinen in diesen ihren Anwendungen auf das Gebiet der mathematischen Vorstellungen eigentlich noch heute die alten Bezeichnungen des Realismus und Nominalismus als die passendsten. Denn nach der einen Ansicht beruht die Bedeutung der mathematischen Ideen wesentlich auf ihrer realen Existenz im Geiste; die andere leugnet diese reale Existenz, jene Ideen gelten ihr als willkürliche Schöpfungen, welche durch die für sie eingeführten Namen oder sonstigen Symbole die erforderliche Constanz erst empfangen. Dieser mathematische Realismus und Nominalismus sind aber beide nicht unverändert geblieben, sondern sie haben Wandlungen erfahren, durch die sie unverkennbar im Laufe der Zeit einander näher getreten sind.

Der Realismus Descartes' trägt in mancher Beziehung noch die Züge der Platonischen Ideenlehre. Die sinnlichen Objecte können nur darum mathematische Ideen in uns hervorrufen, weil diese vorher in unserm Geiste gelegen waren. Die Art, wie dieselben durch äußere Eindrücke erweckt werden, schildert er deutlich als eine Art von Wiedererinnerung. Das gezeichnete Dreieck soll in ähnlicher Weise die Idee des Dreiecks erwecken, wie die Zeichnung eines Menschen die Vorstellung des wirklichen Menschen.[1] Die Bürgschaft dieses Verhaltens liegt für Descartes eben darin, dass kein sinnliches Object den mathematischen Ideen vollkommen adäquat sei. Ueber das Verhältniss der angeborenen Ideen zu den sinnlichen Bildern, die ihnen

---

1) Rép. aux cinq. obj. (Desc. à Gassendi). Oeuvr. publ. p. Cousin, II p. 290.

entsprechen, spricht er sich nirgends in unzweideutiger Weise aus. Im allgemeinen scheint er sich jene ebenfalls in der Form von Anschauungen gedacht zu haben. Zuweilen aber weisen seine Äußerungen mehr auf eine bloß begriffliche Existenz der ursprünglichen Ideen hin. Von dem Tausendeck z. B. sollen wir eine vollkommen klare Idee besitzen, obgleich es nicht möglich sei, dasselbe mit der Einbildungskraft vorzustellen. Ähnlich unbestimmt bleibt überhaupt, was er eine »klare Idee« nennt. So sehr er es betont, dass die Klarheit der mathematischen Vorstellungen ihren auszeichnenden Charakter bilde, der zugleich auf ihren überempirischen Ursprung hinweise, so wenig hat er sich bemüht, diesen Begriff der Klarheit sicher zu definiren. Nur dies kann als eine bemerkenswerthe Bestimmung angesehen werden, dass die klare Idee für uns immer die nämliche überzeugende Kraft besitze, so oft wir auch ihr uns zuwenden. Offenbar ist also die Unveränderlichkeit ein sie auszeichnendes Merkmal.

Entschiedener nun als Descartes betont es Leibniz, dass die mathematischen Ideen, um in unserem Geiste lebendig zu werden, der sie auslösenden Einwirkung der Erfahrungsobjecte bedürfen. Deutlicher aber zugleich scheidet er die ursprüngliche Natur jener Ideen von den sinnlichen Bildern, in denen sie sich in der Erfahrung verwirklichen. Die ursprüngliche Existenz der Ideen ist ihm eine rein begriffliche. Hierfür liegt ihm der unumstößliche Beleg darin, dass Bild und Begriff vollkommen von einander verschieden sind. [1]) Der Begriff des Dreiecks fällt ebenso wenig mit dem einzelnen gezeichneten Dreieck zusammen, wie die Zahl mit den gezählten Objecten. Demnach denkt sich Leibniz die Entwicklung der mathematischen Ideen keineswegs mehr in der Form einer Wiedererinnerung, bei welcher eine Gleichheit zwischen dem Eindruck und der zurückgerufenen Idee vorauszusetzen wäre; sondern die sinnlichen Bilder sind ihm vielmehr Gelegenheitsursachen, bei denen wir uns ursprünglich in uns liegender Begriffe bewusst werden. Darum ist die mathematische Untersuchung um so vollkommener, je abstracter sie geführt wird, und je mehr sie sich von sinnlichen Veranschau-

---

1) Nouv. ess. I, 1. IV, 17. Vergl. ausserdem namentlich die unter den Titeln »Initia mathematica« und »Mathesis universalis« mitgetheilten Schriften. Math. Werke. Ausg. von Gerhardt, VII p. 17 ff.

lichungen zu emancipiren weiss; denn in gleichem Maße nähert sie sich einer adäquaten Darstellung der in uns liegenden Begriffe. In diesem Sinne stellt Leibniz gelegentlich der wissenschaftlichen eine empirische Geometrie gegenüber, welche nicht wie jene durch den logischen Beweis, sondern durch die unmittelbare Anschauung zu überzeugen sucht. [1]) Aus dem gleichen Grunde schätzt er die Euklidische Demonstrationsmethode; nur scheint es ihm, dass einzelne der Euklidischen Axiome eine Deduction aus abstracteren Axiomen und Definitionen gestatten, und er macht in dieser Beziehung verschiedene Versuche, das Euklidische System zu verbessern. [2]) Die Thatsache, dass schliesslich auch die Euklidischen Demonstrationen auf die Ueberzeugung durch unmittelbare Anschauung zurückführen, gesteht er ebenso wenig zu, wie den inductiven Ursprung der einfachsten arithmetischen und geometrischen Sätze. Solche Sätze sind nach ihm intuitiv gewiss; man muss sie anerkennen, sobald man nur die Aufmerksamkeit auf sie wendet.

Durch die entschiedene Hervorkehrung der begrifflichen Natur der mathematischen Ideen scheidet sich Leibniz wesentlich von Descartes. Freilich hatte auch dieser schon die algebraische Behandlung der Geometrie in der Absicht eingeführt, dadurch die geometrischen Gesetze auf eine abstracte und rein begriffliche Form zu bringen; aber er tadelt ebenso die Unfähigkeit der früheren Algebristen, ihren Formeln eine anschauliche Anwendung zu geben, und seine Geometrie verfolgt daher den doppelten Zweck einer analytischen Untersuchung geometrischer Objecte und einer geometrischen Darstellung algebraischer Gleichungen. Bei Leibniz gilt die analytische Behandlung in jeder Beziehung als die vorzüglichere. Aus diesem Grunde zieht er schon die Arithmetik als die abstractere Disciplin der Geometrie vor, und unter den Euklidischen Axiomen bevorzugt er diejenigen, die den Charakter abstracter Größenaxiome besitzen. So eröffnet Leibniz in der Entwicklung der neueren Mathematik jene Periode unbedingter Herrschaft der Analysis, welche später in Euler und Lagrange culminirte, und in welcher man es sich zu besonderem Ruhme anrechnete,

---

1) Opera philos. ed. Erdmann, p. 382.

2) Opera philos. ed. Erdmann, p. 81 Nota. Math. Werke, Ausg. von Gerhardt, VII S. 260 ff. Specimen Geometriae luciferae.

in der Mechanik und womöglich sogar in der Geometrie der Figuren entrathen zu können. Diese ganze Richtung hat in jener Ansicht von der begrifflichen Natur der mathematischen Principien ihre ursprüngliche Quelle.

Gerade die Schroffheit, mit welcher Leibniz die nach ihm an sich der Anschaulichkeit völlig entbehrenden Grundbegriffe von ihren anschaulichen Anwendungen scheidet, verwickelt nun aber den Realismus in neue Schwierigkeiten. Sind die ursprünglichen Ideen selbst anschaulicher Natur, so liefert der psychologische Mechanismus der Reproduction ein immerhin verständliches Schema für die Rückbeziehung des unmittelbar Angeschauten auf eine idealere Form. Der abstracte Begriff, mit realer Existenz gedacht, ist aber gegenüber dem sinnlichen Object ein völlig Incommensurables. Diese Anschauung ist mystisch, denn sie setzt hinter die Welt der Vorstellungen noch einmal eine Welt völlig unvorstellbarer Ideen, und es bleibt unbegreiflich, wie das vorgestellte Object die unvorstellbare Idee im Bewusstsein soll erwecken können. So erschien es denn dringend geboten, die Incongruenz zwischen Idee und Bild wieder zu beseitigen, der Idee ihre anschauliche Natur wiederzugeben, um ihre Beziehung zu den sinnlichen Objecten begreiflich zu machen. Diesen letzten Schritt in der Entwicklung des mathematischen Realismus hat Kant gethan mit seiner Lehre von der reinen Anschauung und den Anschauungsformen.

Es ist ohne Zweifel einer der glücklichsten Griffe Kant's gewesen, dass er von der vielgestaltigen Menge der einzelnen mathematischen Ideen zurückging auf die Grundlagen, auf die sie sich alle beziehen müssen, auf die Raum- und Zeitanschauung. Schon die Zahl, die der Mathematiker in den Vordergrund zu stellen pflegt, gibt durch die Zusammenfassung der auf einander folgenden Zeitpunkte dem Begriff der Quantität eine anschauliche Form, und sie ist daher nach Kant ein secundäres Erzeugniss jenes Begriffsschematismus, welcher überall erst die allgemeinen Begriffe durch ihre Darstellung in Formen des Zeitverlaufs anwendbar machen soll auf die sinnliche Erfahrung. Die Bewegung vollends setzt nicht nur Zeit und Raum, sondern auch die Wahrnehmung eines beweglichen Etwas voraus, und er behauptet daher, dass sie im Unterschied von Zeit und Raum, die aller Erfahrung vorausgehen, ein empirischer Begriff sei. [1]) Endlich die einzelnen

1) Kritik der reinen Vern., 2. Aufl., S. 58.

arithmetischen Operationen, die einzelnen geometrischen Gebilde sind nach Kantischer Auffassung durchaus nur Constructionen innerhalb der reinen Zeit- und Raumanschauung, zu denen wir durch den Eindruck empirischer Objecte veranlasst werden, und bei deren Ausführung wir uns daher ebensolcher Objecte bedienen müssen. »Der Begriff von Zwölf«, sagt Kant, »ist keineswegs dadurch schon gedacht, dass ich mir bloß die Vereinigung von Sieben und Fünf denke, und ich mag meinen Begriff von einer solchen möglichen Summe noch so lange zergliedern, so werde ich doch darin die Zwölf nicht antreffen. Man muss über diese Begriffe hinausgehen, indem man die Anschauung zu Hülfe nimmt, die einem von beiden correspondirt, etwa seine fünf Finger oder (wie Segner in seiner Arithmetik) fünf Punkte, und so nach und nach die Einheiten der in der Anschauung gegebenen Fünf zu dem Begriff der Sieben hinzuthut.«[1])

Die unendliche Menge mathematischer Ideen, welche der vorangegangene Realismus als ein angeborenes Besitzthum des Geistes angesehen hatte, beschränkt sich also bei Kant auf die reine Raum- und Zeitanschauung. Diese allein sind a priori gegeben, und die Zeitanschauung vermittelt überdies noch durch ihre Verbindung mit der Kategorie der Quantität den reinen Begriff der Zahl. Alles Weitere dagegen besteht in Vorstellungen, die durch »Einschränkungen« jener allgemeinen Anschauungen entstehen, zu welchen Einschränkungen wir offenbar nach Kant's Ansicht durch einzelne sinnliche Wahrnehmungen veranlasst werden. Aber wir führen nun das sinnliche Object auf dasjenige zurück, was von ihm der reinen Anschauung angehört, und so entsteht eben der Gegenstand des mathematischen Begriffs, der in dem äußern Object nur seine Gelegenheitsursache hat, selbst aber ganz und gar der reinen Anschauung angehört. Auf diese Weise wird z. B. das sinnliche Dreieck Anlass zur Bildung der Idee des geometrischen Dreiecks. Die mathematischen Definitionen und Axiome sind Sätze, die sich auf die Verbindung der Bestandtheile der reinen Anschauung beziehen, und sie sind daher nach Kant's prägnantem Ausdruck »synthetische Urtheile a priori«.

Diese fundamentale Reform der realistischen Lehre unterscheidet sich von der vorangegangenen Gestaltung derselben bei Leibniz haupt-

1) Prolegomena zu jeder künftigen Metaphysik. Ausg. v. Rosenkranz, S. 19.

sächlich dadurch, dass der ursprüngliche Besitzstand des Geistes an mathematischen Ideen nicht mehr als ein begrifflicher, sondern als ein anschaulicher angesehen wird. Kant's Bemühen ist daher überall darauf gerichtet, die anschauliche Natur der mathematischen Operationen und Demonstrationen darzuthun, und er weist im sichtlichen Gegensatze zu Leibniz darauf hin, wie gerade auch bei Euklid der Beweis schließlich an die unmittelbare Anschauung appellirt.[1]) Alle weiteren Unterschiede haben hierin ihre Quelle. Besteht der ursprüngliche Besitz des Geistes, aus welchem die Mathematik schöpft, in Anschauungen und nicht in Begriffen, so erscheint es als eine überflüssige Belastung, wenn man auch nur jede einzelne fundamentale Idee als eine ursprüngliche ansehen will; es genügt dann, die allgemeinen Anschauungsformen als angeborene zu betrachten, aus denen sich die einzelnen mathematischen Vorstellungen entwickeln können. Damit wird auch der Einfluss der Erfahrungsobjecte ein anderer; diese wirken nicht mehr nach Analogie der psychologischen Reproduction, sondern sie erwecken jene Thätigkeit der reinen Einbildungskraft, welche die äußeren Objecte gewissermaßen in die reine Anschauung überträgt, indem sie lediglich dasjenige nacherzeugt, was an ihnen der Raum- und Zeitform angehört. Ist auf diese Weise die Thätigkeit, welche mathematische Gebilde schafft, von constructiver Natur, so besitzen aber auch nothwendig die mathematischen Fundamentalsätze den Charakter synthetischer Urtheile. Jene einschränkende Thätigkeit, welche die Einbildungskraft an den Anschauungsformen ausübt, um die einzelnen Objecte der mathematischen Betrachtung hervorzubringen, muss zugleich ein Zusammenfügen der einzelnen Elemente sein, aus denen die Objecte bestehen. So entsteht jede einzelne Zahl aus der Verbindung ihrer Einheiten, jede geometrische Figur aus der Verbindung der einfacheren Raumgebilde, die zu ihrer Construction verwendet werden. In dieser starken Betonung der synthetischen Grundlagen der Mathematik kündet sich in der Lehre Kant's schon das Ende jener Alleinherrschaft der Analysis an, welche mit Leibniz begonnen hatte.

Von so unbestreitbarer Wahrheit nun aber auch die Behauptung der synthetischen Natur der mathematischen Fundamentalsätze ist, so ist doch die Grundlage, auf welcher das ganze Gebäude von Kant's Philo-

1) Kritik der rein. Vern. 2. Aufl. S. 39.

sophie der Mathematik ruht, die Apriorität der Anschauungsformen, von ihm nicht bewiesen worden. Seine beiden Argumente, dass die Vorstellungen räumlicher und zeitlicher Objecte die allgemeinen Vorstellungen von Raum und Zeit als Bedingungen voraussetzen, und dass alle mathematischen Sätze einen apodiktischen, also über die Zufälligkeit der Erfahrung hinausweisenden Charakter besitzen, sind hinfällig. Denn allerdings kann das Einzelne in Raum und Zeit nicht vorgestellt werden, ohne dass die Raum- und Zeitanschauung vorhanden wären; aber dadurch wird nicht ausgeschlossen, dass sich diese an und mit den einzelnen Vorstellungen gleichzeitig entwickeln, und insofern es keine Anschauungsformen gibt ohne einen Empfindungsinhalt, ist diese letztere Annahme die zunächst gebotene. Apodiktisch aber ist das ausnahmslos Gültige; der apodiktische Charakter mathematischer Sätze wird daher vollkommen zureichend durch die Thatsache erklärt, dass sie sich auf die constanten Bestandtheile aller Erfahrung beziehen. Hat also auch Kant den anschaulichen und darum synthetischen Charakter der mathematischen Fundamentalsätze vollkommen richtig erkannt, so hat er doch keineswegs den Beweis geliefert, dass sie synthetische Urtheile a priori sind. Nun bildet aber letzteres gerade den auszeichnenden Bestandtheil der Kantischen Lehre. Nimmt man die Apriorität der mathematischen Principien hinweg, so mündet Kant's transscendentale Aesthetik in den Strom jener empiristischen Anschauungen, welche sich aus der entgegengesetzten Richtung, der des mathematischen Nominalismus entwickelt haben. Hierin findet die obige Bemerkung, dass diese Richtungen durch die Ausbildung, die sie erfuhren, einander näher treten, zunächst in Bezug auf den Realismus ihre Bestätigung.

Wenn nun auch dem entsprechend der Nominalismus sich in entgegengesetzter Weise verändert hat, so muss doch hervorgehoben werden, dass hier diese Wandlungen mehr an der Oberfläche geblieben sind, indem sie mehr den Ausdruck als die Sache selbst treffen. Ein weiter Raum trennt die Anschauungen von Descartes und Kant, und die Lehre des letzteren hat sich fast in allen Stücken im directen Gegensatz zu der seines Vorgängers Leibniz entwickelt. Zwischen Thomas Hobbes und John Stuart Mill dagegen besteht fast nur der Unterschied ungleicher Betonung der verschiedenen Bestandtheile einer im Ganzen übereinstimmenden Ansicht.

In seiner Ueberzeugung von dem Werth der mathematischen Methode lässt sich Hobbes nur mit Leibniz vergleichen. [1]) Diese Hochschätzung tritt bei ihm um so augenfälliger hervor, je mehr sie gegen seine Auffassung der Grundbegriffe contrastirt. Die Definitionen der Mathematik verdanken ihre Unveränderlichkeit allein der Constanz der Namen, mit denen wir die willkürlich gebildeten Begriffe festhalten, und die Axiome sind aus den Definitionen abgeleitet, sie besitzen daher weder den Werth von Denkgesetzen noch von objectiven Naturgesetzen, sondern sie sind willkürliche Festsetzungen, wie die ihnen entsprechenden Definitionen selbst. Der Zweck dieser willkürlichen Festsetzungen pflegt aber stets in der isolirten Inbetrachtnahme gewisser Bestandtheile der sinnlichen Objecte zu bestehen. Darum verbessert Hobbes die geometrischen Definitionen Euklid's: Punkt ist nicht dasjenige, was keine Theile hat, sondern wovon beim Beweis keine Theile in Betracht zu ziehen sind; eine Linie ist nicht selbst ohne Breite, sondern sie soll beim Beweis so betrachtet werden. Auf diese Weise erscheinen die mathematischen Begriffe durchgängig bei Hobbes als Erzeugnisse einer Abstraction, diese aber ist ihm nicht eine nothwendige Thätigkeit des Geistes, sondern sie beruht auf willkürlicher Uebereinkunft. Nur hierdurch wird es begreiflich, dass für Hobbes der auszeichnende Charakter der Mathematik nicht in ihrem begrifflichen Inhalt, sondern nur in ihrer Methode besteht. Wie er daher einerseits z. B. der Politik die Fähigkeit zuschreibt, sich zum Rang einer mathematischen Disciplin zu erheben, so sieht er anderseits in jedem streng logischen Denken eine Folge mathematischer Operationen.

Sehen wir so in Hobbes den nominalistischen Gesichtspunkt, die Annahme der willkürlichen Feststellung der Begriffe, durchaus vorwalten und die Anerkennung der empirischen Motive derselben verhältnissmäßig zurücktreten, so gewinnen dagegen bei Locke diese letzteren das Uebergewicht. Das Element der Willkür hat sich bei ihm zu der Anerkennung ermäßigt, dass die mathematischen Ideen den Objecten der Wahrnehmung nicht unmittelbar gleich seien, sondern

---

1) Ich folge in diesen Ausführungen über Hobbes im wesentlichen der Darstellung von J. J. Baumann, Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie. Berlin 1868, Bd. I, S. 237—357.

durch freie Variation der durch die äußeren Eindrücke entstandenen allgemeinen Ideen des Raumes, der Zahl u. s. w. gebildet würden. [1]) Trotz dieses von ihm zugestandenen idealen Charakters der mathematischen Ideen weist aber Locke denselben zugleich eine reale Bedeutung an, da er hervorhebt, die mathematischen Sätze besäßen eben insofern objective Wahrheit, als die Dinge mit ihren mathematischen Vorbildern in unserm Geiste immer in einem gewissen Grade übereinstimmten. [2]) Sicherlich ist Locke zu diesem Zugeständniss wesentlich durch seine empiristische Neigung geführt worden, welche der Annahme von Principien widerstrebte, deren Anwendbarkeit auf die Erfahrung irgendwie bezweifelt werden konnte. Dennoch kommt gerade dadurch in seine Auffassung der Mathematik ein realistisches Element, welches das nominalistische fast ganz unterdrückt. In der That erinnert die Annahme von Archetypen im Geiste, abgesehen von der Behauptung ihrer empirischen Entstehung, stark an Cartesianische Vorstellungen. Fast noch näher aber streift Locke durch die entschiedene Betonung der durchaus anschaulichen Natur der mathematischen Ideen und der schließlichen Rückbeziehung aller mathematischen Beweise auf die Anschauung an Kant an. Denn was ist die allgemeine Idee des Raumes bei Locke anderes als eine reine Anschauung, nur dass sie a posteriori entstanden gedacht ist? Vollends aber die Einschränkungen und Variationen dieser Idee sind ein Construiren innerhalb der reinen Anschauung, welches sogar in die logische Form synthetischer Urtheile a priori gebracht werden könnte. In Folge dessen leidet nun die Lehre Locke's an einem unheilbaren Widerspruch zwischen der empiristischen Grundanschauung und den zum Theil völlig rationalistischen Ausführungen im Einzelnen. Wenn die Erfahrung die einzige Quelle des Wissens ist, so bleibt es unbegreiflich, wie Ideen entstehen können, denen kein adäquates Object in der Erfahrung entspricht. Im Grunde hat freilich dieser Widerspruch seine Quelle schon in dem ursprünglichen Nominalismus. Hatte dieser noch bei Hobbes als Ursache der Incongruenz zwischen mathematischer Idee und sinnlicher Vorstellung die Willkür angenommen, so hatte er

1) Essays, B. II, ch. 13.
2) Ebend. B. IV, ch. 4.

es versäumt anzugeben, durch welche Motive jene willkürlichen Satzungen zu Stande kämen.

Um den Widerspruch zu vermeiden, in welchen sich Locke verwickelt, schien nun die Behauptung der Identität der mathematischen Ideen und der sinnlichen Einzelvorstellungen eine naheliegende Auskunft zu sein. Diesen Weg schlug Berkeley ein. Wie er die abstracten Begriffe leugnet, so selbstverständlich auch die Existenz einer reinen Raum- und Zeitanschauung. Die vollkommen zu Recht bestehende psychologische Unmöglichkeit, das Abstracte als solches im Bewusstsein festzuhalten, veranlasst ihn, dem Abstracten auch die logische und erkenntnisstheoretische Berechtigung abzusprechen, und er gelangt dadurch in einen scharfen Gegensatz vor allem zu den Postulaten der mathematischen Wissenschaft. Das Dreieck im Geiste und das wirkliche Dreieck sind ihm eins und dasselbe. Alle zufälligen Eigenschaften des letzteren finden sich in jenem wieder. Auch die geometrische Demonstration hat daher nur dieses sinnliche Dreieck im Auge, und die von demselben bewiesenen Sätze haben für andere Dreiecke nur insofern Gültigkeit, als sie ihm gleichen. Die bindende Kraft der mathematischen Folgerungen hat darum nach Berkeley schließlich ihren Grund in der Constanz der geometrischen Figuren und der sonstigen Objecte, auf welche sich die Demonstration bezieht.[1]) Die Schwäche dieser Begründung liegt offen zu Tage. Als sinnliche Einzelvorstellungen entbehren die mathematischen Objecte durchaus der Unveränderlichkeit, die ihnen Berkeley zuschreibt. Sie gewinnen dieselbe gerade erst durch jene Denkacte, durch die unter ihnen abstracte Begriffe gedacht werden, welche Berkeley leugnet.

Auf dem Boden der Erfahrungsphilosophie gibt es nur Einen Ausweg aus diesen Schwierigkeiten: die Rückkehr zu der nominalistischen Anschauung von Hobbes. Sie beginnt mit Hume. Freilich glaubt auch Hume die mathematischen Ideen nicht als bloße Erzeugnisse der Abstraction ansehen zu können, sondern er gibt ihnen mit Berkeley ein sinnliches Substrat. Aber er hält es nicht für erforderlich, dass jede einzelne Zahl, jede beliebige geometrische Figur aus der Anschauung eines sinnlichen Objects entspringe, sondern er meint, nur die Elemente, mit denen wir unsere Constructionen ausführen, müssten

1) Treatise on the principles of hum. knowledge. Introd. und CXI ff.

als reale Objecte der Erfahrung gegeben sein. [1]) So gewinnen wir eine gegebene Zahl durch die wiederholte Setzung eines Punktes, so eine geometrische Curve durch die Aneinanderreihung von Punkten u. s. w. Auf diese Weise ist es der in der Wahrnehmung untheilbare Punkt, auf welchen alle arithmetischen und geometrischen Constructionen als letztes gegebenes Element zurückführen. Aus diesem Element erzeugen wir aber nach Willkür alle mathematischen Vorstellungen, und auf dieser unserer willkürlichen Erzeugung beruht schließlich die Evidenz der mathematischen Folgerungen.

So spielt bei Hume der sicht- und fühlbare Punkt, die räumlich untheilbare, aber stets mit irgend welchen qualitativen Eigenschaften ausgestattete Empfindung, die Rolle eines psychischen Atoms. Dieses Atom entsteht ihm nicht aus einer geistigen Nothwendigkeit, sondern es ist ihm eine Thatsache der sinnlichen Erfahrung. Aber durch Wiederholung und Aneinanderfügung dieses Elementes sollen wir in freier Construction alle möglichen mathematischen Vorstellungen hervorbringen können, wobei wir freilich auch hier durch die Beispiele geleitet werden, die uns in der äußeren Erfahrung gegeben sind. Doch die Schwierigkeiten, denen Berkeley's Anschauung begegnet war, sind durch diese Beschränkung der sinnlichen Objecte der Mathematik auf ein letztes Element derselben keineswegs beseitigt. Denn wie sollen wir voraussetzen, dass dieses Element in allen mathematischen Vorstellungen derselben Art ein constantes bleibe, als welches es doch im mathematischen Denken vorausgesetzt wird, während die Schärfe und die sonstigen Eigenschaften unserer Empfindung fortwährend wechseln? Wie verträgt sich ferner die Annahme, dass der mathematische Punkt reale Ausdehnung und sonstige qualitative Eigenschaften, wie Farbe und Festigkeit, habe, mit der überall in dem mathematischen Denken festgehaltenen Voraussetzung, dass ihm alles dies nicht zukomme? Wenn die sinnliche Wahrnehmung die einzige Quelle unserer Ideen ist, so dürfen wir auch erwarten, alle Bestandtheile der ersteren in diesen wiederum anzutreffen.

Hier gibt es keine andere Rettung, als den Rückgang auf Hobbes ganz zu vollziehen, einzugestehen, dass die Voraussetzungen der Mathematik abweichen von den sinnlichen Vorstellungen, durch welche sie

1) Treat. on hum. nat. B. I, 2.

angeregt werden, eben darum nun aber auch dem ganzen Aufbau dieser Wissenschaft nur einen hypothetischen Werth beizulegen. Es ist hauptsächlich das Verdienst John Stuart Mill's, die Nothwendigkeit dieser Consequenz erkannt zu haben. Seine Anschauungen fallen in allen wesentlichen Punkten mit denjenigen von Thomas Hobbes zusammen, aber die erkenntnisstheoretische Arbeit eines Locke, Berkeley und Hume ist für ihn nicht umsonst gethan. Das sinnliche Dreieck und das Dreieck in unserm Geiste, erklärt auch Mill, sind eins und dasselbe; einen Punkt ohne Ausdehnung und eine Linie von absolut gerader Richtung gibt es nicht in unserer Vorstellung.[1] Gerade darum aber beziehen sich die Definitionen und Axiome der Geometrie weder auf die sinnlichen Objecte noch auf unsere Vorstellungen von denselben, sondern auf rein hypothetische Gebilde, denen sich die sinnlichen Objecte immer nur mehr oder weniger annähern können. Jene Definitionen und Axiome haben daher eben insoweit reale Gültigkeit, als sich die Objecte ihnen wirklich annähern. Nur in Einem Punkte entfernt sich Mill von Hobbes: die Voraussetzungen der Mathematik sind ihm nicht willkürliche Fictionen, sondern Hypothesen, zu denen wir durch die Erfahrung genöthigt werden. Doch ist auch dieser Unterschied mehr ein scheinbarer als ein wirklicher; denn weder hat Hobbes den Einfluss der Erfahrung geleugnet, noch kann Mill der Anerkennung sich widersetzen, dass die Aufstellung mathematischer Hypothesen eine Handlung unseres Willens sei, so gut begründet diese Handlung immerhin sein möge.

Es ist bemerkenswerth, dass moderne Mathematiker nicht selten aus eigenem Antrieb zu der nämlichen Auffassung gedrängt, dabei aber meistens durch Motive bestimmt worden sind, die von dem Empirismus Mill's weit abliegen. Da zahlreiche Objecte mathematischer Speculation ganz und gar imaginärer Art sind, also auf Voraussetzungen beruhen, die nicht unmittelbar aus der Erfahrung entspringen können, so betrachtet man alle diese Voraussetzungen als Hypothesen oder sogar als willkürliche Hypothesen, in unmittelbarer Uebereinstimmung mit Hobbes, an den auch die hiermit zusammenhängende Ansicht Grassmann's zurückerinnert, dass die Mathematik nur Definitionen,

1) Mill, System der deductiven und inductiven Logik. Uebers. von Schiel. 2. Aufl. I. S. 270 ff.

keine Axiome besitze. [1]) Da übrigens von den Vertretern der speculativen Mathematik zugestanden wird, dass irgend welche imaginäre Begriffe stets in Operationen ihre Quelle haben, die von den einer realen Veranschaulichung fähigen arithmetischen oder geometrischen Begriffen ausgehen, so bleibt auch hier in Bezug auf die fundamentalsten Principien die Ansicht Mill's bestehen, dass dieselben hypothetischer Art, aber aus Anlass bestimmter Erfahrungsobjecte gebildet seien.

Das logische Verfahren nun, welches aus einzelnen Erfahrungen allgemeine mathematische Sätze, Definitionen oder Axiome, ableitet, bezeichnet Mill als eine Induction, und er fasst dasselbe als vollkommen übereinstimmend mit der Gewinnung physikalischer oder anderer Naturgesetze durch Induction auf. Wie auf physikalischem Gebiet die empirischen Erscheinungen den von uns formulirten Gesetzen immer nur mehr oder weniger sich annähern, so sollen auch die Gesetze der Arithmetik und Geometrie nur eine schematische Bedeutung besitzen, dadurch aber gerade auf alle möglichen Objecte anwendbar sein.

So bestechend nun diese Ausführungen auf den ersten Blick erscheinen, so treten doch auch in ihnen die Schwächen der nominalistischen Auffassung deutlich zu Tage. Dass die mathematischen Wahrheiten in irgend einer Art von Erfahrung, mag es nun eine äußere oder innere sein, ihre Quelle haben, wird heute höchstens noch von Solchen geleugnet werden, die über philosophischen Schlagwörtern das Denken verlernt haben. In diesem Sinne wird auch von vornherein zugestanden werden, dass die mathematische Erkenntniss schließlich auf Inductionen zurückzuführen ist. Aber dass nun diese Inductionen in ihrem Wesen völlig mit denjenigen übereinstimmen sollen, aus denen wir allgemeine Naturgesetze gewinnen, dies ist eine Annahme, welche in der thatsächlichen Verschiedenheit physikalischer und mathematischer Sätze ihre Widerlegung findet. Mit Recht hat in neuerer Zeit Baumann hervorgehoben, dass bei der Generalisation von Naturgesetzen die Uebereinstimmung mit der objectiven Erfahrung das Ziel der Untersuchung ist, während unsere geometrischen Sätze

---

1) H. Grassmann, Die Ausdehnungslehre von 1844. 2. Aufl. S. XXI.

sich gerade auf solche Raumgebilde beziehen, die höchstens vor der Täuschung des ersten Sinnenscheins bestehen bleiben, die aber bei einer genaueren Messung niemals objective Wirklichkeit behalten.[1] Man könnte zwar hiergegen einwenden, auch bei einem so allgemeinen Gesetz, wie dem Gravitationsgesetz, werde die Beobachtung um so mehr, je genauer sie ist, Abweichungen auffinden, theils in Folge des Zusammentreffens mit andern Naturgesetzen, theils in Folge der unvermeidlichen Messungsfehler. Aber gerade der Werth, den wir in beiden Fällen den Abweichungen beilegen, zeigt, dass es sich hier um verschiedene Dinge handelt. Der Physiker sucht die Abweichungen in Folge der Messungsfehler zu eliminiren, diejenigen, die durch andere Naturgesetze bedingt sind, auf ihre Ursachen zurückzuführen. Den Geometer dagegen stören die Ungenauigkeiten seiner Figuren ebenso wenig wie die Erkenntniss, dass es keine Objecte gibt, die seinen Begriffen vollkommen adäquat sind. Hierin liegt eben der Beweis, dass sich seine Inductionen nicht auf äußere Objecte beziehen, sondern nur auf seine eigenen Vorstellungen, und dass hier die Objecte bloß die Rolle von Hülfsmitteln spielen, welche die Vorstellungen erwecken und darstellen sollen. Doch in Einer Beziehung existirt allerdings eine bemerkenswerthe Analogie zwischen der Generalisation der Naturgesetze und der Aufstellung mathematischer Sätze. Bei den fundamentalen Naturgesetzen gehen wir im allgemeinen von der Voraussetzung aus, dass sie von einfacher Art sind, dass sie also insbesondere eine einfache mathematische Formulirung zulassen. Nicht minder herrscht in der Mathematik diese Lex simplicitatis. In der Geometrie z. B. gelten der Punkt, die Gerade, die Ebene offenbar deshalb als die Elemente aller Construction, weil sie die einfachsten Gebilde unserer geometrischen Abstraction sind. Aber auch hier besteht ein gewaltiger Unterschied. In der Mathematik ist die Einfachheit der Principien eine selbstverständliche Voraussetzung. Wo es sich herausstellen sollte, dass ein Princip dieser Voraussetzung nicht genügt, da muss es zerlegt werden, bis dieselbe erfüllt ist. In der Naturwissenschaft ist die Einfachheit ein Postulat, dem immer nur insoweit nachzugehen erlaubt ist, als die Erfahrung dies gestattet. Da-

---

1) Baumann, Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie. II, S. 629 ff.

raus geht schon hervor, dass dieses Postulat gar nicht in der Naturwissenschaft selbst seinen Ursprung genommen hat, sondern von außen in dieselbe hereingetragen wird. In der That ist leicht zu erkennen, dass dieses naturwissenschaftliche Postulat nirgend anders als in der Mathematik oder in den formalen Gesetzen unserer Zeit- und Raumanschauung entspringt, die das Object der Mathematik sind, wie dies auch die Thatsache andeutet, dass wir für ein Naturgesetz zunächst einen möglichst einfachen mathematischen Ausdruck zu finden suchen.

Die Auffassung der mathematischen Sätze als Generalisationen, die den Generalisationen der Naturgesetze entsprechen sollen, kreuzt sich nun aber außerdem mit einer fast noch unzulässigeren Anwendung des Begriffs der Abstraction. Da es keine Objecte oder Vorstellungen gibt, die den Begriffen der Einheit, des Punktes, der Geraden u. s. w. vollkommen adäquat sind, so liegt es nahe, alle mathematischen Grundbegriffe aus einem Abstractionsprocess hervorgehen zu lassen. So wenig wir nun leugnen, dass die Mathematik auf Inductionen aufgebaut sei, ebenso sind wir weit entfernt, die Bedeutung der Abstraction bei der Aufstellung ihrer Begriffe in Abrede zu stellen. Aber auch hier begeht wieder der Nominalismus den Fehler, dass er diese Abstraction als einen uniformen Process ansieht, der sich in seiner Bethätigung auf mathematischem Gebiete durchaus nicht unterscheide von der Abstraction sonstiger Erfahrungsbegriffe. Nach ihm sollen wir den Begriff der Geraden genau in der nämlichen Weise bilden, in welcher in uns etwa der Begriff eines vierfüßigen Thieres entsteht. Wie wir bei dem letzteren von allen Merkmalen eines Thieres nur dasjenige der vier Füße festhalten, so sollen wir bei dem Begriff der geraden Linie nicht nur von der verschiedenen Dicke und Länge der einzelnen in der Erfahrung gegebenen Linien, sondern auch von ihrer mehr oder minder großen Abweichung von der geraden Richtung absehen und so die Gerade in abstracto übrig behalten. Als wenn diese Eigenschaft, gerade zu sein, nicht eben allen einzelnen Linien, die von der geraden Richtung abweichen, fehlte, so dass sie unmöglich aus ihnen abstrahirt werden kann, sondern offenbar schon vorhanden sein muss, wenn jene Richtungen als annähernd gerade erkannt werden sollen! Ja Mill stellt gelegentlich die Eigenschaft der Dinge, zählbar zu sein, genau auf Eine Linie mit ihrer Eigenschaft, blau oder hart oder süß zu sein, mit dem einzigen Unterschiede, dass dieses Merkmal der Zählbarkeit allen Dingen ohne Ausnahme zukomme.[1])

Gibt der Nominalismus in seinen Anfängen von der Entstehung der Voraussetzungen, von welchen die mathematische Demonstration ausgeht, gar keine Rechenschaft, so ist die Antwort dieser letzten Entwicklungen desselben ungenügend; denn indem hier hauptsächlich auf die äußeren Gelegenheitsursachen der mathematischen Begriffe Werth gelegt wird, bleiben die wesentlichen logischen Eigenthümlichkeiten, die bei der Entstehung dieser Begriffe obwalten, unbeachtet. Wirft auf diese Weise der Nominalismus die mathematischen Begriffe trotz ihrer bedeutsamen Unterschiede mit den gewöhnlichen Erfahrungsbegriffen zusammen, so reisst aber der Realismus beide so weit auseinander, dass den mathematischen Principien abermals das logische Fundament abhanden kommt. Sie erscheinen entweder, wie in den älteren Ansichten, als ein ursprüngliches Besitzthum des Geistes oder, wie bei Kant, als Erzeugnisse einer in ursprünglichen Anschauungsformen frei thätigen Einbildungskraft. So werthvoll auch hier der Hinweis auf die Betheiligung des Denkens und der allgemeinen Formen unserer Anschauung ist, so wird doch dabei nicht nur der Einfluss der äußern und innern Erfahrung unterschätzt, sondern es fehlt auch jeder Versuch, jener constructiven Thätigkeit, welche die mathematische Objecte erzeugt, im Einzelnen nachzugehen und die logischen Verfahrungsweisen festzustellen, aus denen die mathematischen Begriffsgebilde entspringen, und die schließlich allein über ihre Unterschiede von sonstigen Vorstellungen werden Rechenschaft geben können. Es scheint mir nicht, dass die Kantische Auffassung wesentlich gebessert wird, wenn man, wie es von Baumann geschieht, zwar die mathematischen Ideen auf eine Art innerer Erfahrung zurückführt, aber von den Eigenthümlichkeiten, durch welche sich Induction und Abstraction auf diesem Gebiet der Erfahrung etwa auszeichnen, keinerlei Rechenschaft gibt. Ebenso wenig dürfte es der Sache entsprechen, wenn Baumann die mathematischen Ideen, weil sie einem andern Erfahrungsgebiet angehören sollen, als die Naturbegriffe, gewissermaßen von außen den letzteren gegenübertreten und es nun erst auf eine besondere Prüfung ankommen lässt, ob sie auf die äußere

1) Mill, Logik, I, S. 266.

Erfahrung anwendbar seien oder nicht.[1]) Denn nicht nach dem Bereich der Objecte, die sie umfassen, trennen sich schließlich das mathematische und das physikalische Erfahrungsgebiet, sondern nach den Gesichtspunkten und Methoden, welche sie anwenden. Diese nach einigen ihrer Hauptzüge zu schildern, soll nun unsere Aufgabe sein. Es drängt sich aber dabei vor allem eine Bemerkung auf, welche für den Verlauf unserer Untersuchungen bestimmend sein wird. Man wird niemals der logischen Betrachtung mathematischer Principien gerecht werden, wenn man diese für sich nimmt, isolirt von dem Unterbau zahlreicher einzelner Anschauungen und Sätze, den sie voraussetzen. Am wenigsten wird die Frage nach dem Ursprung der Principien eine solche Untersuchung umgehen können. Wir verlassen daher vorläufig diese Frage, um die allgemeinere und doch in gewissem Sinne begrenztere ins Auge zu fassen, wie überhaupt mathematische Ueberzeugungen zu entstehen pflegen. Hierauf gibt die Geschichte der Mathematik zwar keine erschöpfende Antwort, aber sie enthält doch Andeutungen, welche nicht vernachlässigt werden dürfen.

3. Experimentelle Anfänge der Mathematik.

Eine eingehende Untersuchung der logischen Induction liegt jenseits unserer Aufgabe; es genügt für den gegenwärtigen Zweck, festzuhalten, dass sie dasjenige Verfahren ist, durch welches aus einzelnen Thatsachen der Erfahrung allgemeine Sätze gewonnen werden. Eine Wissenschaft, die zu ihrem Resultate durchgängig auf diesem Wege gelangt, nennen wir eine inductive Wissenschaft. Findet die Ableitung so statt, dass die einzelnen Thatsachen willkürlich von uns variirt werden können, so wird die inductive speciell zur experimentellen Wissenschaft. In der Entwicklung des mathematischen Wissens begegnen wir nun mannigfachen Spuren, welche darauf hinweisen, dass die Mathematik aus experimentellen Anfängen hervorgegangen ist. Für diesen experimentellen Character der beginnenden Wissenschaft ist namentlich die Thatsache kennzeichnend, dass zahlreiche Sätze, für die man später deductive Beweise aus allgemeineren Voraussetzungen zu erfinden vermochte, ursprünglich auf dem Wege der Induction und der experimentellen Prüfung gewonnen wurden.

---

1) Baumann, a. a. O. II, S. 650.

So begegnen uns die Spuren einer Induction bei der Lösung arithmetischer Probleme, die wir jetzt ohne weiteres unter Benutzung der Fundamentaloperationen auf deductivem Wege erledigen. Eine der frühesten Aufgaben dieser Art ist die Umwandlung der durch die Theilung eines Ganzen gewonnenen Bruchzahlen in eine Summe einfacherer Brüche, die ihnen äquivalent sind, eine Aufgabe, welche schon von den altägyptischen Rechnern mit grosser Fertigkeit, aber offenbar auf experimentellem Wege gelöst wurde[1]. Der einfachste Bruch ist derjenige, dessen Zähler die Eins ist, weil er unmittelbar das Verhältniss des Theils zu dem Ganzen angibt. Die Ueberführung in solche Stammbrüche gewährte eine leichtere Vergleichung verschiedener Theilungen mit einander, und sie spielte daher, wie es scheint, in diesen frühesten Zeiten der Mathematik eine ähnliche Rolle, wie sie heut zu Tage dem entgegengesetzten Verfahren der Umwandlung in Brüche mit gleichem Nenner zukommt. Aber während wir uns zu dem letzteren Zweck einer einfachen, auf die arithmetischen Axiome gegründeten Regel bedienen, fand der ägyptische Rechner offenbar rein empirisch durch versuchsweise Theilungen, dass beispielsweise $^2/_3 = {}^1/_2 + {}^1/_6$ oder $^2/_5 = {}^1/_3 + {}^1/_{15}$ sei u. s. w. Wie sehr die so gewonnene Tabelle der Induction entsprungen ist, geht am sichersten daraus hervor, dass keinerlei übereinstimmende Regel die verschiedenen Theilungen beherrscht, so dass jede einzelne Zerlegung eine besondere Induction erforderte. Höchstens in solchen Fällen, wo eine einfache Vervielfältigung des Nenners genügte, um eine schon bekannte Zerlegung in eine neue überzuführen, mochte man sich wohl durch Anwendung der Multiplicationsregel die einzelne Induction ersparen: so etwa indem man aus der Gleichung $^2/_3 = {}^1/_2 + {}^1/_6$ die andere $^2/_9 = {}^1/_6 + {}^1/_{18}$ oder selbst $^2/_{99} = {}^1/_{66} + {}^1/_{198}$ ableitete. Das ägyptische Handbuch zeigt aber, dass nicht einmal dieser Weg einfachster Deduction in allen den Fällen eingeschlagen wurde, in denen er möglich gewesen wäre.

Wir übergehen hier die Verwerthungen geometrischer Messungen für arithmetische Zwecke, wie sie in der von der geometrischen Anschauung beherrschten Mathematik der Griechen mannigfach stattfanden, und auf die z. B. die Namen der Quadratzahlen (für die ungeraden Zahlen), der Dreieckszahlen (für die natürliche Zahlenreihe)

1) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I. S. 20 f.

u. s. w. deutlich hinweisen. Sind auch solche Ableitungen für den empirischen Charakter der frühesten Mathematik an und für sich kennzeichnend, so kommen dieselben doch deshalb weniger in Betracht, weil für jene zahlentheoretischen Sätze auch noch jetzt keine andere als inductive Begründungen möglich sind.

Bedeutsamere Spuren einer experimentellen Periode kommen im Gebiete der Geometrie selbst vor. Besonders hier geschah es, dass Sätze, deren verwickelte Beschaffenheit ihre allgemeingültige Erkenntniss durch Induction ausschließt, in gewissen einfacheren Fällen auf diesem Wege gefunden wurden, so dass der nachfolgenden Deduction nur noch die Aufgabe blieb, einen Beweis zu ersinnen, welcher das in einzelnen anschaulichen Beispielen Erkannte zu einer allgemeinen Wahrheit erhob. Wenn uns berichtet wird, dass die Alten den Satz von der Winkelsumme im Dreieck für jede besondere Form des Dreiecks auch besonders bewiesen, zuerst für das gleichseitige, dann für das gleichschenklige und zuletzt für das ungleichseitige Dreieck, so werden wir hierin die Symptome einer Induction um so weniger verkennen, als für das gleichseitige und gleichschenklige Dreieck, wie schon H. Hankel bemerkte, leicht der unmittelbare Augenschein zur Messung der Winkel führen konnte. Denkt man sich das gleichseitige Dreieck so in ein Rechteck eingezeichnet, dass seine Basis mit einer Rechtecksseite zusammenfällt, so lehrt leicht die Beobachtung, dass die drei Winkel an der Spitze, welche zusammen zwei Rechten gleich sind, den drei einander gleichen Winkeln des Dreiecks entsprechen. War erst der Satz für diesen einfachsten Fall gefunden, so lag es nahe, ihn nun auch für das gleichschenklige und sodann für jedes beliebige Dreieck durch eine ähnliche Einzeichnung in ein Rechteck zu prüfen. Indem im letzteren Fall die drei Winkel an der Spitze von verschiedener Größe wurden, zugleich aber sich die Verschiedenheit der entsprechenden Dreieckswinkel der Beobachtung aufdrängte, mochte aus dieser Erweiterung der allgemeinere Satz von der Gleichheit der Wechselwinkel entspringen. Die spätere Deduction hat dann das Verhältniss umgekehrt, indem zuerst der Satz von der Gleichheit der Wechselwinkel und dann aus diesem der von der Winkelsumme im Dreieck abgeleitet wurde [1]. Dass der pythagoräische Lehrsatz offenbar in ähn-

[1] Ich habe hier die Darstellung von Hankel (Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, Leipzig 1874, S. 96), welche schon beim gleichseiti-

licher Weise zuerst in einzelnen, der Anschauung leicht zugänglichen Fällen auftritt, ist schon mehrfach bemerkt worden. Ob man auch hier den Weg geometrischer Versuche eingeschlagen, wie Hankel annimmt, oder ob man, was Cantor vermuthet, zuerst an dem Dreieck von den Seitenlängen 3, 4, 5 den Satz als einen arithmetisch-geometrischen entdeckte, ist für die hier besprochene Frage ohne wesentliche Bedeutung [1]).

Uebrigens ist leicht ersichtlich, wie dieses experimentelle Verfahren, nachdem erst ein Satz in seiner allgemeingültigen Form gefunden war, nun zugleich die Hülfsmittel zur Deduction desselben an die Hand gab. Bedeutungsvoll ist in dieser Beziehung namentlich die Anwendung der geometrischen Hülfsconstruction. Das Zeichnen von Hülfslinien tritt durch seine probeweise Anwendung zunächst noch ganz als ein experimentelles Hülfsmittel auf. Aber dieses Verfahren steht zugleich auf der Schwelle zur Deduction, da der Gedanke nahe liegt, die nämlichen Hülfsmittel, die zur inductiven Auffindung eines Satzes gedient haben, nun auch sofort zur Beweisführung zu benutzen. So ist es denn begreiflich, dass im einzelnen Fall häufig nicht mehr entschieden werden kann, ob eine bestimmte Hülfsconstruction sogleich in deductiver oder ursprünglich in inductiver Absicht gebraucht wurde. Gibt man sich aber Rechenschaft über den Weg, den heute noch Jeder bei der Lösung einer geometrischen Aufgabe einschlägt, so kann es nicht zweifelhaft sein, dass die Construction überall zunächst in experimenteller Absicht geübt wird, als ein Erproben, welches manchmal erst nach vielen vergeblichen Versuchen zum Ziel führt. Ist auf diesem Wege die Gültigkeit gewisser Sätze festgestellt, so kann man erst zur Aufsuchung der zweckmäßigsten Constructionen übergehen und auf diese Weise die nämlichen Hülfsmittel auch der Deduction dienstbar machen. Die Zufälligkeit der Methode, welche so vielfach bei den Constructionen Euklid's auffällt, trägt noch deutliche Spuren jenes tastenden Verfahrens an sich, das man bei den ersten geometrischen Inductionen befolgen musste. Ja selbst darin

---

gen Dreieck einen Beweis aus der Gleichheit der Wechselwinkel voraussetzt, durch eine noch anschaulichere Construction ersetzt, die es gestattet, den allgemeineren Satz erst auf den specielleren folgen zu lassen, ein Weg, der dem inductiven Charakter der frühesten Mathematik noch besser entsprechen dürfte.

1) Hankel, a. a. O. S. 98. Cantor, a. a. O. S. 153.

zeigen sich bei diesem großen Geometer die Nachwirkungen der inductiven Periode, dass er nicht ganz selten ein allgemeines Theorem in mehrere Fälle zerlegt, für die er einzeln den Beweis führt [1]).

4. Bleibende Formen der mathematischen Induction.

Obgleich bei der weiteren Ausbildung der mathematischen Wissenschaften und ihrer Methoden die Induction im Vergleich mit der Bedeutung, die ihr für die ersten Anfänge zukam, zurückgetreten ist, so bleibt sie doch fortan gerade bei den fundamentalsten Sätzen, auf welche schließlich alle andern zurückführen, wirksam. So sind die allgemeinsten Aufgaben der Zahlentheorie nur dadurch zu lösen, dass man gewisse einfache Rechenoperationen in einer Anzahl von Fällen wirklich ausführt, und die Theoreme, zu denen solche Lösungen führen, lassen eine andere als diese inductive Begründung nicht zu. Die Kenntniss der Primzahlen verdankt man keinem andern Verfahren als der empirischen Ermittelung, dass gewisse Zahlen nur durch sich selbst und durch die Einheit theilbar sind. In gewissen Untersuchungen der Zahlentheorie wird aber die Induction dadurch verdeckt, dass sie in indirecter Weise Anwendung findet, indem man rascher durch ein Ausschließungsverfahren als durch directe Induction zu einem bestimmten Resultate gelangt. Handelt es sich z. B. darum, zu irgend einer Zahl m diejenigen Primzahlen zu finden, die nicht in m aufgehen, so pflegt man zunächst empirisch die Zahlen a, b, c . . . zu bestimmen, welche Primfactoren zu m sind; es haben dann nothwendig auch die Multipla dieser Zahlen $2a$, $3a \ldots \frac{m}{a}a$ u. s. w., deren Anzahl $\frac{m}{a}, \frac{m}{b}, \frac{m}{c} \ldots$ ist, die Eigenschaft, Divisoren von m zu sein. Hat man also a und seine Multipla ausgeschlossen, so ist $m - \frac{m}{a}$ die Anzahl der aus dem ganzen Complex $1, 2, 3 \ldots m$ zurückbleibenden Zahlen, ebenso, wenn die b-Reihe ausgeschlossen wird, $m - \frac{m}{b}$ oder allgemein: die Anzahl der sämmtlichen relativen Primzahlen zu m ist

---

1) Vgl. z. B. B. I 26, II 33, 35, 36, IV 5, V 6, 8, 20, 21 u. s. w.

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{l}\right).$$ [1]

Hier ist die inductive Ermittelung der Primfactoren benutzt worden, um auf kürzerem Wege zum Ziel zu gelangen, als dies möglich gewesen wäre, wenn man direct die relativen Primzahlen zu m durch Divisionsversuche bestimmt und gezählt hätte. Das Verfahren ist daher auch keine reine Induction mehr, sondern, nachdem die Primfactoren inductiv gefunden sind, ist alles weitere eine einfache Deduction aus dem Satze, dass alle diejenigen unter m gelegenen Primzahlen, welche nicht Factoren von m sind, nothwendig relative Primzahlen zu m sein müssen.

Gleicher Weise sind die grundlegenden Sätze der Combinationslehre und der Analysis aus Inductionen hervorgegangen. Nur die unmittelbare Wahrnehmung, dass zwei Elemente in 2, drei in 6, vier in 24 Stellungen vorkommen können u. s. f., hat zu dem allgemeinen Gesetze geführt, dass $1 . 2 . 3 \ldots n$ die Zahl der Permutationen von n Elementen sei. Alle Reihenentwicklungen stützen sich auf die Beobachtung, dass gegebene Größenverbindungen eine Zerlegung zulassen, welche entweder bei einem bestimmten Gliede ihren Abschluss erreicht, wie die Newton'sche Binomialformel, deren Gliederzahl von der Potenz abhängig ist, oder ins unbestimmte fortgesetzt werden kann, wie die Reihe

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\frac{x^3}{1-x},$$

die man durch wirkliche Ausführung der Division von 1 durch $1-x$ gewinnt, und deren letztes Glied immer wieder eine weitere Zerlegung zulässt. Nur weil durch experimentelle Verfahrungsweisen dieser Art thatsächlich solche Reihen gebildet werden, lässt sich die Voraussetzung rechtfertigen, dass überhaupt jede Größenfunction eine Reihenentwicklung gestattet. Diese Voraussetzung für jeden einzelnen Fall besonders zu beweisen, ist dann allerdings nicht mehr nöthig, sondern es genügt, dass der Erfolg ihre Richtigkeit ohne Ausnahme bestätigt.

Bei geometrischen Betrachtungen pflegt die inductive Grundlage verborgener zu bleiben, weil wir geneigt sind, sofort zuzugeben, dass irgend eine einzelne Wahrheit durch die allgemeinen Eigenschaften

---

1) Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie. 2. Aufl. S. 19 f.

des Raumes als eine selbstverständliche Folge gegeben sei. Dabei darf aber doch nicht übersehen werden, dass darum nicht minder die fundamentalsten Sätze, in denen jene Eigenschaften zur Darstellung gelangen, nur durch Induction sich feststellen lassen und erst, nachdem sie gefunden sind, auf gewisse Axiome zurückgeführt werden können, sofern sie nicht selbst einen axiomatischen Charakter besitzen. Für solche Sätze wie die folgenden: zwei Gerade können nur einen Punkt, zwei Ebenen nur eine einzige Gerade mit einander gemein haben, die Lage einer Ebene ist durch einen Punkt und eine außerhalb desselben liegende Gerade bestimmt, durch die Punkte auf einer Geraden und einen außerhalb liegenden Punkt kann in der ihnen angehörenden Ebene nur ein einziges Strahlenbüschel gelegt werden u. s. w., für solche Sätze genügt die Berufung auf die unmittelbare Anschauung, welche sich mit der Ueberzeugung verbindet, dass in allen Fällen, in denen die betreffenden Raumgebilde in den angegebenen Relationen wahrgenommen wurden, jene Sätze sich bestätigt fanden.

Gerade bei solchen einfachen Sätzen, welche entweder selbst unter die Axiome gerechnet werden oder ihnen nahe stehen, ist es nun ein altes Bestreben der Mathematiker, die Spuren der Induction zu verwischen. Dies geschieht entweder, indem man hervorhebt, dass eine einmalige Beobachtung zu ihrer Feststellung vollkommen zureichend sei, oder indem man an Stelle der Induction eine Beweisführung treten lässt.

Der erste dieser Einwände übersieht den naheliegenden Umstand, dass die Erfahrungen, aus denen wir die Ueberzeugung von der Richtigkeit der einfachsten arithmetischen und geometrischen Sätze geschöpft haben, zum großen Theil von uns in einer Zeit gemacht wurden, die der wissenschaftlichen Induction lange vorausgeht. Den Charakter der Allgemeinheit wird man solchen Sätzen wie der Additionsformel $7 + 5 = 12$ oder dem geometrischen Satz, dass zwei Gerade nie mehr als einen Punkt gemein haben, nicht absprechen dürfen, denn der erste ist für alle möglichen Gruppirungen von 7 und 5 Einheiten, der zweite für alle möglichen Geraden im Raum giltig. Eben deshalb aber ist es nicht denkbar, dass man zur Feststellung dieser Sätze anders als durch ein mehrfaches Experimentiren in der innern oder äußern Erfahrung gelangt sei. Nur eine Mehrheit von Anschauungen konnte lehren, dass, wie man auch die einzelnen Einheiten der

Zahlen 7 und 5 aneinanderfüge, die resultirende Anschauung immer die nämliche Summe von Einheiten enthalte, oder dass, wie man auch die Richtungen der Geraden sich ändern lasse, niemals ein Bild mit zwei Durchschnittspunkten entstehen könne.

Nicht besser steht es mit den Beweismethoden, durch welche man den experimentellen Ursprung gewisser Erkenntnisse zu verhüllen sucht. Diese setzen entweder, indem sie apagogischer Art sind, in Wirklichkeit das zu Beweisende voraus, oder sie enthalten selbst nichts anderes als die Schilderung eines Inductionsverfahrens. In beide Gattungen gehören die Euklidischen Congruenzbeweise. Der versuchte Beweis für die Congruenz zweier Dreiecke besteht hier darin, dass man angehalten wird, die gleichen Stücke zur Deckung zu bringen, worauf, wenn die drei Seiten gleich sind, die unmittelbare Anschauung lehren soll, dass auch die ganzen Dreiecke zusammenfallen (I, Satz 8), oder falls zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, eine Seite und zwei Winkel gleich sind, so wird gezeigt, dass die Voraussetzung der Nichtcongruenz dem Axiome, nach welchem zwei Gerade keinen Raum einschließen, widersprechen würde (Satz 4 und 26). Es ist klar, dass auch dieser apagogische Beweis der Berufung an die unmittelbare Erfahrung nur eine andere Wendung gibt; denn ich weiß ja nur aus der Anschauung, dass das Dreieck eine geschlossene Figur ist, der Beweis sagt also bloß, dass die Nichtcongruenz meiner Anschauung widersprechen würde.

Aehnlich verhält es sich mit den für gewisse arithmetische Fundamentalsätze versuchten Beweisführungen. Das so genannte Associationsgesetz der Addition und Multiplication, wonach $(a + b) + c = a + (b + c)$ und $(a\,b) . c = a . (b\,c)$ ist, beweist man für beliebig viele Zahlen, indem man zeigt, dass es, wenn es für eine gegebene Anzahl von Elementen richtig ist, auch für die nächst größere Anzahl richtig sein müsse[1]). Dieses in der Mathematik als vollständige Induction bezeichnete Verfahren ist in der That insoweit eine Induction, als die Voraussetzung, das Gesetz sei für eine gegebene Anzahl zutreffend, nur aus experimentellen Ermittelungen hervorgegangen sein kann. Nur ist es nicht zulässig, diese Voraussetzung wie eine vorläufige Hypothese einzuführen, die durch die nachträgliche Ausdehnung auf eine beliebige

1) Lejeune-Dirichlet, a. a. O. S. 3.

Anzahl von Gliedern, welche in Wahrheit keine Induction mehr ist, ihre Bestätigung erst empfangen. Diese Bestätigung würde nichts beweisen, wenn der Satz nicht durch Erfahrungen, die sich auf eine beschränkte Anzahl von Gliedern beziehen, vollkommen feststände. Aber es ist eine bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit der modernen Mathematik, dass sie es liebt, die Erfahrung zu verleugnen, indem sie, um ihren deductiven Charakter zu wahren, Sätze als Hypothesen behandelt, die in Wirklichkeit durch Induction aus der Erfahrung entstanden sind. Sehr augenfällig tritt dies an einer apagogischen Beweisführung hervor, welche man für den mit dem Associationsgesetz nahe zusammenhängenden Satz versucht hat, dass, wenn zwei Zahlen A und B aus der nämlichen Anzahl von Einheiten bestehen, keine eindeutige Verknüpfung zwischen ihnen möglich ist, bei welcher ein Rest bleibt. Man nimmt an, das Gegentheil wäre möglich: es soll neben der Verbindung, die keinen Rest lässt, noch eine andere stattfinden können, bei welcher etwa von B eine Einheit b übrig bleibt. Nun nehme man dieses Element b aus der Zahl B und entsprechend das Element a, mit dem es bei der restlosen Verknüpfung verbunden war, aus A weg: es wird dann vorausgesetzt, dass zwischen den gebliebenen Zahlen A' und B' wieder zwei Verknüpfungen, die eine mit einem Rest und die andere ohne einen solchen möglich seien, und es sollen nun die einander entsprechenden Elemente b' und a' weggenommen und so fortgefahren werden, bis von jeder der beiden Zahlen nur noch eine Einheit übrig bleibt. Dass nun zwischen zwei Einheiten mehr als Eine Art der Verbindung nicht stattfinden kann, ist unmittelbar einleuchtend, und es wird daher gefolgert, dass auch zwischen Zahlen aus beliebig vielen Einheiten nicht zwei Verbindungen möglich sind[1]. Der Schluss dieses Beweises ist offenbar eine demonstratio ad oculos, welche allerdings am einleuchtendsten bei bloß zwei Einheiten wird, aber im Allgemeinen auch schon bei Gruppen von je 2, 3 oder überhaupt einer kleineren Zahl von Einheiten deutlich genug sein dürfte. Es handelt sich, wie bei den Congruenzbeweisen Euklid's, um eine Berufung an die Anschauung, welche in das Gewand der apagogischen Beweisführung gekleidet ist. Das wirkliche Inductionsverfahren wird hierbei umgedreht. Während das letztere von den einfachsten Fällen ausgeht,

1) Ernst Schröder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. I, S. 19 f.

wird hier der zusammengesetzte Fall bis zum einfachsten zurückverfolgt. Es bedarf hiernach nicht mehr der näheren Ausführung, dass auch die übrigen allgemeinen Gesetze der Zahlenverknüpfung, das Commutations- und das Distributionsgesetz, $a + b = b + a$, $ab = ba$, $(a + b)\,c = ac + bc$ u. s. w., andere als inductive Begründungen nicht zulassen.

Nur auf einen Specialfall der Multiplication mag hier deshalb noch hingewiesen werden, weil bei demselben die Verkennung des inductiven Charakters der betreffenden Wahrheit zu sehr merkwürdigen Beweisversuchen den Anlass geboten hat, nämlich auf die Multiplicationsregel, wonach das Vorzeichen eines Productes aus zwei Factoren positiv ist, wenn beide Factoren ein gleiches, negativ, wenn sie ein verschiedenes Vorzeichen besitzen. Wenn man es auch für selbstverständlich hielt, dass $+a \,.\, +b = +ab$ und allenfalls $+a \,.\, -b = -ab$ sei, so wurde doch lange Zeit das Product $-a \,.\, -b = +ab$ für eine Art von Paradoxie gehalten, und noch in der modernen Analysis kann man Ausführungen begegnen, welche sich begnügen darauf hinzuweisen, dass $-a \,.\, -b$ nothwendig das entgegengesetzte Vorzeichen zu $+a \,.\, -b$ empfangen müsse, eine Begründung, welche man, obgleich die hervorragendsten Mathematiker des vorigen Jahrhunderts, ein Euler und Laplace, für sie eingetreten sind, doch eine zureichende nicht wird nennen können. Auch, wie es zuweilen geschieht, als bloß willkürliche Voraussetzungen, deren Berechtigung erst durch den Erfolg bewiesen werde, können jene Gleichungen nicht gelten, da eben ihre erfolgreiche Anwendung auf eine Berechtigung hinweist, die sie an und für sich schon besitzen müssen. Willkürlich ist nur der Gebrauch der Vorzeichen plus und minus für gewisse reale Gegensätze der durch Zahlen messbaren Objecte, wie der Werthgrößen, der Richtungen im Raume u. dgl. Gleichwohl ist gerade dieser Gebrauch lediglich aus der Beobachtung der zählbaren Objecte hervorgegangen. Die Verknüpfung zwischen den Größen a und b ist in den drei Fällen die nämliche, darum erscheint auch immer das nämliche Product a.b. Aber die Gleichung $+a \,.\, -b = -ab$ bedeutet, dass die Richtung der Größe b, welche a-mal genommen werden soll, entgegengesetzt sei einer andern Richtung des nämlichen Größencontinuums, die mit $+b$ bezeichnet wurde, daher nothwendig auch die aus der Vervielfältigung hervorgehende Größe einen negativen Werth haben muss. Das nämliche Resultat gewinnt man, wenn umgekehrt, entsprechend der Gleichung $-a \,.\, +b = -ab$, eine positive Größe b a-mal aufgehoben gedacht wird, wenn z. B. eine Summe von b Wertheinheiten a-mal hinweggenommen wird: die Gesammtsumme der hinweggenommenen Wertheinheiten ist hier abermals $= -ab$, weil von vornherein die Aufhebung der ursprünglich gesetzten Größen negativ bezeichnet wurde. Die Gleichung $-a \,.\, -b = +ab$ endlich sagt aus, dass eine negative Größe b a-mal aufgehoben gedacht wird, dass also z. B. ein Verlust vom Werthe b a-mal wieder ersetzt oder ein in rückläufiger Richtung gemessener Weg b in rechtläufiger Richtung a-mal zurückgelegt sei. Hier muss mit derselben Sicherheit ein positives Product $a \,.\, b$ erscheinen, als überhaupt eine doppelte Negation verschwindet, eine allgemein logische Regel, von welcher der mathematische Fall eine Anwendung ist. Dieser Zusammenhang mit dem Satz des Widerspruchs beweist nichts gegen den inductiven Ursprung der Multiplicationsgesetze, da ja die logischen Axiome selber nicht nur gleichzeitig Gesetze des Denkens und der Objecte des Denkens, sondern auch unter dem Einfluss dieser Objecte entstanden sind. Auch wird durch den inductiven Ursprung der Multiplicationsregeln keineswegs ausgeschlossen, dass einzelne unter ihnen deducirt werden können, wenn die andern gegeben sind. Vielmehr wird, sobald nur die gegebenen Regeln eine vollständige Definition der positiven und der negativen Einheiten enthalten, eine solche Deduction möglich sein. In der That lässt sich aus den beiden Gleichungen $+a \,.\, +b = +ab$ und $+a - a = 0$ die zweite und dritte Multiplicationsregel ableiten[1]. Die Möglichkeit

[1] Eine solche Ableitung gibt, nach einer Mittheilung von Kossak (Die Elemente der Arithmetik, Berlin 1872), Weierstrass in seinen Vorlesungen. Bezeichnet man mit e und e' entgegengesetzte Einheiten, so gelten die Voraussetzungen

$$e \cdot e = e \text{ und } e + e' = 0.$$

Ist nun a eine beliebige Größe, so ist

$$a = a + e + e',$$
$$ae = ae + ee + ee'.$$

Es ist aber auch

$$ae = ae + e + e',$$

also

$$ee' = e'.$$

Ebenso hat man

$$a = a + e + e',$$
$$ae' = ae' + ee' + e'e',$$
$$ae' = ae' + e' + e,$$

also

$$e'e' = e.$$

dieser Deduction beweist aber natürlich nur, dass, nachdem die erste Regel und der Begriff der entgegengesetzten Zahlen durch Induction und Abstraction aus der Erfahrung gefunden sind, man sich die besondere inductive Auffindung der übrigen ersparen kann.

Suchen wir das Gebiet zu umgrenzen, welches die mathematische Induction durch Bedingungen, die in der Natur der Sache liegen, dauernd beanspruchen muss, so erweisen sich zunächst alle axiomatischen Sätze als solche, die nicht nur regelmäßig durch Induction entstehen, sondern für die auch fortan keine andere Begründung gegeben werden kann. Der Umstand, dass die mathematischen Axiome im allgemeinen nur Umformungen der Definitionen sind, die sich von Zahl, Größe, Raum u. s. w. aufstellen lassen, ändert an dieser Sachlage nichts. Denn auch für die Definitionen lässt kein anderer Ursprung sich nachweisen als die Abstraction aus der Erfahrung. Selbst für die Definitionen rein imaginärer Gebilde hat dies Geltung, da dieselben von den durch Abstraction gewonnenen Fundamentalbegriffen ausgehen, die dann willkürlich in Bezug auf irgend welche Eigenschaften verändert gedacht werden. Insofern die mathematischen Definitionen ausschließlich auf die Abstraction, die Axiome außerdem noch auf die Induction zurückführen, offenbart sich jedoch der Unterschied beider Sätze von einer bedeutsamen Seite. Die Axiome werden regelmäßig zuerst festgestellt. So ist die Wissenschaft lange Zeit im Besitz gewisser Axiome über Raum, Zahl und Größe gewesen, ehe es gelang, befriedigende Definitionen dieser Begriffe zu gewinnen. In dem Abstractionsprocess, welcher zu denselben führte, spielten Axiome eine wichtige Rolle. Ohne die Sätze z. B., dass die Gerade zwischen zwei Punkten die kürzeste Linie sei, dass jedes Raumgebilde bei beliebiger Verschiebung im Raum sich selbst congruent bleibe, würde eine allgemeine Definition des Raumes gar nicht möglich gewesen sein. Kann man nun aber auch, nachdem diese Definition aufgestellt ist, aus derselben durch eine bloß formale Umwandlung die Axiome gewinnen, so führt doch jeder Versuch, die Richtigkeit der letzteren nachzuweisen, wiederum auf die nämlichen Inductionen zurück, aus denen sie ursprünglich entstanden waren.

Nächst den Axiomen verdanken sodann solche Sätze einer Induction ihren Ursprung, welche als unmittelbare Specialisirungen der Axiome betrachtet werden können. Hierher gehören alle Zahlformeln, wie $7 + 5 = 12$, $5 . 6 = 30$ u. dergl., alle auf die einfachsten Raumconstructionen sich beziehenden Sätze der synthetischen Geometrie, wie z. B. dass zwei Gerade in einem Punkt, zwei Ebenen in einer Geraden sich schneiden, dass alle Strahlen, die durch einen Punkt und eine Gerade gelegt werden, in einer einzigen Ebene liegen u. s. w. Von den eigentlichen Lehrsätzen unterscheiden sich diese Fundamentalsätze dadurch, dass sie, hierin den Axiomen gleichend, keinen Beweis zulassen, sondern nur in dem unmittelbaren Hinweis auf die Anschauung ihre Begründung finden. Von den Axiomen dagegen sind sie insofern verschieden, als diese die allgemeinsten Abstractionen aus jenen sämmtlichen in der unmittelbaren Anschauung gegebenen Sätzen darstellen. Die letzteren lassen sich daher auf die Axiome zurückführen, aber sie gestatten keinen eigentlichen Beweis aus denselben, da bei ihnen stets neue Elemente der Anschauung auftreten, welche in den Axiomen noch nicht enthalten sind. Der Begriff der mathematischen Axiome ist darum ungenügend bestimmt, wenn man sie bloß negativ als diejenigen Sätze bezeichnet, welche einen Beweis aus anderen Sätzen nicht zulassen. Vielmehr werden durch dieselben die allgemeinsten Gesetze festgestellt, von welchen die verschiedenen mathematischen Begriffsgebiete beherrscht sind, und mit denen alle einzelnen Sätze in Uebereinstimmung stehen müssen. Sie sind daher Verallgemeinerungen aus den durch Induction gefundenen und nur durch Induction erweisbaren einzelnen Thatsachen der mathematischen Anschauung. Die Axiome selbst lassen sich, eben weil sie völlig abstracte Sätze sind, nur in diesen ihren einzelnen Anwendungen in der Anschauung nachweisen. Das Additionsgesetz z. B. hat für uns eine anschauliche Wirklichkeit nur insofern, als wir es uns an einzelnen Additionsformeln deutlich machen. Den Satz von der Congruenz des Raumes mit sich selbst müssen wir auf concrete Raumgebilde anwenden, die wir uns im Raume bewegt oder zur Deckung gebracht denken, und alle einzelnen Congruenzsätze sind solche Anwendungen.

Ein drittes Gebiet der Induction bilden endlich diejenigen allgemeinen Sätze, die aus Einzelinductionen der soeben beschriebenen Art durch Generalisation hervorgegangen sind. Bei der Feststellung des Gesetzes, nach welchem die Primfactoren einer Zahl sich bestimmen lassen, oder der Anzahl der Combinationen, welche eine bestimmte Zahl von Elementen gestattet, oder der Form, nach welcher eine durch empirische Entwicklung gefundene Reihe fortschreitet, ist das inductive Verfahren so augenfällig, dass es längst Anerkennung gefunden hat. Es ist aber klar, dass es sich hierbei nur um eine Weiterführung der einfachen Inductionen der vorhin beschriebenen Art handelt. Durch einfache Induction erhält man z. B. die Zahlformel $1 + 3 = 4$, durch eine mehrmalige Wiederholung solcher Inductionen die Glieder einer arithmetischen Reihe 1, 4, 7, 10, 13 . . ., und aus der Betrachtung dieser und ähnlicher Reihen gewinnt man durch Generalisation den Satz, dass das $n$te Glied einer arithmetischen Reihe $= a + (n - 1)\, d$ ist, wenn mit a das erste Glied und mit d die constante Differenz bezeichnet wird. So bilden jene Specialisirungen der mathematischen Axiome, wie sie uns in den Zahlformeln, in den auf die einfachsten Constructionen zurückgehenden geometrischen Sätzen entgegentreten, den Anfang aller mathematischen Induction. Auf der einen Seite gehen aus ihnen durch Abstraction die Axiome, auf der andern Seite durch Verbindung einer Anzahl zusammengehöriger Inductionen und Generalisation die verwickelteren Inductionen hervor. Diese divergirende Entwicklung führt uns auf die Bedeutung des Abstractionsverfahrens für die mathematische Induction.

5. Die mathematische Abstraction.

Der Grund, weshalb die mathematische Induction besonders in ihren einfachsten Fällen übersehen zu werden pflegt, liegt vornehmlich darin, dass sich dieselbe von Anfang an mit einem sehr vollständigen und durch eigenthümliche Merkmale ausgezeichneten Abstractionsverfahren verbindet. Niemand würde daran zweifeln, dass die Additionsformel $7 + 5 = 12$ der Induction ihren Ursprung verdanke, wenn die Zahlensymbole eine concrete Bedeutung besäßen, wenn also die Formel etwa lautete: sieben Aepfel und fünf Aepfel sind zwölf Aepfel. Aber da jene Symbole alle möglichen Objecte bezeichnen können, so ist man geneigt, die Zahlenvorstellungen und ihre Verbindungen, sowie die grundlegenden geometrischen Constructionen, als die Schöpfungen einer reinen Gedankenthätigkeit anzusehen, auf welche der nur auf empirischem Gebiet zulässige Begriff der Induction keine Anwendung finden könne. In diesem Sinne meinte der ältere Realismus, alle mathematischen Sätze liessen sich aus den abstracten

Begriffen der Zahl, der Größe, des Raumes ohne jede weitere Beihülfe analytisch entwickeln. Sobald man dagegen die anschauliche Grundlage der mathematischen Sätze anerkannte, wurde man entweder durch den abstracten Charakter derselben veranlasst, sie mit Kant auf synthetische Constructionen innerhalb einer reinen Anschauung zurückzuführen, oder man suchte in einer Weise, die mehr auf die psychologische Natur der Vorgänge, als auf ihre logische Bedeutung Rücksicht nahm, die Unterschiede zwischen der mathematischen und der naturwissenschaftlichen Induction zu verwischen. So besteht der Mangel beider Auffassungen darin, dass in ihnen jener Abstractionsprocess, welcher den mathematischen Inductionen hauptsächlich erst ihre Allgemeinheit sichert, nicht in zureichender Weise zur Geltung kommt. Bei Kant erscheint die reine Anschauung als ein ursprüngliches Gebiet innerer Erfahrung, in welchem jede Erkenntniss des Einzelnen mit der Construction anhebt, während in Wahrheit die reine Anschauung die höchste der Abstractionen ist, auf welche die einzelnen Abstractionen mathematischer Denkobjecte zurückführen. Mill dagegen vermengt die mathematischen Begriffsgebilde mit den Objecten der wirklichen Erfahrung, die Geometrie insbesondere bezeichnet er mit Comte geradezu als diejenige Naturwissenschaft, die sich mit den räumlichen Eigenschaften der Körper beschäftige.[1] So verwandeln sich ihm die Grundsätze der Mathematik in Inductionen, die sogar nur eine annähernde Gültigkeit besitzen, da es gerade Linien, Ebenen, regelmäßige Figuren, wie sie die Geometrie voraussetzt, in der Wirklichkeit nicht gibt. Er nimmt die mathematischen Sätze für unmittelbare Inductionen aus der Erfahrung, während sie Inductionen von Abstractionen aus der Erfahrung sind.

Unter Abstraction überhaupt verstehen wir das Verfahren, durch welches aus einer Anzahl einzelner Vorstellungen gewisse Elemente eliminirt und die zurückbleibenden als Gegenstand eines Begriffes festgehalten werden. Nur vermöge des negativen Theils dieser Definition können wir nun offenbar die Entstehung mathematischer Begriffsgebilde dem Verfahren der Abstraction unterordnen. Jene Elimination wechselnder Bestandtheile der einzelnen Vorstellungen wird bei jedem einzelnen mathematischen Begriff und schließlich selbst

1) a. a. O. II, S. 164.

bei den allgemeinen Anschauungsformen der Zeit und des Raumes, auf welche sie alle zurückführen, gefordert. Dagegen begegnet der positive Theil der Definition hier eigenthümlichen Schwierigkeiten. Wenn jene Elimination vollständig ausgeführt wird, so scheint kein Rest übrig zu bleiben, welcher dem mathematischen Begriffsgebilde entspricht. Die Zahl ist ebenso wenig eine für sich denkbare objective Eigenschaft der zählbaren Objecte, wie gerade Richtung und ausdehnungslose Beschaffenheit Merkmale sind, in welchen gewisse Linien übereinstimmen. Trotzdem beweist diese Thatsache nicht, dass hier überhaupt kein Abstractionsprocess stattfinde, sondern sie beweist nur, dass man die mathematische Abstraction falsch interpretirt, wenn man sie vollständig nach Analogie derjenigen Abstractionen beurtheilt, zu denen die physikalische Beobachtung Anlass gibt. Die zureichende Bürgschaft für das Stattfinden irgend einer Abstraction liegt bereits in dem oben erwähnten Eliminationsverfahren. Denn da die Abstraction an und für sich nur verlangt, dass gewisse Elemente der Vorstellung im Begriff außer Rücksicht bleiben, so ist die logische Natur der Abstraction an und für sich nur negativ bestimmt. Was als Resultat des Abstractionsverfahrens zurückbleibt, hängt weniger von diesem Verfahren selbst als von der Natur der ursprünglichen Vorstellungen ab, deren sich dasselbe bemächtigt. Die Frage lautet also vielmehr: worin besteht der Unterschied der mathematischen Abstraction von der gewöhnlichen, die wir die physische nennen wollen? Welche Bedingungen müssen zu der letzteren hinzutreten, wenn mathematische Begriffe entstehen sollen?

Die Antwort auf diese Fragen ist im allgemeinen leicht zu geben, sobald wir uns die Schwierigkeiten vergegenwärtigen, in die sich die gewöhnliche Lehre von der empirischen Entstehung der mathematischen Begriffe, bei der eben jene Verwechslung der mathematischen mit der physischen Abstraction stattfindet, verwickelt. Diese Lehre bleibt siegreich, so lange sie sich auf die Schilderung der negativen Seite der Abstraction beschränkt; sie scheitert aber in dem Augenblick, wo sie sich auf die positiven Begriffselemente besinnt, die ihr zurückbleiben. Die gewöhnliche Ausflucht, dass man sich auf die Vorstellungen beruft, die in unserm Bewusstsein die Begriffe repräsentiren, deckt nur nothdürftig dieses Scheitern; denn sie verwechselt die Zeichen der Begriffe mit den Begriffen selber. Dieser ganze Misserfolg hat aber seine Quelle darin, dass man von Anfang an diejenigen Vorstellungselemente, die den zur Einleitung des Abstractionsprocesses dienenden Objecten angehören, als die allein existirenden behandelt, die subjectiven, unserer eigenen Gedankenthätigkeit angehörenden ganz ignorirt. Führte nun jener Misserfolg zu dem Ergebniss, dass das Eliminationsverfahren der Abstraction scheinbar keinen Rest zurückließ, so werden wir demnach sogleich schließen dürfen, dass der in Wahrheit bleibende Rest nichts anderes als unsere bei der Bildung der mathematischen Vorstellungen wirksame Gedankenthätigkeit ist, oder mit andern Worten, dass mathematische Begriffe zu Stande kommen, indem wir von allen denjenigen Elementen der Vorstellung abstrahiren, die in dem Object ihre Quelle haben.

Am deutlichsten kommt dieses Verfahren bei dem Begriff der Zahl zum Vorschein, weil die abstracte Natur dieses Begriffs sofort die Schwäche der physischen Abstractionstheorie bloßlegt. Wenn wir uns fragen, was dann zurückbleibt, wenn wir von allen wechselnden Bestandtheilen jener Vorstellungen abstrahiren, in denen sich die Function des Zählens bethätigt, so ist dieses Zurückbleibende nichts anderes als die Function des Zählens selber, eine Aufeinanderfolge und Verbindung von Apperceptionsacten, deren jeder einzelne den abstracten Begriff der Einheit darstellt. Wir können freilich nicht zählen ohne Objecte, die uns in innerer oder äußerer Erfahrung gegeben sein müssen, und jede Darstellung von Zahlen sieht sich daher genöthigt, zu objectiven Versinnlichungen zu greifen, welche den einfachsten Gelegenheitsursachen, aus denen Zahlen entstehen, nachgebildet sind. Aber der Begriff der Zahl ist, was nach Elimination aller dieser wechselnden Elemente als das Constante zurückbleibt, die Verbindung der einzelnen Denkacte als solcher, abgesehen von jedem Inhalte.[1])

Von hier aus wird es nicht schwer werden, auch den geometrischen Begriffen gerecht zu werden. Der geometrische Punkt unterscheidet sich dadurch vom physischen Punkte, dass es sich bei dem letzteren immer um ein Etwas handelt, was objectiv, mit bestimmten physischen Eigenschaften begabt, gegeben sein soll. Der geometrische

1) Vergl. meine Logik, I, S. 468.

Punkt dagegen bedeutet den einzelnen Ort im Raume, insofern derselbe bloß durch unsere ortsbestimmende Gedankenthätigkeit gegeben ist. Von den Eigenschaften der physischen Gegenstände, die uns zur äußeren Bezeichnung so gut wie zur inneren Vorstellung eines Ortes dienen, wird hierbei abstrahirt, und es bleibt nur die fixirende Thätigkeit zurück, ohne die sich keine Ortsbestimmung vollzieht. Die ausdehnungslose Beschaffenheit des Punktes ist eine selbstverständliche Folge dieser Abstraction, da die Ausdehnung immer nur den objectiven Bestimmungsmitteln der Oerter im Raum eigen ist.

Etwas zusammengesetzter ist schon der Abstractionsprocess, welcher zum Begriff der geraden Linie führt. Hier wird nicht einfach, wie bei der arithmetischen Einheit und dem geometrischen Punkt, von dem zählbaren oder raumerfüllenden Object abstrahirt, sondern der sinnlichen Vorstellung eines annähernd geradlinigen Stabes folgt zunächst die Wahrnehmung, dass ein solcher Stab, wie er auch um sich selbst gedreht werden mag, stets in constanter Weise zwei von einander entfernte Orte im Raum, durch die man ihn gelegt denkt, verbindet. Dieser Erfahrung bemächtigt sich nun die mathematische Abstraction: indem sie aus der Vorstellung des Stabes, welcher die zwei Punkte verbindet, alle objectiven Bestandtheile eliminirt, bleibt der Denkact übrig, welcher die relative Lage beider Punkte in Bezug auf einander bestimmt. Da die Gerade, welche zum Behuf der Lagebestimmung gezogen werden muss, nur in Bezug auf ihre Richtung und die Länge, die sie zwischen den zwei Punkten besitzt, bei jener Lagebestimmung in Betracht kommt, so bleiben so als einzige Elemente des Begriffs einer gegebenen geraden Linie Richtung und Länge übrig. Der Umstand, dass es in der Natur keine absolut geradlinige Grenze gibt, steht diesem Begriff nicht im Wege, da der Gedanke der lagebestimmenden Verbindung zweier Punkte ein Postulat unseres Denkens ist und keine wirkliche Vorstellung.

In ähnlicher Weise ist nun die Verarbeitung der übrigen geometrischen Vorstellungen aufzufassen. Die einfacheren derselben werden ebenfalls durch unmittelbare Erfahrungen nahe gelegt; andere entstehen durch objective oder subjective, von unserer Einbildungskraft geleitete Experimente oder, wie man es gewöhnlich ausdrückt, auf dem Wege der Construction. Das auf solche Weise entstandene Bild wird aber erst zum geometrischen Object im eigentlichen Sinne, indem wir alle diejenigen Elemente der Vorstellung eliminiren, welche nur nebensächliche Begleiter des Resultates sind, das unser Denken beabsichtigt. Wenn wir eine gegebene Figur als Kreis auffassen oder einen Kreis construiren wollen, so besteht das Postulat unseres Denkens in einer continuirlichen Folge geometrischer Punkte, welche in einer Ebene liegen und mit einem einzigen festen Punkte durch eine Gerade von constanter Größe verbunden werden können. Bei der geometrischen Untersuchung des Kreises beschäftigt uns nur dieses Postulat unseres Denkens, nicht die einzelne Vorstellung, welche den Begriff in unserm Bewusstsein vertreten muss. Man hat vielfach den Hauptwerth darauf gelegt, dass die diesen Begriffen entsprechenden Vorstellungen von uns construirt werden müssten. Meistens verbindet sich damit die Meinung, in Folge dieser Entstehungsweise schwände alsbald die Schwierigkeit, dass die geometrischen Gebilde keinen realen Objecten entsprechen, und es sei darum jetzt möglich, sofort die construirten Vorstellungen selbst als geometrische Gebilde zu betrachten, ohne dass ein hinzukommender Abstractionsprocess erforderlich wäre. Aber diese construirten Vorstellungen leiden an den nämlichen Ungenauigkeiten wie die äußern Objecte; das wesentliche Moment der Begriffbildung bleibt also immer die Abstraction von allen empirischen Bestandtheilen der Vorstellung und die Zurückführung auf diejenigen Elemente, welche den Charakter von Postulaten des Denkens besitzen. Es ist schließlich hervorzuheben, dass die allgemeinen Bedingungen der mathematischen Begriffbildung, die Anschauungsformen des Raumes und der Zeit, durchaus auf einem Abstractionsprocess der nämlichen Art beruhen, indem wir uns bei ihnen jeden gegebenen Raum- und Zeitinhalt eliminirt denken und auf diese Weise nur die subjectiven Apperceptionsformen zurückbehalten, welche dem räumlichen und zeitlichen Vorstellen entsprechen. Eben wegen des auch hier vorhandenen Abstractionsprocesses ist die »reine Anschauung« ein Begriff und keine Vorstellung.

Von der Kantischen Auffassung unterscheidet sich die hier entwickelte hauptsächlich darin, dass Kant die subjectiven Elemente der mathematischen Begriffbildung den objectiven vorangehen lässt und sie in diesem Sinne als transscendentale Bedingungen der empirischen Vorstellung selbst bezeichnet. Diese Ansicht ist wesentlich dadurch bedingt, dass Kant die begriffliche Natur der reinen Anschauung leugnet und demnach eine unmittelbare constructive Thätigkeit der reinen Einbildungskraft in dem oben angedeuteten Sinne statuirt. Nichts aber berechtigt uns, in dieser Weise dasjenige, was wir als letztes Resultat des mathematischen Erkennens vorfinden, an den Anfang desselben zu stellen, statt dem wirklichen Erkennen mit unserer Reconstruction Schritt für Schritt nachzufolgen. Wählen wir nun den letzteren Weg, so stellt sich die reine Anschauung als eine Abstraction aus der empirischen Anschauung dar, und ebenso ergibt sich jeder Gegenstand des mathematischen Denkens als Erzeugniss einer Abstraction, welche von empirischen Gegenständen ausgeht. Der auszeichnende Charakter der mathematischen Abstraction besteht aber darin, dass bei ihr alle objectiv gegebenen Elemente der Vorstellungen eliminirt werden und die reinen Formen der Gedankenthätigkeit, die zur Verknüpfung jener Elemente erfordert wird, als mathematische Begriffsgebilde zurückbleiben.

In dieser Reduction auf die formalen Elemente unseres Denkens besteht das Wesen des mathematischen Apriori. Dagegen können wir den Grund desselben nicht in einer jede Induction und Abstraction entbehrlich machenden Construction, am wenigsten aber in irgend einem aller Erfahrung vorausgehenden Wissen erblicken, da im Gegentheil die mathematischen Begriffe, von der Erfahrung ausgehend, den längsten Weg zurücklegen müssen. In Folge der Verbindung der mathematischen Induction und Abstraction werden die an einzelnen Objecten der Erfahrung vollzogenen Inductionen auf die allgemeinsten formalen Abstractionen von jenen Objecten übertragen, diese Abstractionen dann zu weiteren Inductionen verwendet und endlich nach Anleitung der allgemeinsten Abstractionen die für ein bestimmtes Gebiet gewonnenen Inductionen unter gewisse allgemeine Regeln, die so genannten Axiome, geordnet.

Im Einzelnen greift nun die Abstraction in den Process der mathematischen Induction in doppelter Weise ein. Zunächst ermöglicht sie es, die an einzelnen Gebilden der Anschauung gewonnenen Sätze sofort auf ganze Classen solcher Gebilde zu übertragen und so denselben die ihnen zukommende Allgemeinheit zu sichern. Der Satz $7 + 5 = 12$ gilt für alle möglichen zählbaren Objecte, und deshalb nur sagen wir von ihm, dass er von Zahlen überhaupt gilt. Sodann aber bemächtigt sich die Abstraction der durch einzelne Inductionen gewonnenen Sätze, um mit ihrer Hülfe die nachher in der Form von Definitionen fixirten Grundbegriffe zu gewinnen, welche als die allgemeinen Bedingungen jener einzelnen Sätze angesehen werden können. Ist auf diese Weise erst die allgemeinste Definition gefunden, die ein bestimmtes mathematisches Begriffsgebiet beherrscht, so liegt darin aber der Anlass, nun wiederum jene Sätze zu prüfen, denen ein axiomatischer Charakter zugeschrieben werden könnte, und aus ihnen diejenigen zum Rang definitiver Axiome zu erheben, welche zureichend sind, die Definition zu erschöpfen, und daher alle anderen unmittelbar anschaulichen, keines Beweises bedürftigen Sätze als specielle Fälle unter sich enthalten. Euklid's Axiome erscheinen uns nur deshalb fast zufällig zusammengetragen, weil ihre Aufstellung nicht von bestimmten Definitionen der Grundbegriffe von Zahl, Größe und Raum geleitet wird, daher denn auch theils Axiome verschiedenartiger Gebiete mit einander, theils Sätze von untergeordnetem Charakter mit den Axiomen vermengt werden. Solche speciellere Sätze, sowie die unmittelbaren Anwendungen der Axiome in Zahlformeln oder einfachen geometrischen Constructionen, lassen sich zwar stets auf die Axiome zurückführen, einer eigentlichen Beweisführung aus denselben sind sie aber deshalb nicht bedürftig, weil sie ihnen an unmittelbarer anschaulicher Gewissheit vollständig gleichkommen, und deshalb nicht zugänglich, weil bei jedem specielleren Satz auch wieder specielle Bedingungen der Anschauung auftreten, auf welche die Axiome vermöge ihres abstracten Charakters nicht Rücksicht nehmen können. So ist zwar die Additionsformel $7 + 5 = 12$ unter dem arithmetischen Axiome enthalten, nach welchem durch die Verbindung von Zahlen eine neue Zahl entsteht, die ebenso viele Einheiten enthält, wie die ursprünglichen Zahlen zusammengenommen. Aber die Kenntniss dieser allgemeinen Regel erspart es uns nicht, im einzelnen Fall die Summe durch eine wirkliche Addition aufzufinden oder, falls wir uns einer feststehenden Summenformel bedienen, die Richtigkeit derselben durch eine Wiederholung der ursprünglichen Induction zu bestätigen. Denn jene Formel enthält eine selbständige Thatsache, die einer eigens auf sie gerichteten Beobachtung zu ihrer Nachweisung bedarf, wie denn auch das Wort »Zwölf« an Stelle einer Definition gebraucht wird, die in der allgemeinen Definition des Additionsverfahrens durchaus noch nicht vorgesehen ist. Ebenso lässt sich der geometrische Satz, dass durch einen Punkt und eine Gerade außerhalb desselben nur eine einzige Ebene gelegt werden kann, auf das Axiom zurückführen, dass die Lage eines jeden Raumgebildes durch drei Punkte bestimmt ist. Der Unterschied dieses Axioms von jenem Satze besteht aber darin, dass das Axiom eine abstractere Beschaffenheit besitzt, während eben deshalb der Vorzug der Anschaulichkeit auf Seite des einzelnen Satzes liegt, da wir uns ein Raumgebilde in abstracto überhaupt nicht vorstellen können. Außerdem ersetzt auch hier das allgemeine Axiom nicht die concrete Erfahrung, die in dem Satz von der Lagebestimmung der Ebene ausgesprochen ist. Denn weder in jenem Axiom noch in der allgemeinen Definition des Raumes ist die Vorstellung der Ebene enthalten.

Nur in Einer Beziehung bedarf die obige Entwicklung noch der Vervollständigung. Die Abstraction gibt uns zwar über die große Allgemeinheit Rechenschaft, welche die mathematischen Inductionen gewinnen, aber nicht über die Art der Allgemeingiltigkeit, die wir ihnen zuschreiben. Nichts desto weniger unterscheidet sich in diesem Punkte die Mathematik ebenso sehr wie in Bezug auf die abstractere Natur ihrer Objecte. Auch in den Erfahrungswissenschaften fehlt allerdings nicht die Ueberzeugung von der Allgemeingiltigkeit der Gesetze. Diese besitzt aber hier einen wesentlich anderen Charakter. Sie beschränkt sich auf die Annahme, dass unter genau übereinstimmenden Bedingungen uns stets übereinstimmende Erscheinungen begegnen werden. Auf mathematischem Gebiete dagegen schließt sie die Voraussetzung ein, dass die Bedingungen selbst, unter denen unsere Begriffe stehen, unter allen Umständen constant bleiben. Der die Abstraction und Induction ergänzende logische Vorgang, welcher diese Form der Allgemeingiltigkeit hervorbringt, ist die e x a c t e A n a l o g i e.

6. Die exacte Analogie.

Für eine Schlussfolgerung, bei welcher man nachweist, dass ein bis zu einem beliebigen Gliede n giltiges Gesetz auch für ein weiteres Glied $n+1$ seine Giltigkeit bewahre, ist in der Mathematik der Name »vollständige Induction« eingeführt. Dieser Ausdruck gibt aber nicht bloß dem in der Logik in ganz anderem Sinne gebrauchten Begriff der vollständigen Induction eine abweichende Bedeutung, sondern er ist auch an sich ungeeignet. Vielmehr handelt es sich in solchen Fällen immer um die Verbindung einer gewöhnlichen unvollständigen Induction mit einem exacten Analogieschluss [1]. Durch wirkliche Ausführung der Multiplication hat man z. B. die Form einiger Binomien, wie $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, gefunden, und man schließt dann, dass sich irgend ein Binomium $(a+b)^n$ zu dem nächsten $(a+b)^{n+1}$ ebenso verhalten müsse, wie sich $(a+b)^2$ zu $(a+b)^3$ verhält. Derartige Schlüsse von einem Gliede n auf das nächste $n+1$ kommen in der Zahlentheorie und Analysis häufig vor, und es wiederholt sich in ihnen stets der nämliche Gedankengang. So findet man z. B. durch unmittelbare Induction, dass das Commutationsgesetz für zwei und für drei Zahlen gilt, und zeigt dann, dass es in ähnlicher Weise von n auf $n+1$ Zahlen ausgedehnt werden kann, wodurch es, da für n jede beliebige Zahl gesetzt werden darf, allgemein bewiesen ist [2]. Der gemeinsame Grund für diese unbedingte Verallgemeinerung arithmetischer Inductionen ist die Gleichförmigkeit der Zahlengesetze. Wir wissen, dass die Hinzufügung von Eins zu einer andern Eins die nämliche absolute Zunahme bewirkt, als wenn wir sie zu 1000 oder 10000 Einheiten hinzufügten. Diese Ueberzeugung gründet sich nicht bloß auf die thatsächliche Bestätigung in aller Erfahrung, sondern in erster Linie auf jene Constanz der Begriffe, welche die Bedingung unseres eigenen logischen Denkens ist. Wollte ich annehmen, dass für den Fortschritt von n zu $n+1$ ein anderes Gesetz der Zunahme Platz greife, als von 1 zu 1 + 1, so müsste ich annehmen, dass der Begriff der Eins oder der Vorgang der additiven Verbindung eine Veränderung erfahren habe, d. h. dass identische Denkoperationen nicht mit einander identisch seien. Eine solche Annahme widerstreitet freilich auch aller Erfahrung, und wir können uns, da wir die Begriffe nur in anschaulichen Formen denken, die Unmöglichkeit derselben nicht zwingender deutlich machen, als indem wir auf ihre Unvereinbarkeit mit der Anschauung hinweisen. Dennoch heißt es Heterogenes vermengen, wenn man nun deshalb mit Mill mathematische Verallgemeinerungen dieser Art der Generalisation empirischer Gesetze gleichstellt und sie auf eine bloße inductio per enumerationem simplicem zurückführt [3]. Es waltet doch eine wesentliche Verschieden-

1) Vgl. hierzu meine Logik, I S. 309 f.

2) Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, S. 1 f.

3) Mill, Logik II, S. 154.

heit ob zwischen einem Satze, der nur dem Umstand, dass bis dahin keine Erfahrung ihm widersprochen hat, seine allgemeine Geltung verdankt, während widerstreitende Erfahrungen sehr wohl vorstellbar wären, und einem solchen Satze, dessen Bestätigung wir uns nicht denken können, ohne gleichzeitig die Regeln unserer Anschauung und die Normen unseres Denkens verändert zu denken.

Die bisher erwähnten Beispiele exacter Analogie beziehen sich auf diejenigen Inductionen zusammengesetzter Art, welche schon die Mathematik als solche anerkannt hat. Hier gewinnt das Inductionsverfahren durch die Analogie seinen Abschluss, insofern diese erst der durch Induction erschlossenen Regel ihre allgemeingiltige Bedeutung anweist. In wesentlich anderer Weise vervollständigt die Analogie jene vereinzelten Inductionen, welche sowohl diesen zusammengesetzten Inductionsprocessen wie der Bildung der Axiome zur Grundlage dienen. Hier haben die einzelnen durch Induction gewonnenen Sätze die Bedeutung abstracter Regeln für singuläre Thatsachen, die an und für sich einer Verallgemeinerung nicht zugänglich sind; die Analogie gestattet es dann aber ohne weiteres, andere singuläre Sätze von verwandter Art festzustellen, für die in Folge dessen das Erforderniss einer besonderen Induction hinwegfällt. Nachdem die Summe $7 + 5 = 12$ durch wirkliche Addition der Einheiten gefunden ist, bilden wir sofort die Summen $70 + 50 = 120$, $700 + 500 = 1200$ u. s. w., ohne dass es uns nothwendig scheint, auch in diesen Fällen die Addition durchzuführen. Einer der größten Vortheile unseres Ziffernsystems besteht darin, dass es uns gestattet, die Ausführung der elementaren Rechenoperationen auf die neun einfachen Zahlen zu beschränken und die hier gewonnenen Resultate auf jede beliebige höhere Zahl zu übertragen. Indem man die 10, 100, 1000 u. s. w. als neue zusammengesetzte Einheiten betrachtet, setzt man voraus, die zwischen denselben möglichen Operationen seien den nämlichen Gesetzen unterworfen, wie diejenigen zwischen den einfachen Einheiten. Die einzelnen Inductionen, aus welchen die axiomatischen Gesetze der Addition, Multiplication, Subtraction und Division abstrahirt sind, beschränken sich so auf die Feststellung der für die Zahlen zwischen 1 und 10 möglichen Zahlformeln, welche bei den directen Operationen unter allen Umständen leicht ausführbaren Verknüpfungen der Einheiten entsprechen, während bei den inversen Operationen in jenen Fällen, in welchen negative und irrationale Größen sich ergeben, die aufgestellten Zahlformeln wirklichen Inductionen nicht unmittelbar parallel gehen. In der That ist es gar nicht denkbar, dass man, so lange die Zahlen ihre ursprüngliche Bedeutung bewahrten, durch unmittelbare Zählungen zu negativen oder irrationalen Zahlen gelangt wäre. Meistens wurden offenbar die Zahlformeln, die zu solchen Zahlen führten, zunächst nur nach Analogie anderer aus wirklichen Inductionen hervorgegangener aufgestellt, und erst spätere Inductionen von anderer Beschaffenheit führten zu der Entdeckung, dass denselben eine reale Bedeutung zukommen könne. Dies wird hinlänglich durch die historische Thatsache bezeugt, dass lange Zeit der Gebrauch der negativen und irrationalen Zahlen Schwierigkeiten begegnete. Noch deutlicher tritt uns der nämliche Verlauf bei dem durch die inverse Operation dritter Stufe, die Radicirung, entstandenen Begriff der imaginären Zahl entgegen, wo die reale Deutung von der Entstehung des Begriffs durch einen noch längeren Zeitraum getrennt ist. In allen diesen Fällen hat sich der gewöhnliche Verlauf umgekehrt, indem die Analogie zuerst zu bestimmten Zahlformeln führte, welche dann erst durch Induction eine objective Grundlage gewannen. Selbstverständlich kann es in solchen Fällen auch sich ereignen, dass die nachfolgende Induction ganz ausbleibt, dass also für Zahlbegriffe, zu denen man durch die consequente Ausführung bestimmter Operationen gelangt, eine reale Bedeutung gar nicht gefunden werden kann. Auf diese Weise lassen alle jene Speculationen, die von dem Permanenzprincip ausgehen, auf die exacte Analogie sich zurückführen. Zweifelhafter könnte man darüber sein, ob in den Fällen, wo späterhin eine reale Bedeutung für die ursprünglich auf bloß formalem Wege gewonnenen Begriffe aufgefunden wird, diese nachträgliche Uebertragung auf die Erfahrung einer Induction ihren Ursprung verdanke. In der That ist dies auch keineswegs so zu verstehen, als wenn die betreffenden Begriffe zuerst durch Analogie und dann noch einmal selbständig durch Induction gefunden worden wären. Vielmehr hat die Induction immer nur zu realen Beziehungen hingeführt, für deren Ausdruck jene schon vorhandenen Begriffe sich als geeignete Hülfsmittel erwiesen. Ihre Anwendung in diesem Sinne ging aber stets aus einer willkürlichen Uebertragung hervor, zu welcher die Induction nur das äußere Motiv bildete. Kein objectiver

Zwang nöthigt uns dazu, Gewinn und Verlust, Vermögen und Schulden durch positive und negative Zahlen auszudrücken; immerhin mussten durch Induction aus der Erfahrung jene gegensätzlichen Begriffe entstanden sein, wenn die negative Zahl überhaupt eine reale Bedeutung gewinnen sollte. In keiner andern Weise hat aber die Ausmessung stetiger Raumgrößen zur realen Anwendung der irrationalen und schließlich selbst der imaginären Zahlen geführt.

Auf geometrischem Gebiete hat die exacte Analogie zunächst die Bedeutung, dass sie das in einer einzelnen Construction anschaulich Gegebene ohne weiteres auf alle Raumgebilde gleicher Art überträgt, in welchem Theile des Raumes sie sich auch befinden mögen. Nur durch die Verbindung der Analogie mit der Induction können wir wissen, dass die an einer bestimmten Figur erkannte Thatsache unmittelbar den Werth eines allgemeinen Gesetzes hat. Die Analogie ist aber eine exacte, weil sie auf die Unmöglichkeit sich stützt, andere Räume als den in der wirklichen Anschauung gegebenen vorzustellen. Die große Schwierigkeit, welche seit langer Zeit die Geometer in dem so genannten Parallelenaxiome gefunden, beruht wesentlich auf dem Vorkommen der bei diesem Satze mitwirkenden Analogie. Dass zwei gerade Linien, die von einer dritten unter gleichen Winkeln geschnitten werden, sich selbst niemals schneiden können, wie weit wir sie auch verlängern mögen, schließen wir daraus, dass die schneidende Linie sich selbst parallel beliebig längs der beiden Parallelen verschoben werden kann, ohne dass die schneidenden Winkel sich ändern. Insoweit dieser Schluss auf die unmittelbare Anschauung sich stützt, ist er eine Induction; insoweit er von uns über die wirkliche Anschauung hinaus verallgemeinert wird, ist er eine exacte Analogie, die sich auf die durchgängige Congruenz des Raumes mit sich selber stützt. In einem wesentlich anderen Sinne dagegen verwerthet die geometrische Untersuchung die Analogie, wenn sie die Uebergänge zwischen den geometrischen Anschauungen über die reale Anschauung hinaus im Sinne einer bloßen Analogie fortsetzt, wenn sie also einen analogen Uebergang, wie er von der Ebene zum Raum stattfindet, zwischen Räumen verschiedener Dimensionen statuirt. Hier beginnt, ähnlich wie bei den Erweiterungen des Zahlbegriffs, der Process mit der Analogie, welcher dann unter Umständen Inductionen, die eine reale Anwendung vermitteln, nachfolgen können. Nur muss man freilich stets beachten, dass diese Anwendungen nicht mehr dem Gebiet der eigentlichen Geometrie, welcher durch die Raumanschauung ihre festen Grenzen gezogen sind, angehören, sondern dass es sich hierbei immer nur um eine Behandlung von Problemen anderer Gebiete, der Functionentheorie, oder der Mannigfaltigkeitslehre, in geometrischer Form handelt.

Auf diese Weise ergeben sich für die Benutzung der exacten Analogie in dem Zusammenhang der mathematischen Methoden allgemein zwei Formen: eine erste, die sich an die Induction anschließt und zur Feststellung der Allgemeingültigkeit gewisser, ursprünglich durch Induction gewonnener Sätze führt, und eine zweite, die gewisse Operationen oder auf anderem Wege festgestellte Begriffe über ihr ursprüngliches Gebiet hinaus erweitert, indem sie einen bestimmten logischen Process nach Analogie der für ihn in den Erfahrungsgrenzen gültigen Normen über die letzteren fortsetzt. Während die erste Form der Analogie vorzugsweise bei den fundamentalsten Sätzen ihre Anwendung findet, dient die zweite als Basis der abstractesten, den durch Induction gewonnenen Grundsätzen fernliegendsten Speculationen. Die durch Analogien letzterer Art gewonnenen Begriffe lassen daher nur in einzelnen Fällen und häufig nur vermittelst einer völligen Umformung der ursprünglichen Begriffe, stets aber unter Vermittelung nachträglicher Inductionen eine reale Anwendung zu.